Funkcje plastyczności zależne od wartości średniego ciśnienia

Wykład dotyczący plastyczności koncentrował się, do tej pory, na funkcji plastyczności "niezależnej" od średniego ciśnienia. Analizowany był warunek Hubera-Misesa:

$$\sqrt{J_2} - k \leq 0 \qquad (1)$$

Warunek ten, w pewnym sensie, "nie rozróżnia" stanów ściskania od rozciągania. Przyjmujemy konwencję znakowania jako: rozciąganie jako dodatnie.

Zauważmy, że 1-osiowy stan naprężenia ma postać:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow M_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3}\sigma & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{3}\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{3}\sigma \end{bmatrix}$$

$$J_2 = \frac{\sigma^2}{3}$$

Zatem w jednoosiowym stanie wytrzymałości otrzymamy zależności:

Funkcje plastyczności zależne od wartości średniego ciśnienia

$$\frac{|\sigma|}{\sqrt{3}} - k = 0 \qquad (2)$$

Skąd

$$|\sigma| = \sqrt{3}\, k \qquad (3)$$

Równanie (3) jednoznacznie wskazuje że wytrzymałości na jednoosiowe ściskanie R^c oraz na jednoosiowe rozciąganie R^t są sobie równe:

$$R^c = R^t = \sqrt{3}\, k \qquad (4)$$

W przypadku materiałów takich jak: beton, skała, grunt warunek powyższy nie jest odpowiedni. Tego typu materiały wykazują silną zależność od średniego ciśnienia. Manifestuje się to istotną różnicą między wytrzymałościami na jednoosiowe ściskanie i rozciąganie.

Funkcje plastyczności zależne od wartości średniego ciśnienia

Naturalną modyfikacją kryterium J_2, wprowadzającą zależność od średniego ciśnienia, jest tzw. kryterium Druckera-Pragera:

$$\alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \leq 0 \qquad (5)$$

α, k – to parametry materiałowe kryterium.

Rozważmy teraz testy jednoosiowego rozciągania oraz ściskania.

Oczywiście

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow J_2 = \frac{\sigma^2}{3}$$

$$I_1 = \sigma$$

Podstawiając powyższe do (5) uzyskujemy:

$$\alpha \sigma + \frac{|\sigma|}{\sqrt{3}} - k \leq 0 \qquad (6)$$

Funkcje plastyczności zależne od wartości średniego ciśnienia

Dla rozciągania ($\sigma > 0$) zależność (6) przyjmuje postać:

$$\alpha\sigma + \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \leq k \qquad (7)$$

I w konsekwencji

$$\sigma \leq \frac{k}{\alpha + \frac{1}{\sqrt{3}}} \qquad (8)$$

Dla ściskania ($\sigma < 0$) zależność (6) przyjmuje postać:

$$\alpha\sigma - \frac{\sigma}{\sqrt{3}} \leq k \qquad (9)$$

Z powyższej zależności, poprzez przekształcenie,

$$\sigma \left[\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}\right] \leq k \qquad (10)$$

wynika, że $\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} < 0$.

W przeciwnym wypadku, tj.:

$$\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} > 0$$

zależność (10) byłaby spełniona dla dowolnego $\sigma < 0$.

Funkcje plastyczności zależne od wartości średniego ciśnienia

To oznaczałoby, że materiał ma nieograniczoną wytrzymałość na jednoosiowe ściskanie. W kryterium Druckera-Pragera stała materiałowa α musi spełniać nierówności:

$$\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}} < 0 \qquad (11)$$

co wraz z nierównością (10) prowadzi do:

$$\sigma \geqslant \frac{k}{\alpha - \frac{1}{\sqrt{3}}} \qquad (12)$$

Skąd wprowadzając oznaczenie R^c – wytrzymałości na 1-osiowe ściskanie mamy

$$R_c = \frac{k}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \alpha} \qquad (13)$$

Wytrzymałości na jednoosiowe rozciąganie jest konsekwencją (8) czyli

$$R_t = \frac{k}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \alpha} \qquad (14)$$

Funkcje plastyczności zależna od wartości średniego ciśnienia

Porównując (13) i (14) łatwo wywnioskować że

$$R_c - R_t = \frac{k}{\frac{1}{\sqrt{3}} - \alpha} - \frac{k}{\frac{1}{\sqrt{3}} + \alpha} > 0 \qquad (15)$$

Zauważmy również, że

$$\frac{R_c}{R_t} = \frac{\sqrt{3}\alpha + 1}{1 - \sqrt{3}\alpha} \qquad (16)$$

Niech $\frac{R_c}{R_t} = m$ wtedy:

$$\frac{\sqrt{3}\alpha + 1}{1 - \sqrt{3}\alpha} = m \Rightarrow \alpha = \frac{m-1}{m+1}\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (17)$$

Wartość dla betonów i skał parametru m jest najczęściej większa od 10, tj.:

$$m \geq 10 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{9}{11}\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

Funkcje plastyczności zależne od wartości średniego ciśnienia

Powyższa wartość "α" jest niestety zbyt duża, że wtedy opisane są wytrzymałości na ściskanie w złożonym stanie naprężenia.

Kryterium Druckera-Pragera uzupełniane jest o tzw. "cutt off", czyli "obcięcie" w stanach rozciągania.

Może on przyjmować np. następującą postać:

$$\max\left[\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}\right] \leq R_t \qquad (18)$$

wartość R_t – wytrzymałości na jednoosiowe rozciąganie jest dodatkowym parametrem, tj.:

$$\boxed{\alpha, k, R_t}$$