



Politechnika Wrocławska

MECHANIKA BUDOWLI

Wykład 1: PRZESTRZENNE UKŁADY PRĘTOWE

Prowadzący: dr inż. Olga Szyłko-Bigus



Przestrzenne układy prętowe

Plan wykładu

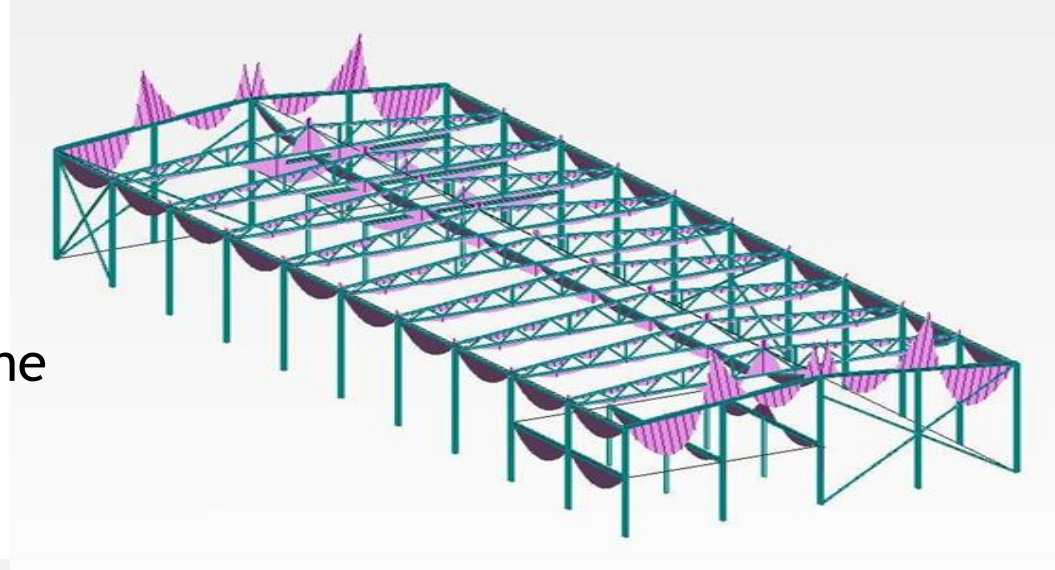
1. Założenia i podstawowe informacje
2. Skręcanie prętów prostych o zwartym przekroju
3. Przestrzenne układy ramowe
4. Układy załamane w planie SW i SN
5. Ruszty belkowe SW i SN
6. Kratownice przestrzenne

1. Założenia i podstawowe informacje

Charakterystyki modelu przestrzennego jako modelu statycznego konstrukcji budowlanych:

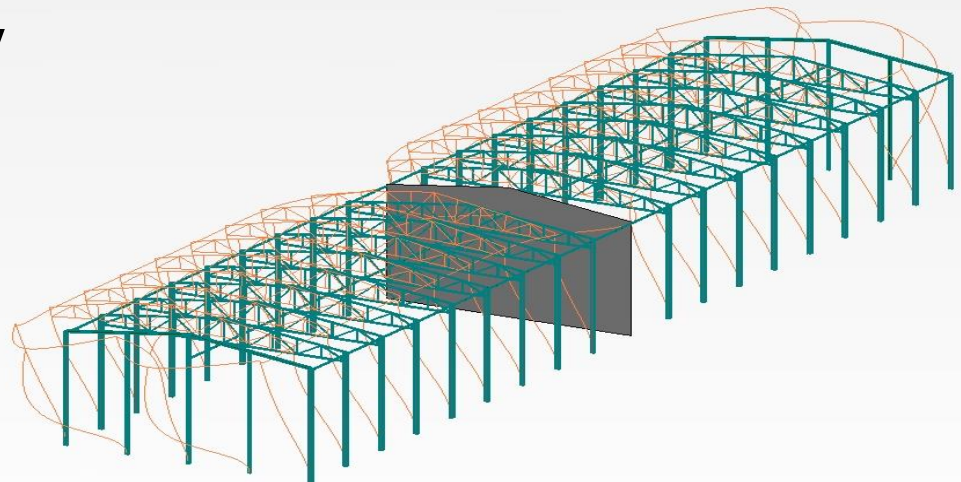
Uwzględnione składowe modelu:

- parametry materiałowe,
- przestrzenne char. geometryczne
- wszystkie występujące obciążenia, etc.



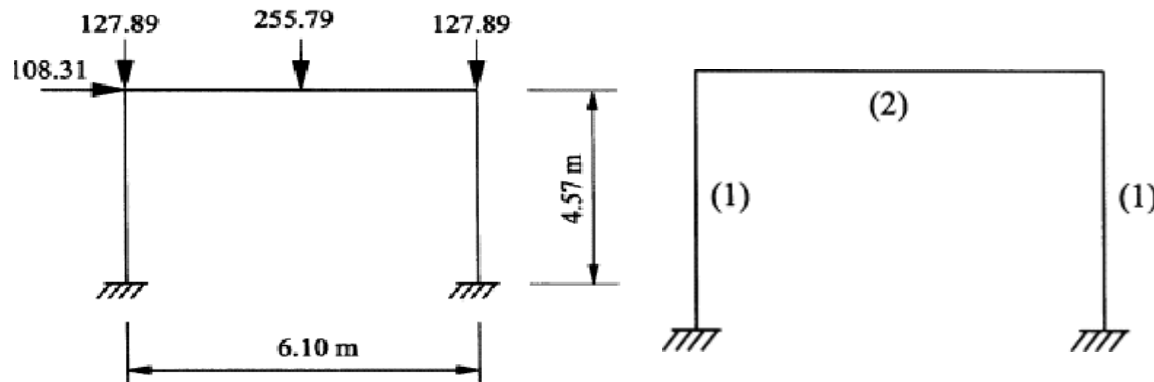
Rezultaty uzyskane w wyniku analizy modelu przestrzennego wykazują:

- pełen komplet wielkości statycznych tj. sił przekrojowych
- przemieszczeń etc.

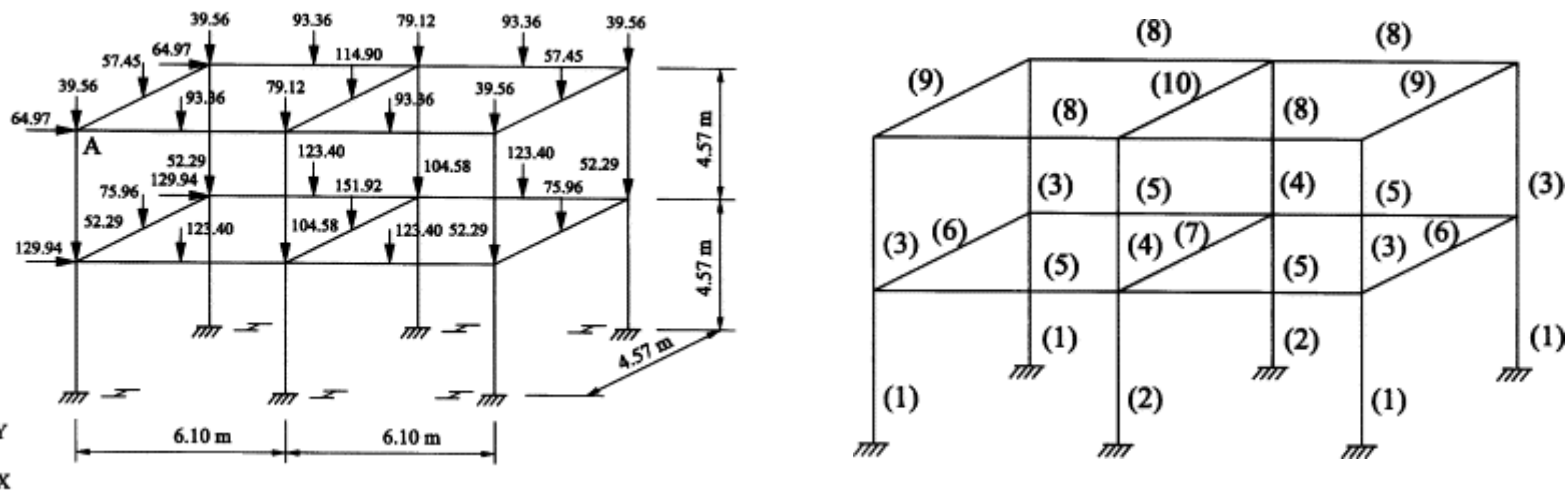


1. Założenia i podstawowe informacje

- ❑ Płaski model statyczny konstrukcji zazwyczaj jest przyjmowany jako model uproszczony konstrukcji.

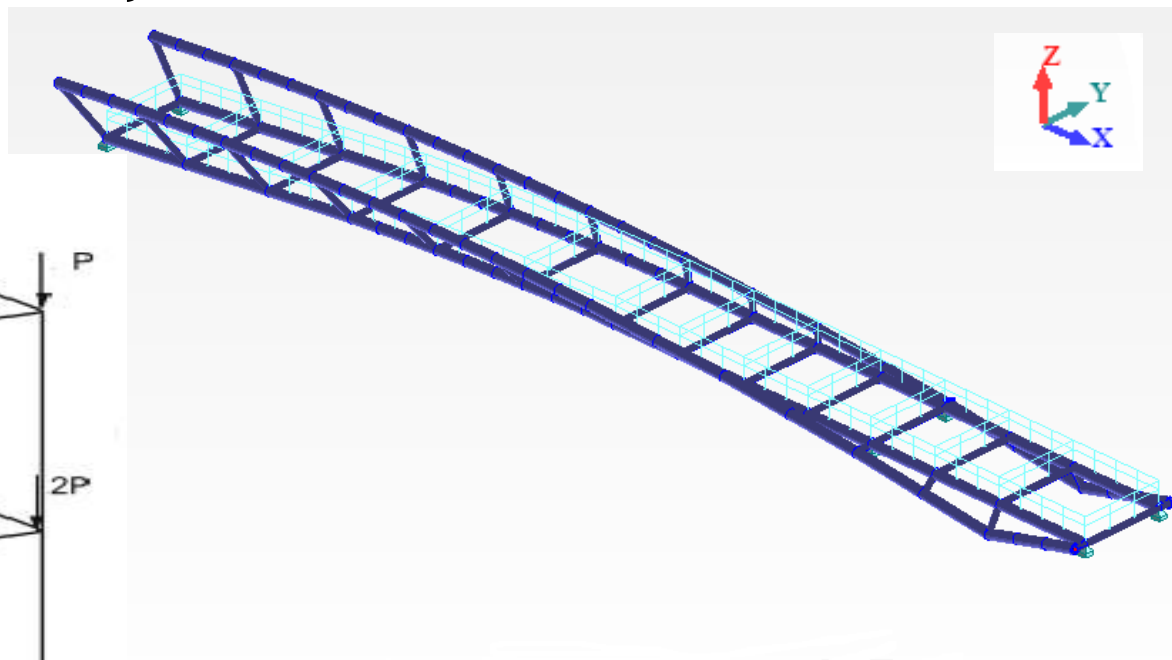
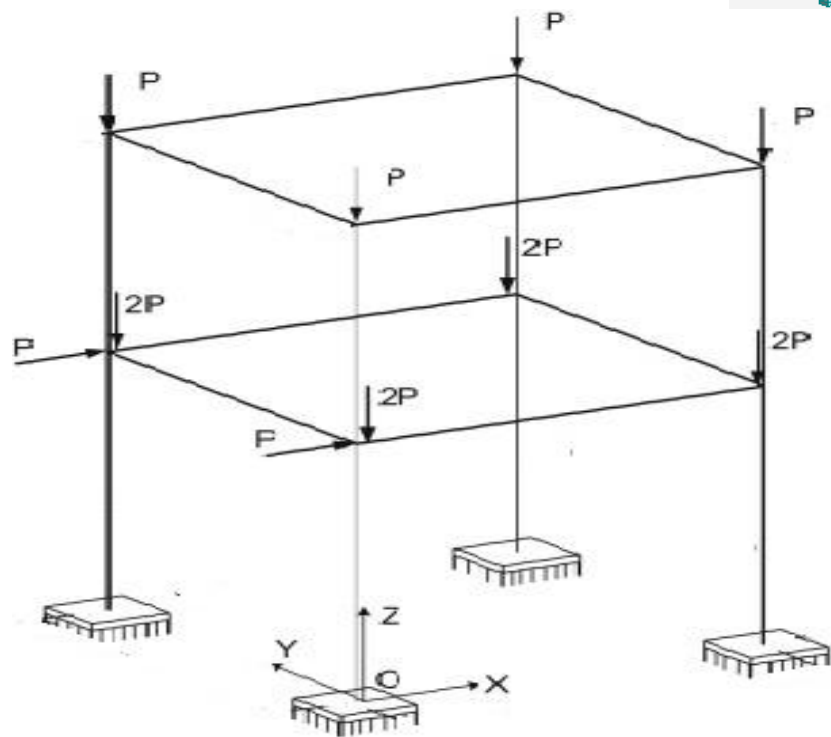


- ❑ Przestrzenny model konstrukcji uwzględnia rzeczywisty charakter pracy każdej konstrukcji - przestrzenny stan naprężenia i przemieszczenia,



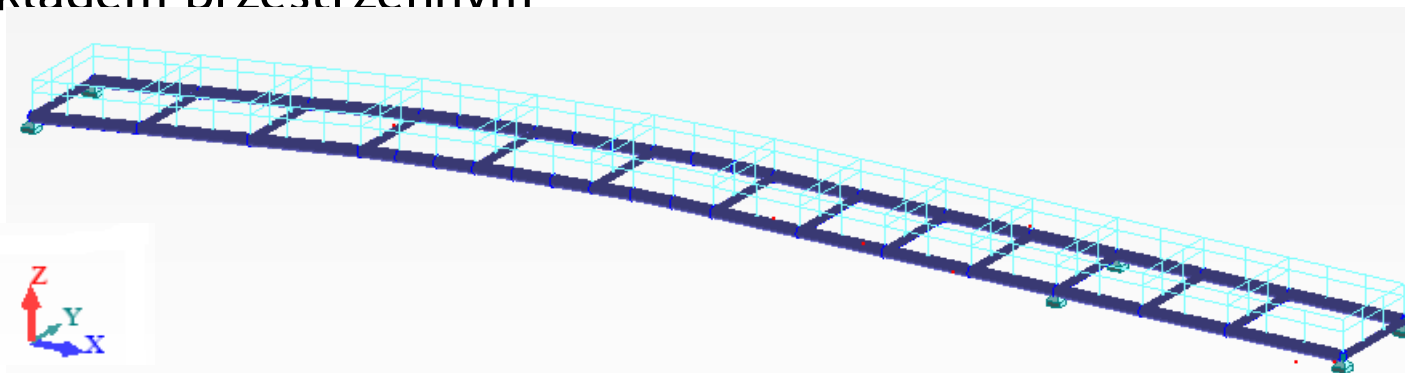
1. Założenia i podstawowe informacje

- ❑ Układ przestrzenny jest to konstrukcja, której elementy usytuowane są w trzech wymiarach (x, y, z).
- ❑ Obciążenie nie działa w płaszczyźnie układu

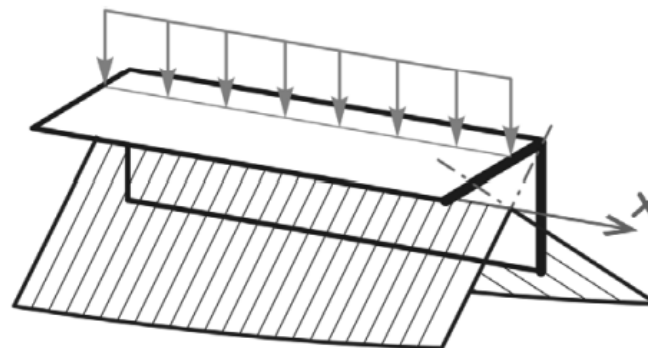


1. Założenia i podstawowe informacje

- ❑ Konstrukcja płaska na płaszczyźnie (x, y) , na którą działają siły prostopadłe do tej płaszczyzny zgodnie z trzecim wymiarem (z) jest również układem przestrzennym



- ❑ Gdy profil elementu usytuowany jest tak, że obciążenie nie działa wzdłuż jednej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju, tj. osi względem których momenty bezwładności osiągają ekstremalne wartości a moment dewiacji jest równy zero (def. osi głównych)

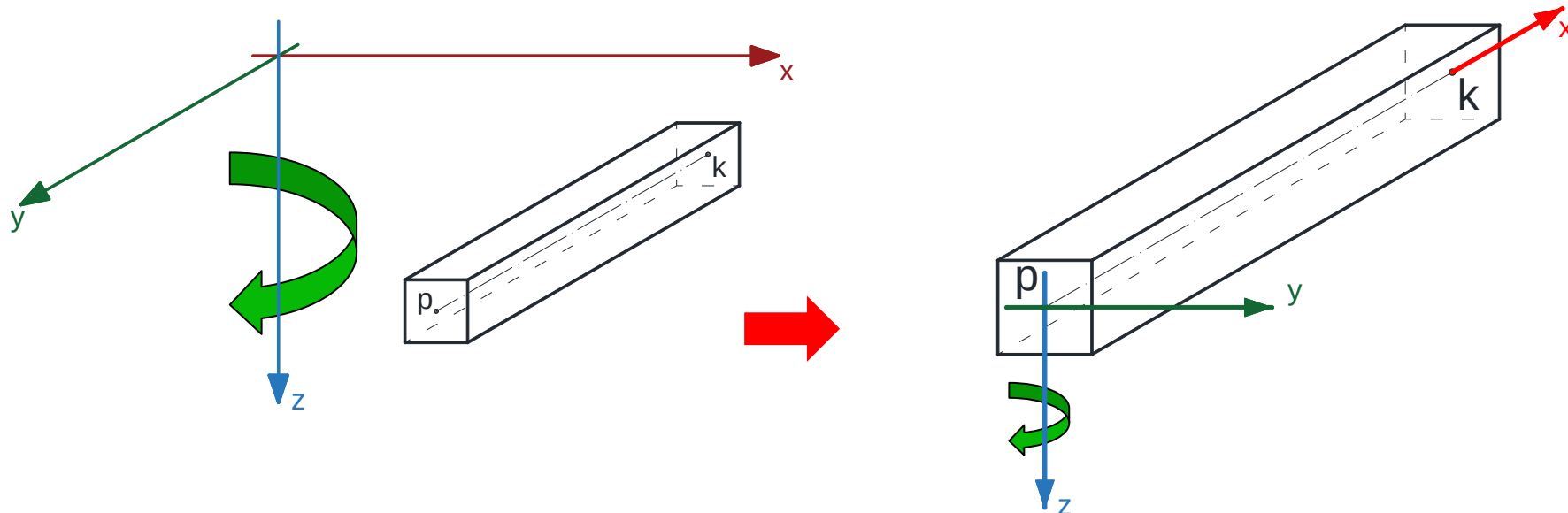


1. Założenia i podstawowe informacje

□ Dla konstrukcji przestrzennych przyjmuje się dwa układy współrzędnych:

- *globalny X, Y, Z dla całej konstrukcji - UG,*
- *lokalny x, y, z dla każdego pręta - UL.*

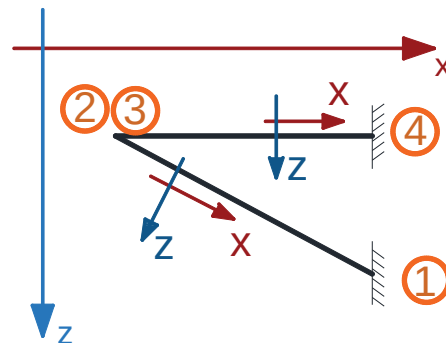
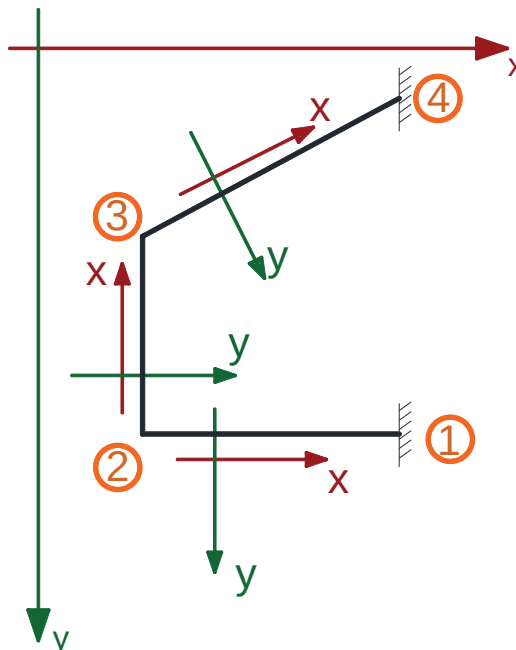
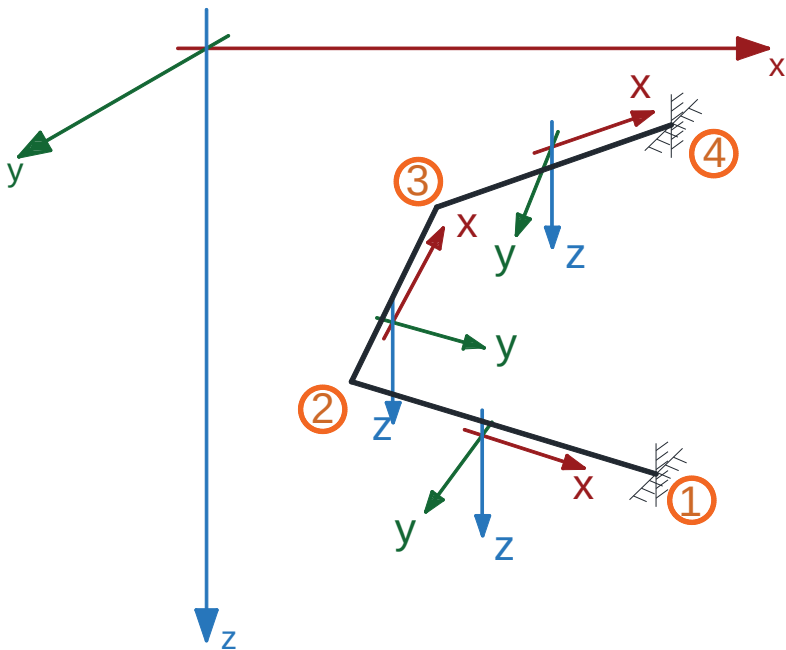
Oba układy są układami prawoskrętnymi.



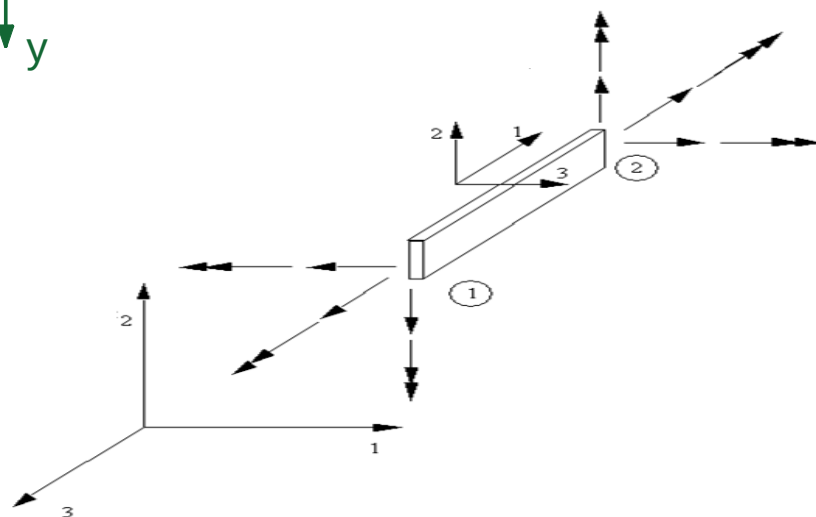
x jest osią styczną do osi pręta ze zwrotem od początku do końca pręta
 y, z są to osie główne przekroju poprzecznego pręta

1. Założenia i podstawowe informacje

- Układ globalny UG jest jeden dla całej konstrukcji,
- Układ lokalnych UL jest jeden dla każdego pojedynczego pręta



- Przed przystąpieniem do analizy dla każdej konstrukcji należy przyjąć UG i dla każdego pojedynczego pręta UL.





1. Założenia i podstawowe informacje

- W UG definiujemy zwroty i wielkości zadanych obciążeń oraz odczytujemy zwroty i wielkości reakcji jak i przemieszczeń.
- W UL odczytujemy zwroty i wielkości sił wewnętrznych.

□ W układach przestrzennych występuje 6! warunków równowagi:

$V_y, V_z, N_x, M_y, M_z, M_x$

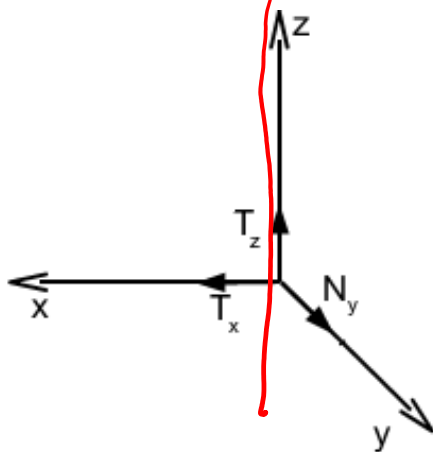
- równowaga sił
na trzech kierunkach X, Y, Z

-

1. $\Sigma X = 0$

2. $\Sigma Y = 0$

3. $\Sigma Z = 0$

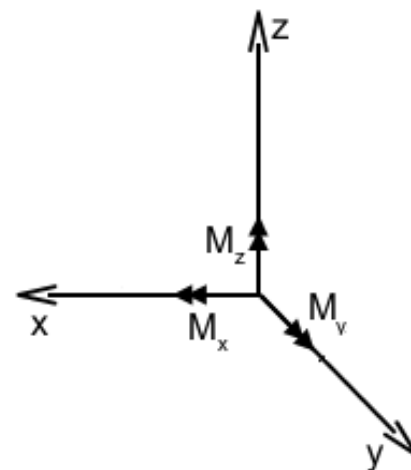


-równowaga momentów na
trzech kierunkach X, Y, Z
(skręcający wokół osi X i
zginający wokół Y i Z)

4. $\Sigma M_x = 0$

5. $\Sigma M_y = 0$

6. $\Sigma M_z = 0$

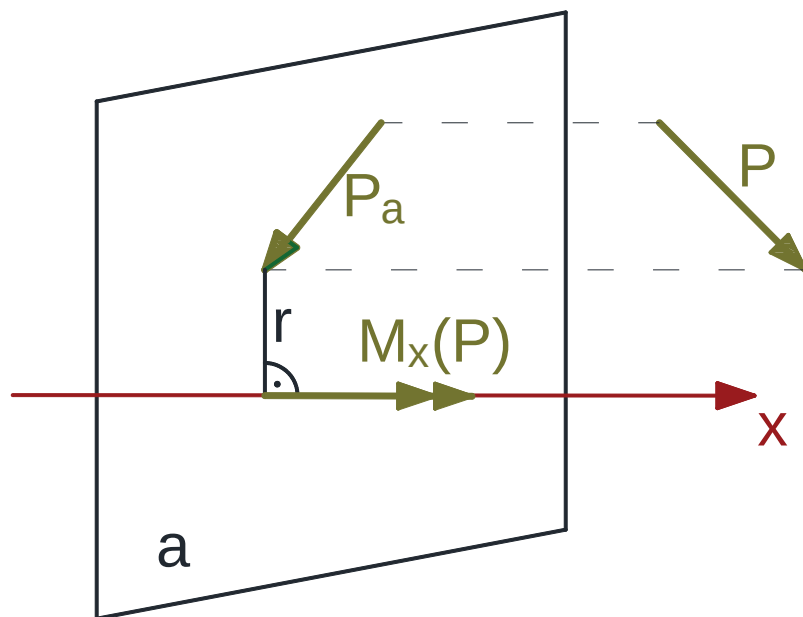


1. Założenia i podstawowe informacje

□ Definicja:

Moment statyczny siły względem osi jest rzutem na tą oś wektora momentu tej siły liczonego względem dowolnego punktu tej osi.

Moment statyczny jest momentem rzutu siły P na płaszczyznę prostopadłą do osi x (wektor P_a) liczonym względem punktu przebiecia płaszczyzny tą osią (odległość r).



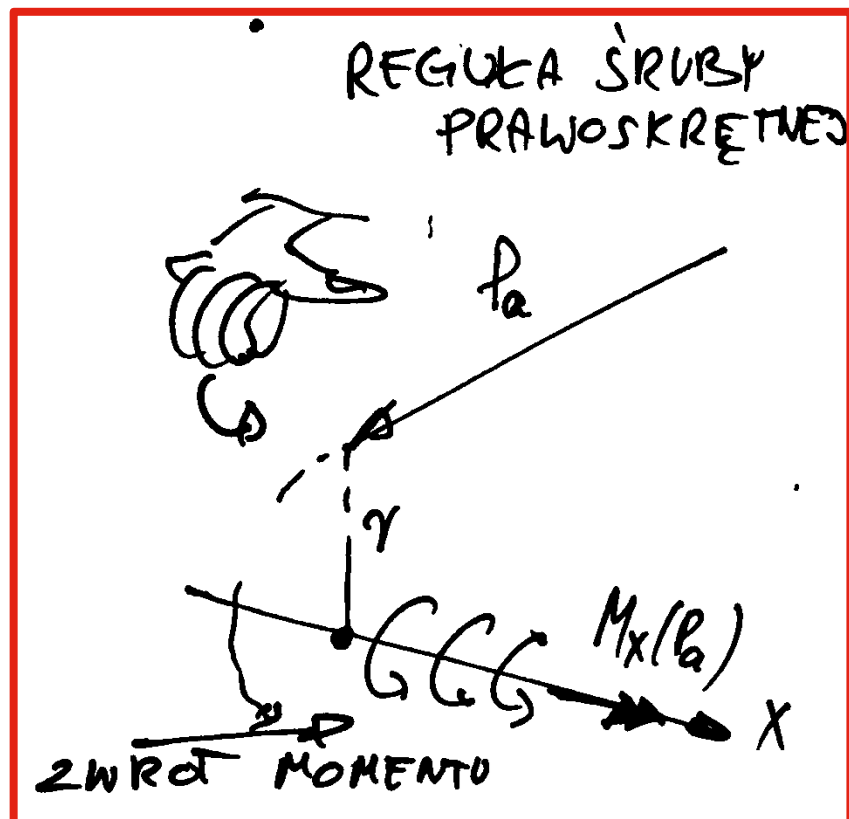
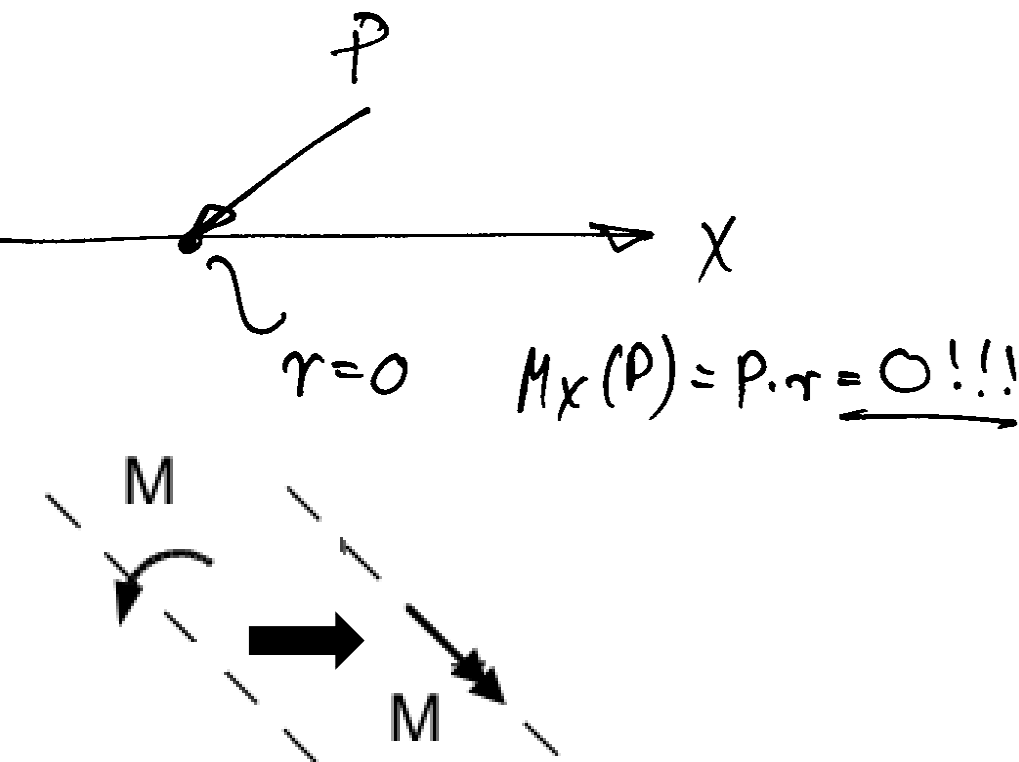
$$\cancel{M_x = P_a \cdot r}$$

P_a - rzut wektora P na płaszczyznę „a”

1. Założenia i podstawowe informacje

❖ Właściwości:

1. Zwrot wektora $M_x(P)$ przyjmuje się zgodnie z ruchem śruby prawoskrętnej.
2. Moment jest równy zero, gdy siła P przecina oś x oraz gdy jest równoległa do osi.

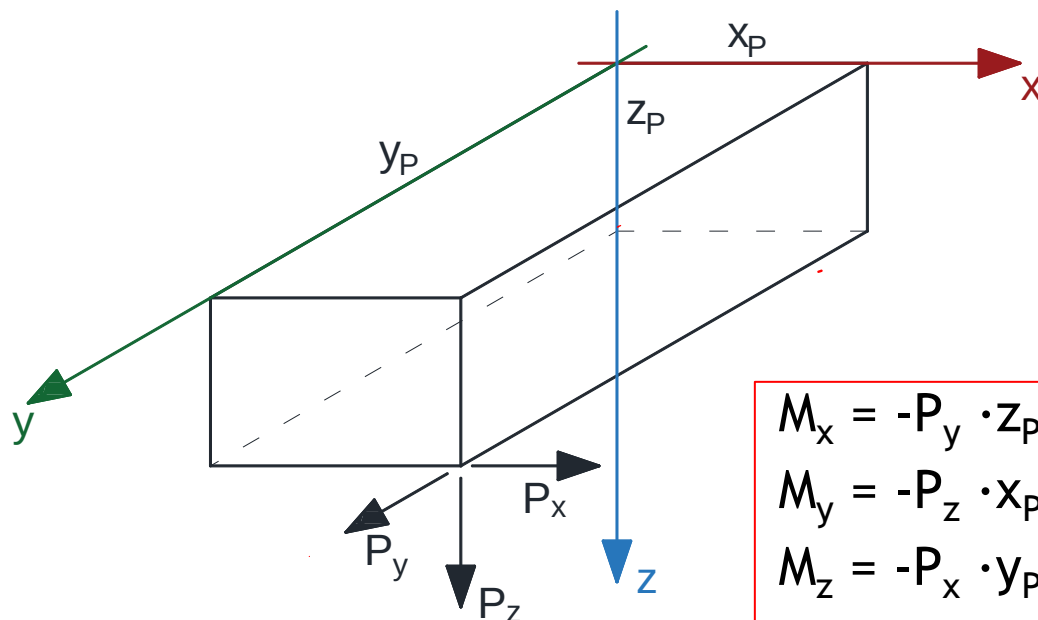


1. Założenia i podstawowe informacje

□ Przykład:

Wyznaczyć moment siły P (P_x , P_y , P_z) względem osi x , y , z

x_P , y_P , z_P - współrzędne zaczepienia osi

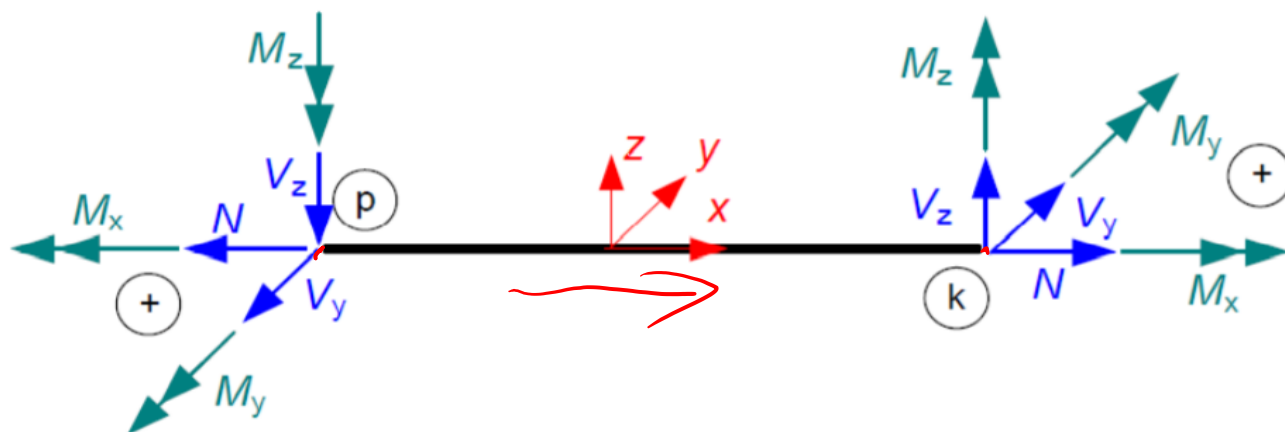


$$\begin{aligned} M_x &= -P_y \cdot z_P + P_z \cdot y_P \\ M_y &= -P_z \cdot x_P + P_x \cdot z_P \\ M_z &= -P_x \cdot y_P + P_y \cdot x_P \end{aligned}$$



1. Założenia i podstawowe informacje

☐ Siły przekrojowe (znakowanie sił)

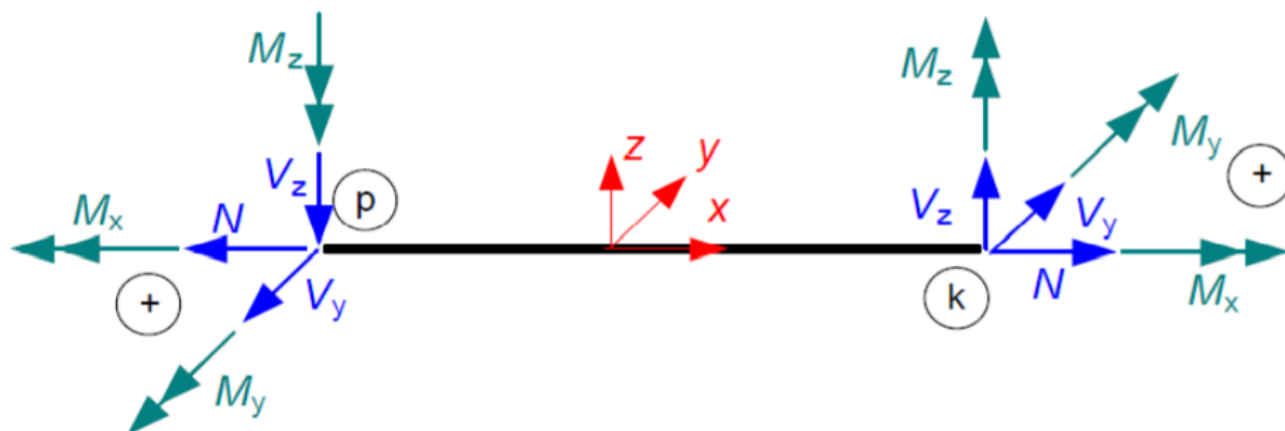


M_x - moment skręcający
 $\left. \begin{matrix} M_y \\ M_z \end{matrix} \right\}$ momenty zginające

N_x - siła osiowa
 $\left. \begin{matrix} V_y \\ V_z \end{matrix} \right\}$ siły poprzeczne

1. Założenia i podstawowe informacje

□ Umowa znakowania sił przekrojowych wewnętrznych



Siłom przekrojowym (wewnętrznym) liczonym w przekroju pręta od strony jego początku (P) przypisujemy znak plus (+), gdy ich wektory mają zwroty przeciwnie niż odpowiadające im osie lokalnego układu współrzędnych.

Siłom przekrojowym (wewnętrznym) liczonym w przekroju pręta od strony jego końca (K) przypisujemy znak (+), gdy ich wektory mają zwroty zgodne z osiami lokalnego układu współrzędnych.

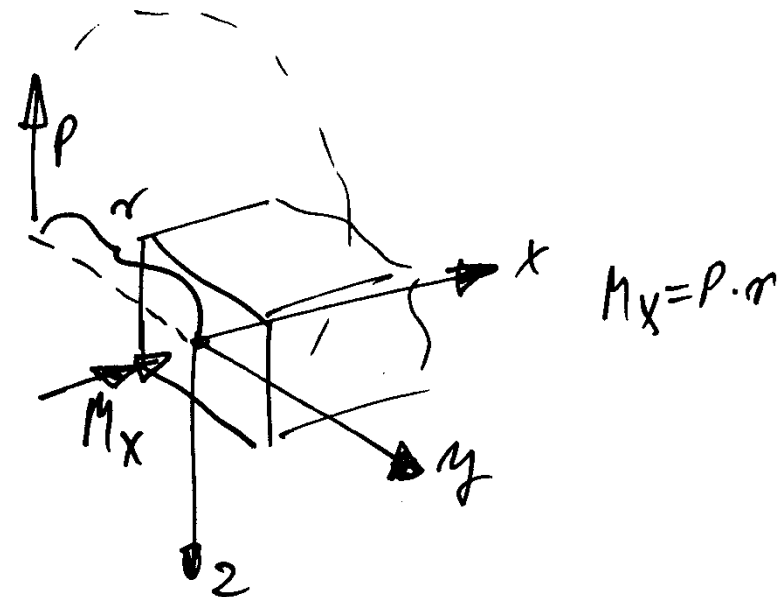
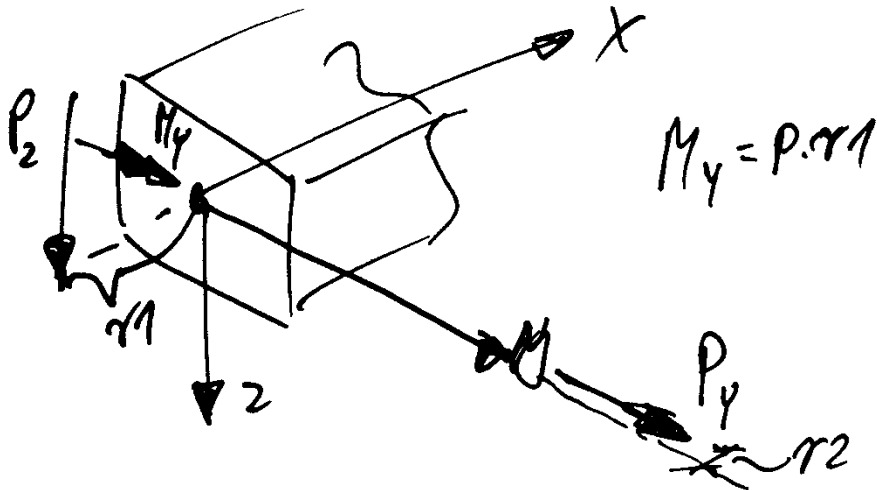
1. Założenia i podstawowe informacje

□ Moment skręcający - definicja

$M_x = M_s$ w rozpatrywanym przekroju jest równe sumie momentów statycznych względem osi stycznej do osi pręta x w tym przekroju wszystkich sił działających na część ustroju po jednej stronie przekroju.

□ Moment zginający - definicja

M_z (M_y) w rozpatrywanym przekroju jest równy sumie momentów statycznych względem osi z (y) wszystkich sił działających na ustrój po jednej stronie przekroju.



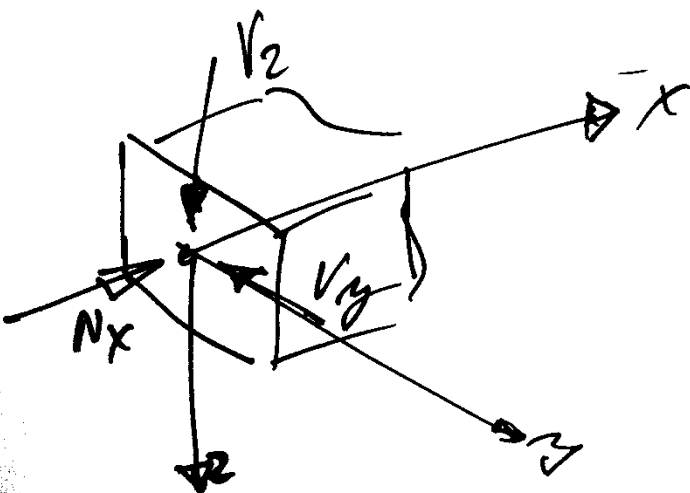
1. Założenia i podstawowe informacje

- **Siła osiowa**

$N_x = N$ w rozpatrywanym przekroju jest równa sumie rzutów na oś x wszystkich sił działających na układ po jednej stronie przekroju.

- **Siła tnąca**

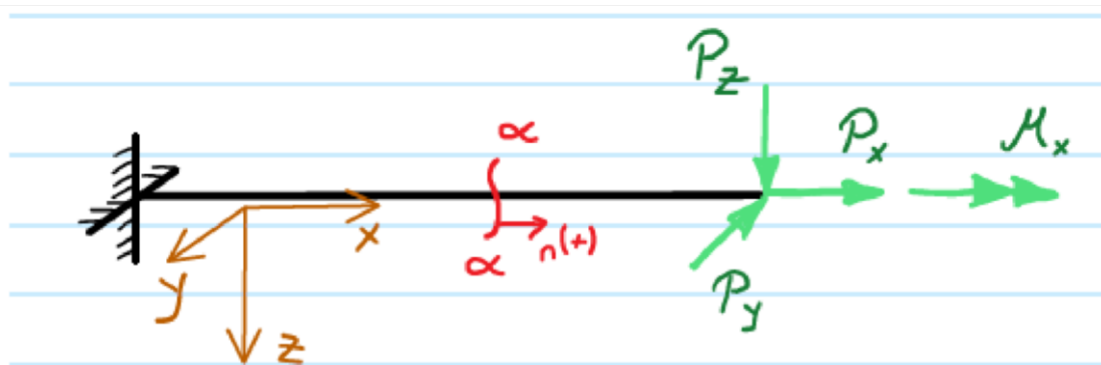
$V_y = V_z$ w rozpatrywanym przekroju jest równa sumie rzutów na oś y (z) wszystkich sił działających na układ po jednej stronie przekroju.



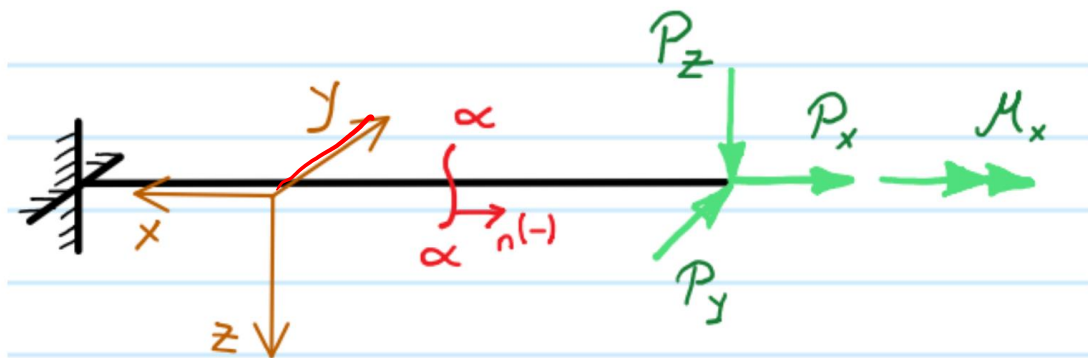
Sporządzając wykresy sił przekrojowych **rzędne wykresów momentów zginających odkładamy po stronie włókien rozciąganych!!!!**



1. Założenia i podstawowe informacje



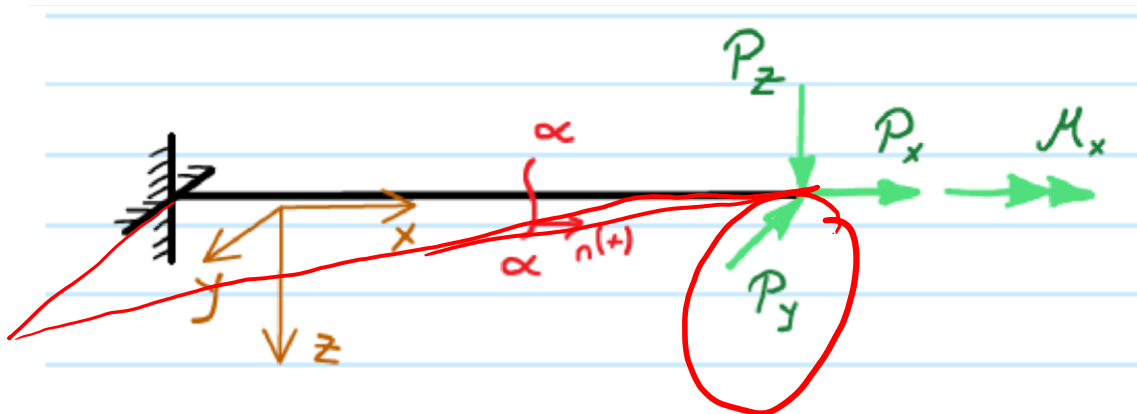
N_x	+	M_x	+
V_y	-	M_y	-
V_z	+	M_z	-



N_x	+	M_x	+
V_y	-	M_y	-
V_z	-	M_z	+

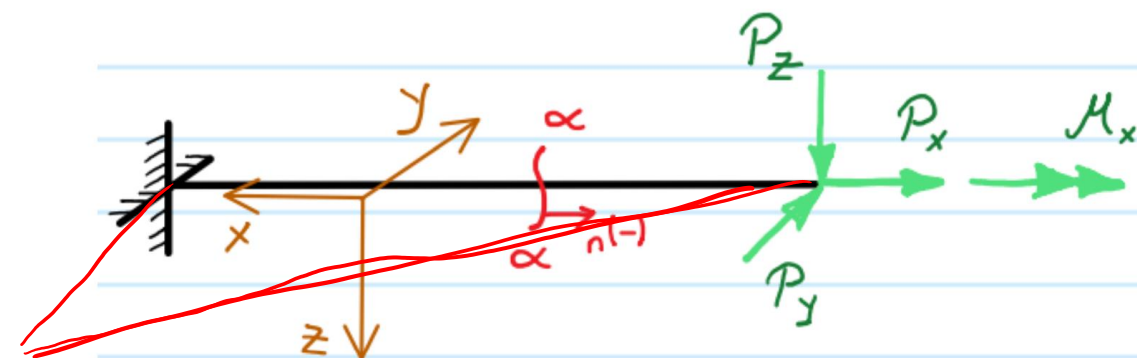


1. Założenia i podstawowe informacje



N_x	+	M_x	+
V_y	-	M_y	-
V_z	+	M_z	-

xy
" "+" "
" - " "
y -
y +



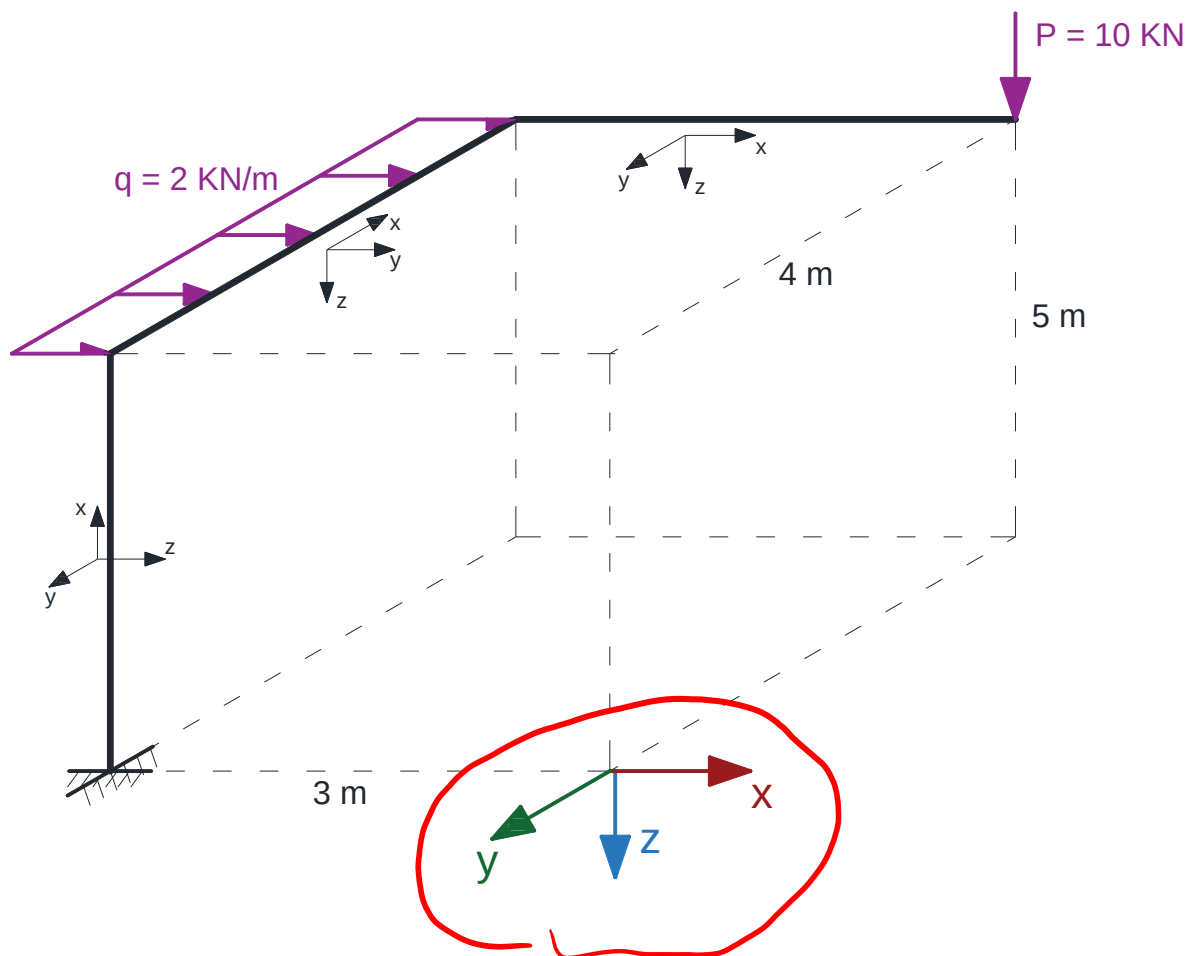
N_x	+	M_x	+
V_y	-	M_y	-
V_z	-	M_z	+

xz



Przykład

Obliczyć reakcje i sporządzić wykresy sił przekrojowych w układzie przestrzennym obciążonym wpływami mechanicznymi

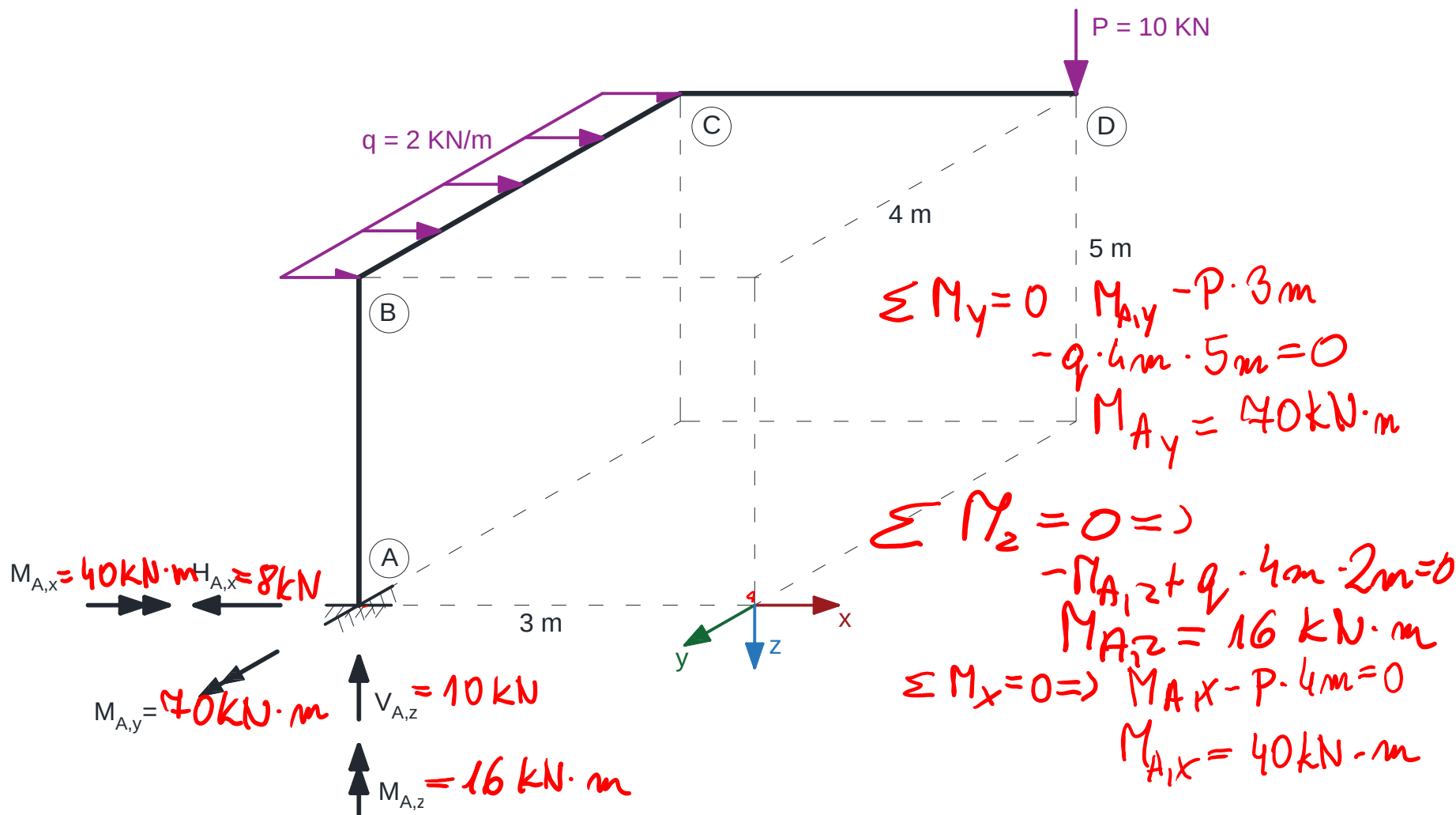




Przykład

Obliczyć reakcje i sporządzić wykresy sił przekrojowych w układzie przestrzennym obciążonym wpływami mechanicznymi

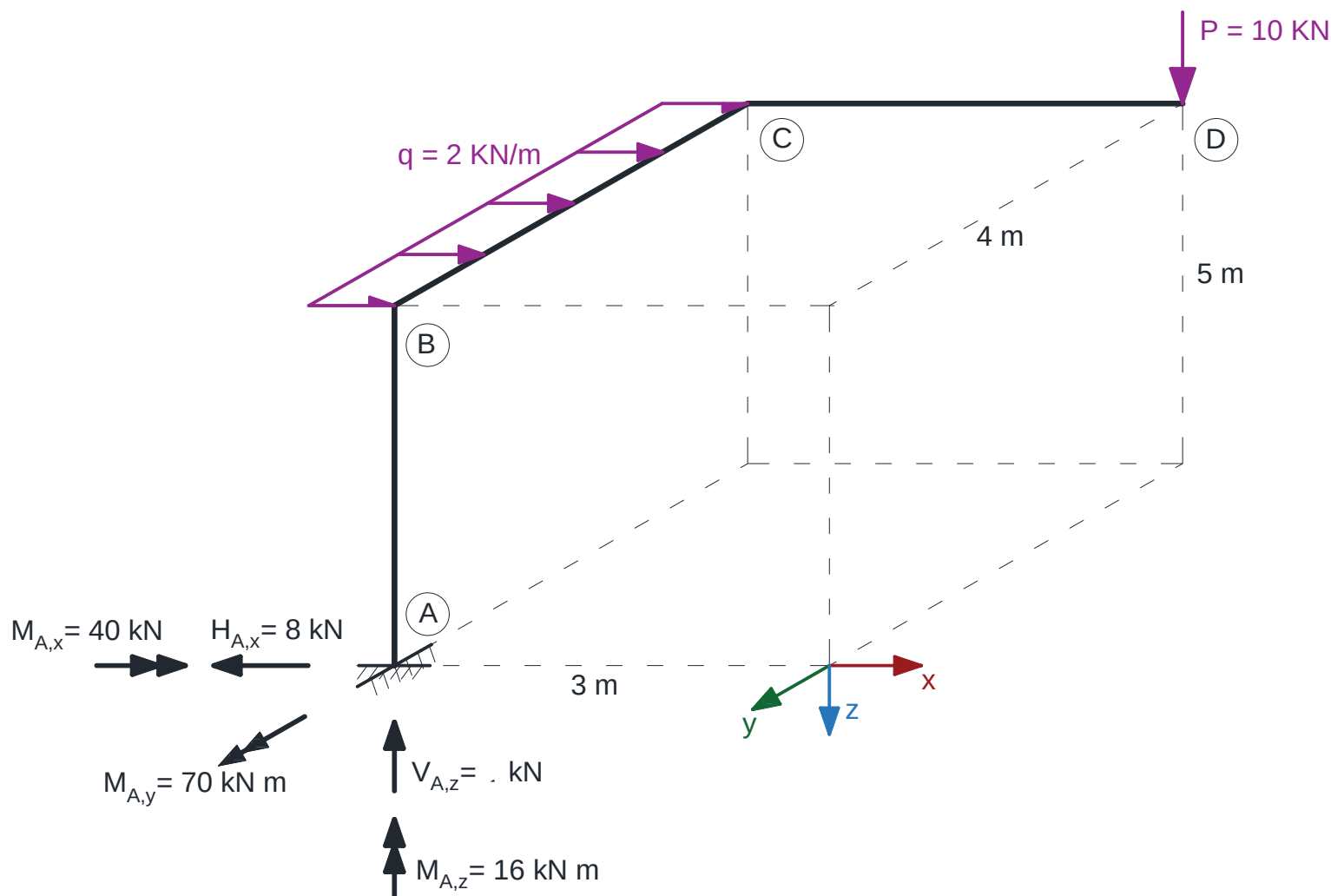
M_y, M_x, V_z





Przykład

Obliczyć reakcje i sporządzić wykresy sił przekrojowych w układzie przestrzennym obciążonym wpływami mechanicznymi



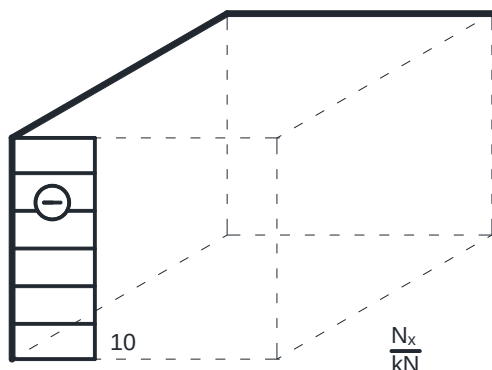


Przykład

Obliczyć reakcje i sporządzić wykresy sił przekrojowych w układzie przestrzennym obciążonym wpływami mechanicznymi

Rzędne sił osiowych i momentów skręcających można odkładać w dowolnej płaszczyźnie i po dowolnej stronie

$$N_{AB} = -P$$

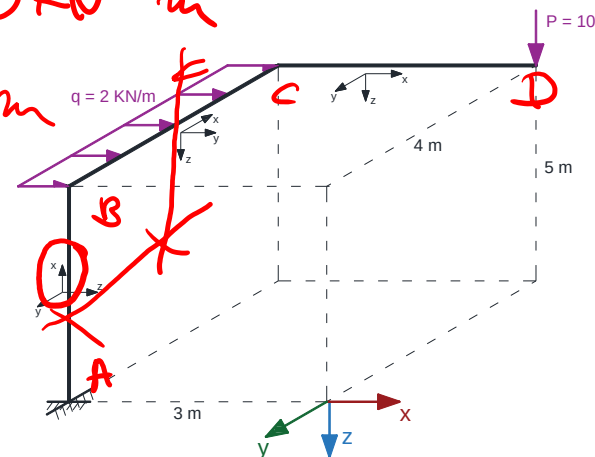
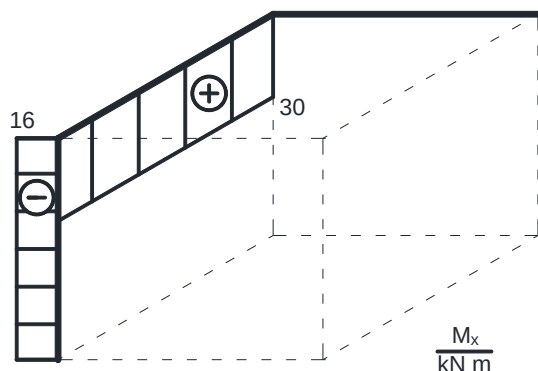


$$\uparrow V_{A2} = 10 \text{ kN}$$

$$M_{x,CD} = 0$$

$$M_{x,BC} = +P \cdot 3 \text{ m} = 30 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{x,BA} = -q \cdot 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = -16 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

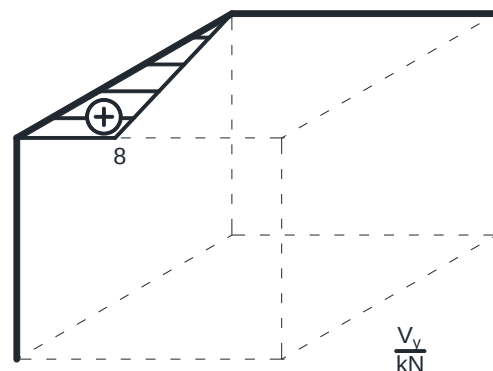




Przykład

Obliczyć reakcje i sporządzić wykresy sił przekrojowych w układzie przestrzennym obciążonym wpływami mechanicznymi

Rzędne sił osiowych i momentów skręcających można odkładać w dowolnej płaszczyźnie i po dowolnej stronie

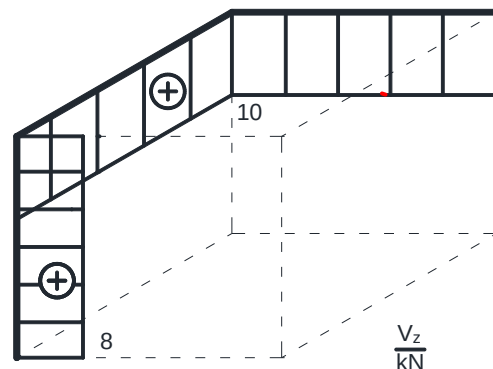


$$V_{z,CD} = V_{z,DC} + P = 10 \text{ kN}$$

$$V_{z,CB} = P = 10 \text{ kN} = V_{z,BC}$$

$$V_{z,BA} = q \cdot 4 \text{ m} = 8 \text{ m}$$

$$V_{z,AB} = q \cdot 4 \text{ m} = 8 \text{ m}$$



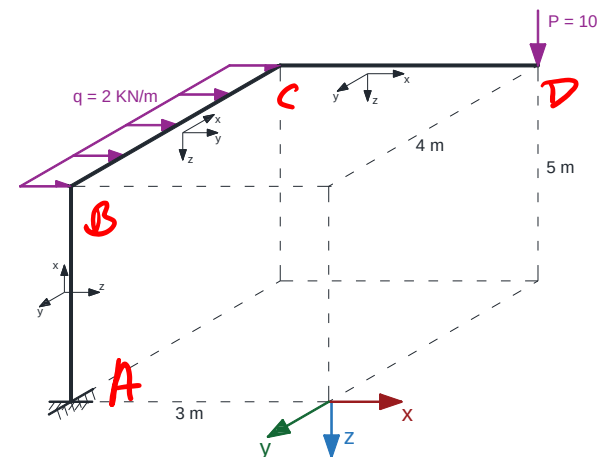
$$V_{y,CD} = 0$$

$$V_{y,BC} = q \cdot 4 \text{ m}$$

$$V_{y,BA} = 0$$

$$V_y \rightarrow xy$$

$$V_z \rightarrow xz$$





Przykład

Obliczyć reakcje i sporządzić wykresy sił przekrojowych w układzie przestrzennym obciążonym wpływami mechanicznymi

Momenty M_y odkładamy w płaszczyźnie xz .

Dodatnie momenty M_y odkładamy po dodatniej stronie osi z .

$$M_{y,DC} = 0$$

$$M_{y,CD} = -P \cdot 3m = -30 \text{ kN} \cdot m$$

$$M_{y,CB} = 0$$

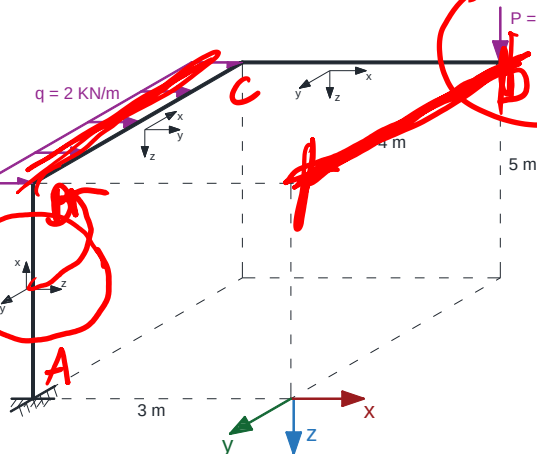
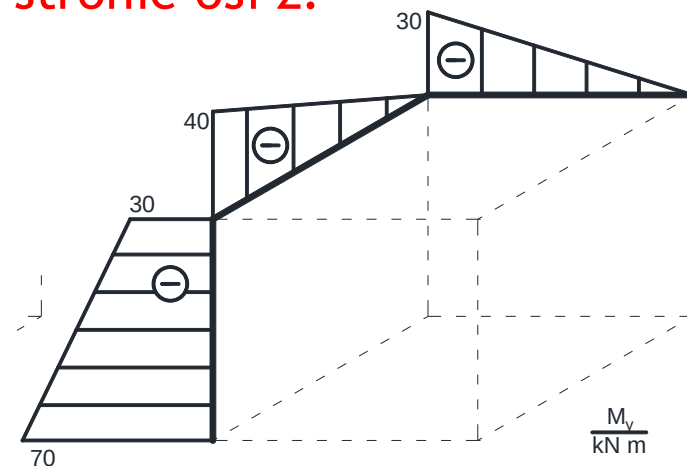
$$M_{y,BC} = -P \cdot 4m = -40 \text{ kN} \cdot m$$

$$M_{y,BA} = -P \cdot 3m = -30 \text{ kN} \cdot m$$

$$M_{y,AD} = -P \cdot 3m - q \cdot 4m \cdot 5m = -140 \text{ kN} \cdot m$$

Momenty M_z odkładamy w płaszczyźnie (xy) .

Dodatnie momenty M_z odkładamy po ujemnej stronie osi y .



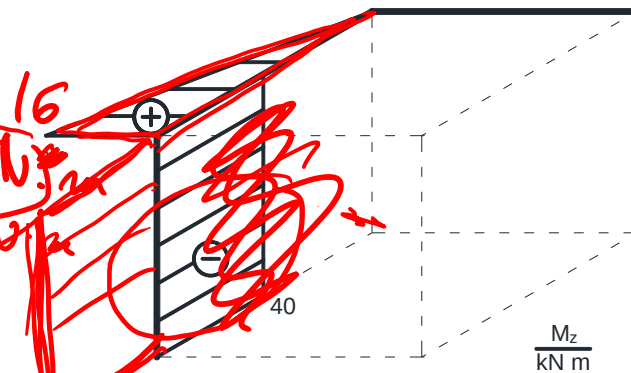
$$M_{z,CD} = M_{z,DC} = 0$$

$$M_{z,CG} = 0$$

$$M_{z,BC} = q \cdot 4m \cdot 2m = 16 \text{ kN} \cdot m$$

$$M_{z,BA} = P \cdot 4m = -40 \text{ kN} \cdot m$$

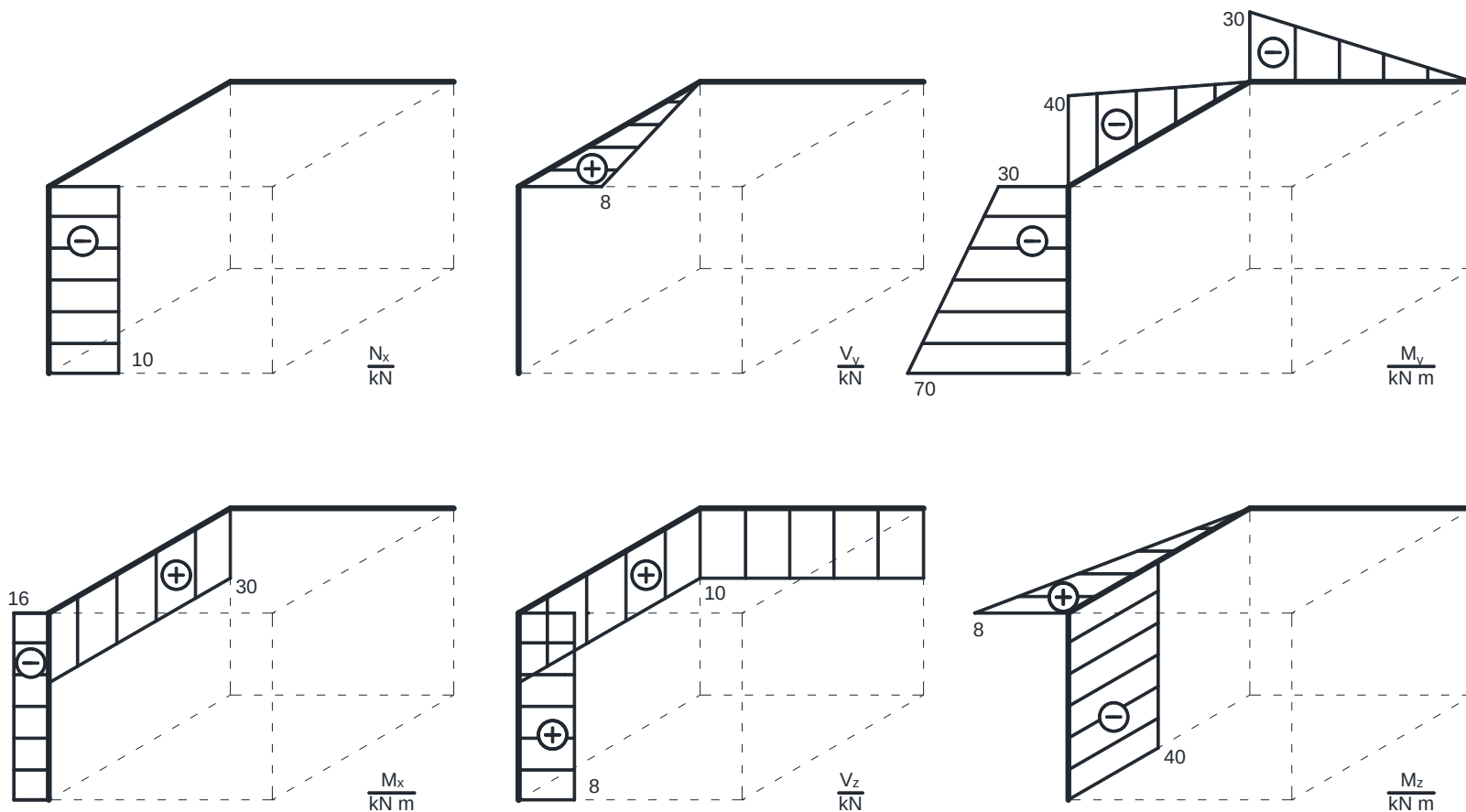
$$M_{z,AB} = -40 \text{ kN} \cdot m$$





Przykład

Obliczyć reakcje i sporządzić wykresy sił przekrojowych w układzie przestrzennym obciążonym wpływami mechanicznymi





Przykład

Obliczanie przemieszczeń

PRZEMIESZCZENIA OD OBCIĄŻEŃ SIŁAMI

$$\begin{aligned}
 \Delta_{iF} = \Delta_i^F &= \int \frac{\bar{M}x^i \cdot Mx^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{\bar{M}y^i \cdot My^F}{EIy} \cdot dx + \int \frac{\bar{M}z^i \cdot Mz^F}{Elz} \cdot dx + \int \frac{\bar{N}^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot \bar{V}y^i \cdot Vy^F}{GA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_z \cdot \bar{V}z^i \cdot Vz^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^F}{k_s} = \\
 &= \int \frac{Mx^i \cdot Mx^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot My^F}{EIy} \cdot dx + \int \frac{Mz^i \cdot Mz^F}{Elz} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot Vy^i \cdot Vy^F}{GA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_z \cdot Vz^i \cdot Vz^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s} = \\
 &= \int \frac{Mx^i \cdot \bar{M}x^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot \bar{M}y^F}{EIy} \cdot dx + \int \frac{\bar{M}z^i \cdot Mz^F}{Elz} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot \bar{N}^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot Vy^i \cdot \bar{V}y^F}{GA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_z \cdot Vz^i \cdot \bar{V}z^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot \bar{S}_s^F}{k_s}.
 \end{aligned}$$

PRZEMIESZCZENIA OD BŁĘDÓW MONTAŻU I PRZEMIESZCZENIE PODPÓR

$$\begin{aligned}
 \Delta_{i\Delta} = \Delta_i^\Delta &= \int \frac{\bar{M}x^i \cdot Mx^\Delta}{GIs} \cdot dx + \int \frac{\bar{M}y^i \cdot My^\Delta}{EIy} \cdot dx + \int \frac{\bar{M}z^i \cdot Mz^\Delta}{Elz} \cdot dx + \int \frac{\bar{N}^i \cdot N^\Delta}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot \bar{V}y^i \cdot Vy^\Delta}{GA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_z \cdot \bar{V}z^i \cdot Vz^\Delta}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \\
 &+ \sum_{mx} \bar{M}x_{mx}^i \cdot \Delta\varphi_{mx}^\Delta + \sum_{my} \bar{M}y_{my}^i \cdot \Delta\varphi_{my}^\Delta + \sum_{mz} \bar{M}z_{mz}^i \cdot \Delta\varphi_{mz}^\Delta + \sum_n \bar{N}_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_{vy} \bar{V}y_{vy}^i \cdot \Delta h_{vy}^\Delta + \sum_{vz} \bar{V}z_{vz}^i \cdot \Delta h_{vz}^\Delta - \sum_r \bar{R}_r^i \cdot \Delta_r = \\
 &= \sum_{mx} Mx_{mx}^i \cdot \Delta\varphi_{mx}^\Delta + \sum_{my} My_{my}^i \cdot \Delta\varphi_{my}^\Delta + \sum_{mz} Mz_{mz}^i \cdot \Delta\varphi_{mz}^\Delta + \sum_n N_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_{vy} Vy_{vy}^i \cdot \Delta h_{vy}^\Delta + \sum_{vz} Vz_{vz}^i \cdot \Delta h_{vz}^\Delta - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r.
 \end{aligned}$$

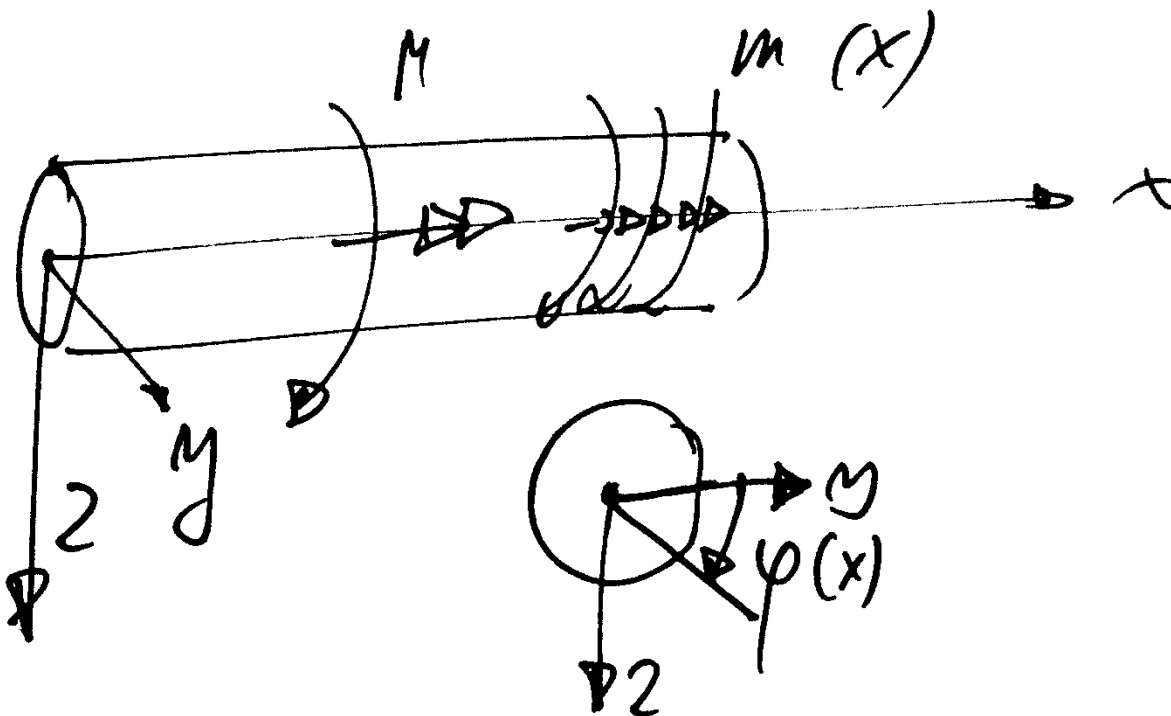
PRZEMIESZCZENIA OD ZMIAN TEMPERATURY

$$\begin{aligned}
 \Delta_{iT} = \Delta_i^T &= \int \frac{\bar{M}x^i \cdot Mx^T}{GIs} \cdot dx + \int \frac{\bar{M}y^i \cdot My^T}{EIy} \cdot dx + \int \frac{\bar{M}z^i \cdot Mz^T}{Elz} \cdot dx + \int \frac{\bar{N}^i \cdot N^T}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot \bar{V}y^i \cdot Vy^T}{GA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_z \cdot \bar{V}z^i \cdot Vz^T}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^T}{k_s} + \\
 &+ \int \bar{M}y^i \cdot \Delta d\varphi_y^T + \int \bar{M}z^i \cdot \Delta d\varphi_z^T + \int \bar{N}^i \cdot \Delta dL^T = \\
 &= \int My^i \cdot \Delta d\varphi_y^T + \int Mz^i \cdot \Delta d\varphi_z^T + \int N^i \cdot \Delta dL^T.
 \end{aligned}$$

$$\text{gdzie } \Delta d\varphi_y^T = \frac{\alpha_T \cdot (\Delta Tz^+ - \Delta Tz^-)}{hz} \cdot dx, \quad \Delta d\varphi_z^T = \frac{\alpha_T \cdot (\Delta Ty^- - \Delta Ty^+)}{hy} \cdot dx,$$

2. Skręcanie prętów prostych o zwartym przekroju

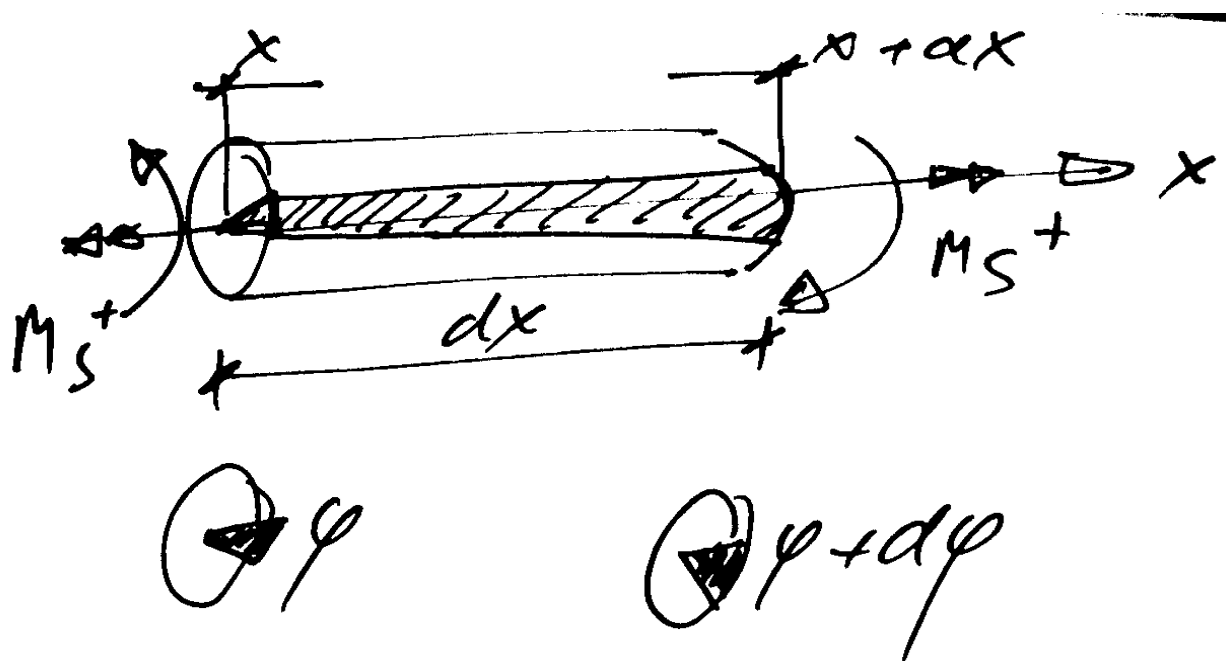
- ❑ Pręt prosty o zwartym przekroju obciążony momentem skręcającym.
- Moment może być skupiony lub równomiernie rozłożony.



- Obciążenie uważamy za dodatnie, gdy wektory obciążeń są skierowane zgodnie z dodatnim zwrotem stycznej od osi pręta (x).

2. Skręcanie prętów prostych o zwartym przekroju

- ❑ Zjawisku skręcania towarzyszą deformacje polegające na obrocie przekrojów o kąt $\varphi(x)$ względem środka masy przekroju. W każdym przekroju można wyróżnić uogólnioną siłę przekrojową - moment skręcający $M_s(x)$.
- ❑ Rozpatrujemy element o długości dx :



2. Skręcanie prętów prostych o zwartym przekroju

- Zmiana kąta skręcenia jest proporcjonalna do przekrojowego momentu skręcającego i długości elementu skręcanego a więc:

$$d\varphi = \frac{1}{G I_s} M_s dx$$
$$M_s = G I_s \frac{d\varphi}{dx} = G I_s \varphi'(x)$$

- Współczynnikiem proporcjonalności jest sztywność skrętna $G I_s$, gdzie stałe materiałowe:

- $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ jest modułem Kirchhoffa,
- E jest modułem Younga,
- ν jest współczynnikiem Poissona,

oraz wielkości geometryczne:

- I_s jest momentem bezwładności przekroju przy skręcaniu.



2. Skręcanie prętów prostych o zwartym przekroju

- ❑ Dla przekroju kołowego $I_s = I_o$ to biegunowy moment bezwładności przekroju względem środka przekroju.
- ❑ Dla przekrojów pozbawionych symetrii obrotowej równość nie zachodzi. Moment bezwładności na skręcanie dla poszczególnych figur, gdzie h, b wymiary przekroju ($b < h$):

- przekroju prostokątnego:

$$J_s = k \cdot h \cdot b^3$$

k współczynnik zależny od stosunku wysokości h do szerokości prostokąta b

h/b	1,0	2,0	10,0	∞
k	0,141	0,229	0,313	0,333

- przekroju cienkościennego złożonego ze smukłych prostokątów:

$$J_s = \eta \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_i h_i \cdot b_i^3$$

η współczynnik zależny od kształtu przekroju

- przekroju kołowego

$$J_s = J_o = 2 J_x$$