



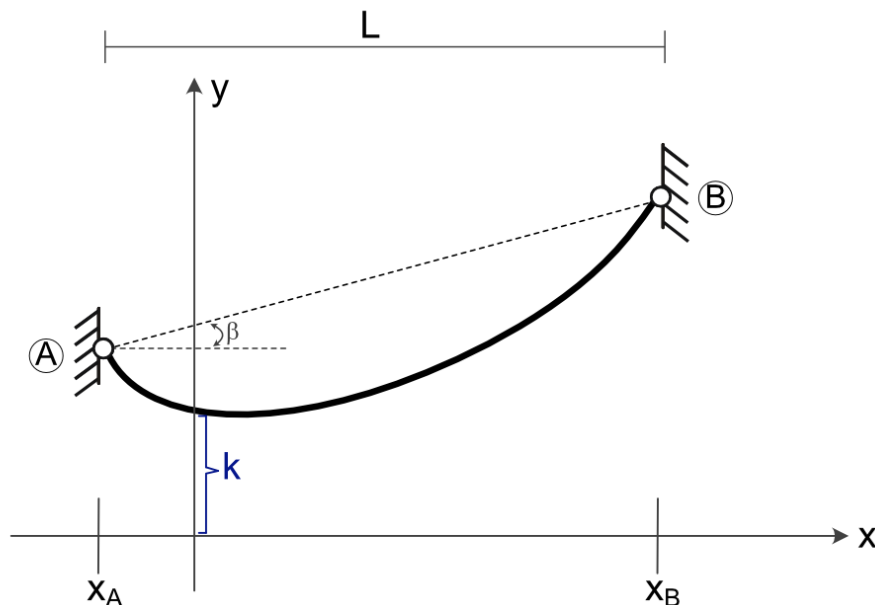
# Politechnika Wrocławska

## MECHANIKA BUDOWLI

### Wykład 6 Ciężna o cięciwie ukośnej

Prowadzący: dr inż. Olga Szyłko-Bigus

# 1. Ściste rozwiązanie cięgna o cięciwie ukośnej



Często punkty zamocowania cięgna znajdują się na różnych wysokościach.

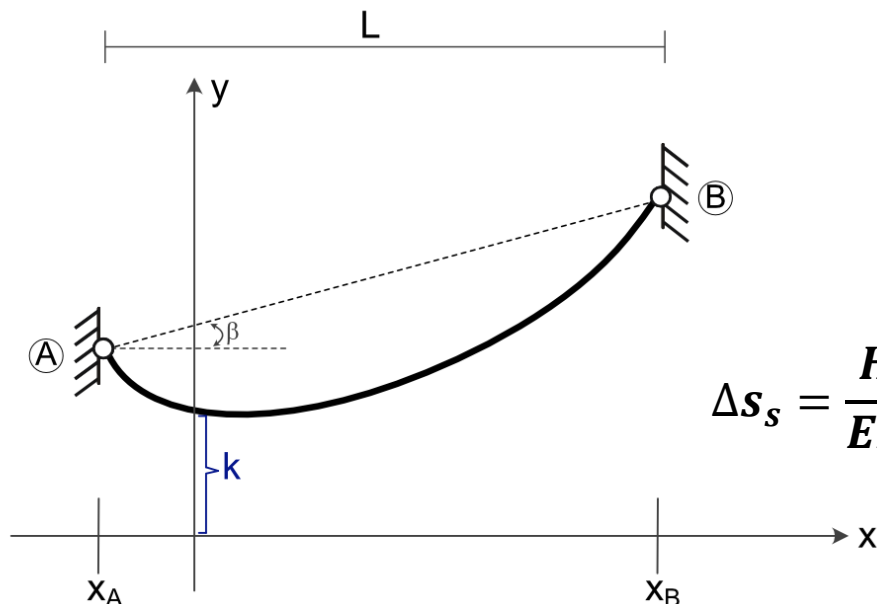
Cięciwa cięgna jest nachylona do poziomu pod kątem  $\beta$ , rozpiętość przelotu jest mierzona wzdłuż osi  $x$  i równa się  $L$ . Układ współrzędnych jest tak zlokalizowany, że oś rzędnych przecina wierzchołek krzywej łańcuchowej, a oś odciętych jest od niego oddalona o  $k = \frac{H}{g}$ .

Wiemy, że  
 $x_B - x_A = L$  oraz  $y_B - y_A = Ltg\beta$

Po uwzględnieniu ścistej funkcji zwisu cięgna otrzymujemy:

$$\frac{H}{g} \left[ \cosh \frac{g(L + x_A)}{H} - \cosh \frac{gx_A}{H} \right] = Ltg\beta$$

# 1. Ścisłe rozwiązanie cięgna o cięciwie ukośnej



Konieczne jest wyprowadzenie drugiego równania na sprężysty przyrost długości cięgna

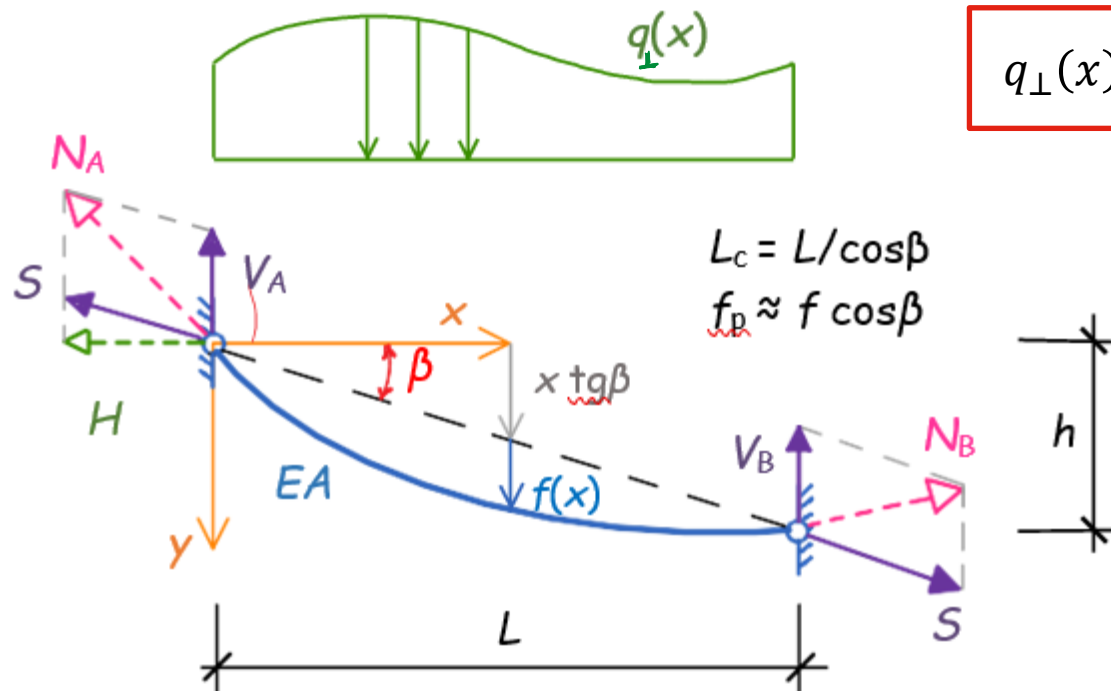
$$s = s_0 + \Delta s_s$$

$$\Delta s_s = \frac{H}{EA} \left[ \frac{L}{2} + \frac{H}{4g} - \left( \sinh \frac{2g(L + x_A)}{H} \right) - \sinh \frac{2gx_A}{H} \right]$$

Po odpowiednich przekształceniach matematycznych oraz skorzystaniu z tożsamości hiperbolicznych odnoszących się do funkcji podwojonego argumentu otrzymujemy rozwiązanie ścisłe dla cięgna o cięciwie ukośnej obciążonego równomiernie wzdłuż długości:

$$\sinh \frac{g(L + x_A)}{H} \left[ 1 - \frac{H}{2EA} \cosh \frac{g(L + x_A)}{H} \right] - \sinh \frac{gx_A}{H} \left[ 1 - \frac{H}{2EA} \cosh \frac{gx_A}{H} \right] = \frac{gL}{2EA} + s_0$$

## 2. Przybliżone rozwiązanie cięgna o cięciwie ukośnej

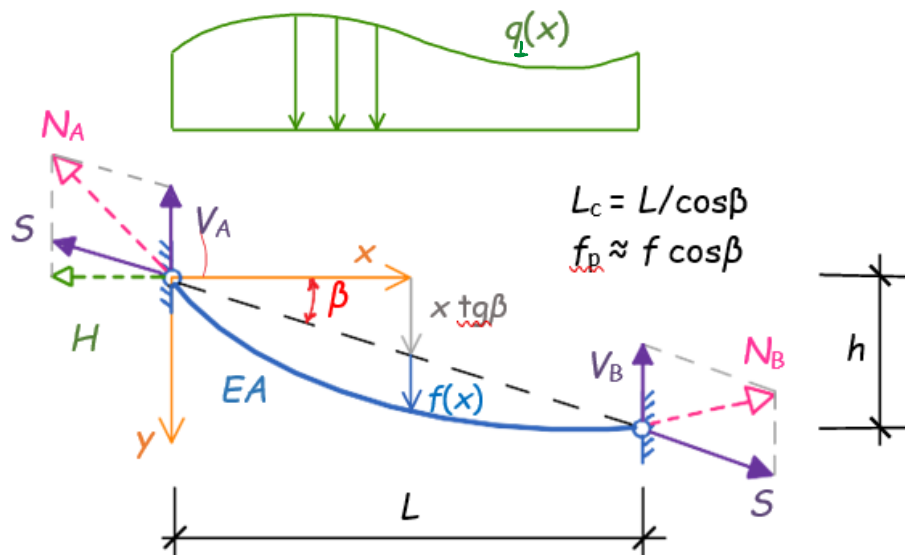


$$q_{\perp}(x) = \frac{q(x)}{\cos \beta} = \frac{q_0(x)}{\cos \beta}$$

Już na wstępie zakłada się, że dowolne obciążenie  $q(x)$  jest rozłożone wzdłuż długości przelotu lub cięciwy, gdy w rzeczywistości obciążenie działa wzdłuż osi cięgna (ciężar własny, oblodzenie).

Uproszczenie to jest dopuszczalne tylko w przypadku cięgien o małych zwisach, rozumianych jako:  $f_p/L_c \leq 1/10$  oraz niedużych kątach  $\beta$ .

## 2. Przybliżone rozwiązanie cięgna o cięciwie ukośnej



Z warunku równowagi:  $\Sigma X = 0$  wynika, że nie tylko składowa pozioma siły osiowej w cięgnie  $H$ , ale i naciąg  $S$  są stałe na długości przelotu.

Uwzględniając fakt, że w wiotkim cięgnie moment zginający w każdym punkcie jest równy zeru, możemy zapisać

$$M(x) = 0 \rightarrow M_b(x) + S \cdot \sin \beta \cdot x - S \cdot \cos \beta \cdot y(x) = 0$$

$$y(x) = x \cdot \tan \beta + \frac{M_b(x)}{H} = x \cdot \tan \beta + f(x) \quad (1)$$

gdzie przez  $M_b(x)$  oznaczono moment w zastępczej belce o rozpiętości  $L$ , a  $f(x)$  opisuje pionowy zwis cięgna mierzony od cięciwy.

## 2. Przybliżone rozwiązanie cięgna o cięciwie ukośnej

Długość cięgna o cięciwie nachylonej obciążonego wzdłuż rozpiętości przelotu można zapisać w postaci

$$s = \frac{L}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{S^2} \int_0^L \frac{Q_b^2(x)}{1 + \frac{Q_b(x)}{H} \sin\beta \cos\beta} dx \quad (2)$$

Jedynym uproszczeniem wprowadzonym podczas wyprowadzania wzoru (2) jest założenie, że przy małym zwisie ( $f_p/L_c \leq 1/10$ ), zgodnie z rozwinięciem Maclaurina

$$ds = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx \approx 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx \quad (3)$$

W celu uproszczenia dalszych obliczeń, zazwyczaj zakłada się, że, wobec czego

$$s = \frac{L}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{2S^2} \int_0^L Q_b^2(x) dx \quad (4)$$

## 2. Przybliżone rozwiązanie cięgna o cięciwie ukośnej

Przyjmując, analogiczne jak w przypadku cięgna o cięciwie poziomej, że z uwagi na mały zwis, na wydłużenie sprężyste cięgna wpływa tylko naciąg  $S$ , to

$$\Delta s_s = \frac{S \cdot s_o}{EA} \quad (5)$$

Po uwzględnieniu analogicznych jak na poprzednim wykładzie zależności i wykonaniu stosownych przekształceń otrzymujemy równanie:

$$S^3 + S^2 EA \left[ 1 - \frac{1}{s_o} \left( \frac{L}{\cos \beta} - \alpha_t \Delta T s_o \right) \right] = \frac{EA \cos \beta}{2 s_o} \int_0^L Q_b^2(x) dx \quad (6)$$

które po podstawieniu wartości  $\beta = 0$  sprowadza się do równania trzeciego stopnia zapisanego dla cięgna o cięciwie poziomej.

## 2. Przybliżone rozwiązanie cięgna o cięciwie ukośnej

Wzór opisujący  $\Delta s_i$  zawarty w powyższej procedurze został wyprowadzony przy założeniu, że przyrost długości cięgna jest spowodowany działaniem siły osiowej  $N(x)$ , a nie jedynie naciągu  $S$ .

$$\Delta ds = \frac{N(x)}{EA} ds = \frac{H}{EA} \frac{ds}{dx} ds = \frac{H}{EA} \left( \frac{ds}{dx} \right)^2 dx = \frac{H}{EA} [1 + y'^2(x)] dx$$

$$\begin{aligned} \Delta s_s &= \int_0^s \Delta ds = \frac{H}{EA} \int_0^L [1 + y'^2(x)] dx = \frac{H}{EA} \int_0^L \left[ 1 + \left( \frac{Q_b(x)}{H} + \operatorname{tg} \beta \right)^2 \right] dx \\ &= \frac{H}{EA} \int_0^L \left[ 1 + \frac{Q_b^2(x)}{H^2} + 2 \frac{Q_b(x)}{H} \operatorname{tg} \beta + \operatorname{tg}^2 \beta \right] dx \end{aligned}$$

Po uwzględnieniu, że  $\int_0^L Q_b(x) dx = 0$  oraz  $\operatorname{tg}^2 \beta = \frac{1}{\cos^2 \beta} - 1$  otrzymujemy

$$\Delta s_s = \frac{H}{EA} \left( \frac{L}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{H^2} \int_0^L Q_b^2(x) dx \right) \quad (7)$$



## 2. Przybliżone rozwiązanie cięgna o cięciwie ukośnej

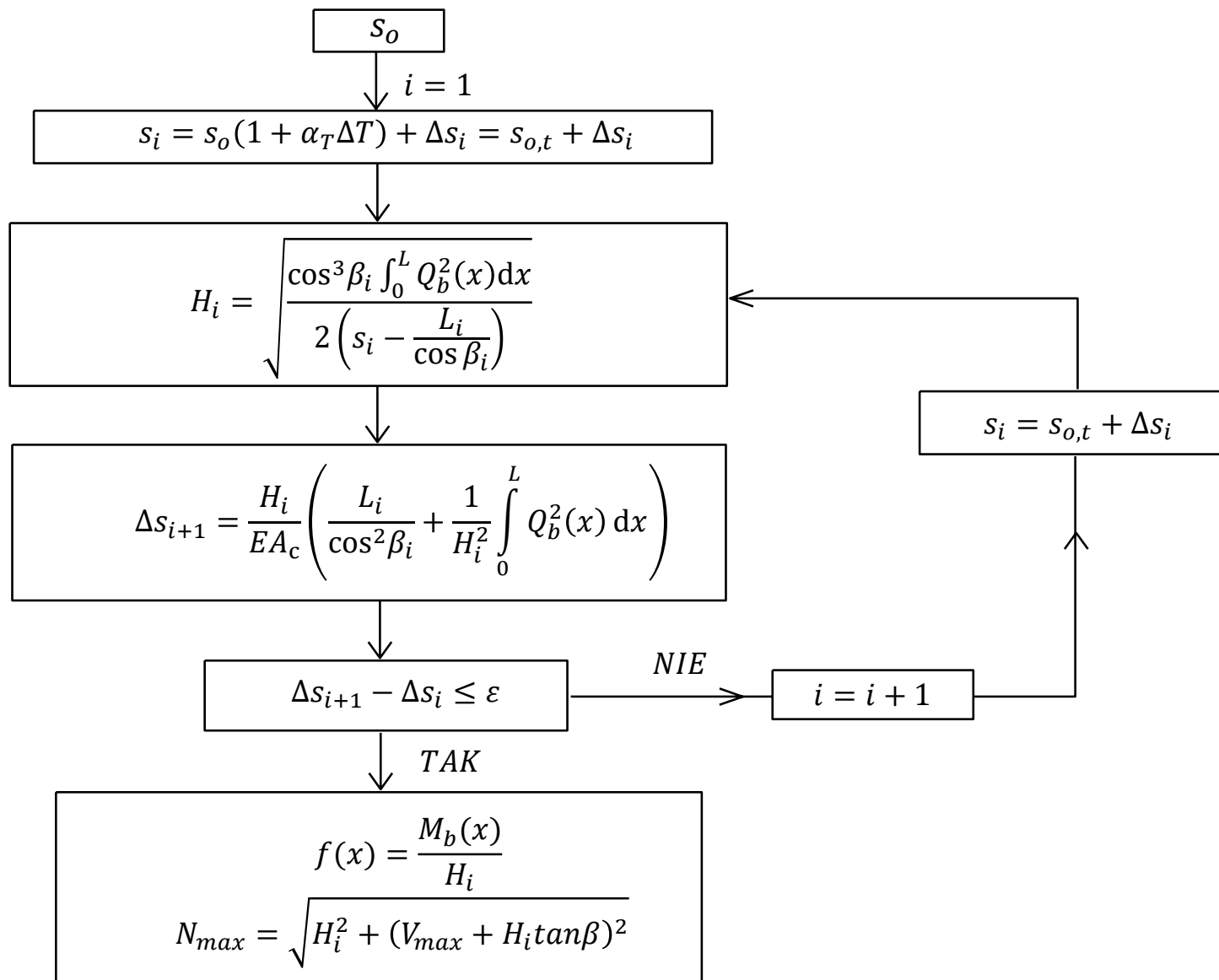
**Sprężysty przyrost długości cięgna**

$$\Delta s_s = \frac{H}{EA} \left( \frac{L}{\cos^2 \beta} + \frac{1}{H^2} \int_0^L Q_b^2(x) dx \right) \quad (7)$$

**Stała na długości składowa pozioma siły osiowej w cięgnie:**

$$H = \sqrt{\frac{\cos^3 \beta \int_0^L Q_b^2(x) dx}{2 \left( s - \frac{L}{\cos \beta} \right)}} \quad (8)$$

# Procedura iteracyjna



### 3. Analiza porównawcza

W celu zilustrowania różnic wynikających z zastosowania opisanych metod, obliczono dla przykładowego cięgna o różnym kącie nachylenia  $\beta$  wartości siły  $H$ , stosując podejście iteracyjne w ujęciu ścisłym wg (2) i uproszczonym wg (4) oraz równanie trzeciego stopnia (6).

W obliczeniach przyjęto rozpiętość przelotu  $L=25,00\text{m}$  oraz długość początkową  $s_0=1,025L_c$ . Do cięgna przykładano równomiernie rozłożone wzdłuż rozpiętości przelotu  $L$  obciążenie  $q$  zmieniające się od **1,1 do 2,5 kN/m** tak, aby stosunek  $f_p/L_c \approx 0,10$ . Założono linę Pfeifer PE20 o przekroju metalicznym  $A_{\text{met}} = 161 \text{ mm}^2$ , oraz  $E = 130\text{GPa}$ .

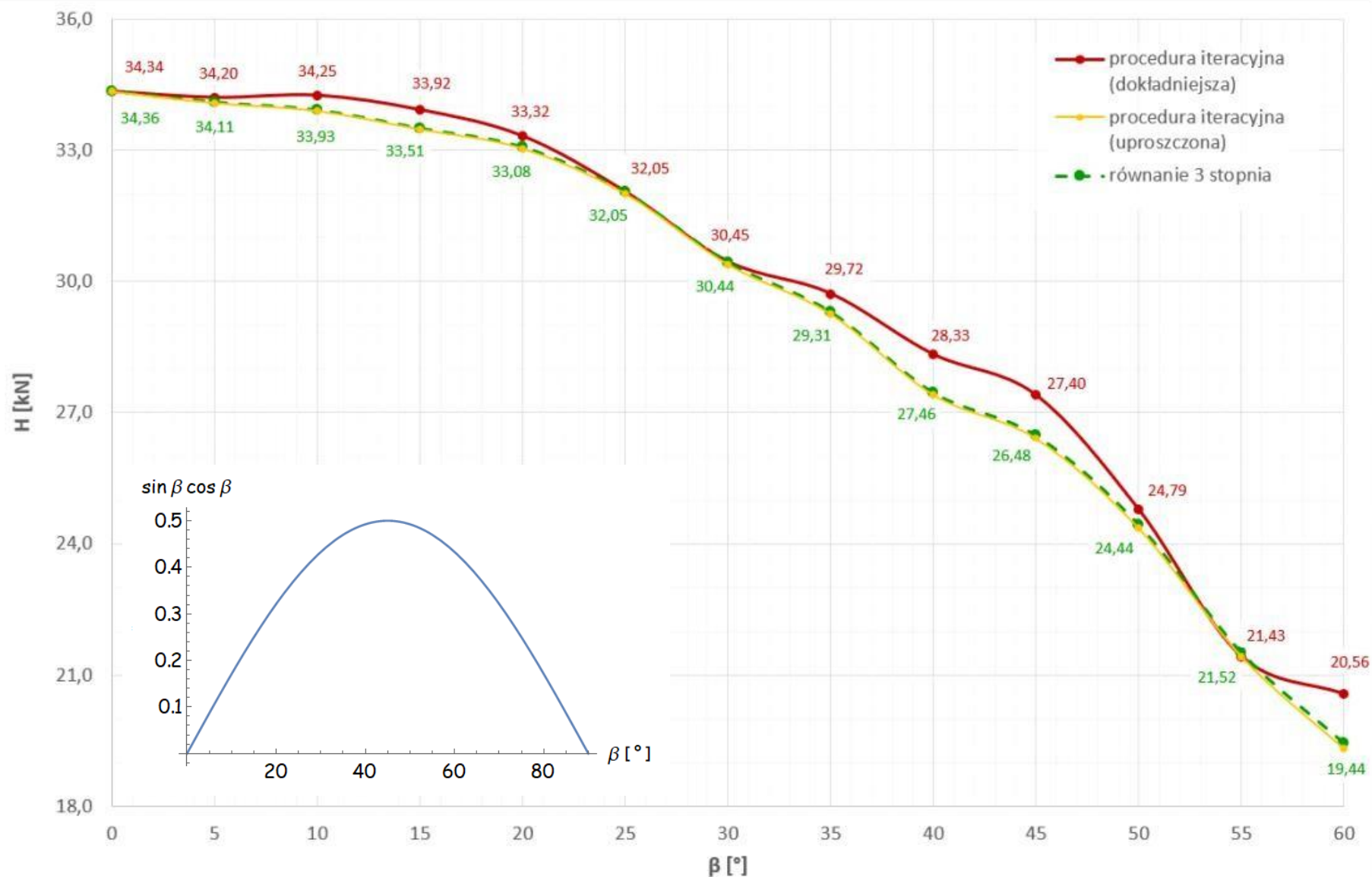
$$s = \frac{L}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{S^2} \int_0^L \frac{Q_b^2(x)}{1 + \frac{Q_b(x)}{H} \sin\beta \cos\beta} dx \quad (2)$$

$$s = \frac{L}{\cos\beta} + \frac{\cos\beta}{2S^2} \int_0^L Q_b^2(x) dx \quad (4)$$

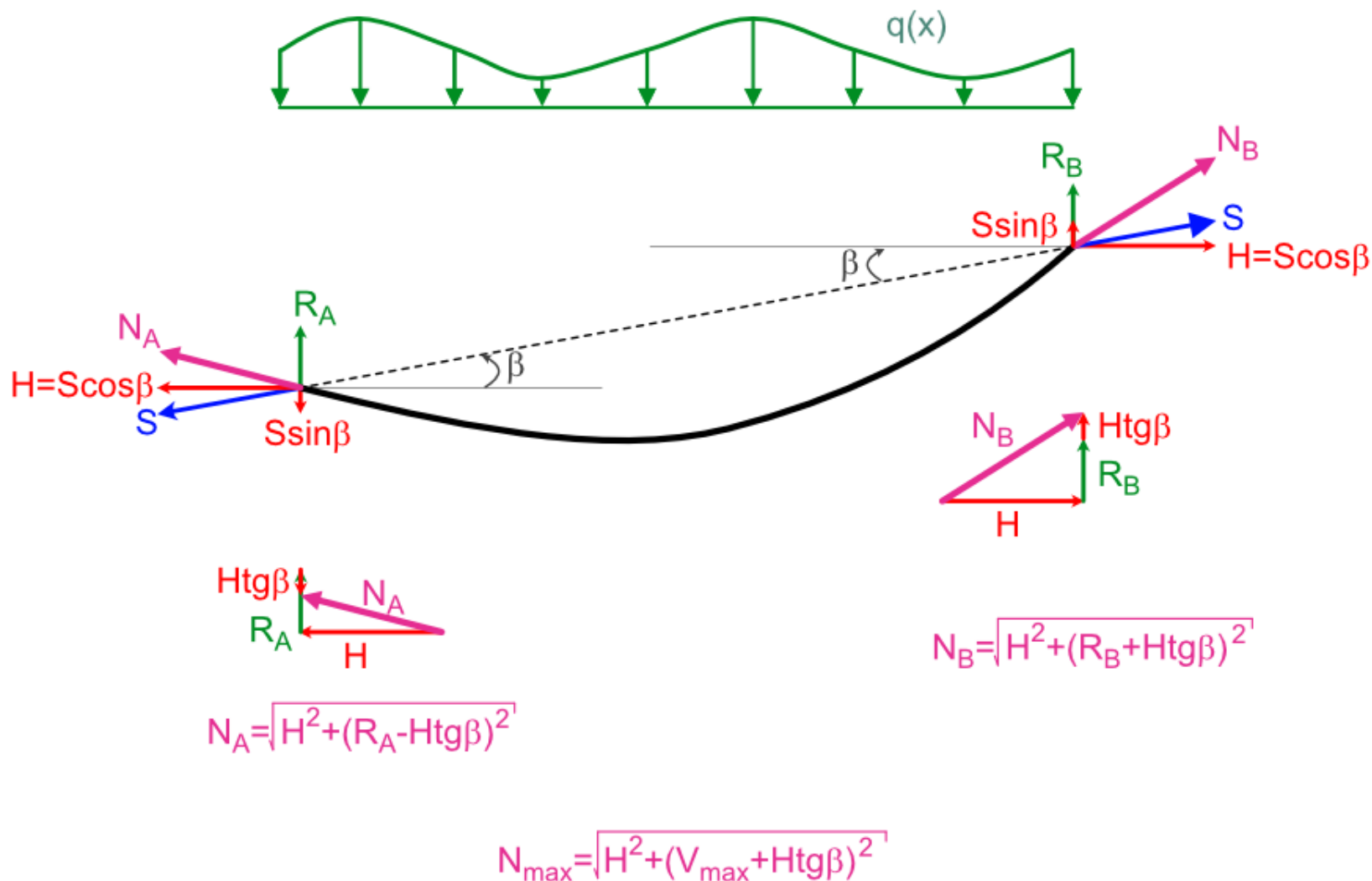
$$S^3 + S^2 EA \left[ 1 - \frac{1}{s_0} \left( \frac{L}{\cos\beta} - \alpha_t \Delta T s_0 \right) \right] = \frac{EA \cos\beta}{2s_0} \int_0^L Q_b^2(x) dx \quad (6)$$



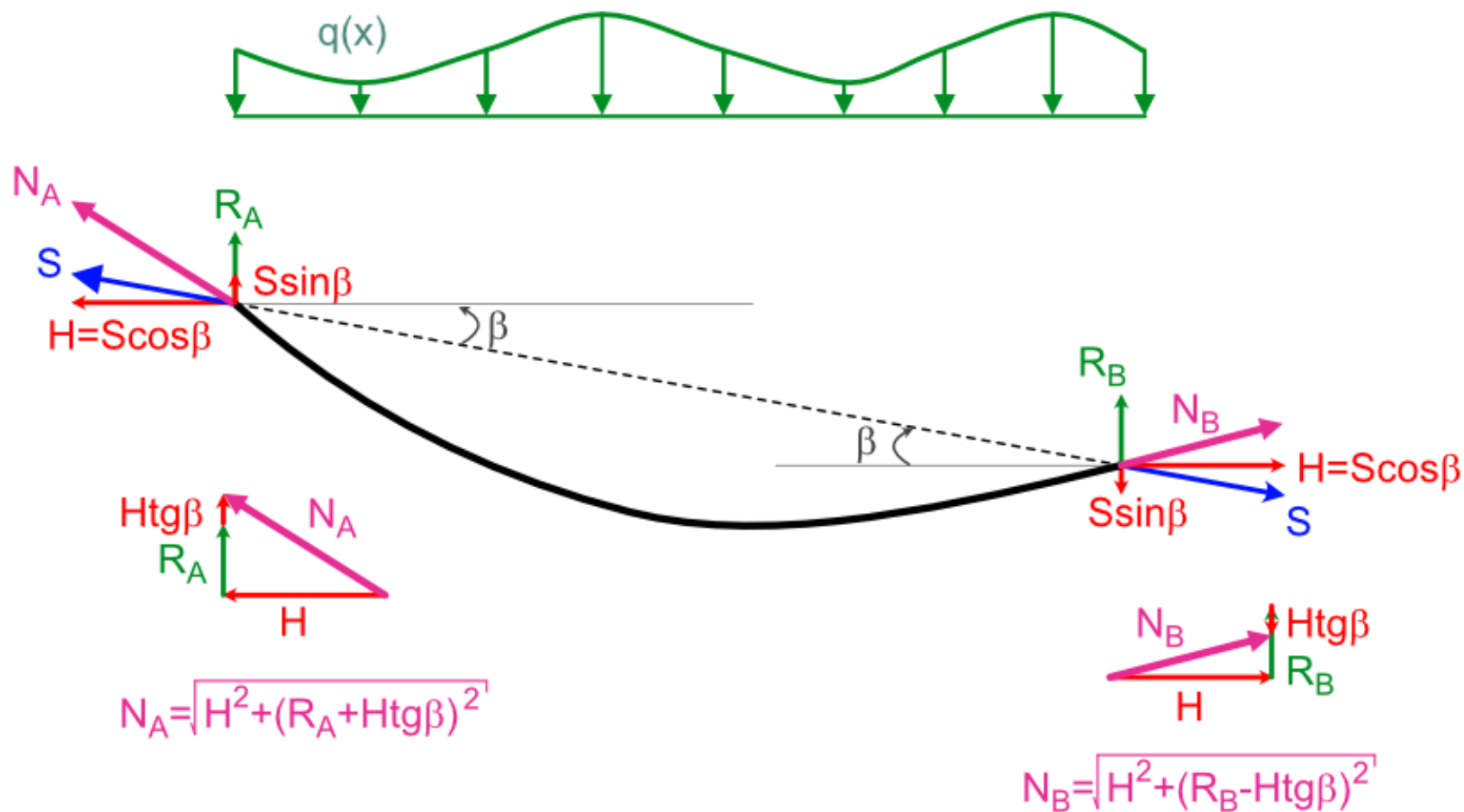
### 3. Analiza porównawcza



## 4. Obliczanie siły osiowej w cięgnie



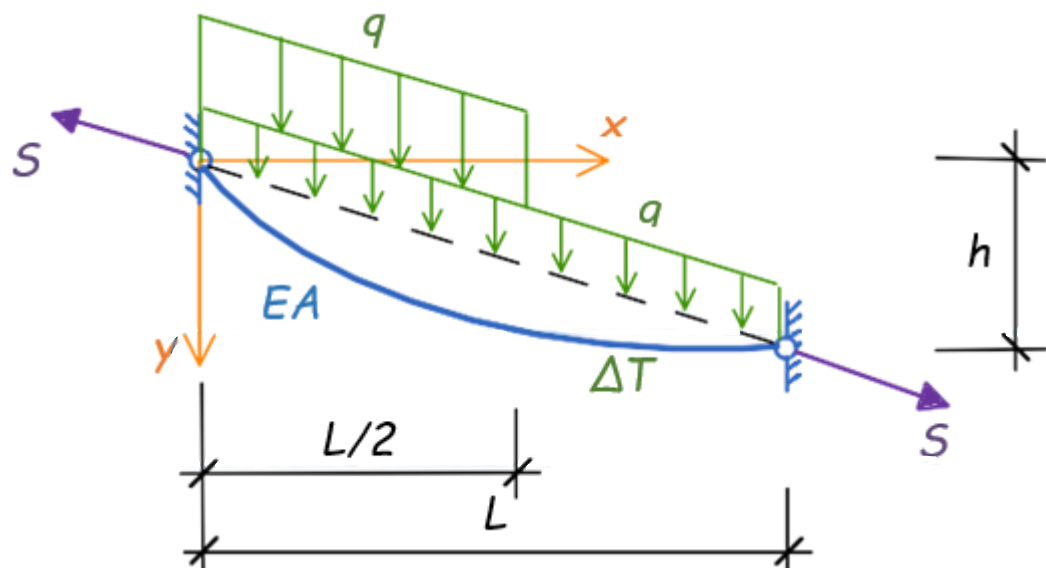
## 4. Obliczanie siły osiowej w cięgnie



$$N_{\max} = \sqrt{H^2 + (V_{\max} + H \tan \beta)^2}$$

## 5. Przykład obliczeniowy

Rozpatrzmy pojedyncze cięgno o cięciwie ukośnej obciążone nierównomiernie wzdłuż cięciwy i poddane działaniu temperatury.



Dane:

$$L = 34\text{m}, \quad h = 10\text{m},$$

$$\Delta T = -30^\circ\text{C}, \quad q = 8\text{kN/m}$$

Przyjęto:

$$E_c = 160\text{ GPa}$$

$$A_c = 634\text{mm}^2$$

$$EA_c = 62010\text{ kN};$$

$$m_c = 5,3\text{kq/m}$$

$$S_m = 30\text{ kN};$$

Lina Pfeifer PV90 (lina typu zamkniętego)

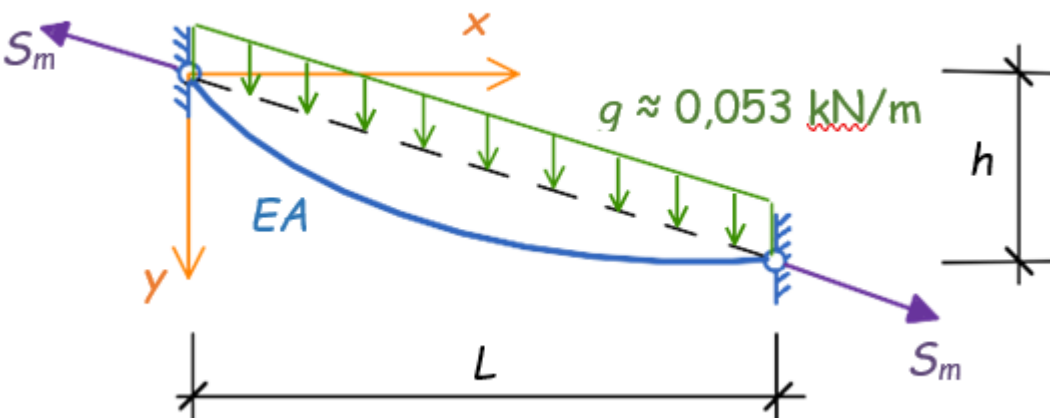
Nośność obliczeniowa:  $F_{Rd} = 555\text{ kN}$



$$\beta = \arctg\left(\frac{h}{L}\right) = 16,4^\circ$$

# 5. Przykład obliczeniowy

## 1. FAZA MONTAŻU - równanie sześciennne



Ze wzoru Simpsona mamy:

$$\int_0^L Q_b^2(x) dx = \frac{q_{rzut}^2 L^3}{12} = \frac{q^2 L^3}{12 \cos^2 \beta}$$

$$S_m^3 + S_m^2 EA \left[ 1 - \frac{L}{s_o \cdot \cos \beta} \right] = \frac{EA \cdot \cos \beta}{2 s_o} \int_0^L Q_b^2(x) dx$$

$$(30kN)^3 + (30kN)^2 \cdot 101440kN \left[ 1 - \frac{34m}{s_o \cdot \cos(16,4^\circ)} \right] = \frac{101440kN \cdot \left( \frac{0,053kN}{m} \right)^2 (34m)^3}{24 \cdot s_o \cdot \cos(16,4^\circ)}$$

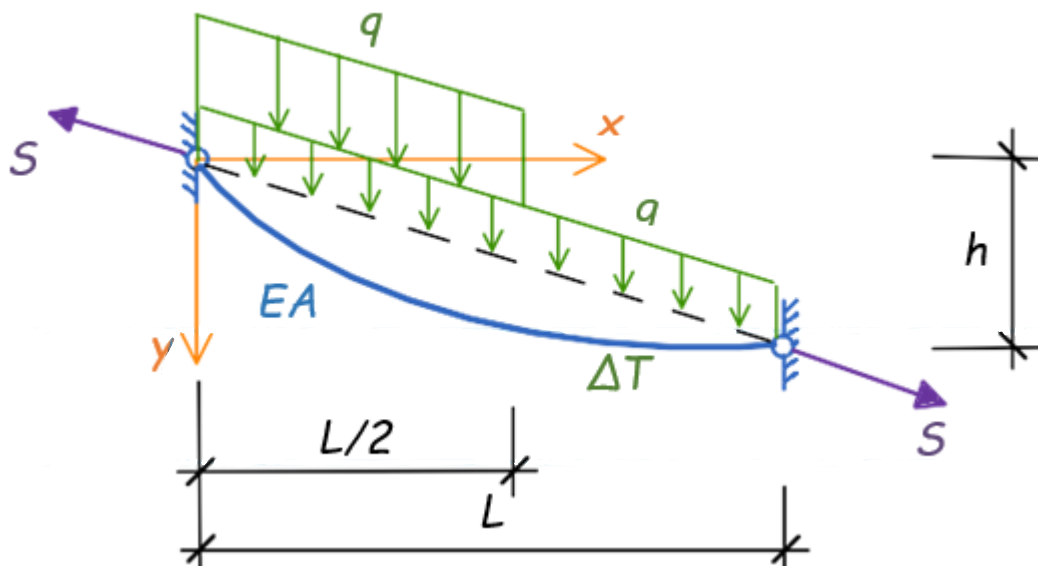
$$s_o = 35,437m$$

$$\Delta s_s = \frac{S s_o}{EA} = 10,5mm$$



## 4. Przykład obliczeniowy

### 2. FAZA EKSPLOATACJI



Modyfikacja długości początkowej  $s_0$  z uwagi na działanie temperatury:

$$\begin{aligned} s_{0,t} &= s_0(1 + \alpha_t \Delta T) \\ &= 35,437m \cdot \left[ 1 + 1,2 \cdot \frac{10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot (-30^{\circ}\text{C}) \right] \\ &= 35,437m \cdot 0,99964 = 35,424m \end{aligned}$$

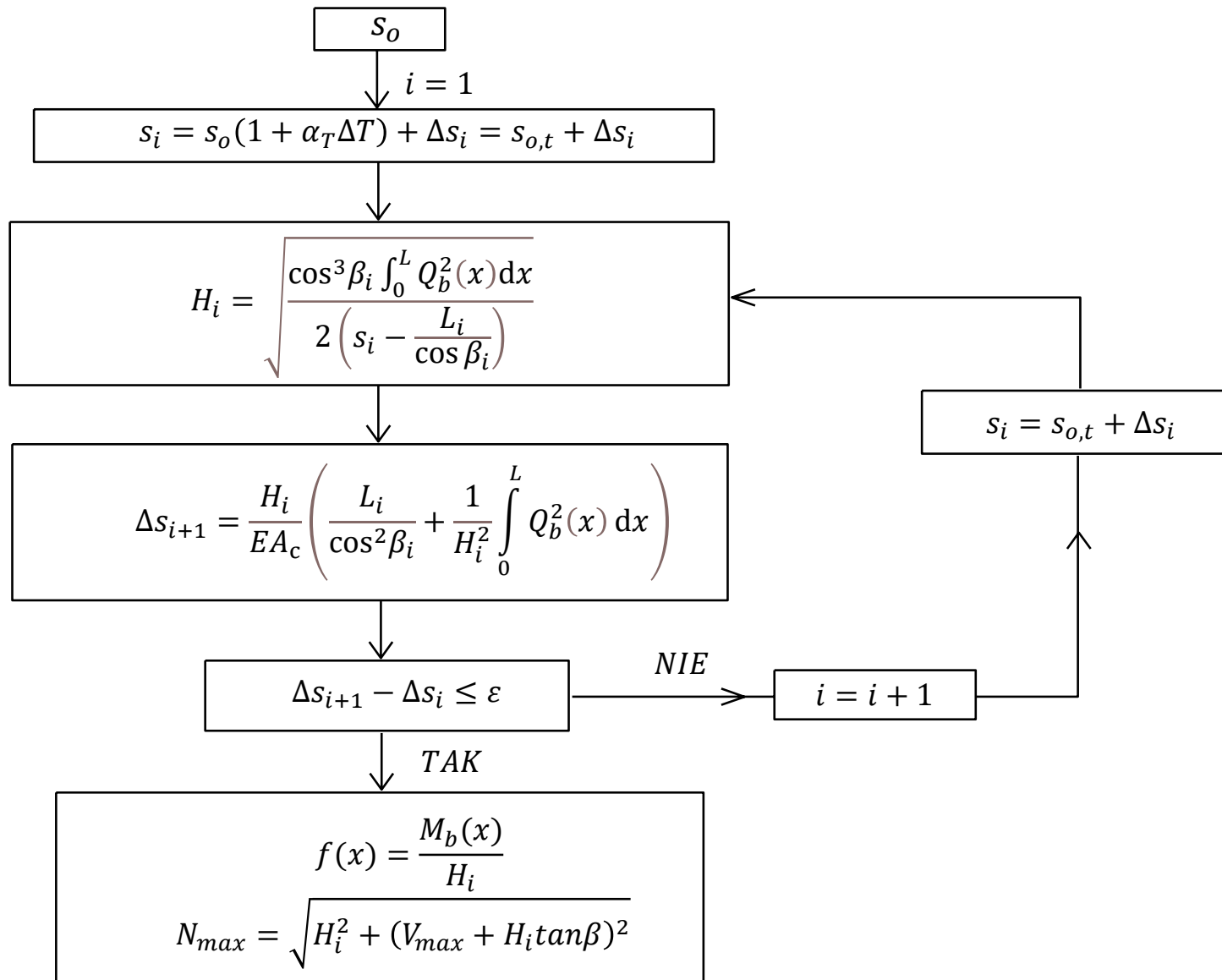
Ponieważ

$$s_{0,t} - \frac{L}{\cos\beta} = -0,015 < 0$$

Więc długość cięgna w pierwszej iteracji należy zwiększyć tak, aby procedura mogła wystartować.

Dobór wartości początkowej  $s_0$  wpływa na szybkość zbieżności procesu iteracyjnego.

# Procedura iteracyjna





## 5. Przykład obliczeniowy

$$Q_b = Q_{b,g} + Q_{b,q} \rightarrow Q_b^2 = Q_{b,g}^2 + 2 \cdot Q_{b,g} \cdot Q_{b,q} + Q_{b,q}^2$$

Stąd:

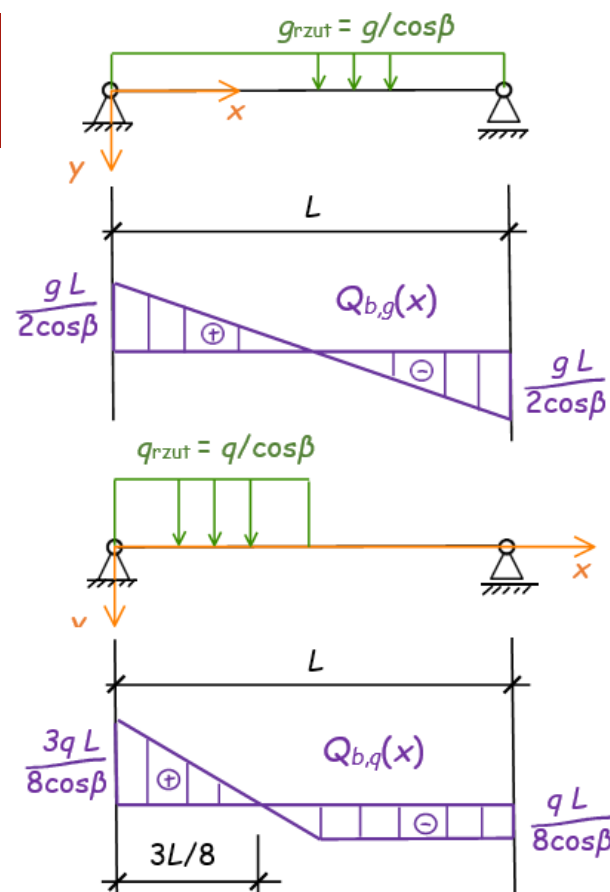
$$\int_0^L Q_b^2(x) dx = \int_0^L Q_{b,g}^2(x) dx + 2 \int_0^L Q_{b,g}(x) \cdot Q_{b,q}(x) dx + \int_0^L Q_{b,q}^2(x) dx$$

$$\int_0^L Q_{b,g}^2(x) dx = \frac{L}{6} \left[ \left( \frac{gL}{2\cos\beta} \right)^2 + 4 \cdot 0^2 + \left( -\frac{gL}{2\cos\beta} \right)^2 \right] = \frac{g^2 L^3}{12\cos^2\beta}$$

$$\int_0^L Q_{b,q}^2(x) dx = \frac{L}{12} \left[ \left( \frac{3qL}{8\cos\beta} \right)^2 + 4 \cdot \left( \frac{qL}{8\cos\beta} \right)^2 + \left( -\frac{qL}{8\cos\beta} \right)^2 \right] + \frac{L}{2} \left( -\frac{qL}{8\cos\beta} \right)^2 = \frac{5q^2 L^3}{1292\cos^2\beta}$$

$$2 \int_0^L Q_{b,g}(x) \cdot Q_{b,q}(x) dx$$

$$= 2 \left\{ \frac{L}{12} \left[ \frac{qL}{2\cos\beta} \cdot \frac{3qL}{8\cos\beta} + 4 \cdot \frac{qL}{4\cos\beta} \cdot \frac{qL}{8\cos\beta} + 0 \cdot \frac{-qL}{8\cos\beta} \right] + \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{-qL}{2\cos\beta} \cdot \frac{-qL}{8\cos\beta} \right\} = \frac{gqL^3}{12\cos^2\beta}$$





## 5. Przykład obliczeniowy

Ostatecznie otrzymuje się:

$$\int_0^L Q_b^2(x) dx = (16g^2 + 5q^2 + 16gq) \frac{L^3}{192 \cos^2 \beta}$$

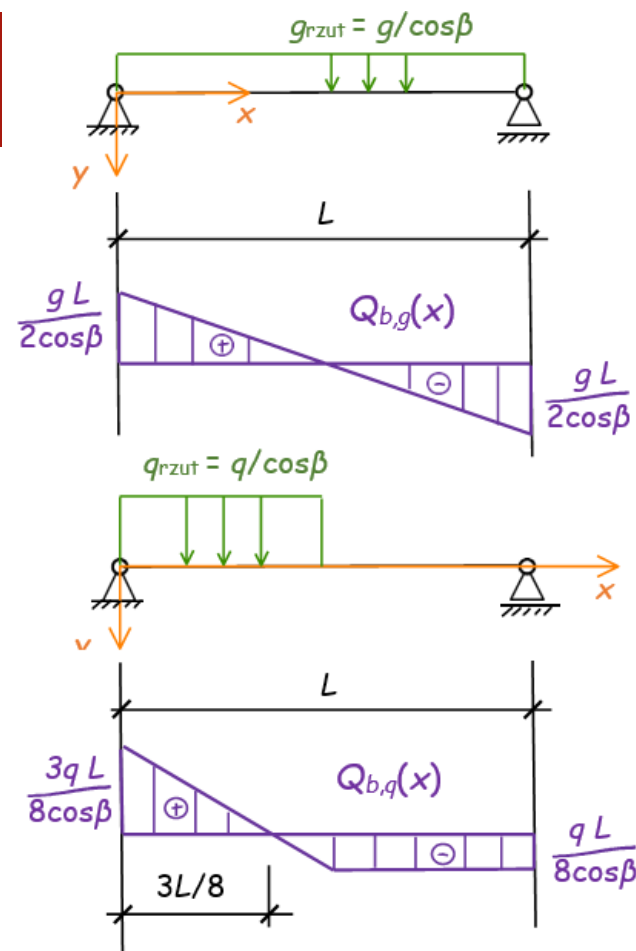
Miejsce zerowe funkcji  $Q_b(x)$

$$Q_b(x) = \frac{(4g + 3q)L}{8 \cos \beta} - (g + q)x = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow x = \frac{(4g + 3q)L}{8(g + q) \cos \beta} = 0,3918L = 13,320m$$

Wartość ekstremalna momentu zginającego:

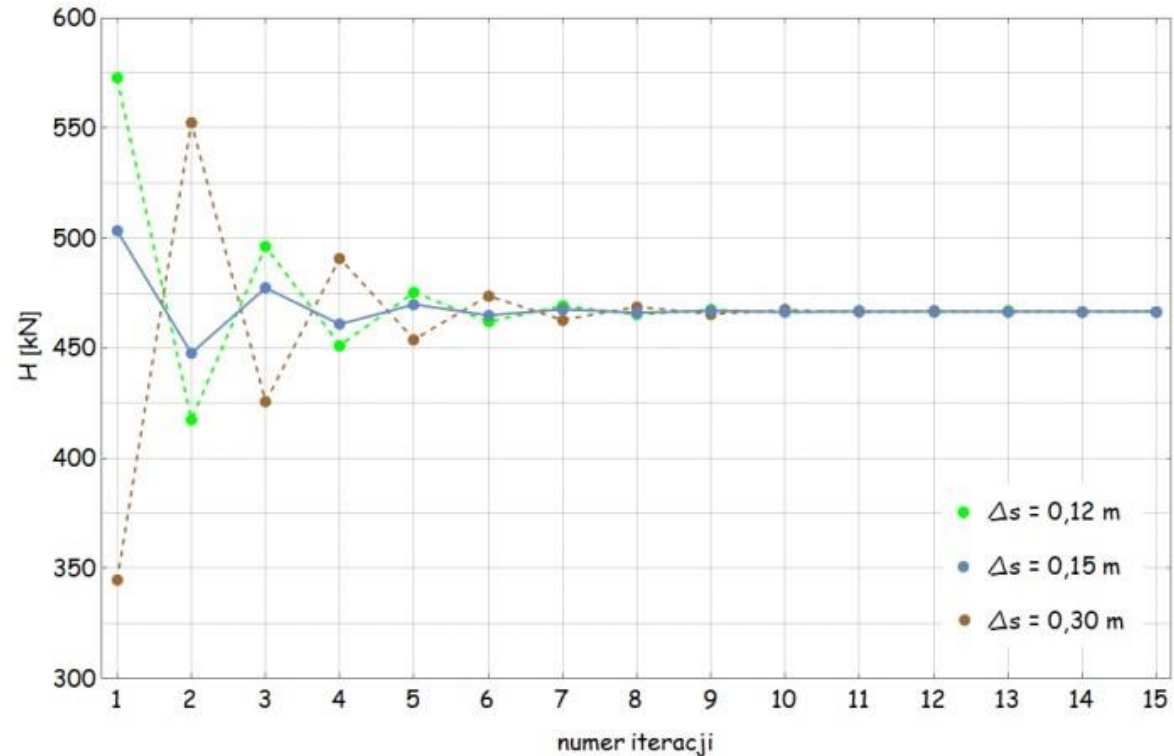
$$M_{max}(13,32m) = \left( \frac{gL}{2 \cos \beta} + \frac{3qL}{8 \cos \beta} \right) \cdot 13,32m - \left( \frac{q + g}{\cos \beta} \right) \cdot \frac{(13,32m)^2}{2} = 684,0459 kNm$$



## 5. Przykład obliczeniowy

$1^\circ s_1 = s_{0,t} + 0,15m$   
 $= 35,424 + 0,15m = 35,574m$   
 $H_1 = 503,403kN$   
 $\Delta s_2 = 0,185m$   
 $2^\circ s_2 = s_{0,t} + \Delta s_2$   
 $= 35,424 + 0,185m = 35,609m$   
 $H_2 = 447,78kN$   
 $\Delta s_3 = 0,165m$   
 $3^\circ s_3 = s_{0,t} + \Delta s_3$   
 $= 35,424 + 0,165m = 35,589m$   
 $H_3 = 477,427kN$   
 $\Delta s_4 = 0,175m$

$4^\circ s_4 = s_{0,t} + \Delta s_4 = 35,424 + 0,175m = 35,599m \quad H_4 = 460,933kN \quad \Delta s_5 = 0,169m$   
 $5^\circ s_5 = s_{0,t} + \Delta s_5 = 35,424 + 0,169m = 35,593m \quad H_5 = 469,899kN \quad \Delta s_6 = 0,173m$   
 $6^\circ s_6 = s_{0,t} + \Delta s_6 = 35,424 + 0,173m = 35,597m \quad H_6 = 464,961kN \quad \Delta s_7 = 0,171m$   
 $7^\circ s_7 = s_{0,t} + \Delta s_7 = 35,424 + 0,171m = 35,595m \quad H_7 = 466,179kN \quad \Delta s_8 = 0,172m$   
 $\dots\dots$   
 $15^\circ s_{15} = 35,569m \quad H_{15} = 466,711kN \quad \Delta s_{16} = 0,172m$

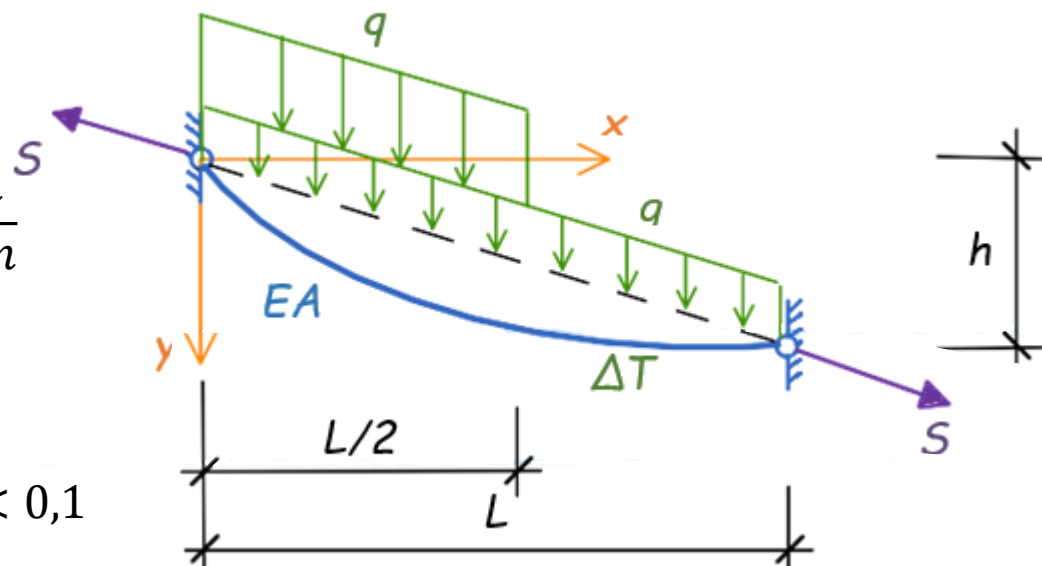


# 5. Przykład obliczeniowy

Maksymalny zwis cięgna:

$$f_{max} = \frac{M_b(13,32m)}{H_{15}} = \frac{684,05kNm}{466,711kNm} = 1,466m$$

$$\frac{f_{max,\perp}}{L_c} = \frac{1,466m \cdot \cos\beta}{35,44m} = 0,0397 < 0,1$$



Maksymalna siła osiowa:

$$V_{max} = V_A^g + V_A^q = \frac{gL}{2\cos\beta} + \frac{3qL}{8\cos\beta}$$

$$N_{max} = \sqrt{H_{15}^2 + (V_{max} + H_{15}\tan\beta)^2}$$

$$N_{max} = \sqrt{(466,711)^2 + (0,939 + 106,32 + 137,27)^2} = 526,89kN < 555kN$$



## 6. Podsumowanie

**Cięgno analizujemy dwuetapowo:**

### 1. Faza montażu, gdzie:

- Jako obciążenie analizuje się jedynie ciężar własny cięgna
- Wyznacza się z równania sześciennego opisującego równowagę statyczną cięgna w sposób bezpośredni (analitycznie) lub iteracyjnie
  - długość początkową nieobciążonego cięgna  $s_0$
  - lub montażową siłę naciągu  $S_m$ , która determinuje długość cięgna  $s_0$

### 2. Faza eksploatacji, gdzie:

- Do obliczeń uwzględnia się ciężar własny i zadane obciążenie czynne (obciążenie mechaniczne i niemechaniczne)
- Wyznacza się z równania sześciennego opisującego równowagę statyczną cięgna w sposób bezpośredni lub iteracyjnie:
  - Siłę osiową w cięgnie  $N$
  - siłę naciągu cięgna  $S$
  - wydłużenie sprężyste cięgna  $\Delta s$
  - długość cięgna obciążonego  $s$
  - zwis cięgna  $f$
  - reakcje podporowe w ustroju cięgnowym  $R$