

Zadanie 2. Ustrój prętowo-ciężnowy

Dany jest płaski ustrój prętowo-ciężnowy o schemacie statycznym jak na rysunku.

- 1) Należy zwymiarować przekroje elementów tak, aby w danym stanie obciążenia spełnione były warunki SGN, a zwis ciężna spełniał warunki technicznej teorii ciężien, tj. $f_{\perp}/L_c \leq 0,1$.
- 2) Stosując równanie sześciennne wyznaczyć długość początkową ciężna.
- 3) Wykorzystując podejście iteracyjne obliczyć maksymalną siłę osiową i maksymalny zwis ciężna.

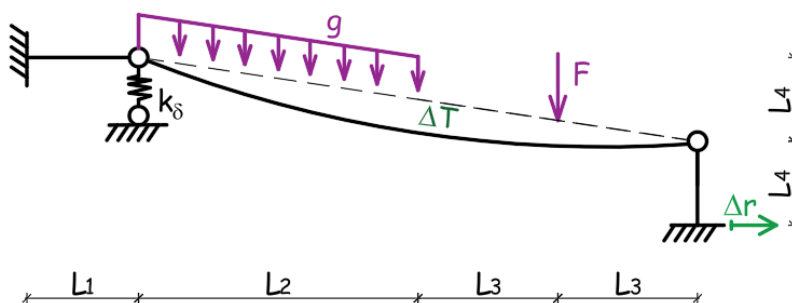
Szczegółowe wytyczne dotyczące wykonania zadania podane zostaną na zajęciach.

Dane geometryczno-materiałowe:

$L_1=4\text{m}$; Stal: S235;
 $L_2=10\text{m}$; Profil: HEB;
 $L_3=5\text{m}$;
 $L_4=4\text{m}$; $k_{\delta}=3000\text{kN/m}$;

Obciążenia:

$F=30\text{kN}$;
 $g=5\text{kN/m}$
 $\Delta T=20^{\circ}\text{C}$
 $\Delta r=0,01\text{m}$



Wyniki z programu komputerowego:

- $s_0 = 20,20373 \text{ m}$; $H_e = 324,85 \text{ kN}$; $N_{\max, e} = 338,35 \text{ kN}$
- $f_{\max, e, \perp} = 634,5 \text{ mm}$; $v_{A, e} = -17,595 \text{ mm}$; $u_{B, e} = 1,858 \text{ mm}$

(podpis Prowadzącego)

Student/nr albumu:

.....

grupa:

Prowadzący:

dr inż. Olga Szyłko-Bigus

data przyjęcia:

Uwagi:

.....

Spis treści

1. Schemat statyczny.....	3
2. Faza montażu – równanie sześciennie	3
2.1 Schemat statyczny	3
2.2 Przemieszczenia węzłów podporowych ciężna.....	3
2.3 Równanie ciężna	4
3. Faza eksploatacji – procedura iteracyjna	5
3.1 Schemat statyczny	5
3.2 Belka zastępcza	5
3.3 Procedura iteracyjna	6
3.4 Odpowiedź statyczna ustroju.....	8
4. Wyniki z programu Robot.....	9

1. SCHEMAT STATYCZNY

Dane:

$$L_1 = 5 \text{ m}; L_2 = 10,0 \text{ m}$$

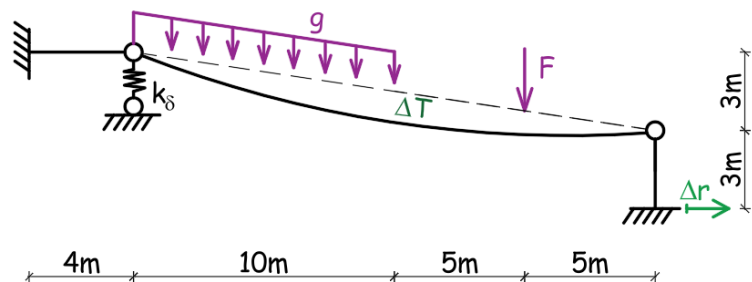
$$L_3 = 4,0 \text{ m}; L_4 = 3,0 \text{ m}$$

$$F = 22 \text{ kN}; q = 5 \text{ kN/m}$$

$$\Delta r = -20 \text{ mm}$$

$$\beta = \arctan(L_4 / (2 \cdot L_1 + L_2)) =$$

$$= \arctan(0,15) = 8,5308^\circ$$



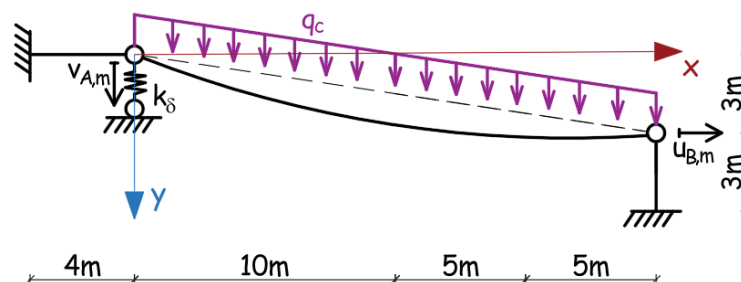
Na podstawie obliczeń w programie Robot przyjęto:

belka - HEB 300 ze stali S 235: $E_r = 210 \text{ GPa};$ $I_{y,r} = 25\,179 \text{ cm}^4;$ $El_r = 52857 \text{ kNm}^2;$ $EA_r = \infty$ (zał. upraszczające); $m_r = 116,965 \text{ kg/m};$	słup - HEB 600 ze stali S 235: $E_s = 210 \text{ GPa};$ $I_{y,s} = 171\,000 \text{ cm}^4;$ $El_s = 359\,100 \text{ kNm}^2;$ $EA_s = \infty$ (zał. upraszczające); $m_s = 211,95 \frac{\text{kg}}{\text{m}};$	ciągno - lina Pfeifer PG 90 1x61: $E_c = 160 \text{ GPa};$ $A_c = 5,72 \text{ cm}^2;$ $EA_c = 91\,520 \text{ kN};$ $m_c = 4,49 \frac{\text{kg}}{\text{m}};$ $S_m = 80 \text{ kN};$
--	--	--

2. FAZA MONTAŻU – RÓWNANIE SZESZCIENNE

2.1 Schemat statyczny

Układ poddany jest działaniu jedynie ciężaru własnego oraz siły naciągu cięgna S_m .



2.2 Przemieszczenia węzłów podporowych cięgna

Przemieszczenie poziome głowicy słupa obliczone w ujęciu teorii I rzędu (ze względu na brak ściskania):

$$u_{B,m} = -\frac{H_m(L_4)^3}{3EI_s} = -\frac{S_m \cos \beta (L_4)^3}{3EI_s} = -\frac{80 \text{ kN} \cdot \cos 8,5308^\circ \cdot (3,0 \text{ m})^3}{3 \cdot 359\,100 \text{ kNm}^2} = -0,00198 \text{ m}$$

Przemieszczenie pionowe w punkcie A:

$$v_{A,m} = \frac{\frac{3}{8} q_r L_3}{\frac{3EI_r}{L_3^3} + k} + \frac{0,5 q_c (2 \cdot L_1 + L_2) / \cos \beta}{\frac{3EI_r}{L_3^3} + k} + \frac{S_m \sin \beta (L_3)}{\frac{3EI_r}{L_3^3} + k} =$$

$$= \frac{1,17 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3,0 \text{ m}}{\frac{3 \cdot 52857 \text{ kNm}^2}{(3,0 \text{ m})^3} + 3000 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} + \frac{0,5 \cdot 0,045 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \frac{(2 \cdot 5,0 \text{ m} + 10,0 \text{ m})}{\cos 8,5308^\circ}}{\frac{3 \cdot 52857 \text{ kNm}^2}{(3,0 \text{ m})^3} + 3000 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} + \frac{80 \text{ kN} \cdot \sin 8,5308^\circ}{\frac{3 \cdot 52857 \text{ kNm}^2}{(3,0 \text{ m})^3} + 3000 \frac{\text{kN}}{\text{m}}} = 0,00257 \text{ m}$$

2.3 Równanie ciężna

$$S_m^3 + S_m^2 EA_c \left[1 - \frac{L_{c,m}}{s_0} \right] = \frac{EA_c \cos \beta}{2s_0} \int_0^L Q_b^2(x) dx,$$

przy czym długość cięciwy ciężna w fazie montażu

$$L_{c,m} = \sqrt{(L + u_{B,m})^2 + (L_4 - v_{A,m})^2} = \sqrt{(20 \text{ m} - 0,00198 \text{ m})^2 + (3 \text{ m} - 0,00257 \text{ m})^2} = 20,2237 \text{ m}$$

oraz, przy obciążeniu równomiernie rozłożonym, całka z kwadratu siły tnącej w zastępczej belce o długości L (pominięto wpływ przemieszczenia podpory)

$$\int_0^L Q_b^2(x) dx = \frac{q_{c,\perp}^2 L^3}{12} = \frac{(q_c / \cos \beta)^2 (2 \cdot L_1 + L_2)^3}{12} = \frac{\left(0,045 \frac{\text{kN}}{\text{m}} / \cos 8,5308^\circ\right)^2 (20 \text{ m})^3}{12} = 20,22141 \text{ kN}^2 \text{ m}.$$

Po podstawieniu wartości liczbowych, otrzymujemy równanie

$$(80 \text{ kN})^3 + (80 \text{ kN})^2 \cdot 91\,520 \text{ kN} \cdot \left[1 - \frac{20,2237 \text{ m}}{s_0} \right] = \frac{91\,520 \text{ kN} \cos 8,5308^\circ}{2s_0} \cdot 20,22141 \text{ kN}^2 \text{ m},$$

którego rozwiązanie daje początkową długość ciężna w stanie nieobciążonym

$$s_0 = 20,20386 \text{ m}.$$

Wydłużenie sprężyste ciężna

$$\Delta s_{s,m} \approx \frac{S_m s_0}{EA_c} = \frac{80 \text{ kN} \cdot 20,20386 \text{ m}}{91\,520 \text{ kN}} = 0,017661 \text{ m}$$

Maksymalny pionowy zwis ciężna

$$f_{\max, m} = \frac{M_b(12,5 \text{ m})}{H_m} = \frac{q_{c, \perp} L^2}{8H_m} = \frac{0,045 \frac{\text{kN}}{\text{m}} / \cos 4,574^\circ \cdot (20 \text{ m})^2}{8 \cdot 80 \text{ kN} \cdot \cos 4,574^\circ} = 0,028694 \text{ m}$$

Maksymalny zwis ciężna mierzony prostopadłe do cięciwy

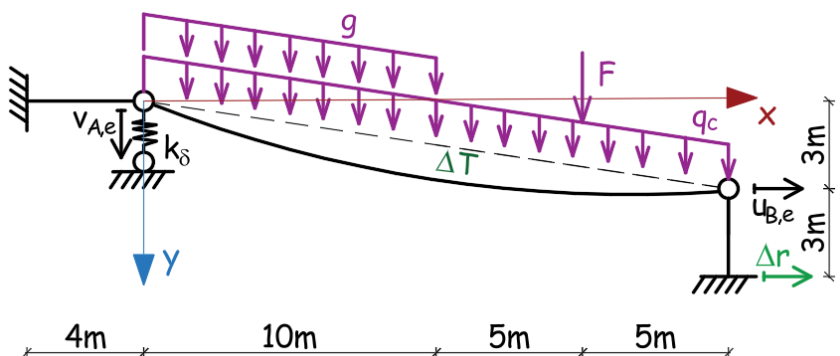
$$f_{\max, m, \perp} = f_{\max, m} \cos \beta = 0,028376 \text{ m} < 2,02214 \text{ m} = 0,1L_{c, m}$$

3. FAZA EKSPLOATACJI – PROCEDURA ITERACYJNA

3.1 Schemat statyczny

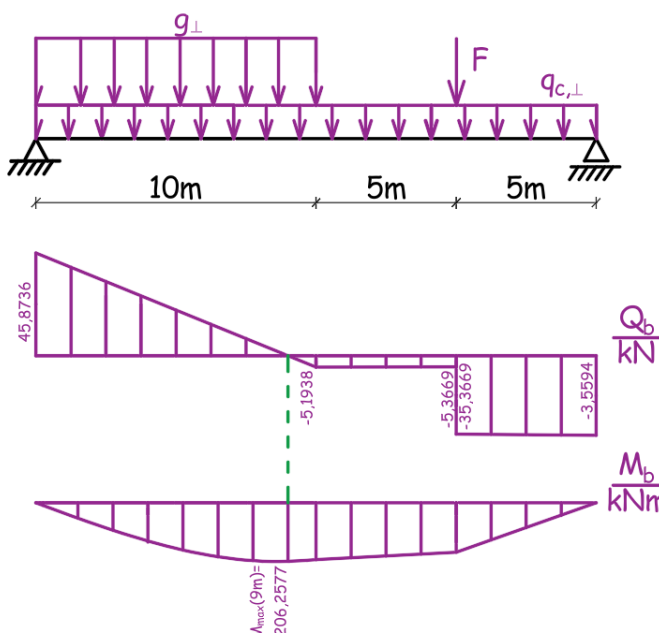
Układ poddany jest działaniu zarówno ciężaru własnego, siły naciągu, jak i obciążeń zewnętrznych.

Założono, że wpływ siły osiowej w słupie na stan jego deformacji jest nieznaczny, wskutek czego zarówno przemieszczenie $u_{B, e}$, jak i przemieszczenie belki $v_{A, e}$ obliczono w ujęciu teorii I rzędu.



3.2 Belka zastępcza

W obliczeniach założono, że mimo poziomego przemieszczenia głowicy słupa, długość zastępczej belki nie ulega zmianie i wynosi L w każdej iteracji.



Reakcja pionowa w węźle A:

$$V_{A, b} = P \frac{L_1}{L} + 0,5q_{c, \perp} L + g_{\perp} L_2 \frac{(0,5L_2 + 2 \cdot L_1)}{L}$$

$$V_{A, b} = 30 \text{ kN} \cdot \frac{5 \text{ m}}{20 \text{ m}} + 0,5 \cdot \frac{0,045 \frac{\text{kN}}{\text{m}}}{\cos 8,5308^\circ} \cdot 20 \text{ m} + \frac{5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}}{\cos 8,5308^\circ} \cdot 10 \text{ m} \cdot 15 \cdot \frac{1}{20 \text{ m}}$$

$$V_{A, b} = 45,8736 \text{ kN}$$

$$V_{B, b} = P \frac{L_2 + L_1}{L} + 0,5q_{c, \perp} L + g_{\perp} L_2 \frac{(0,5L_2)}{L}$$

$$V_{B, b} = 35,5939$$

Siła tnąca:

- przedział 1: $x \in [0; L_2]$

$$Q_{b,1}(x) = V_{A,b} - (q_{c,\perp} + g_{\perp})x = 45,8736 \text{ kN} - \left(\frac{5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} + 0,045 \frac{\text{kN}}{\text{m}}}{\cos 8,5308^\circ} \right) x$$

$$= 45,8736 \text{ kN} - 5,1013x \text{ [kN]}$$

- przedział 2: $x \in [L_2; L_2 + L_1]$

$$Q_{b,2}(x) = V_{A,b} - (q_{c,\perp} + g_{\perp}) \cdot 10 \text{ m} - q_{c,\perp} \cdot x = -5,1398 - 0,045 \cdot x \text{ [kN]}$$

- przedział 3: $x \in [L_2 + L_1; L]$

$$Q_{b,3}(x) = V_{A,b} - (q_{c,\perp} + g_{\perp}) \cdot 10 \text{ m} - q_{c,\perp} \cdot 5 - q_{c,\perp} \cdot x - P = -35,3669 - 0,045 \cdot x \text{ [kN]}$$

Całka z kwadratu siły tnącej

$$\int_0^L Q_b^2(x) dx = \int_0^{L_1} Q_{b,1}^2(x) dx + \int_{L_1}^L Q_{b,2}^2(x) dx = \frac{10}{6} [45,8736^2 + 4 \cdot 20,3669^2 + (-5,1398)^2] +$$

$$+ \frac{5}{6} [(-5,1398)^2 + 4 \cdot (-5,2534)^2 + (-5,3669)^2]$$

$$+ \frac{5}{6} [(-55,3669)^2 + 4 \cdot (-35,4804)^2 + (-35,5939)^2]$$

$$= 12749,04 \text{ kN}^2 \text{ m}$$

3.3 Procedura iteracyjna

W obliczeniach skorzystano z następujących wzorów:

$$u_{B,i} = -\frac{H_i(L_4)^3}{3EI_s},$$

$$v_{A,i} = \frac{\frac{3}{8} q_r L_3}{\frac{3EI_r}{L_3^3} + k} + \frac{0,5 q_{c,\perp} L}{\frac{3EI_r}{L_3^3} + k} + \frac{P \frac{L_1}{L}}{\frac{3EI_r}{L_3^3} + k} + \frac{g_{\perp} L_2 \frac{(0,5L_2 + 2 \cdot L_1)}{L}}{\frac{3EI_r}{L_3^3} + k} + \frac{S_i \cdot \sin \beta_i \cdot (L_3)^3}{\frac{3EI_r}{L_3^3} + k},$$

$$H_i = \sqrt{\frac{\cos^3 \beta_i \int_0^L Q_b^2(x) dx}{2 \left(s_i - \frac{L_i}{\cos \beta_i} \right)}}, \quad \Delta s_{i+1} = \frac{H_i}{EA_c} \left(\frac{L_i}{\cos^2 \beta_i} + \frac{1}{H_i^2} \int_0^L Q_b^2(x) dx \right).$$

1^o

$$s_1 = s_0 + s_0 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T + 3\Delta s_{s,m} = 20,26169 \text{ m}$$

$$L_{e,1} = L + u_{B,m} + \Delta r = 20,008017 \text{ m}$$

$$h_{e,1} = h_2 - v_{A,m} = 1,979141 \text{ m}$$

$$\beta_1 = \arctan(h_{e,1}/L_{e,1}) = 8,5202^\circ$$

$$H_1 = 450,4278 \text{ kN}$$

$$\Delta H_{,1} = |H_1 - H_m| = 371,3129 \text{ kN}$$

$$u_{B,2} = -0,01129 \text{ m}$$

$$v_{A,2} = 0,021014 \text{ m}$$

$$\Delta s_{s,2} = 0,10099 \text{ m}$$

2^o

$$s_2 = s_0 + s_0 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T + 3\Delta s_2 = 20,3097 \text{ m}$$

$$L_{e,2} = L + u_{B,2} + \Delta r = 19,9987 \text{ m}$$

$$h_{e,2} = h_2 - v_{A,2} = 2,97899 \text{ m}$$

$$\beta_2 = \arctan(h_{e,2}/L_{e,2}) = 8,4724^\circ$$

$$H_2 = 261,3138 \text{ kN}$$

$$\Delta H_{,2} = |H_2 - H_1| = 189,114 \text{ kN}$$

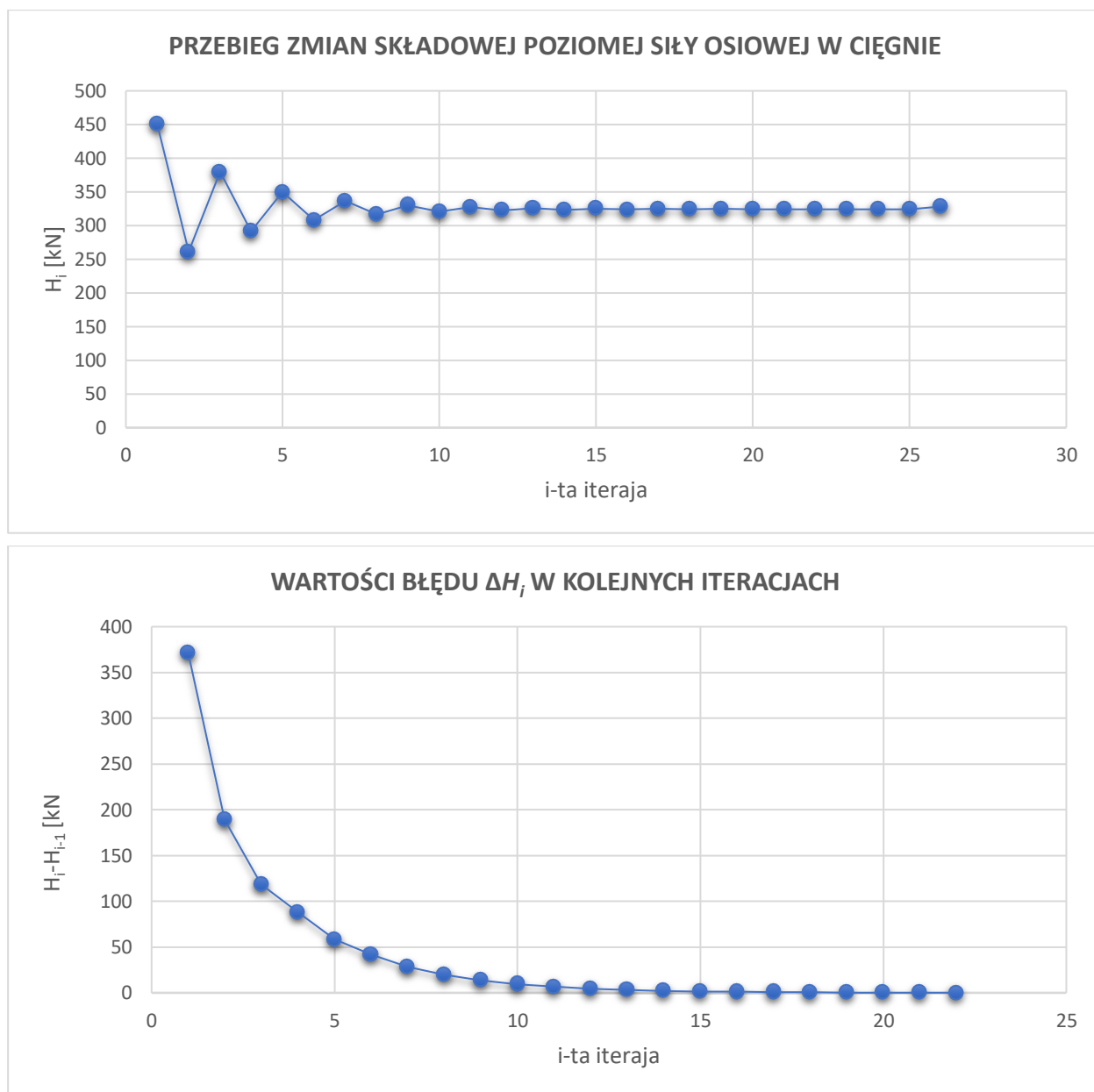
$$u_{B,3} = -0,00655 \text{ m}$$

$$v_{A,3} = 0,0158 \text{ m}$$

$$\Delta s_{s,3} = 0,05890 \text{ m}$$

Pozostałe podejścia iteracyjne przeprowadzono w sposób analogiczny do tego przedstawionego powyżej. Wyniki oraz wykresy wykonano za pomocą programu Microsoft Excel

	s_i	$L_{e,i}$	$h_{e,i}$	β	$\cos \beta$	H_i	Δs_{i+1}	u_{i+1}	v_{i+1}	$\Delta H_i/H_i$
	[m]	[m]	[m]	[°]	[-]	[kN]	[m]	[m]	[m]	[%]
1	20,26169	20,008017	2,99743	8,520201	0,988964	450,4278	0,100991429	0,021014	0,011289	
2	20,3097	19,998711	2,978986	8,472419	0,989087	261,3138	0,0589017	0,0158	0,006549	-72,37%
3	20,26761	20,003451	2,9842	8,48505	0,989054	379,683	0,08520085	0,019035	0,009516	31,18%
4	20,29391	20,000484	2,980965	8,477225	0,989075	291,6887	0,065638317	0,016631	0,00731	-30,17%
5	20,27434	20,00269	2,983369	8,483041	0,989060	349,8368	0,078559721	0,01822	0,008768	16,62%
6	20,28726	20,001232	2,98178	8,479197	0,989069	308,0597	0,069273365	0,017078	0,007721	-13,56%
7	20,27798	20,002279	2,982922	8,481958	0,989062	336,3995	0,075571442	0,017852	0,008431	8,42%
8	20,28428	20,001569	2,982148	8,480085	0,989067	316,3843	0,071122711	0,017306	0,007929	-6,33%
9	20,27983	20,002071	2,982694	8,481408	0,989064	330,1321	0,07417808	0,017681	0,008274	4,16%
10	20,28288	20,001726	2,982319	8,4805	0,989066	320,5039	0,072038109	0,017418	0,008033	-3,00%
11	20,28074	20,001967	2,982582	8,481136	0,989064	327,1568	0,073516714	0,0176	0,008199	2,03%
12	20,28222	20,001801	2,9824	8,480696	0,989066	322,5164	0,072485367	0,017473	0,008083	-1,44%
13	20,28119	20,001917	2,982527	8,481003	0,989065	325,732	0,07320004	0,017561	0,008164	0,99%



3.4 Odpowiedź statyczna ustroju

Ostatecznie przyjęto wyniki uzyskane w iteracji nr 9, w której błąd względny składowej poziomej siły osiowej w ciągu

$$\varepsilon_{H_9} = \frac{\Delta_{H, 12}}{12} \cdot 100\% = 0,99\% < 1\% .$$

Zatem:

$$H_e = H_{13} \cong 325,732 \text{ kN}$$

$$\text{Maksymalna siła osiowa w ciągu: } N_{\max, e} = \sqrt{H_e^2 + (V_{A, b} + H_e \tan \beta_9)^2} \cong 339,148 \text{ kN}$$

Nośność obliczeniowa liny Pfeifer PG125: $536 \text{ kN} > 339,148 \text{ kN}$

Przeszyczenia punktów podparcia: $u_{B,e} = u_{B,13} = 17,47 \text{ mm}$; $v_{A,e} = v_{A,13} = 8,083 \text{ mm}$.

Maksymalny pionowy zwis ciężna:

$$f_{\max,e} = \frac{M_b(9 \text{ m})}{H_e} = \frac{206,377 \text{ kNm}}{325,732 \text{ kN}} = 0,6332 \text{ m} \cong 1003 \text{ mm}$$

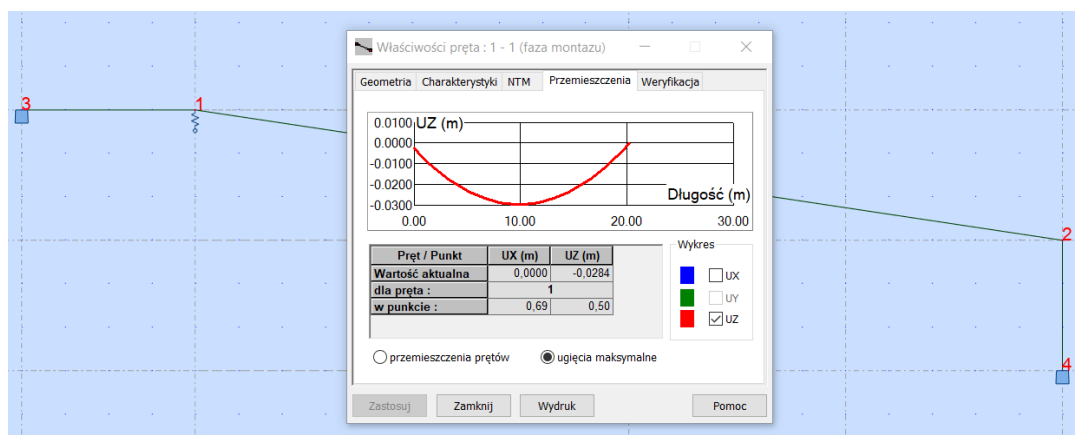
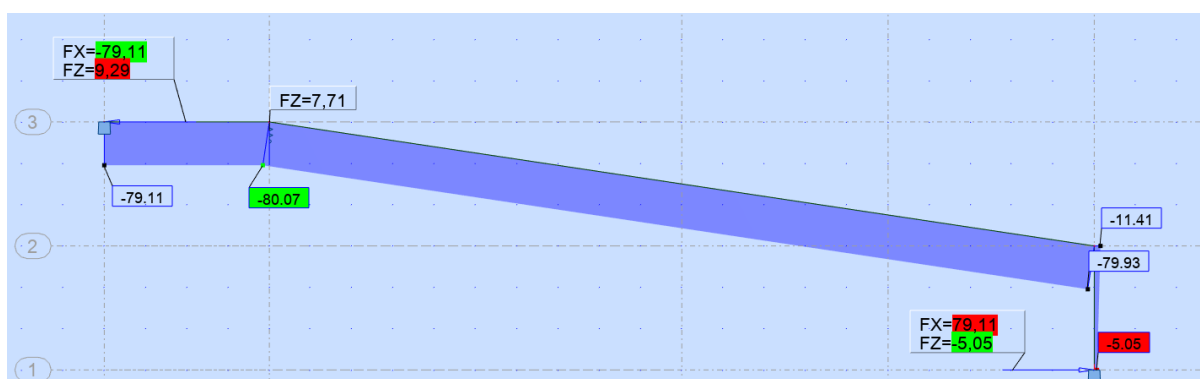
Maksymalny zwis ciężna mierzony prostopadłe do ciężwy:

$$f_{\max,e,\perp} = f_{\max,e} \cos \beta_{10} = 0,6263 \text{ m} \leq 2,022 \text{ m} = 0,1L_{c,e}$$

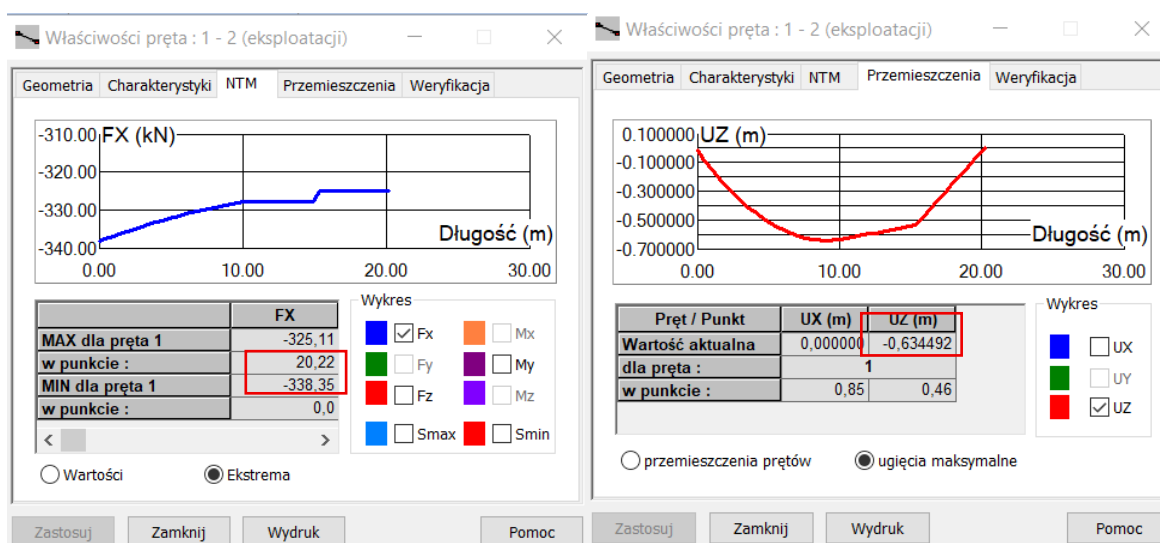
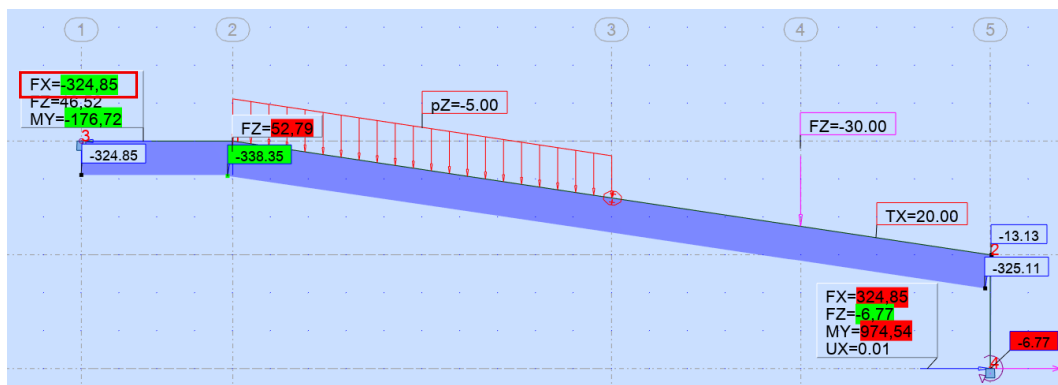
$$\frac{f_{\max,e,\perp}}{L_{c,e}} = 0,03 < 0,1$$

4. WYNIKI Z PROGRAMU ROBOT

Faza montażu – wartości w kN i kNm



Faza eksploatacji – wartości w kN i kNm



Węzeł/Przypadek	UX (m)	UZ (m)	RY (Rad)
1/ 2	0,000415	-0,017595	0,0066
2/ 2	0,001858	0,000005	-0,0041
3/ 2	0,0	0,0	0,0
4/ 2	0,010000	0,0	0,0
1/ 2	0,000415	-0,017595	0,0066