



Politechnika Wrocławska

MECHANIKA BUDOWLI

Wykład 7 Konstrukcje cięgnowe o cięciwie poziomej

1

Prowadzący: dr inż. Olga Szyłko-Bigus

1. Ciężna – podstawowe informacje

Konstrukcja ciężnowa to układ, w którym działające obciążenia przenoszone są przez napięte ciężna, najczęściej w postaci różnego rodzaju lin lub prętów stalowych.

Modele i zastosowania układów ciężnowych

Ciężar własny:
linie energetyczne,
trakcje elektryczne



Obciążenie skupione:
kolejki linowe, wyciągi
narciarskie



Układy wiszące:
mosty wiszące,
przekrycia ciężnowe i
ciężnowo-membranowe



1. Ciężna – podstawowe informacje

Mówiąc o **elementach ciężnowych** mamy na myśli ciężna idealnie wiotkie, to znaczy takie, które przenoszą jedynie siły rozciągające, a co za tym idzie posiadają wyłącznie sztywność osiową EA. Takimi ciężnami będziemy się zajmować przez najbliższe 4 wykłady.

Drugą bardzo ważną cechą ciężien jest jej **geometryczna nieliniowość**. Ustroje ciężnowe są wrażliwe na zmiany kształtu! Nawet niewielkie deformacje konstrukcji mogą znacząco zmieniać wartości sił wewnętrznych. Ustroje ciężnowe analizowane są więc według teorii II lub III rzędu.

Równanie równowagi statycznej dla ustrojów ciężnowych jest nieliniowe a sztywność konstrukcji ciężnowej w istotny sposób zależy od wartości naciągu. Aby ciężno było zdolne przenosić jakiegokolwiek obciążenia poprzeczne musi w nim powstać siła rozciągająca: im większa jest to wartość tym sztywniejsze jest ciężno. Stąd na etapie projektowania dopiero się wstępną siłę naciągu regulując w ten sposób sztywność konstrukcji.

1. Ciężna – podstawowe informacje

Zalety konstrukcji ciężnowych:

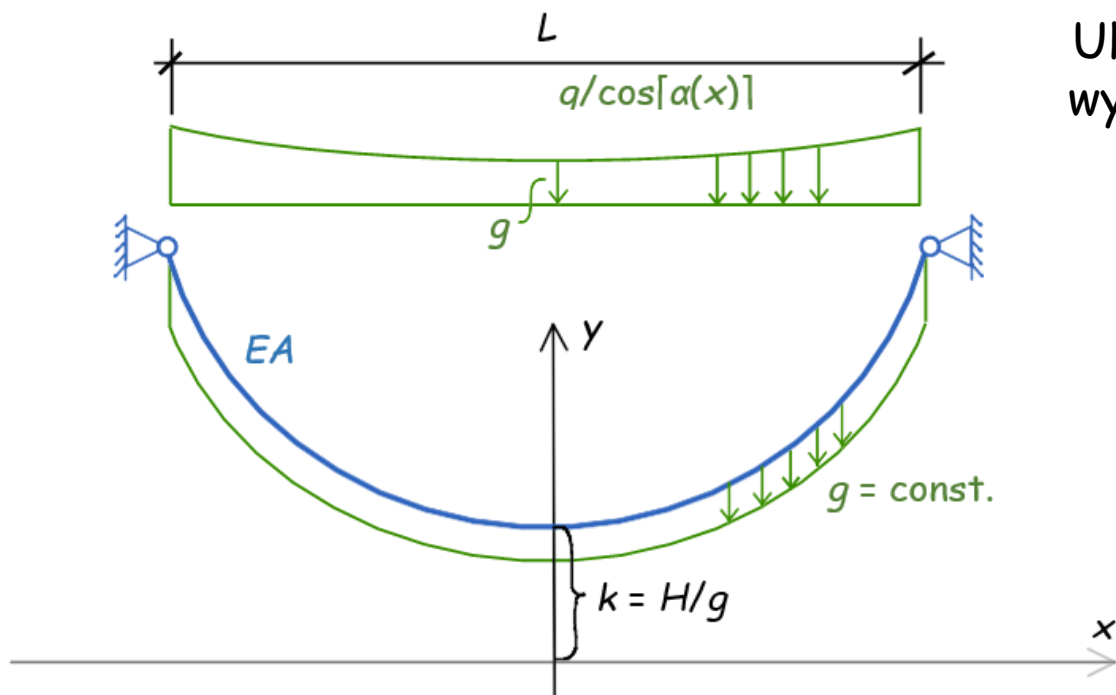
- Wytrzymałość
- lekkość
- elastyczność w kształtowaniu konstrukcji

Wady konstrukcji ciężnowych:

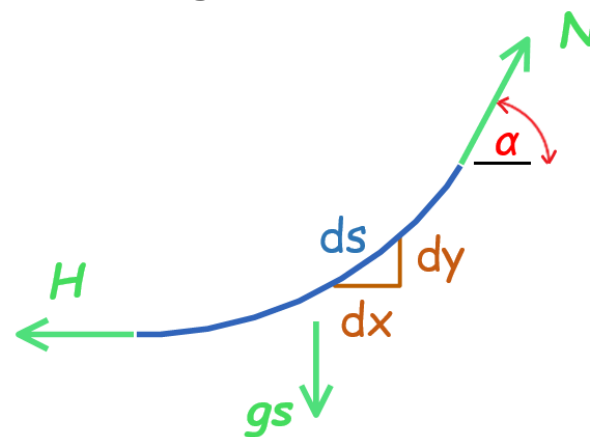
- geometryczna nieliniowość – ustroje ciężnowe są wrażliwe na zmiany kształtu i nawet niewielkie deformacje konstrukcji mogą znacząco zmienić wartości sił wewnętrznych – konieczność stosowania teorii II lub III rzędu.
- Sztywność konstrukcji ciężnowej w istotny sposób zależy od wartości naciągu – im większa siła tym sztywniejsze ciężno (na etapie projektowania dobiera się wstępną siłę naciągu regulując w ten sposób sztywność konstrukcji).

2. Ciężno nierozciągliwe

Nierozciągliwe ciężno obciążone wzdłuż długości



Układ sił działających na wycięty fragment ciężna o długości s



$$\alpha(x) = \frac{dy}{dx} = y'(x)$$

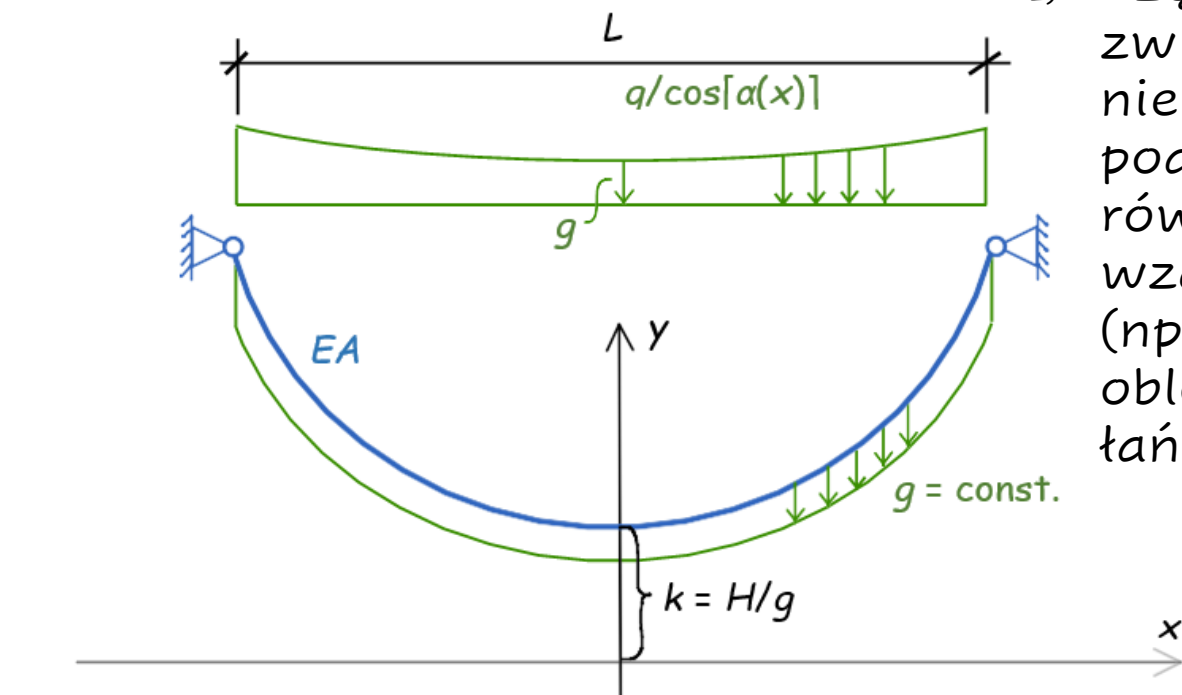
Aby rzutować obciążenie rozłożone wzdłuż osi ciężna musimy znać rozwiązanie statyczne i postać funkcji $y(x)$ opisującą zwis ciężna

2. Ciężno nierozciągliwe

Nierozciągliwe ciężno obciążone wzdłuż długości

- 1) Rzędne swobodnie zwisającego nierozciągliwego ciężna poddanego działaniu równomiernie rozłożonego wzdłuż długości obciążenia (np. ciężaru własnego, oblodzenia) opisuje krzywa łańcuchowa:

$$y(x) = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right)$$



$y(x)$ – krzywa zwisu ciężna- krzywa łańcuchowa

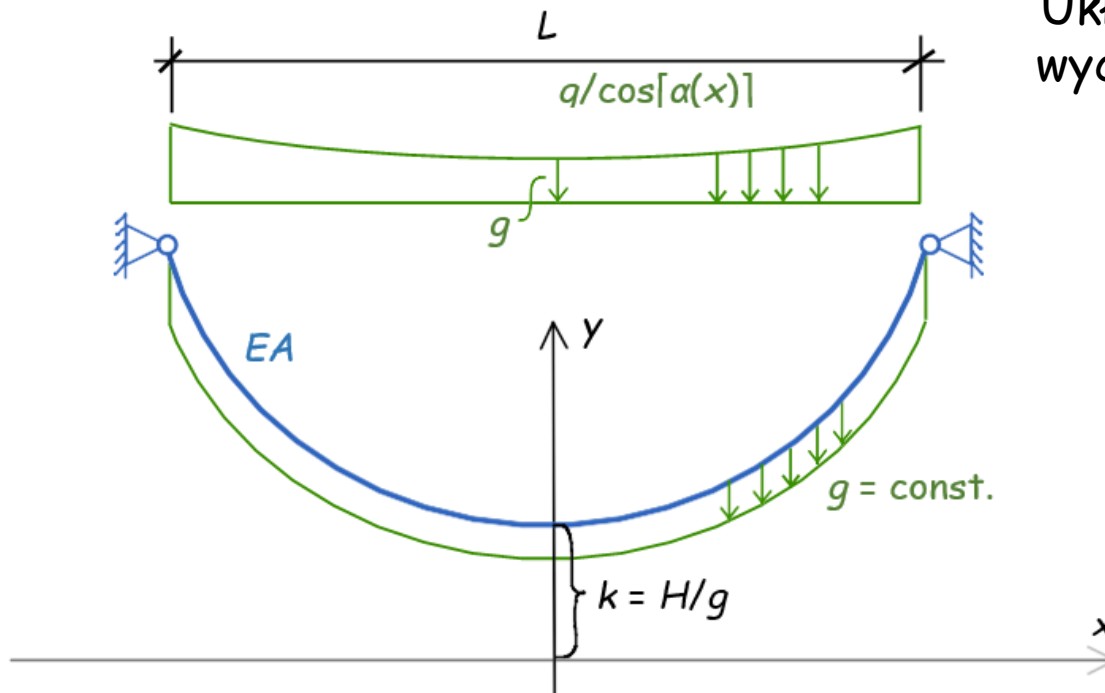
$s(x)$ – długość ciężna

$$s(x) = k \cdot \sinh\left(\frac{x}{k}\right)$$

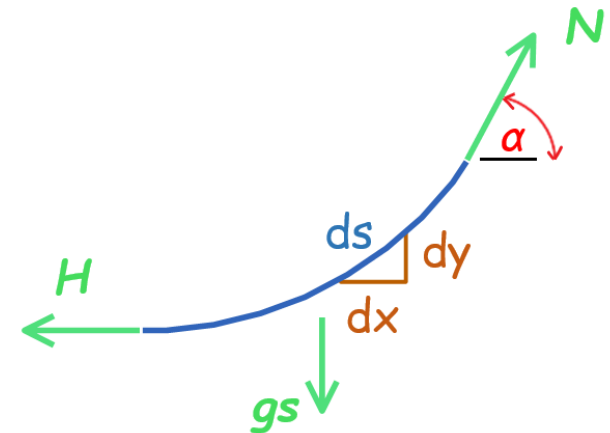
$$\left(s(x) = k \cdot \left(\sinh \frac{x_B}{k} - \sinh \frac{x_A}{k} \right) \right)$$

2. Ciężno nierozciągliwe

Nierozciągliwe ciężno obciążone wzdłuż długości



Układ sił działających na wycięty fragment ciężna o długości s



$$\sum X = 0$$

$$\begin{aligned} -H + N \cdot \cos \alpha &= 0 \\ H &= N \cdot \cos \alpha = \text{const.} \end{aligned}$$

Z warunku równowagi wynika, że składowa pozioma siły osiowej w ciężnie jest stała w każdym punkcie tego ciężna na całej długości przelotu.

2. Ciężno nierozciągliwe

Wnioski:

- 1) W sytuacji, gdy obciążenie działa wzdłuż osi ciężna, jego rozkład jest bezpośrednio związany z kształtem krzywej zwisu. Rozpoczynając zatem obliczenia statyczne ciężna zawieszonego na podporach o różnej wysokości nie jesteśmy w stanie na starcie nawet określić położenia wypadkowej zadanego obciążenia.
- 2) Z warunku równowagi wynika, że składowa pozioma siły osiowej w ciężnie jest stała w każdym punkcie tego ciężna na całej długości przelotu.
- 3) Rzędne swobodnie zwisającego nierozciągliwego ciężna poddanego działaniu równomiernie rozłożonego wzdłuż długości obciążenia (np. ciężaru własnego, oblodzenia) opisuje krzywa łańcuchowa:

$$y(x) = k \cdot \cosh\left(\frac{x}{k}\right)$$

a długość ciężna

$$s(x) = k \cdot \sinh\left(\frac{x}{k}\right) \quad \left(s(x) = k \cdot \left(\sinh \frac{x_B}{k} - \sinh \frac{x_A}{k} \right) \right)$$

3. Ciężno rozciągliwe

Rozciągliwe ciężno obciążone wzdłuż długości

Ponieważ nawet niewielkie zmiany długości ciężna w istotny sposób wpływają na jego odpowiedź statyczną, dlatego też konieczne jest uwzględnianie w obliczeniach zarówno wydłużenia sprężystego jak i przyrostu długości spowodowanego działaniem temperatury. Stąd możemy zapisać, że łączna długość obciążonego ciężna:

$$s = s_0 + \Delta s_s + \Delta s_t \quad (1)$$

przy czym s_0 jest początkową długością ciężna przed montażem (nienapiętego). Δs_s opisuje wydłużenie sprężyste, a Δs_t przyrost długości spowodowany zmianą temperatury.

Długość ciężna wynika z zależności $ds^2 = dx^2 + dy^2$

$$s = \int_0^s ds = \int_0^s \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^s \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (2)$$

1. Ciężna

Równanie ciężna obciążonego wzdłuż poziomej cięciwy

Ponieważ przyjmowanie, że obciążenie działa wzdłuż osi ciężna znacznie komplikuje obliczenia, zazwyczaj zakłada się, że zwis ciężna jest mały, tzn.

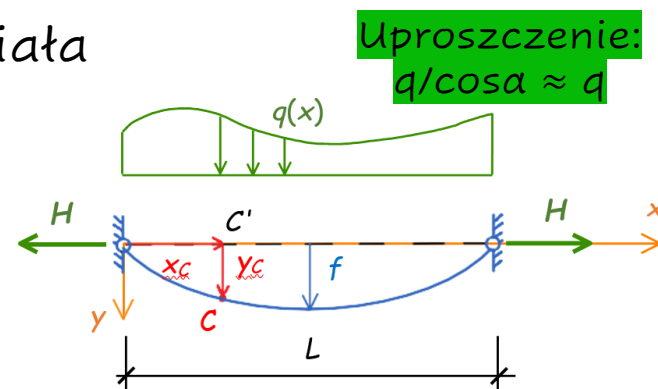
$f/L \leq 1/10$ w wyniku czego $q/\cos\alpha \approx q$.

Przyjęcie takiego założenia prowadzi do analogii belkowej. W idealnie wiotkim ciężnie moment zginający w dowolnym punkcie na długości jest równy zero. Zatem możemy zapisać, że $M_{z,C} = 0$. W ogólnym przypadku:

$$M_b(x) - H \cdot y(x) = 0 \rightarrow H = \frac{M_b(x)}{y(x)} \quad (3)$$

gdzie przez $M_b(x)$ oznaczono moment obliczony jak dla belki swobodnie podpartej o długości L . W szczególnym przypadku, gdy $q(x) = \text{const.}$, otrzymujemy wzory na naciąg i strzałkę zwisu

$$H = \frac{qL^2}{8f}, \quad f = \frac{qL^2}{8H} \quad (4)$$





1. Ciężna

Ze wzoru (3) wynika postać funkcji opisującej krzywą zwisu ciężna

$$y(x) = \frac{M_b(x)}{H} \quad (5)$$

Po podstawieniu (5) do (2) długość ciężna

$$s = \int_0^s ds = \int_0^s \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^s \sqrt{1 + y'^2} dx \quad (6)$$

Po rozwinięciu funkcji podcałkowej w szereg Taylora w otoczeniu punktu zero z dokładnością do dwóch wyrazów (aproksymacja dopuszczalna przy małym zwisie) otrzymamy

Uproszczenie:

$$\sqrt{1 + a^2} \cong 1 + 0,5 a^2$$

$$s = \int_0^s \left(1 + \frac{1}{2} y'^2 \right) dx \quad (7)$$

1. Ciężna

Uwzględniając definicję opisaną wzorem (5), długość ciężna możemy zapisać jako:

$$s = L + \frac{1}{2H^2} \int_0^L Q_b^2(x) dx \quad (8)$$

gdzie $Q_b(x)$ jest siłą tnącą w zastępczej belce.

Jeśli dodatkowo założymy, że z uwagi na mały zwis, na wydłużenie sprężyste ciężna wpływa tylko składowa pozioma siły osiowej, to możemy zapisać

Uproszczenie:
Przyjęcie H zamiast $N(x)$

$$\Delta s_s = \frac{H s_o}{EA} \quad (9)$$

Zmiana długości ciężna spowodowana działaniem przyrostu temperatury ΔT jest wprost proporcjonalna do współczynnika rozszerzalności termicznej oraz początkowej długości ciężna

$$\Delta s_t = \alpha_t \cdot \Delta T \cdot s_o \quad (10)$$

3. Ciężno rozciągliwe

Po uwzględnieniu zmian temperatury zgodnie z (16) oraz wzorów (14) i (15) równanie (1) przyjmuje finalną formę

$$H^3 + H^2 EA \left[1 - \frac{1}{s_o} (L - \alpha_t \Delta T s_o) \right] = \frac{EA}{2s_o} \int_0^L Q_b^2(x) dx \quad (17)$$

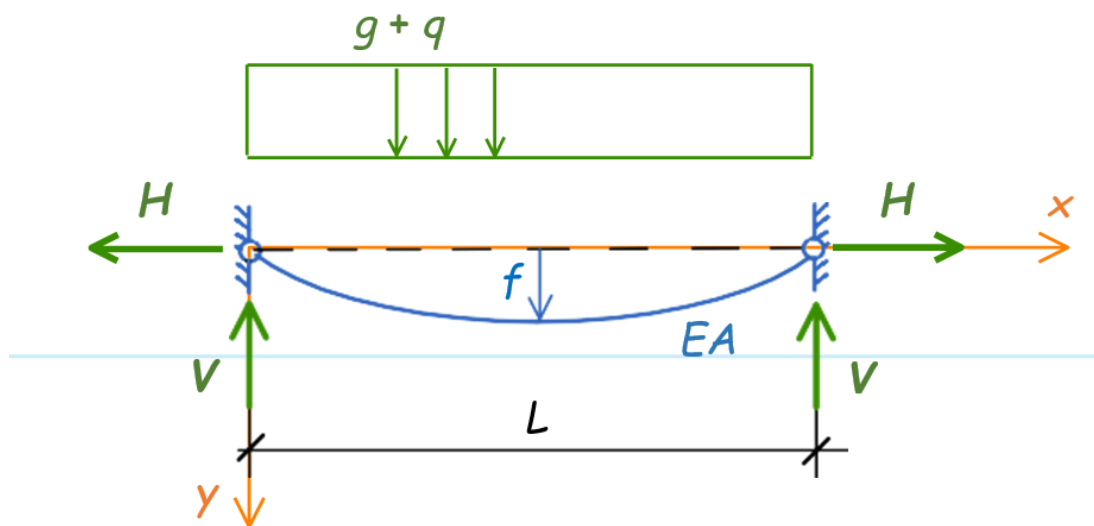
W szczególnym przypadku, gdy obciążenie jest równomiernie rozłożone, tj. $q(x) = q$, otrzymujemy

$$H^3 + H^2 EA \left[1 - \frac{1}{s_o} (L - \alpha_t \Delta T s_o) \right] = \frac{EA q^2 L^3}{24 s_o} \quad (18)$$

Pomimo licznych uproszczeń, równanie (17) wystarczająco dobrze opisuje zachowanie się ciężna w przypadku, gdy $z_{\text{wis}}/L \leq 1/10$.

4. Ciężna - Przykład

Dla ciężna o ciężarze poziomej i obciążeniu przedstawionym na schemacie poniżej należy obliczyć długość początkową ciężna, sprawdzić nośność ciężna oraz zwis maksymalny



Dane:

$$L = 40 \text{ m}$$

$$q = 2,5 \text{ kN/m}$$

Przyjęto:

$$H_m = 20 \text{ kN}$$

lina Pfeifer PE 60:

$$A_{\text{met}} = 477 \text{ mm}^2$$

$$D_{\text{liny}} = 28,6 \text{ mm}$$

$$cw = 3,7 \text{ kg/m}$$

$$E = 130 \text{ GPa}$$



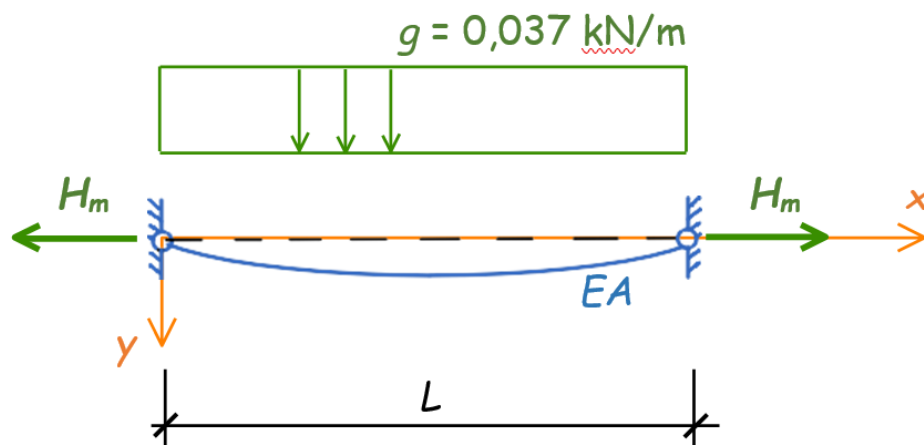
(lina splotkowa jednozwita 1x61):

Nośność obliczeniowa: $F_{Rd} = 350 \text{ kN}$



4. Ciężna - Przykład

1. FAZA MONTAŻU



$$E_c = 130 \text{ GPa} = 130 \cdot 10^6 \text{ kPa}$$

$$A_c = 477 \text{ mm}^2 = 477 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$$

$$EA_c = 62010 \text{ kN};$$

$$H_m = 20 \text{ kN};$$

$$g \cong \frac{m_c}{100} = 0,037 \text{ kN/m}$$

$$H^3 + H^2 EA \left[1 - \frac{L}{s_0} \right] = \frac{EAg^2 L^3}{24s_0}$$

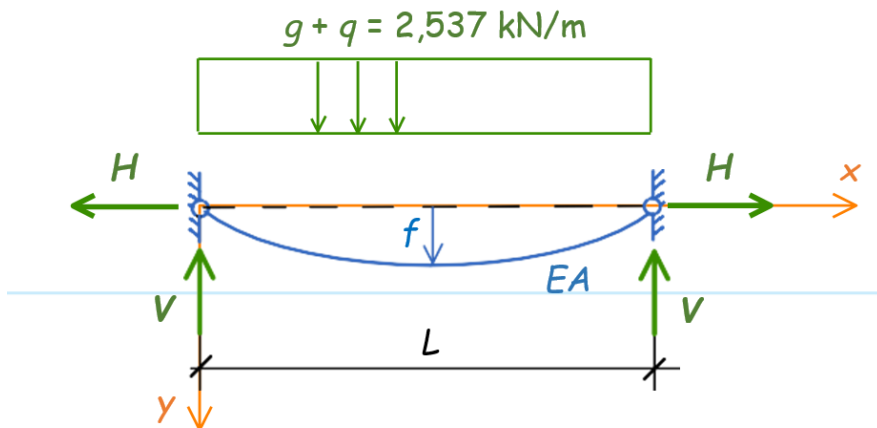
$$(20 \text{ kN})^3 + (20 \text{ kN})^2 \cdot 62010 \text{ kN} \cdot \left[1 - \frac{40 \text{ m}}{s_0} \right] = \frac{62010 \text{ kN} \cdot \left(\frac{0,037 \text{ kN}}{\text{m}} \right)^2 (40 \text{ m})^3}{24 \cdot s_0}$$

$$s_0 = 39,996226 \text{ m}$$



4. Ciężna - Przykład

2. FAZA EKSPLOATACJI



Wyznaczenie naciągu:

$$H^3 + H^2 EA \left[1 - \frac{L}{s_o} \right] = \frac{EA g^2 L^3}{24 s_o}$$

$$H^3 + H^2 \cdot 62010 \text{ kN} \cdot \left[1 - \frac{40 \text{ m}}{39,996226 \text{ m}} \right] = \frac{62010 \text{ kN} \cdot \left(\frac{2,537 \text{ kN}}{\text{m}} \right)^2 (40 \text{ m})^3}{24 \cdot 39,996226 \text{ m}}$$

$H = 300,51 \text{ kN}$ (pozostałe pierwiastki są zespolone)

Maksymalna siła osiowa w ciężnie:

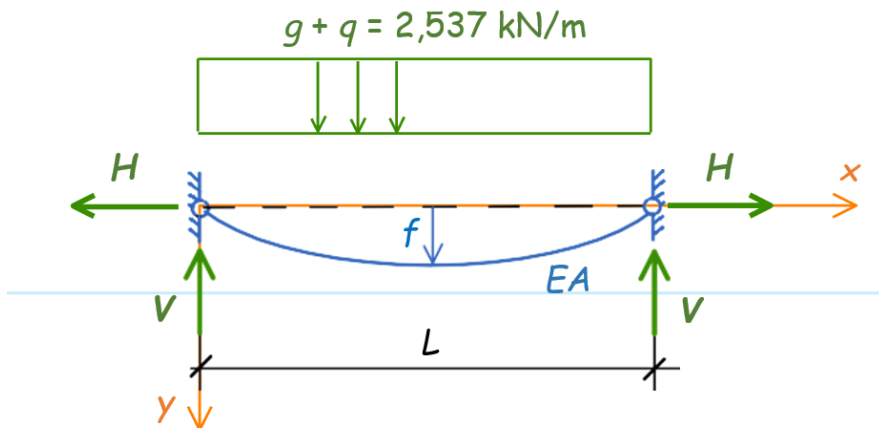
$$N_{max} = \sqrt{V^2 + H^2}$$

$$V = 0,5 \cdot (q + g) \cdot L = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,573 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot 40 \text{ m} = 50,74 \text{ kN}$$

$$N_{max} = \sqrt{(50,74 \text{ kN})^2 + (300,51 \text{ kN})^2} = 304,76 \text{ kN} < 350 \text{ kN} = f_{RD}$$

4. Ciężna - Przykład

2. FAZA EKSPLOATACJI



Maksymalna siła osiowa w ciężnie:

$$N_{max} = \sqrt{V^2 + H^2}$$

$$V = 0,5 \cdot (q + g) \cdot L = \frac{1}{2} \cdot \frac{2,573 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot 40 \text{ m} = 50,74 \text{ kN}$$

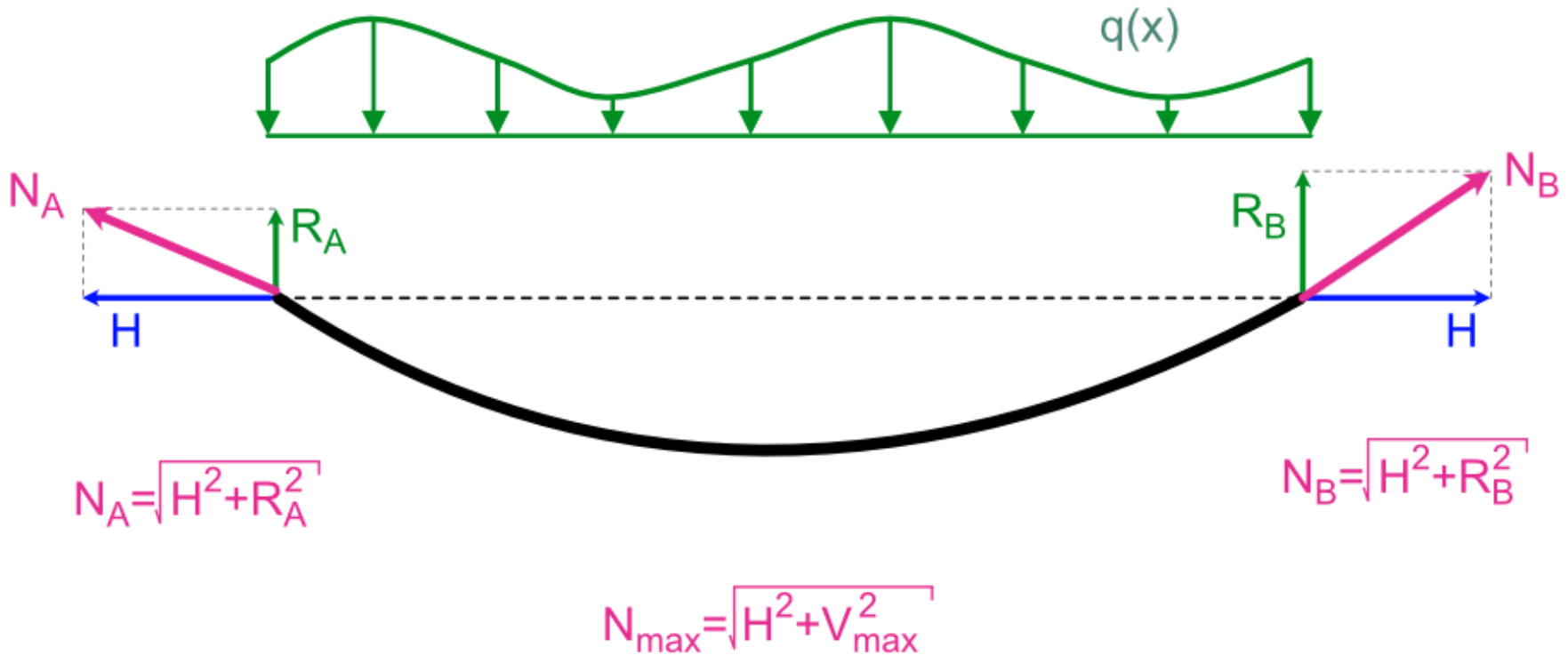
$$H = 300,51 \text{ kN}$$

$$N_{max} = \sqrt{(50,74 \text{ kN})^2 + (300,51 \text{ kN})^2} = 304,76 \text{ kN} < 350 \text{ kN} = f_{RD}$$

Strzałka zwisu:

$$f = \frac{(q + g)L^2}{8H} = \frac{2,537 \text{ kN/m} \cdot (40 \text{ m})^2}{8 \cdot 300,51 \text{ kN}} = 1,688 \text{ m} < 0,1L = 4 \text{ m} \quad \left(\frac{f}{L} < 0,1 \right)$$

5. Oznaczenia i założenia



N_i - rozkład siły osiowej w cięgnie

H - składowa pozioma siły osiowej

R_i - reakcje podporowe w ustroju cięgnowym

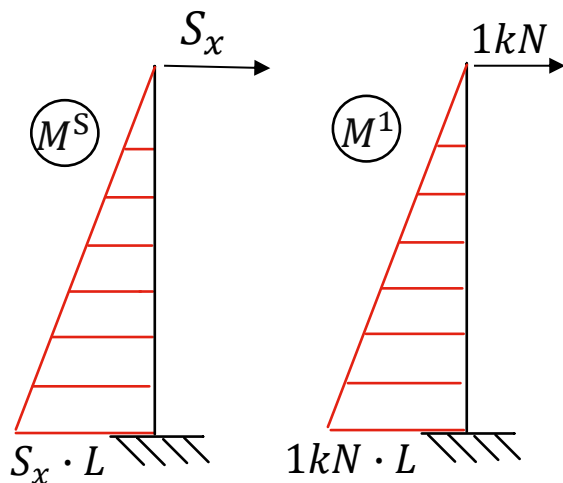
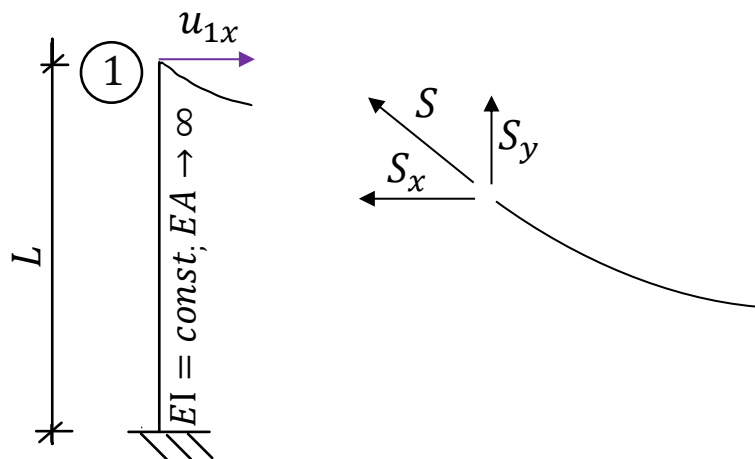
5. Oznaczenia i założenia

Założenia:

1. Analizowane zagadnienie jest zagadnieniem płaskim
2. Analizowane są cięgna wiotkie – nie przenoszące momentów zginających – możliwość stosowania analogi belkowej, która umożliwia powiązanie funkcji zwisu cięgna z momentem zginającym liczonym w belce prostej obciążonej obciążeniem zgodnym z obciążeniem cięgna na długości przelotu.
3. Analizowane są cięgna o małym zwisie $f \leq 0,1L$ – obciążenie rozłożone działające wZadanie 5: Układ przestrzenny SN - obliczenie przemieszczeń od wpływów mechanicznychdłuż osi cięgna jest w przybliżeniu równe obciążeniu rozłożonemu wzdłuż cięciwycięgna oraz można przyjmować wydłużenie sprężyste zależne od stałej siły naciągu, a nie od zmiennej siły osiowej
4. Analizowane są cięgna obciążone jedynie obciążeniem równoległym do osi pionowej – składowa pozioma siły osiowej H oraz siły naciągu jest stałą na długości przelotu



6. Przemieszczenia głowic słupów

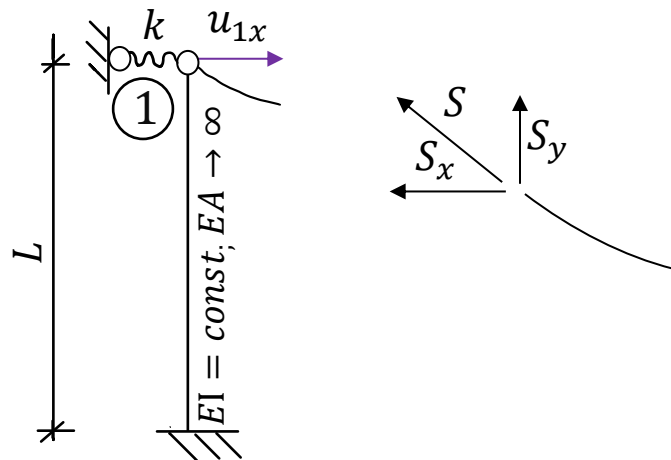


$$1\text{ kN} \cdot u_{1x} = \int_0^L \frac{M^1 \cdot M^S}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot 1\text{ kN} \cdot L \cdot \frac{2}{3} \cdot S_x$$

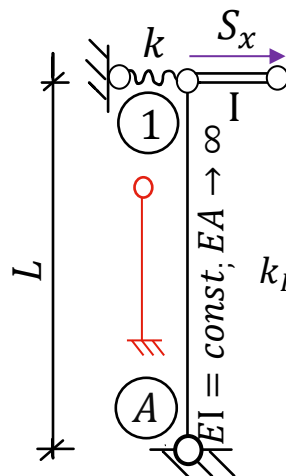
$$u_{1x} = \frac{S_x \cdot L^3}{3EI}$$

6. Przemieszczenia głowic słupów

Przemieszczenie obliczone metodą przemieszczeń

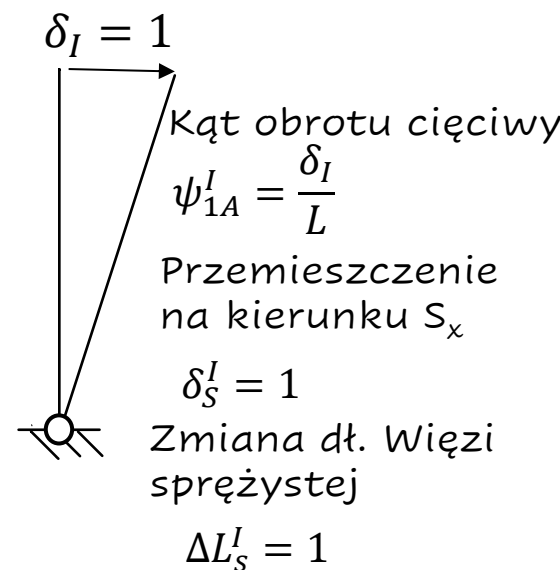


1. Układ podstawowy metody przemieszczeń



$$k_{II} \cdot \delta_I + k_{IS} = 0$$

2. Pierwszy stan translacyjny



3. Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych

$$\mathbf{K}_{\delta\delta}; \quad k_{\alpha\beta} = \sum_{ij} d_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^\alpha \cdot \psi_{ij}^\beta + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^\beta,$$

$$k_{II} = 3 \frac{EI}{L} \cdot \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{L} + k \cdot 1 \cdot 1 = \frac{3EI}{L^3} + k$$

$$\mathbf{K}_{\delta o}; \quad k_{\alpha F} = - \sum_{ij} (M_{ij}^{oF} + M_{ji}^{oF}) \cdot \psi_{ij}^\alpha - \sum_f F_f \cdot \delta_f^\alpha$$

$$k_{I0} = -S_x \cdot 1 = -S_x$$

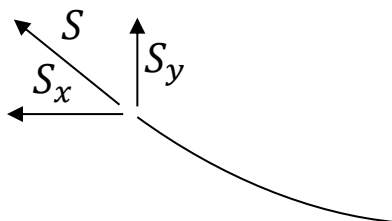
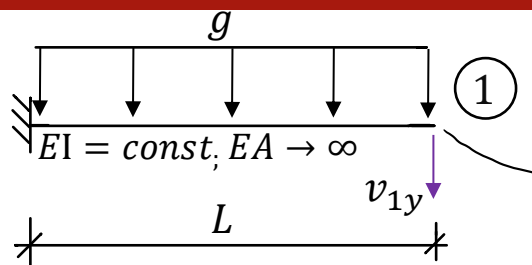
4. Obliczenie przemieszczenia

$$\left[\frac{3EI}{L^3} + k \right] \cdot \delta_I - S_x = 0$$

$$u_{1x} = \delta_I = \frac{S_x}{\frac{3EI}{L^3} + k}$$



6. Przemieszczenia głowic rygli



$$1\text{kN} \cdot u_{1y}^P = \int_0^L \frac{M^1 \cdot M^P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot L \cdot 1\text{kN} \cdot L \cdot \frac{2}{3} \cdot P \cdot L$$

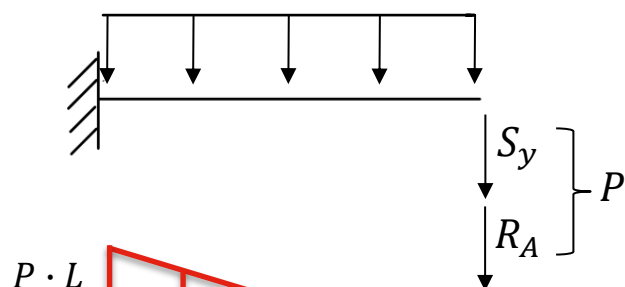
$$u_{1y}^P = \frac{P \cdot L^3}{3EI}$$

$$1\text{kN} \cdot u_{1y}^q = \int_0^L \frac{M^1 \cdot M^g}{EI} dx =$$

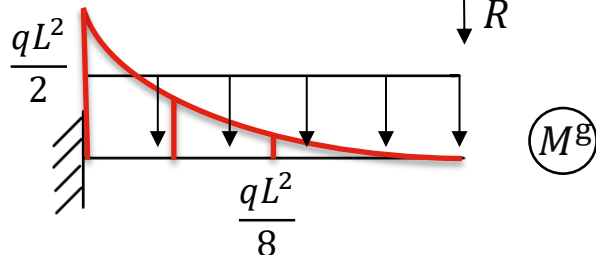
$$\frac{1}{EI} \cdot \frac{L}{6} \cdot \left[1\text{kN} \cdot L \cdot \frac{qL^2}{2} + 4 \cdot \frac{1}{2} \text{kN} \cdot \frac{qL^2}{8} + 0 \right]$$

$$u_{1y}^q = \frac{g \cdot L^4}{8EI}$$

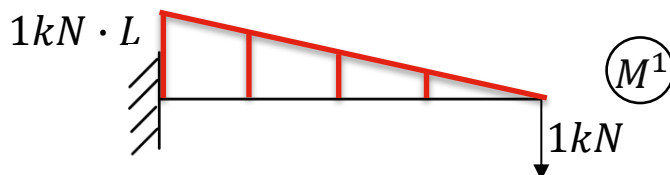
$$u_{1y} = u_{1y}^P + u_{1y}^g = \frac{P \cdot L^3}{3EI} + \frac{g \cdot L^4}{8EI} = \frac{(S_y + R) \cdot L^3}{3EI} + \frac{g \cdot L^4}{8EI}$$



(M^P)

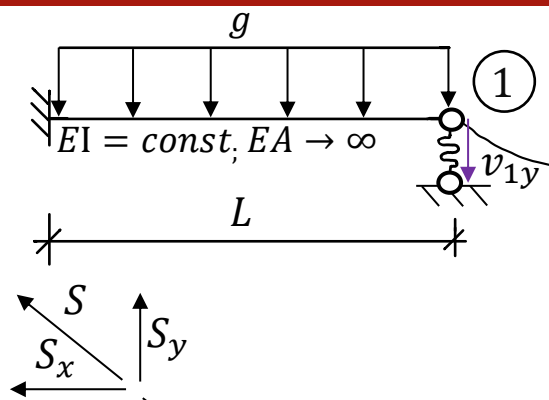


(M^g)

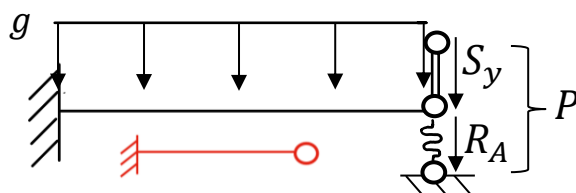


(M^1)

6. Przeszaczenia głowic rygli

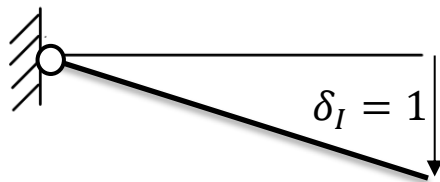


1. Układ podstawowy metody przeszczeń



$$k_{II} \cdot \delta_I + k_{I0} = 0$$

2. Pierwszy stan translacyjny

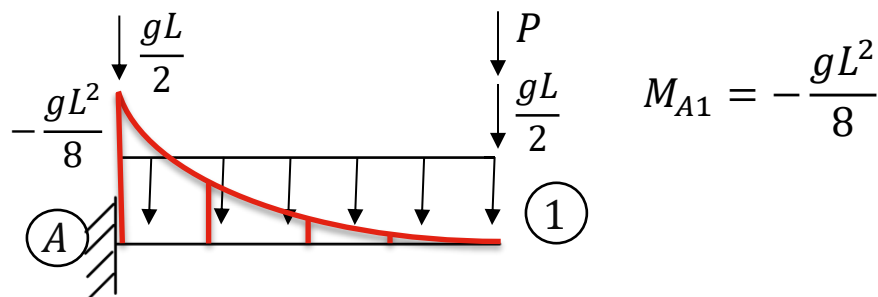


Kąt obrotu cięciwy $\psi_{1A}^I = \frac{\delta_I}{L}$

Przeszczenie na kierunku S_x $\delta_S^I = 1$

Zmiana dł. Więzi sprężystej $\Delta L_S^I = 1$

3. Rozwiązanie up od obciążenia danego



4. Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych

$$k_{II} = \frac{3EI}{L^3} + k$$

$$k_{\alpha F} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{oF} + M_{ji}^{oF}) \cdot \psi_{ij}^{\alpha} - \sum F_f \cdot \delta_f^{\alpha}$$

$$k_{I0} = -\left(-\frac{gL^2}{8} + 0\right) \frac{1}{L} - \frac{gL}{2} \cdot 1 - P \cdot 1 = -\frac{3gL}{8} - P$$

5. Obliczenie przeszczenia

$$\left[\frac{3EI}{L^3} + k\right] \cdot \delta_I + -\frac{3gL}{8} - P = 0$$

$$\delta_I = \frac{P}{\frac{3EI}{L^3} + k} + \frac{\frac{3gL}{8}}{\frac{3EI}{L^3} + k} \rightarrow$$

$$u_x = \frac{S_y + R_A}{\frac{3EI}{L^3} + k} + \frac{3}{8} \frac{gL}{\frac{3EI}{L^3} + k}$$