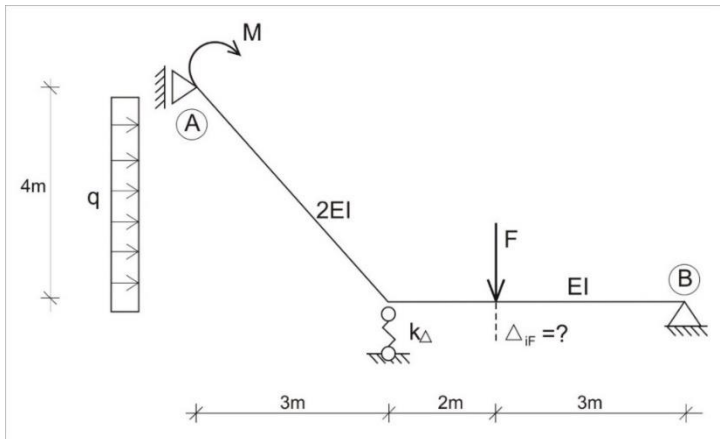


Układ jak na rysunku rozwiązać metodą sił. Obliczyć zaznaczone przemieszczenie. Przeprowadzić stosowne kontrole obliczeń.



Dane do zadania:

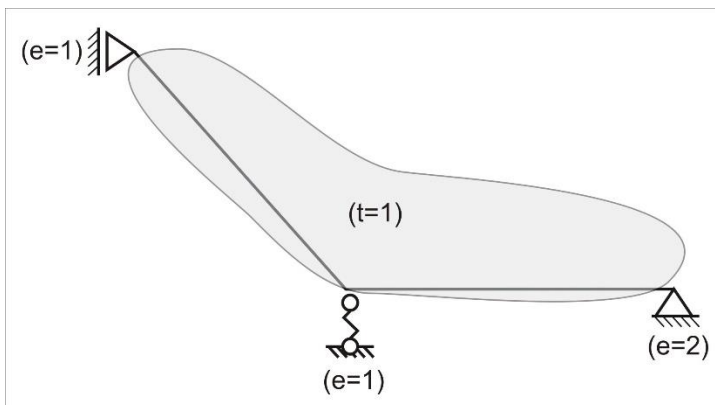
$$F = 10 \text{ kN},$$

$$M = 20 \text{ kNm},$$

$$q = 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}},$$

$$k_{\Delta} = 20 \frac{\text{EI}}{\text{m}^3}$$

1. Sprawdzenie statycznej niewyznaczalności układu

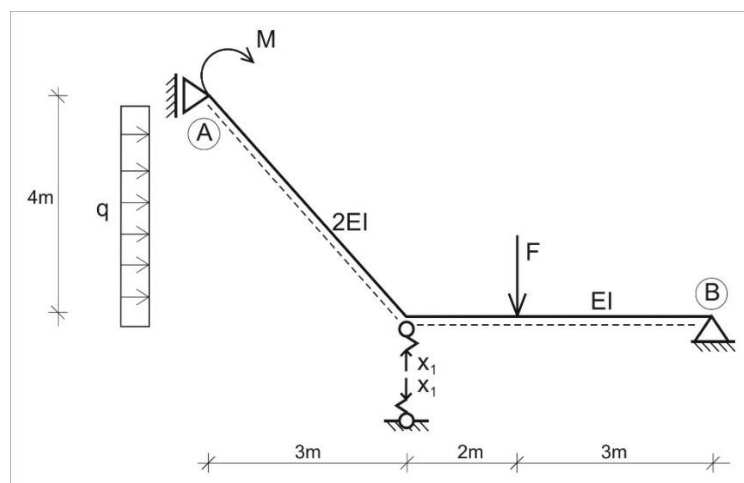


$$n_h \geq e - 3t$$

$$n_h \geq 4 - 3$$

$$n_h \geq 1$$

2. Układ podstawowy metody sił



3. Równanie kanoniczne metody sił

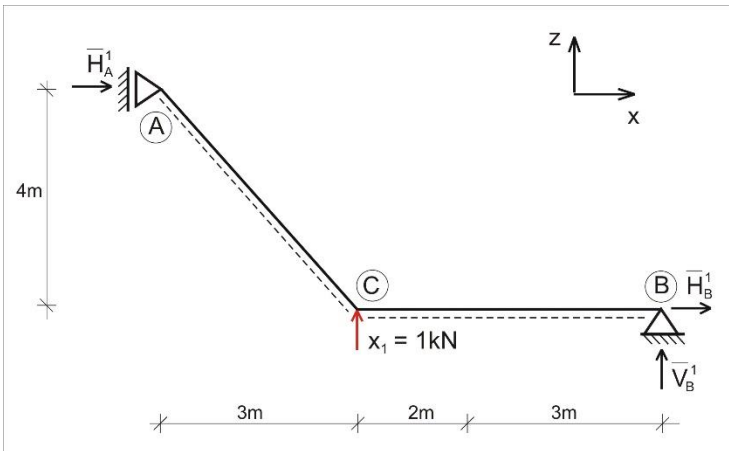
a. Postać ogólna równania kanonicznego metody sił,

$$\delta_{11}x_1 + \delta_{1F} = 0$$

b. Obliczenie współczynników równania

- rozwiązanie układu podstawowego od $x_1 = 1\text{kN}$

Obliczenie reakcji



$$\sum M_B = 0$$

$$\bar{H}_A^1 * 4\text{m} + X_1 * 5\text{m} = 0 \quad \text{stąd}$$

$$\bar{H}_A^1 = -1.25\text{ kN}$$

$$\sum Z = 0$$

$$\bar{V}_B^1 + X_1 = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{V}_B^1 = -1\text{ kN}$$

$$\sum X = 0$$

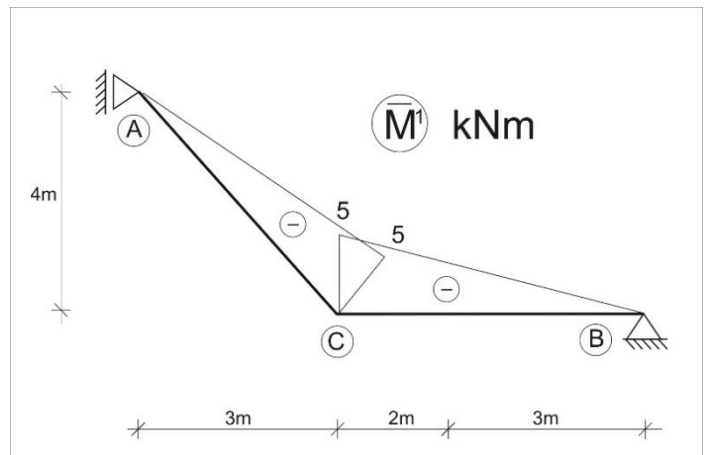
$$\bar{H}_A^1 + \bar{H}_B^1 = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{H}_B^1 = 1.25\text{ kN}$$

Obliczenie momentów zginających w poszczególnych przekrojach ramy

$$\bar{M}_{AC}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{CA}^1 = \bar{H}_A^1 * 4\text{m} = -5\text{ KNm} = \bar{M}_{CB}^1$$

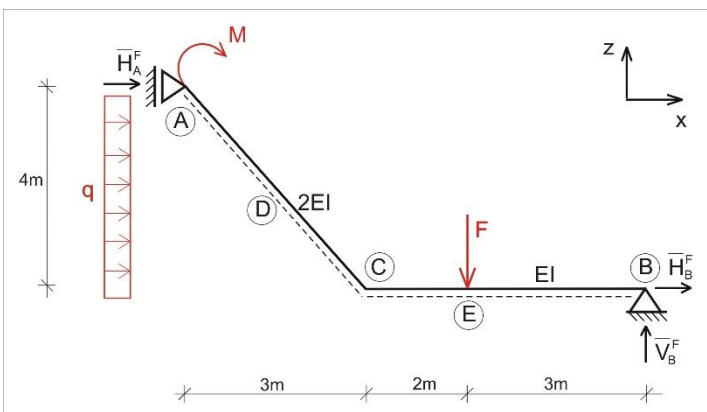
$$\bar{M}_B^1 = 0$$



Wykres momentów zginających

- rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia mechanicznego

Obliczenie reakcji



$$\sum M_B = 0$$

$$\bar{H}_A^F * 4\text{m} + M - F * 3\text{m} + q * 4\text{m} * 2\text{m} = 0$$

$$\text{stąd} \quad \bar{H}_A^F = -7.5\text{ kN}$$

$$\sum Z = 0$$

$$\bar{V}_B^F - F = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{V}_B^F = 10\text{ kN}$$

$$\sum X = 0$$

$$\bar{H}_A^F + \bar{H}_B^F + q * 4\text{m} = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{H}_B^F = 27.5\text{ kN}$$

Obliczenie momentów zginających w poszczególnych przekrojach ramy

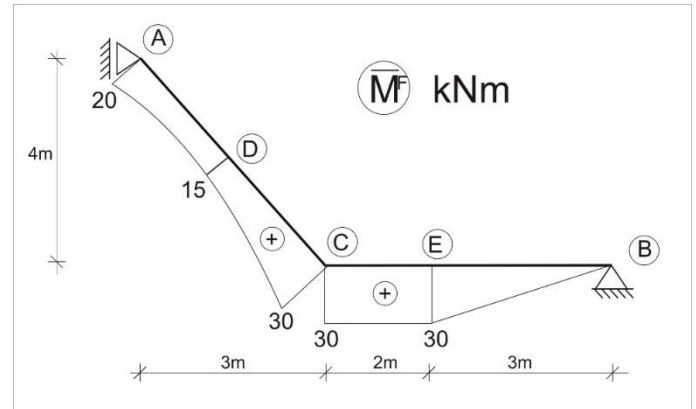
$$\overline{M}_{AC}^F = M = 20 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_{CA}^F = \overline{H}_A^F * 4m + M + q * 4m * 2m = 30 \text{ kNm} = \overline{M}_{CB}^F$$

$$\overline{M}_D^F = \overline{H}_A^F * 2m + M + q * 2m * 1m = 15 \text{ kNm}$$

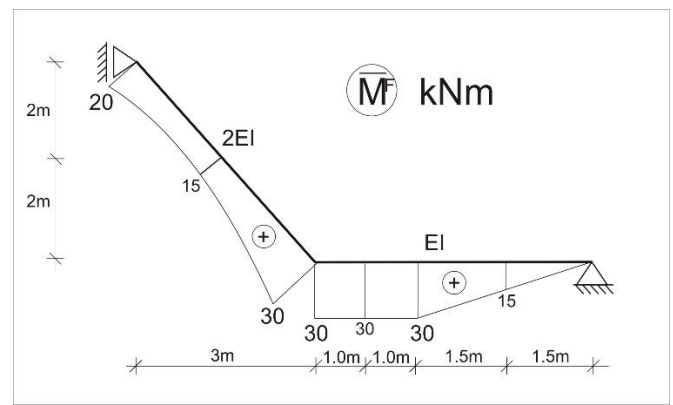
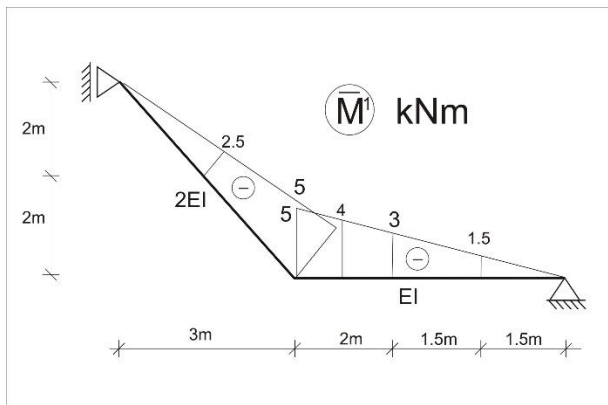
$$\overline{M}_E^F = \overline{V}_B^F * 3m = 30 \text{ kNm}$$

$$\overline{M}_B^F = 0$$



Wykres momentów zginających

- obliczenie współczynników równania kanonicznego metody sił



$$1 \text{ kN} * \delta_{11} = \sum_p \int_s \frac{\overline{M}^1 \overline{M}^1}{EI} ds + \frac{\overline{R}_S^1 \overline{R}_S^1}{k_\Delta} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{5m}{6} (4 * (-2.5 \text{ kNm})(-2.5 \text{ kNm}) + (-5 \text{ kNm})(-5 \text{ kNm})) + \frac{5m}{6} ((-5 \text{ kNm})(-5 \text{ kNm}) + 4 * (-2.5 \text{ kNm})(-2.5 \text{ kNm})) \right] + \frac{1}{20} = 62.55 \frac{\text{kN}^2 \text{m}^3}{EI}$$

$$1 \text{ kN} * \delta_{1F} = \sum_p \int_s \frac{\overline{M}^1 \overline{M}^F}{EI} ds + \frac{\overline{R}_S^1 \overline{R}_S^F}{k_\Delta} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{5m}{6} (4 * (-2.5 \text{ kNm}) * 15 \text{ kNm} + 30 \text{ kNm} * (-5 \text{ kNm})) \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{2m}{6} (30 \text{ kNm} * (-5 \text{ kNm}) + 4 * 30 \text{ kNm} * (-4 \text{ kNm}) + 30 \text{ kNm} * (-3 \text{ kNm})) \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{3m}{6} 30 \text{ kNm} * (-3 \text{ kNm}) + 4 * 15 \text{ kNm} * (-1.5 \text{ kNm}) \right] = -455 \frac{\text{kN}^2 \text{m}^3}{EI}$$

c. Postać szczegółowa równania kanonicznego metody sił

$$62.5 \frac{\text{kN}^2 \text{m}^3}{EI} X_1 - 455 \frac{\text{kN}^2 \text{m}^3}{EI} = 0$$

d. Rozwiązanie równania

$$X_1 = 7.27$$

Obliczenie sił tnących

$$V_{AC}^F(z) = H_A^F \cos \alpha + q * z * \cos \alpha$$

$$\text{Dla } z = 0 \quad V_{AC}^F(0) = H_A^F \cos \alpha \quad \cos \alpha = 0.8$$

$$V_{AC}^F(0) = H_A^F \cos \alpha = -16.59 \text{ kN} * 0.8 = -13.27 \text{ kN}$$

$$\text{Dla } z = 4 \text{ m}$$

$$V_{AC}^F(4\text{m}) = H_A^F \cos \alpha + q * 4\text{m} * \cos \alpha = -16.59 \text{ kN} * 0.8 + 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} * 4\text{m} * 0.8 = 2.73 \text{ kN}$$

$$V_{AC}^F(4\text{m}) = H_A^F \cos \alpha + q * 4\text{m} * \cos \alpha = -16.59 \text{ kN} * 0.8 + 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} * 4\text{m} * 0.8 = 2.73 \text{ kN}$$

$$V_{BE}^F = -V_B^F = -2.73 \text{ kN}$$

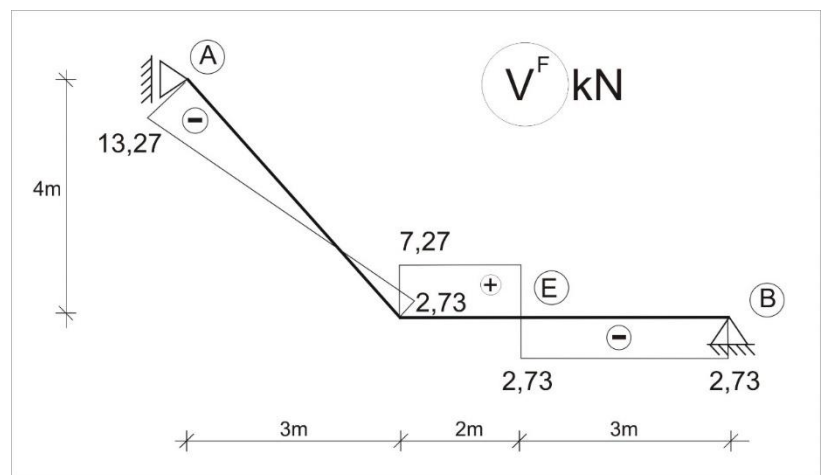
$$V_{EB}^F = -V_B^F = -2.73 \text{ kN}$$

$$V_{EC}^F = -V_B^F + F = 7.27 \text{ kN}$$

Uwaga !

Aby wyznaczyć wartość ekstremalną momentu zginającego należy równanie ogólne sił tnących w przedziale A-C przyrównać do zera

$$H_A^F \cos \alpha + q * z * \cos \alpha = 0 \quad \text{stąd dla } z = 3.317 \text{ m istnieje ekstremum}$$



Wykres sił tnących

Obliczenie sił osiowych

$$N_{AC}^F(z) = -H_A^F \sin \alpha - q * z * \sin \alpha$$

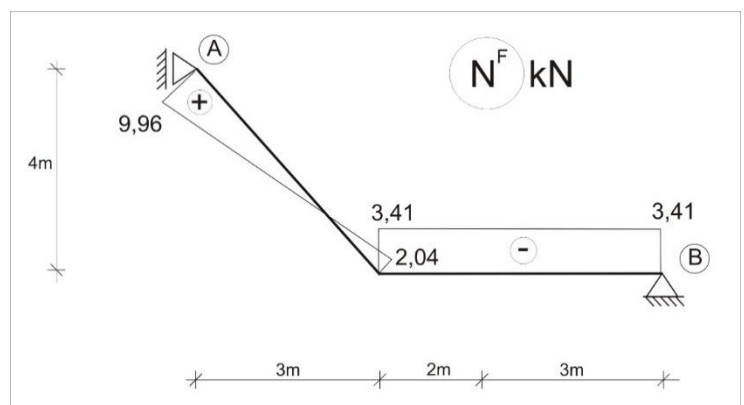
$$\text{Dla } z = 0 \quad N_{AC}^F(0) = -H_A^F \sin \alpha \quad \sin \alpha = 0.6$$

$$N_{AC}^F(0) = -H_A^F \sin \alpha = +16.59 \text{ kN} * 0.6 = +9.95 \text{ kN}$$

$$\text{Dla } z = 4 \text{ m}$$

$$N_{AC}^F(4\text{m}) = -H_A^F \sin \alpha - q * 4\text{m} * \sin \alpha = +16.59 \text{ kN} * 0.6 - 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} * 4\text{m} * 0.6 = 2.05 \text{ kN}$$

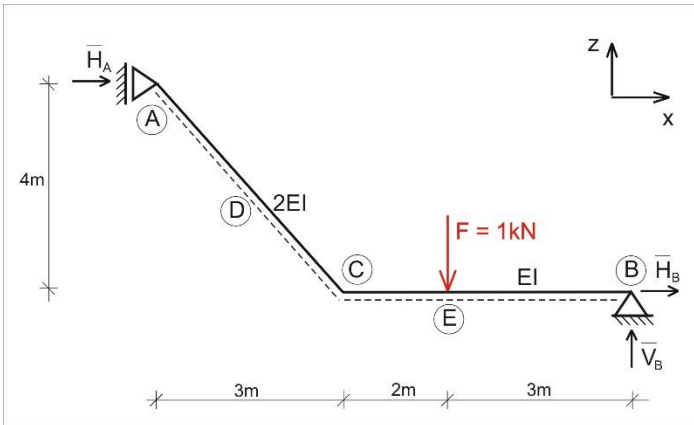
$$N_{BE}^F = H_B^F = -3.41 \text{ kN} = N_{EC}^F$$



Wykres sił osiowych

5. Obliczenie przemieszczenia od obciążenia mechanicznego

a. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego przyłożonego w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia



Obliczenie reakcji

$$\sum M_B = 0$$

$$\bar{H}_A * 4m - F * 3m = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{H}_A = 0.75 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0$$

$$\bar{V}_B - F = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{V}_B = 1 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0$$

$$\bar{H}_A + \bar{H}_B = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{H}_B = -1 \text{ kN}$$

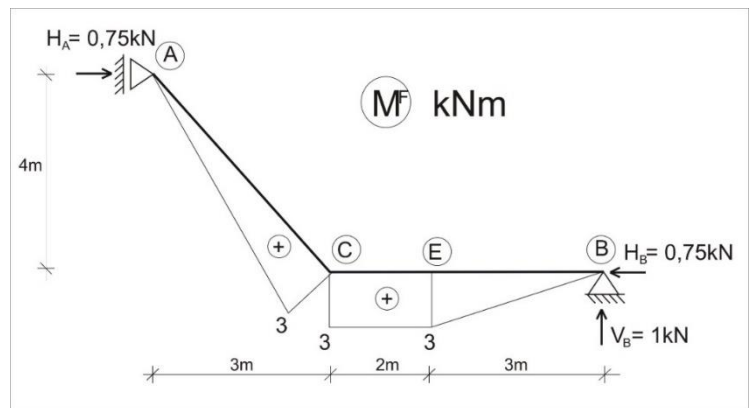
Obliczenie momentów zginających

$$\bar{M}_{AC} = 0$$

$$\bar{M}_{CA} = \bar{H}_A * 4m = 3 \text{ kNm} = \bar{M}_{CB}$$

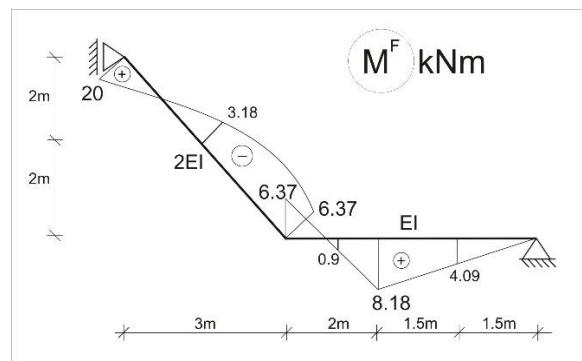
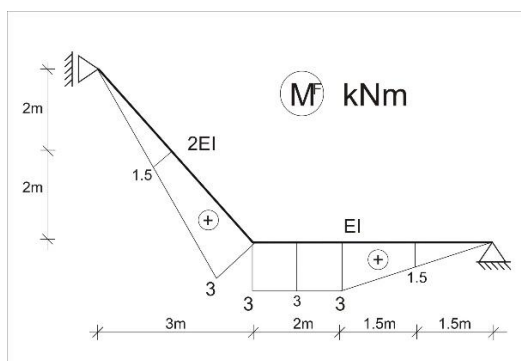
$$\bar{M}_E = \bar{V}_B * 3m = 3 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_B = 0$$



Wykres momentów zginających

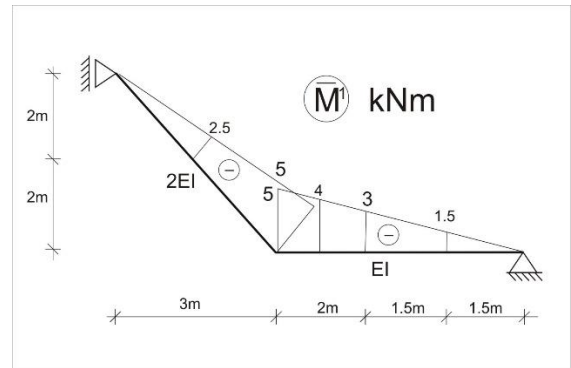
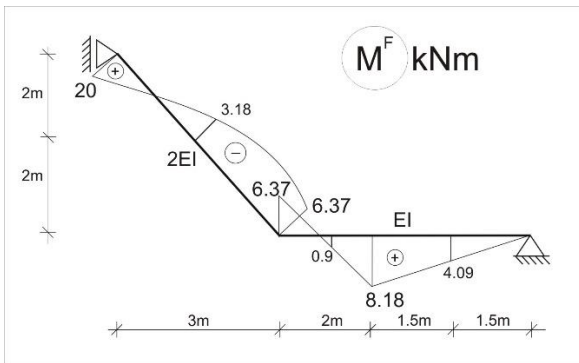
Obliczenie przemieszczenia



$$1 \text{ kN} * \Delta_{iF} = \sum_p \int_s \frac{M^F \bar{M}}{EI} ds + \frac{\bar{R}_S^F \bar{R}_S}{k_\Delta} = \frac{1}{2EI} \left[\frac{5m}{6} (4 * 1.5 \text{ kN} * (-3.18 \text{ kNm}) + 3 \text{ kNm} * (-6.37 \text{ kNm})) \right] +$$

$$\frac{1}{EI} \left[\frac{2m}{6} (3 \text{ kNm} * (-6.37 \text{ kNm}) + 4 * 3 \text{ kNm} * 0.9 \text{ kNm} + 3 \text{ kNm} * 8.18 \text{ kNm}) \right] + \frac{1}{EI} \left[\frac{3m}{6} (8.18 \text{ kNm} * 3 \text{ kNm} + 4 * 1.5 \text{ kNm} * 4.09 \text{ kNm}) \right] = 13.92 \frac{\text{KN}^2 \text{m}^3}{EI}$$

6. Kontrola rozwiązania



Obliczamy przemieszczenie w miejscu i na kierunku więzi sprężystej

$$\begin{aligned}
 1 \text{ kN} \times \delta_{1F} &= \sum_p \int_s \frac{M^F \bar{M}^1}{EI} ds + \frac{\bar{R}_S^F \bar{R}_S^1}{k_{\Delta}} = \frac{5}{2 \cdot 6EI} (4 \cdot 2.5 \text{ kN} \cdot 3.18 \text{ kNm} + 6.37 \text{ kNm} \cdot 5 \text{ kNm}) + \\
 &+ \frac{2}{6EI} (5 \text{ kNm} \cdot 6.37 \text{ kNm} - 4 \cdot 4 \text{ kNm} \cdot 0.9 \text{ kNm} - 3 \text{ kNm} \cdot 8.18 \text{ kNm}) - \frac{1}{EI} \frac{1}{2} 3 \text{ kNm} \cdot 3 \text{ m} \cdot \frac{2}{3} \cdot 8.18 \text{ kNm} \\
 &+ \frac{1 \text{ kN} \cdot 7.27 \text{ kNm} \cdot \text{m}^3}{20 EI} \cong 0.02 \frac{\text{kN}^2 \text{m}^3}{EI}
 \end{aligned}$$