



Politechnika Wrocławska

MECHANIKA BUDOWLI

Wykład 2: PRZESTRZENNE UKŁADY PRĘTOWE SW i SN. METODA SIŁ

konsultacje: środa 10:30-12:30 p.331bud L1
sobota 15:00-17:00 TEAMS

Prowadzący: dr inż. Olga Szyłko-Bigus



3. Ramy przestrzenne

- ❑ Ilościowy warunek geometrycznej niezmienności (GN) i statycznej wyznaczalności (SW) układu prętowego w przestrzeni ma postać

$$e = 6t$$

gdzie

e jest liczbą więzi elementarnych,

t jest liczbą tarcz.

- ❑ **Stopień statecznej niewyznaczalności (SSN)** układu prętowego określa wzór

$$n = e - 6t$$

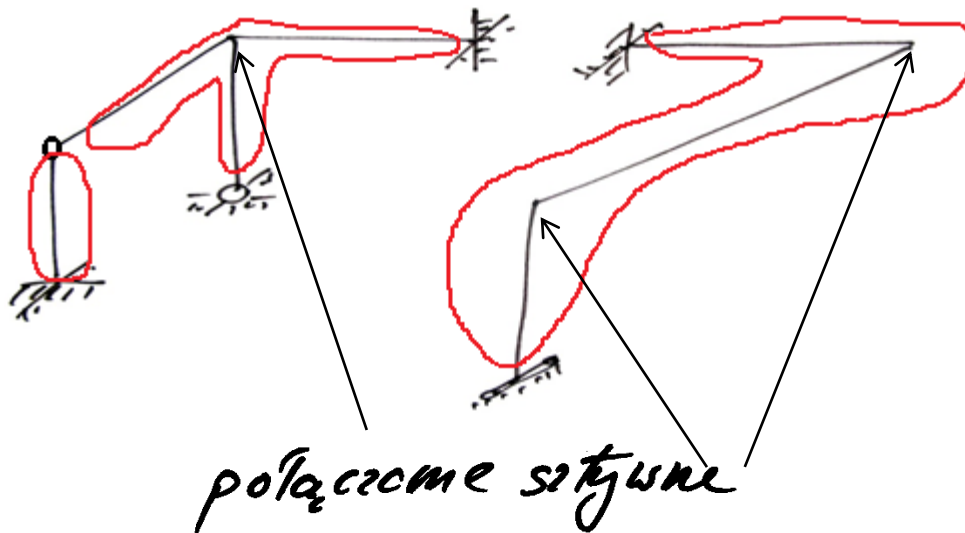
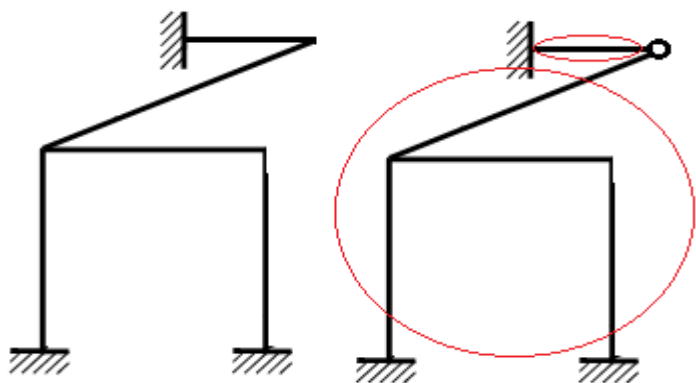
Gdy:

$n_h = 0$ układ jest SW.

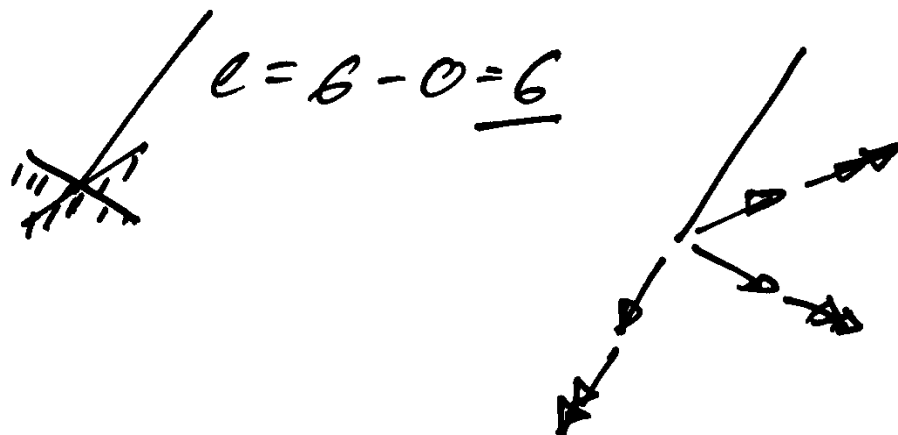
$n_h > 0$ układ jest SN.

3. Ramy przestrzenne

- ❑ W przypadku ustrojów prętowych przez tarczę należy rozumieć pręt lub zbiór prętów połączonych węzłami sztywnymi i tworzącymi graf otwarty.



- Podpory i połączenia należy traktować przestrzennie,
- Sztywne połączenia dwóch prętów lub pręta z fundamentem jest równoznaczne z zastosowaniem 6! więzi elementarnych ($e=6$) i odebraniem 6 stopni swobody



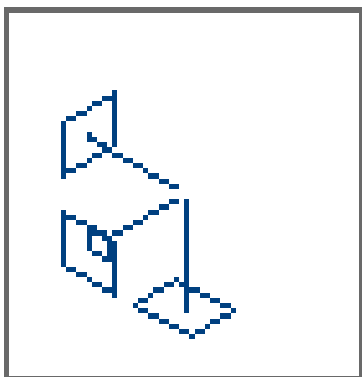
3. Ramy przestrzenne

- Liczba typów podpór w płaskich układach prętowych:

$$n_p^{2D} = \sum_{k=1}^{n=3} \binom{n}{k} = \frac{3!}{1!(3-1)!} + \frac{3!}{2!(3-2)!} + \frac{3!}{3!(3-3)!} = 7$$

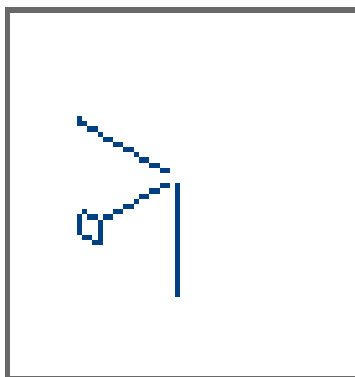
- Liczba typów podpór w układach przestrzennych:

$$n_p^{3D} = \sum_{k=1}^{n=6} \binom{n}{k} = \frac{6!}{1!(6-1)!} + \frac{6!}{2!(6-2)!} + \dots + \frac{6!}{6!(6-6)!} = 63$$



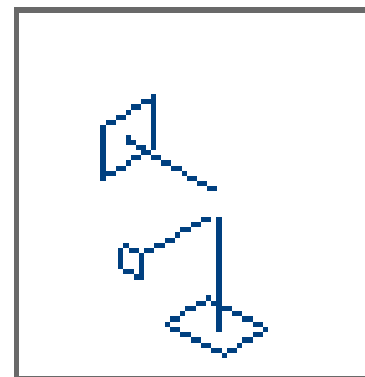
przegub kołowy
(kulisty)

$$e = 6 - 3$$



przegub wałkowy

$$e = 6 - 1$$



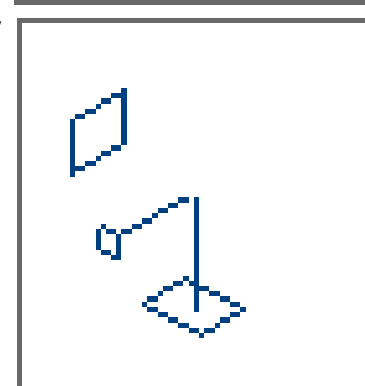
Przegub kulisty
przesuwny

$$e = 6 - 5$$



przegub walcowy
przesuwny

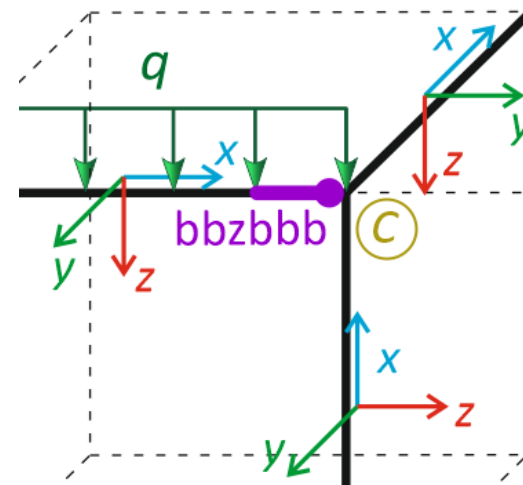
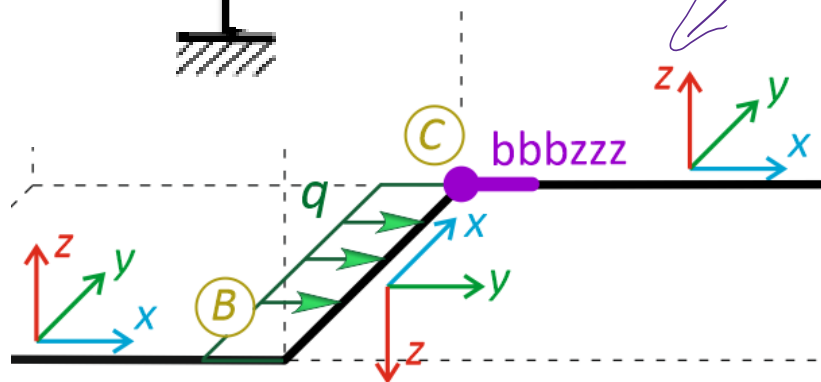
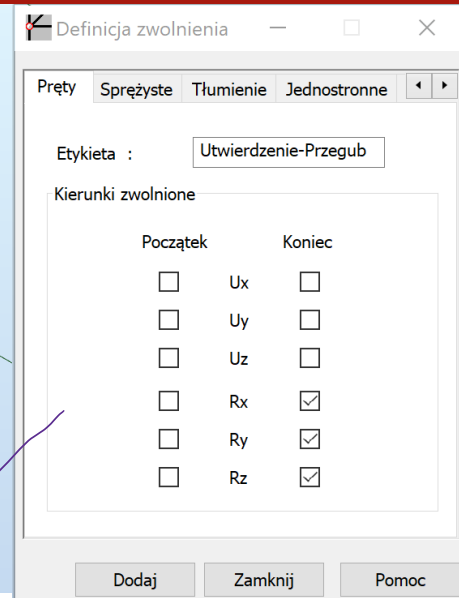
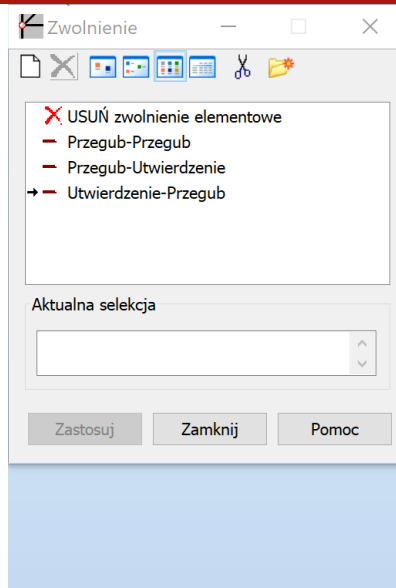
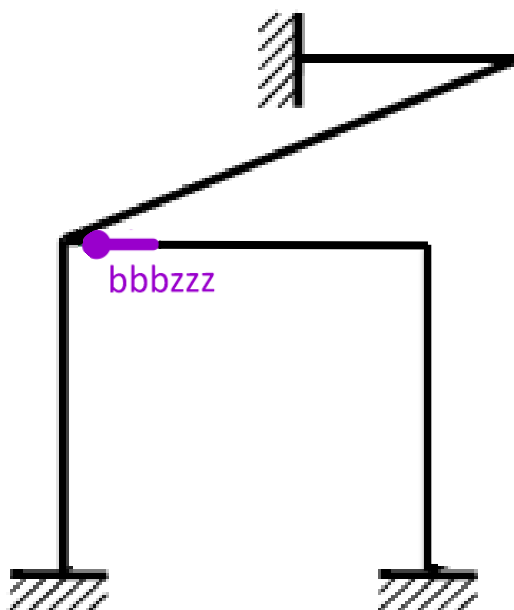
$$e = 6 - 2$$





3. Ramy przestrzenne

☐ Połączenia między prętami

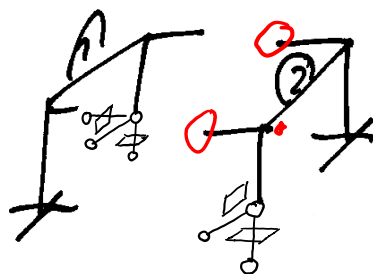
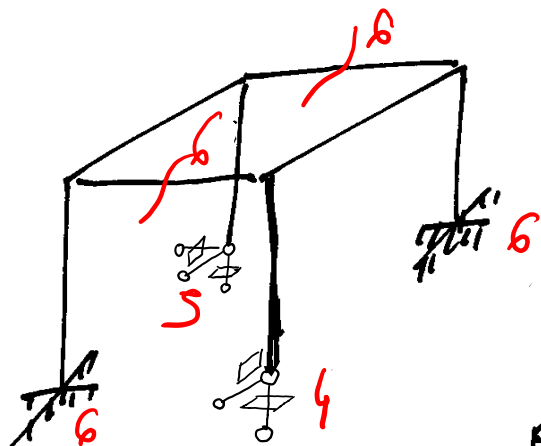




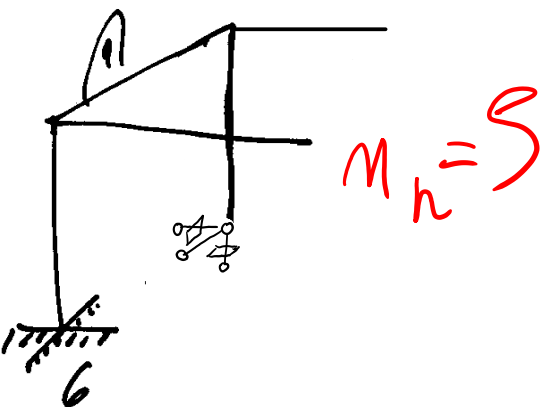
3. Ramy przestrzenne

Przykład: Stopień statycznej niewyznaczalności ramy przestrzennej

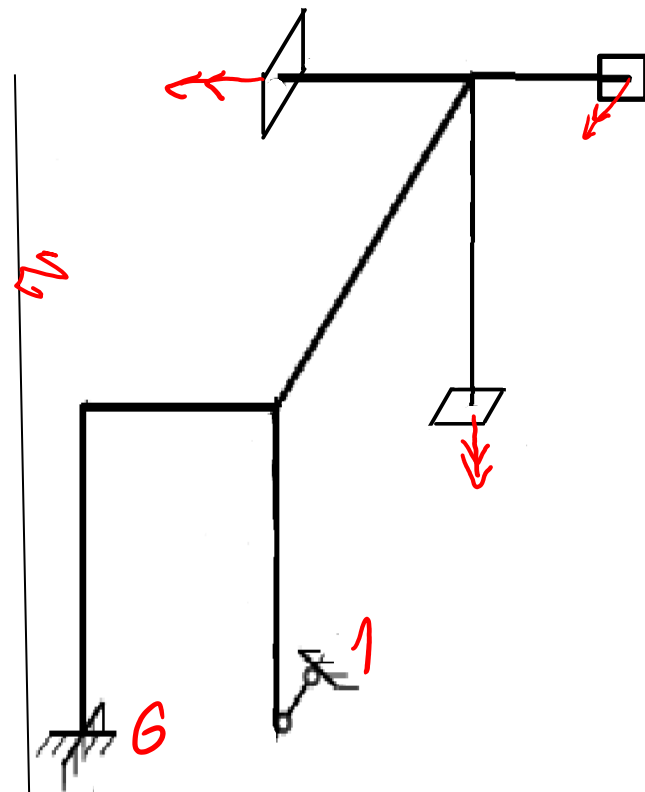
$$n_h = 33 - 6 \cdot 2 = 21$$



podział
na tarcze
 $t = 2$



$$n_h = 5$$

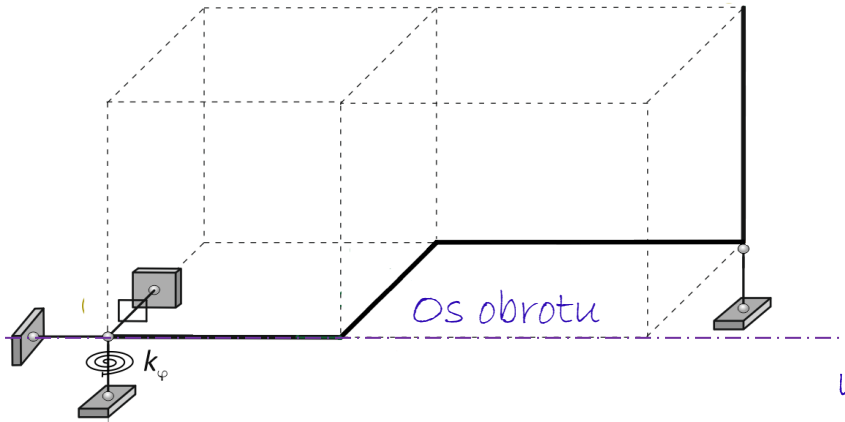


$$e = 10 ; t = 1 ;$$
$$n_h = e - 6t = 10 - 6 \cdot 1 = 4$$
$$SSN = \underline{4!}$$

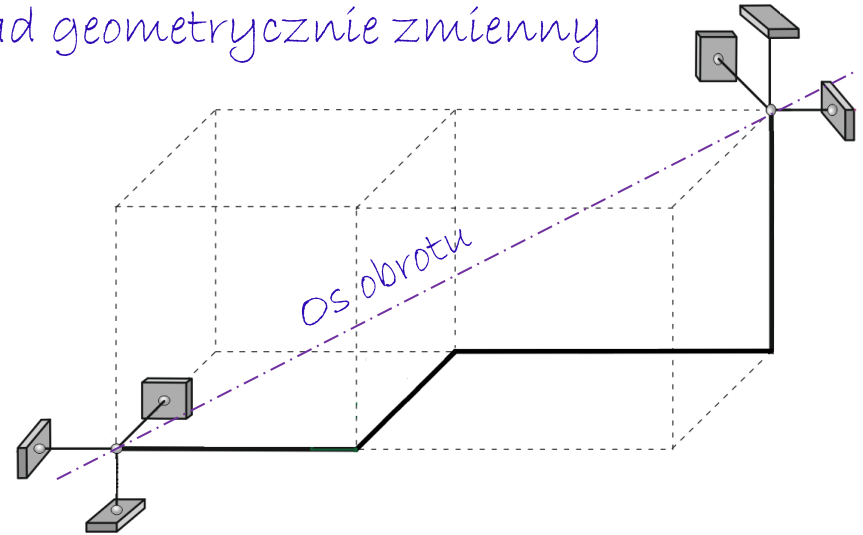
3. Ramy przestrzenne

Analiza kinematyczna

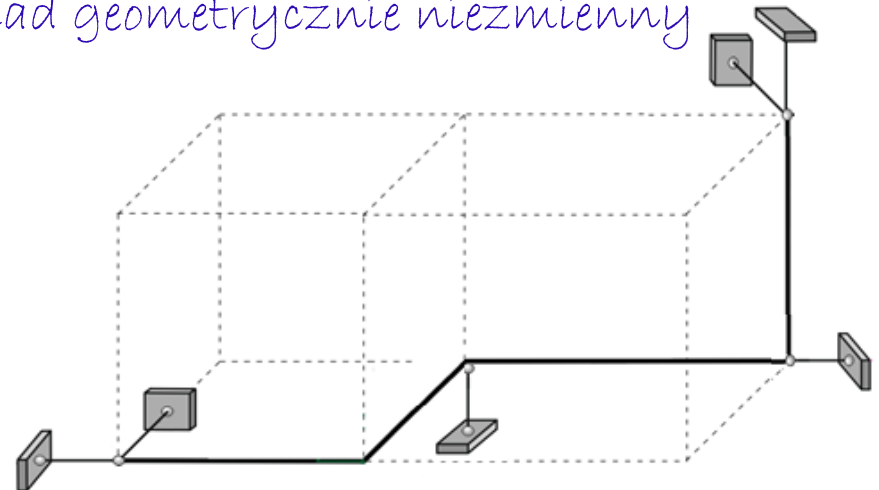
układ geometrycznie niezmienny



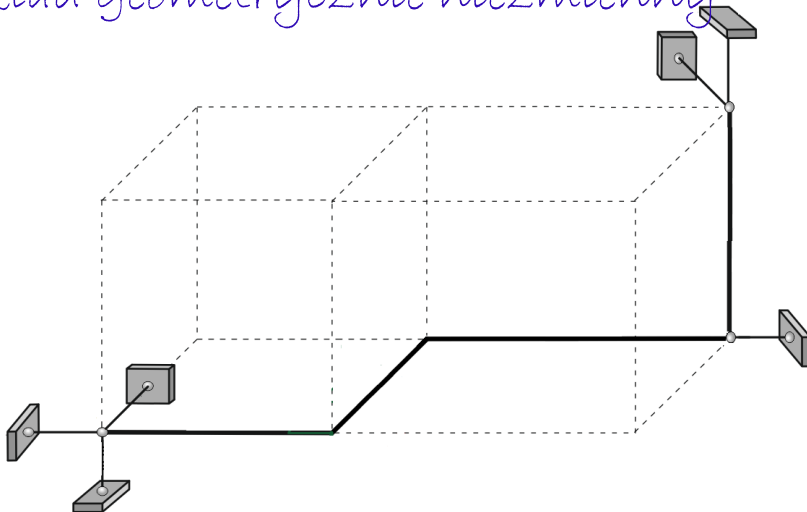
układ geometrycznie zmienny



układ geometrycznie niezmienny



układ geometrycznie niezmienny



3. Ramy przestrzenne

☐ Analiza kinematyczna

Możemy zapisać komplet niezależnych równań równowagi statycznej (liczba równań powinna odpowiadać liczbie więzi elementarnych e)

$$Kq=F$$

i sprawdzić czy wyznacznik macierzy współczynników jest różny od zera

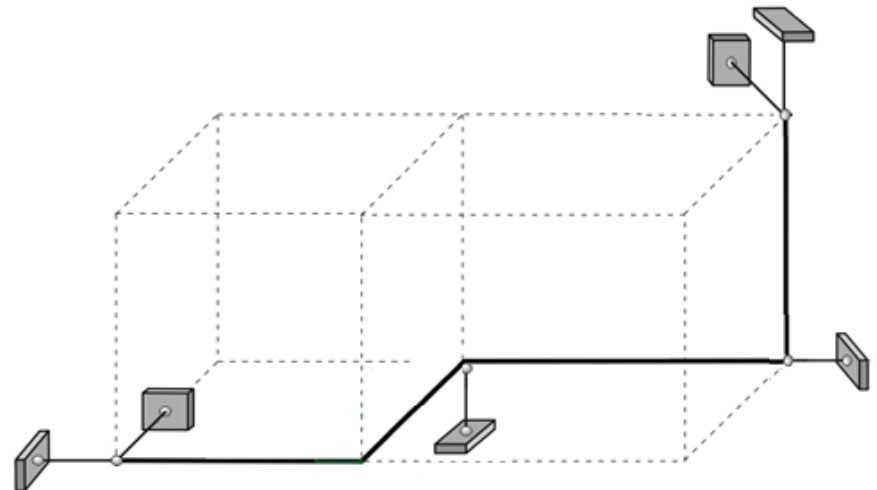
$$\det K \neq 0$$

gdzie:

K - macierz sztywności

q - wektor przemieszczeń

F - wektor zawierający informację
o położeniu obciążeń



3. Ramy przestrzenne

❑ Metody rozwiązywania przestrzennych układów prętowych:

- równania równowagi dla układów SW czyli $e-6t=0$,
- Metoda Sił (MS) dla układów SN czyli $e-6t>0$.

Wyznaczamy wartości reakcji w układach SW oraz wartości sił hiperstatycznych i reakcji w układach SN

❑ W układach przestrzennych:

- występuje 6 rodzajów sił wewnętrznych:

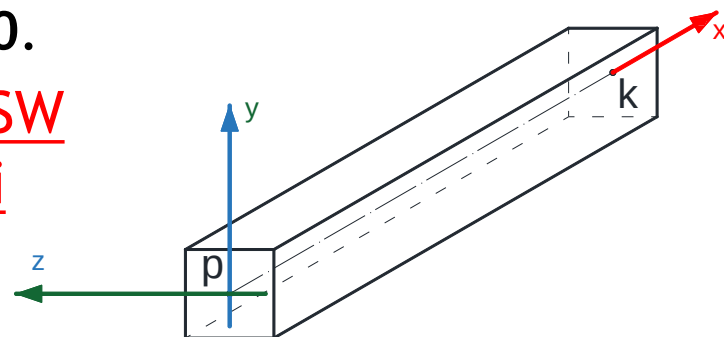
$M_x, M_y, M_z, N_x, V_y, V_z$

- pręt musi posiadać następujące charakterystyki geometryczne:

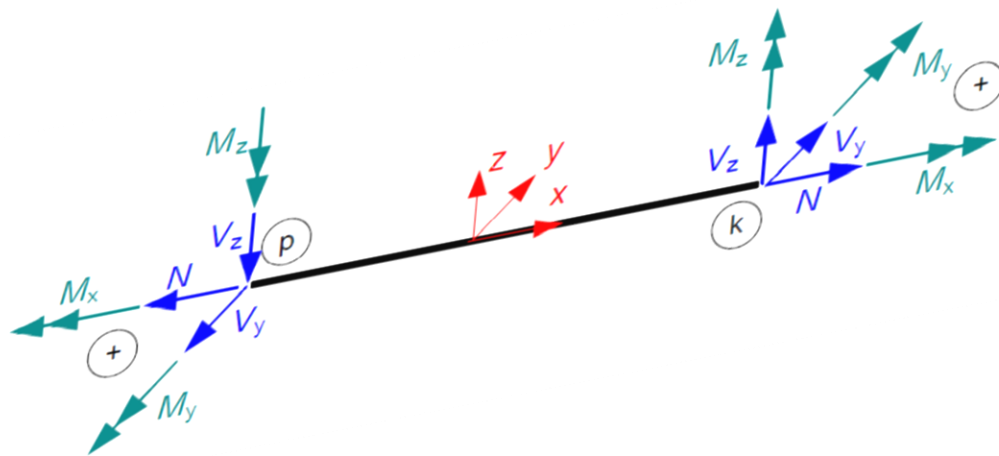
$I_s = I_x, I_y, I_z, A_x=A_y=A_z=A, k$

- pręt musi posiadać następujące charakterystyki materiałowe:

E, G, ν

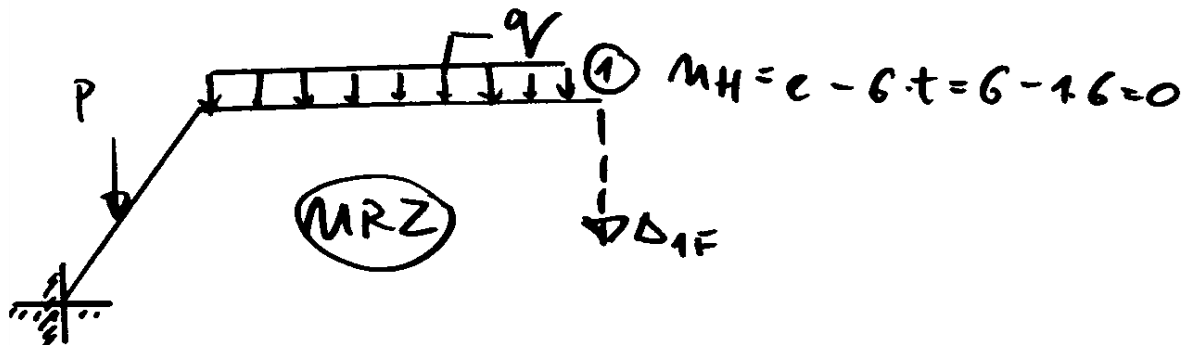


I_x, I_y, I_z, A, κ
 E, G, ν



3. Ramy przestrzenne

- Algorytm wyznaczania przemieszczeń w statycznie wyznaczalnych układach przestrzennych od obciążeń mechanicznych:



- Wzór na wyznaczanie przemieszczeń od obciążeń mechanicznych

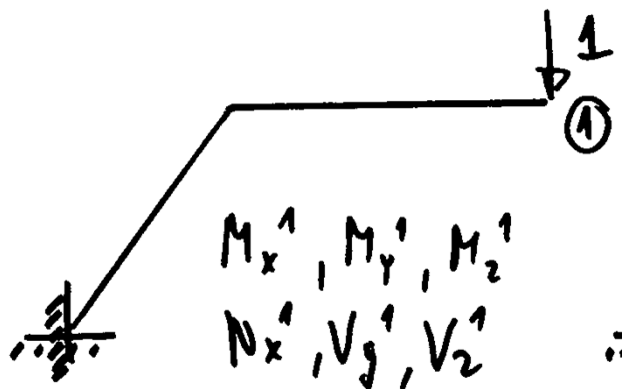
$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \int \frac{M_x^i \cdot M_x^F}{G I_s} \cdot dx + \int \frac{M_y^i \cdot M_y^F}{E I_y} \cdot dx + \int \frac{M_z^i \cdot M_z^F}{E I_z} \cdot dx +$$

$$+ \int \frac{N^i \cdot N^F}{E A} \cdot dx + \int \frac{K_y \cdot V_y^i \cdot V_y^F}{G A} \cdot dx + \int \frac{K_z \cdot V_z^i \cdot V_z^F}{G A} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s}$$

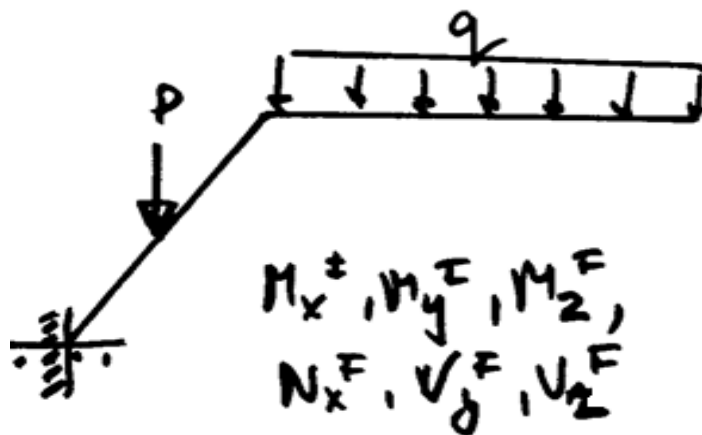
Z reguły pomija się wpływ odkształcalności postaciowej, a często także wpływ odkształcalności osiowej. Przemieszczenia elementarne oblicza się wg wzoru (po pominięciu tych wpływów).

3. Ramy przestrzenne

1. Wyznaczenie sił wewnętrznych (wykresów) od obc. jednostkowego na kierunku szukanego przemieszczenia:



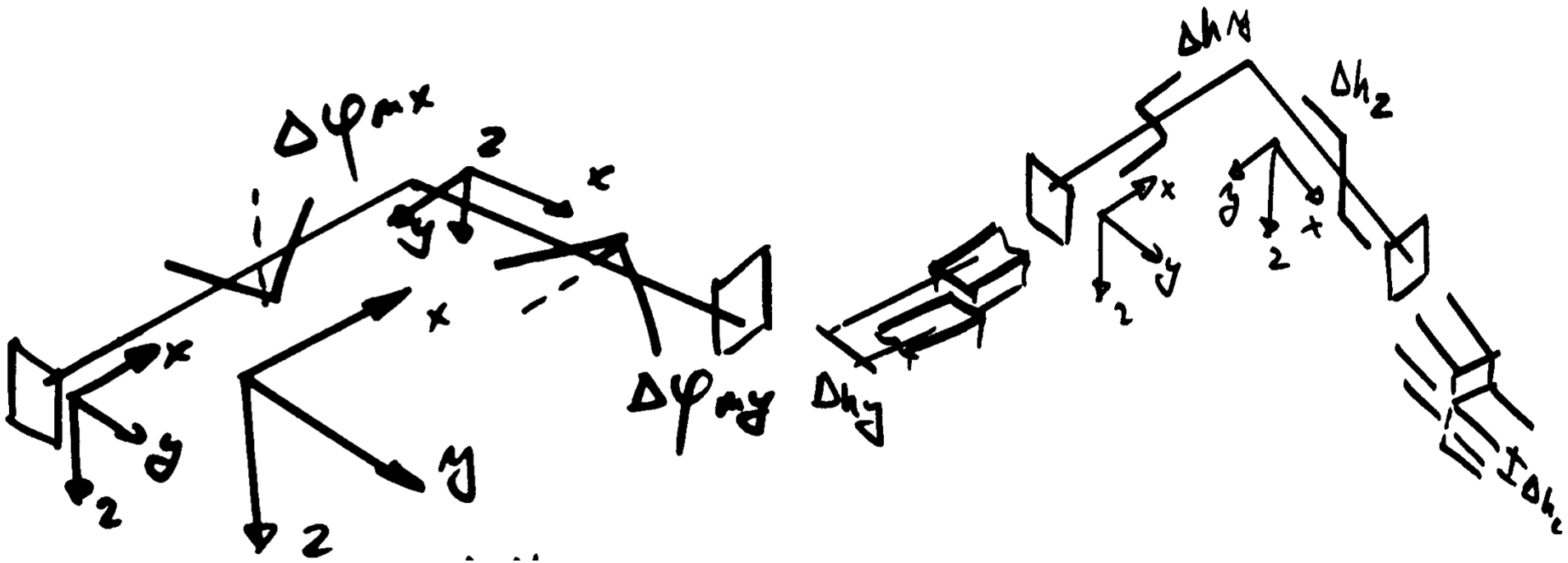
2. Wyznaczenie sił wewnętrznych (wykresów) od obciążenia danego:



3. Ramy przestrzenne

- Wyznaczanie przemieszczeń w układach przestrzennych od obciążeń niemechanicznych - przemieszczenia podpór i błędy montażu:

$$\Delta_{i\Delta} = \Delta_i^\Delta = \sum_{mx} Mx_{mx}^i \cdot \Delta\varphi_{mx}^\Delta + \sum_{my} My_{my}^i \cdot \Delta\varphi_{my}^\Delta + \sum_{mz} Mz_{mz}^i \cdot \Delta\varphi_{mz}^\Delta + \sum_n N_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_{vy} Vy_{vy}^i \cdot \Delta h_{vy}^\Delta + \sum_{vz} Vz_{vz}^i \cdot \Delta h_{vz}^\Delta - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r.$$



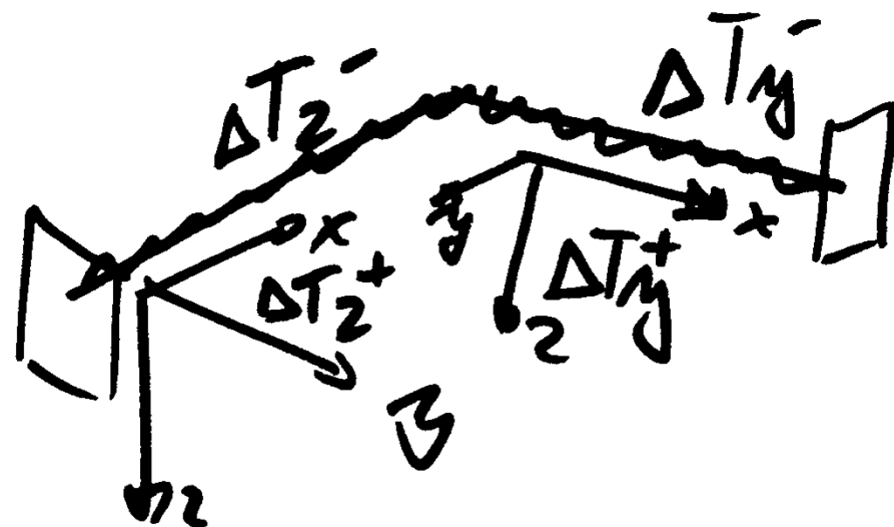
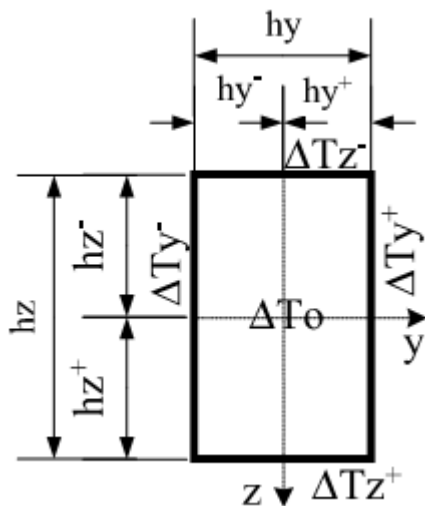
3. Ramy przestrzenne

- Wyznaczanie przemieszczeń w układach przestrzennych od obciążeń niemechanicznych - zmiana temperatury:

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \int My^i \cdot \Delta d\phi_y^T + \int Mz^i \cdot \Delta d\phi_z^T + \int N^i \cdot \Delta dL^T.$$

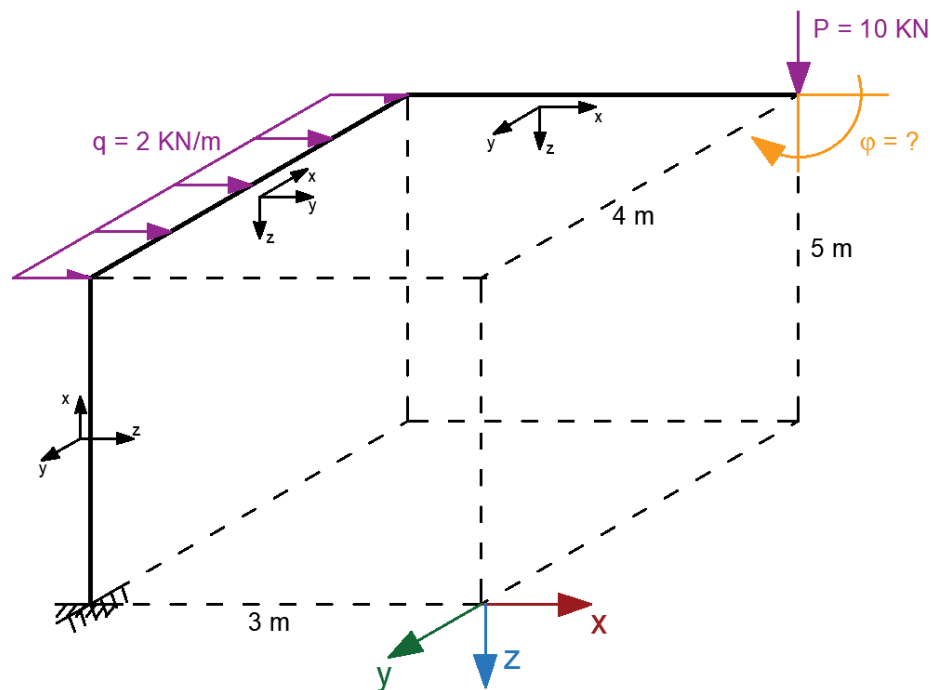
Gdy wyrażenia $\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_z^+ - \Delta T_z^-)}{h_z}$, $\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_y^- - \Delta T_y^+)}{h_y}$ i $\alpha_T \cdot \Delta T_o$ są na długości określonych przedziałów stałe

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_z^+ - \Delta T_z^-)}{h_z} \cdot \Omega_{My^i} \right)_p + \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_y^- - \Delta T_y^+)}{h_y} \cdot \Omega_{Mz^i} \right)_p + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta T_o \cdot \Omega_{N^i} \right)_p.$$



**Przykład**

Obliczyć wartość obrotu we wskazanym węźle. Przyjęto przekrój kołowy o $GI_x = 0,769 EI_y$

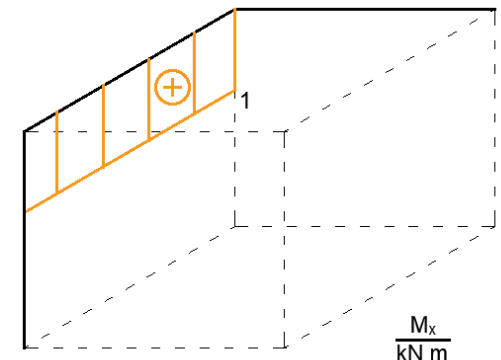
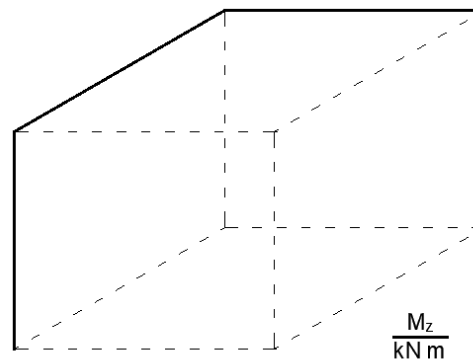
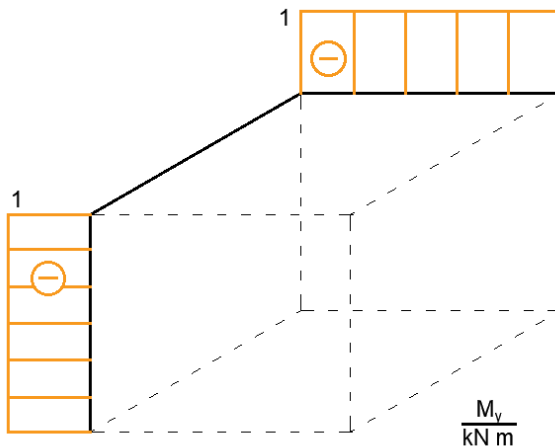
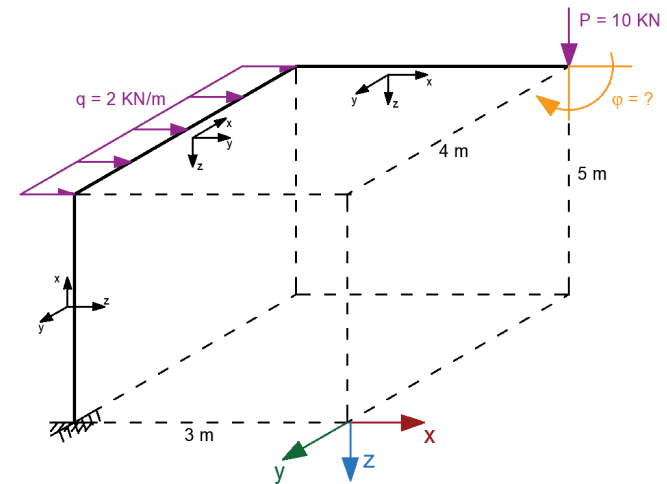
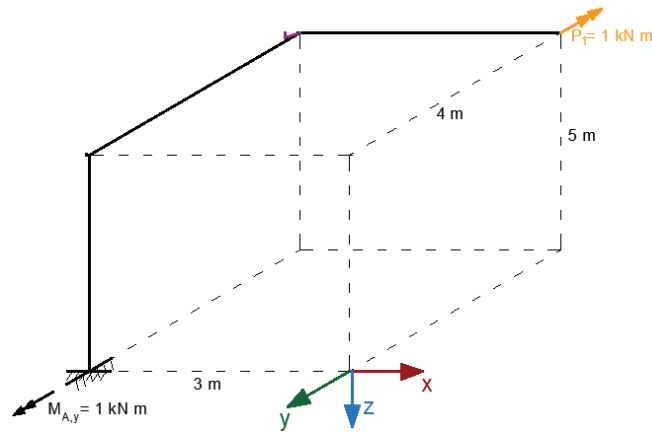


1. Rozwiązanie układu przestrzennego od obciążenia danego (wyniki otrzymane w zadaniu rozwiązywanym na poprzednim wykładzie)



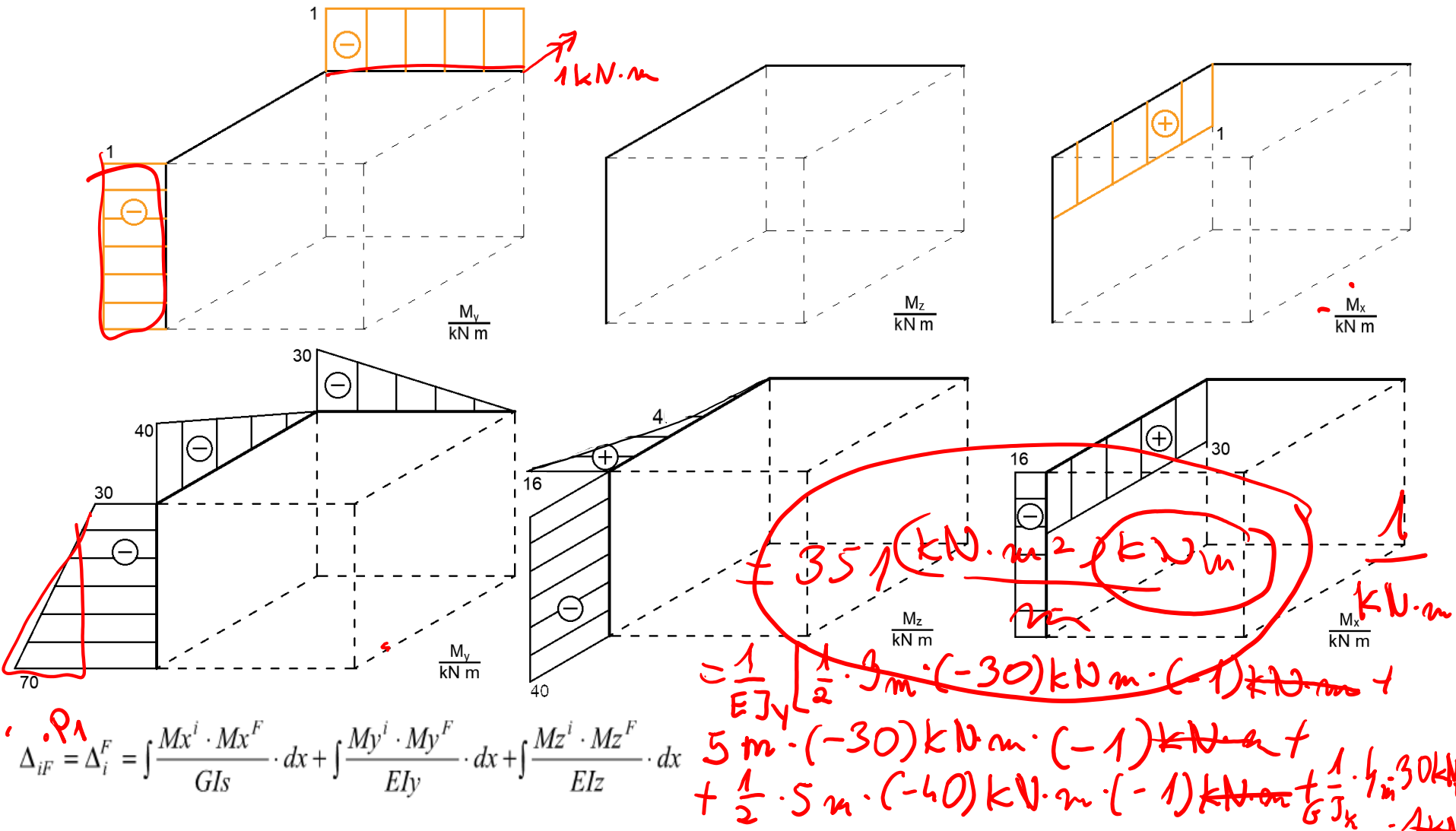
Przykład Obliczyć wartość obrotu we wskazanym węźle. Przyjęto przekrój kołowy o $GI_x = 0,769 EI_y$

2. Rozwiązanie układu przestrzennego od siły jednostkowej na kierunku szukanego przemieszczenia



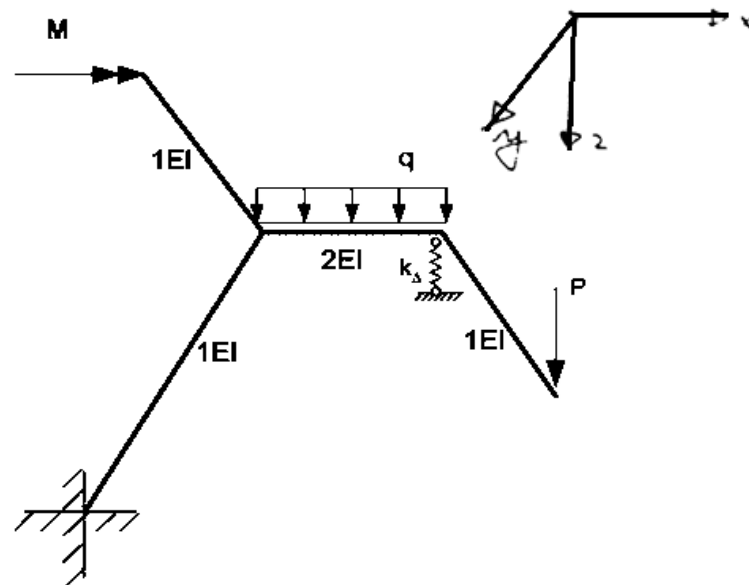
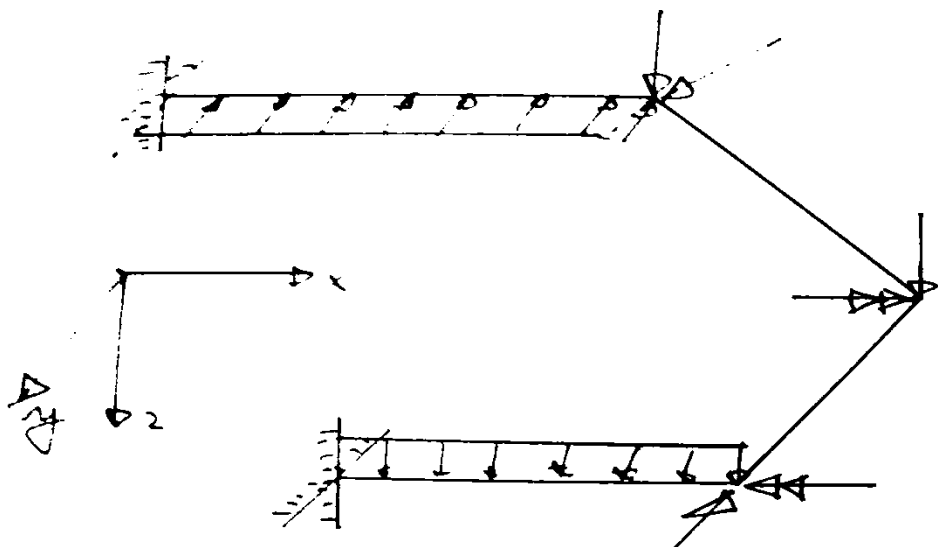
**Przykład**

Obliczyć wartość obrotu we wskazanym węźle. Przyjęto przekrój kołowy o $GI_x = 0,769 EI_y$

3. Obliczenie szukanego przemieszczenia

4. Dźwigary załamane w planie

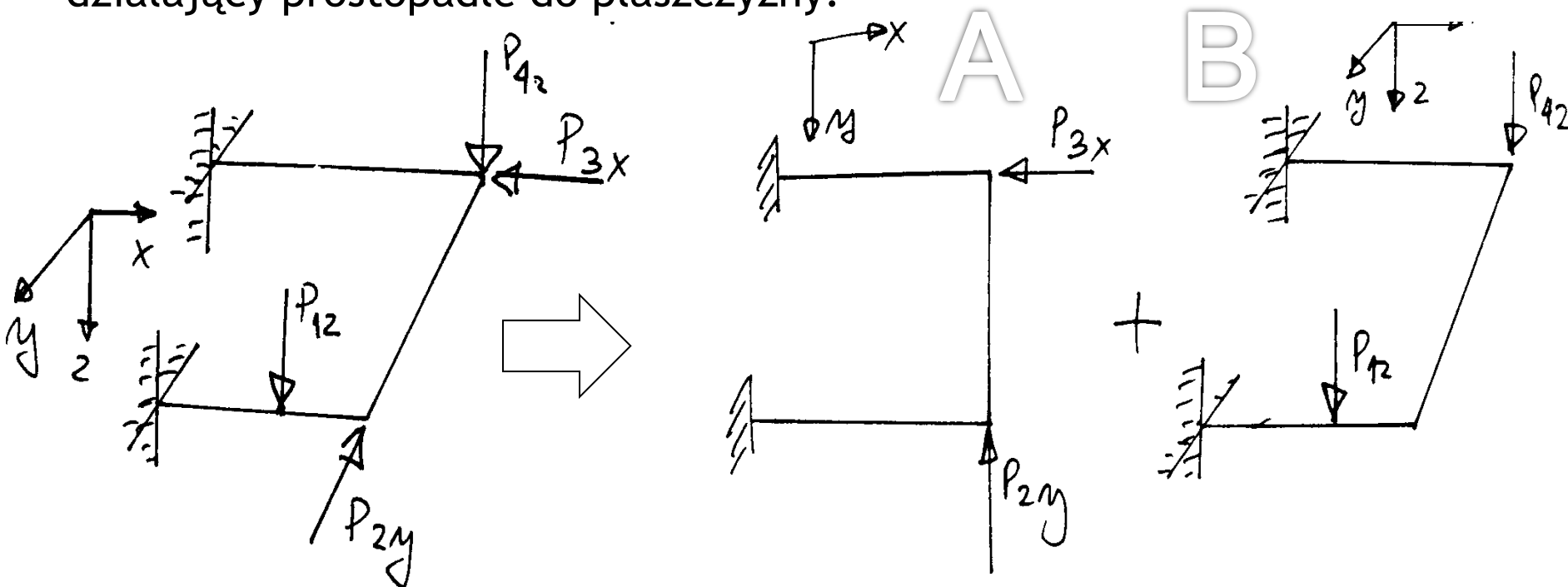
- ❑ **Dźwigarem załamanym w planie** nazywamy złożony płaski układ prętowy (położony w jednej płaszczyźnie), przeznaczony do przenoszenia obciążeń prostopadłych do płaszczyzny dźwigara (lub ewentualnie obciążenia w płaszczyźnie dźwigara).



- ❑ Jeżeli w każdym przekroju pręta jedna z głównych osi bezwładności leży w płaszczyźnie dźwigara (x, y) a druga oś główna jest do tej płaszczyzny prostopadła ($\parallel z$) to skutki działania obu podzbiorów obciążenia są rozłączne.
- ❑ **Dźwigary załamane w planie są szczególnym przypadkiem konstrukcji przestrzennych.**

4. Dźwigary załamane w planie

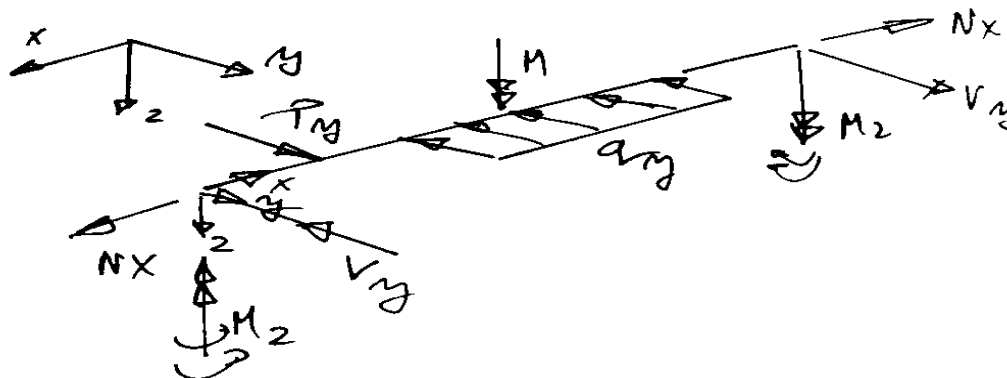
- ❑ Obciążenie działające na dźwigar załamany w planie można rozłożyć na podzbiór sił działających w płaszczyźnie dźwigara oraz na podzbiór działający prostopadłe do płaszczyzny.



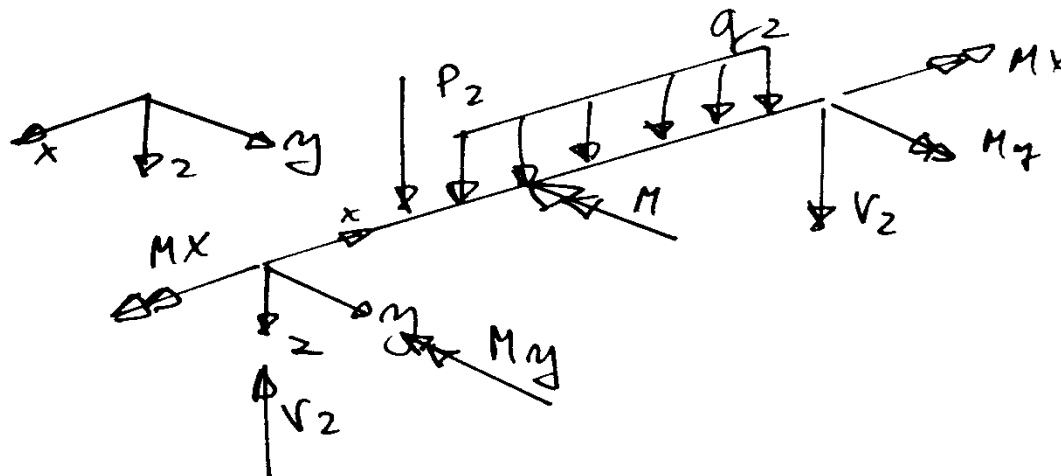
- ❑ Wskutek tego można niezależnie rozwiązać układ A oraz B, gdyż układy A i B wywołują inne siły wewnętrzne (działające w innych płaszczyznach).
- ❑ Konstrukcja załamana w planie zawsze leży na jednej płaszczyźnie (nie leży w przestrzeni), natomiast siły mogą działać w dowolnej płaszczyźnie.

4. Dźwigary załamane w planie i ruszty

- Podzbiór obciążeń działających w płaszczyźnie dźwigara powoduje płaski stan naprężenia, w którym siły przekrojowe N_x , V_y , M_z są jak w zadaniu płaskim.



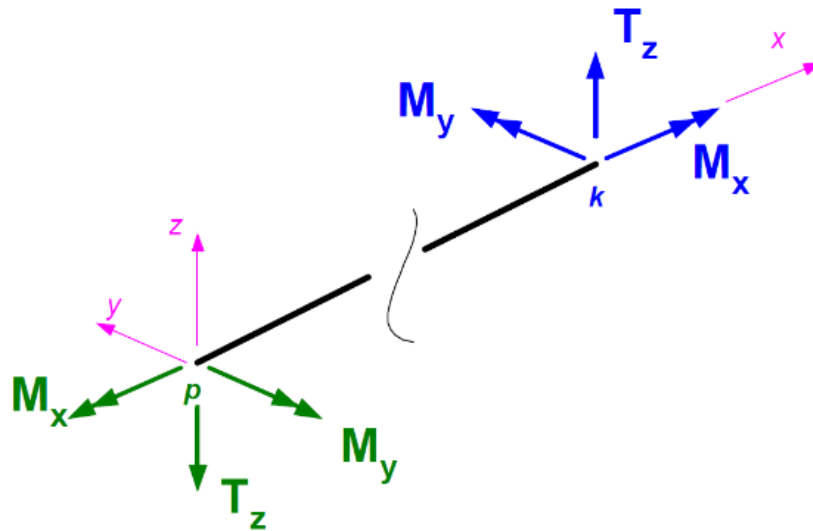
- Podzbiór obciążeń działających prostopadłe do płaszczyzny dźwigara powoduje przestrzenny (w ograniczonym zakresie) stan naprężenia, w którym otrzymuje się siły przekrojowe M_x , V_z , M_y .



4. Dźwigary załamane w planie

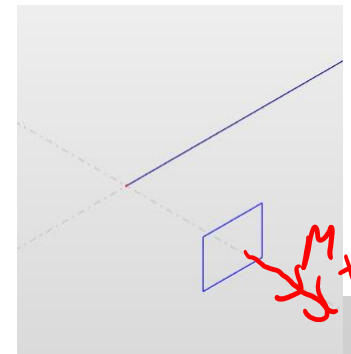
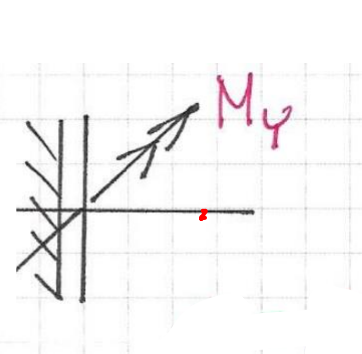
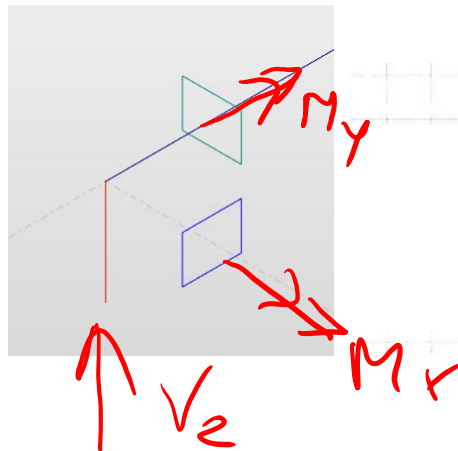
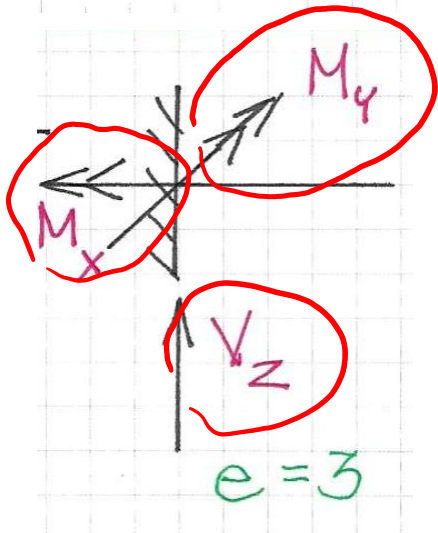
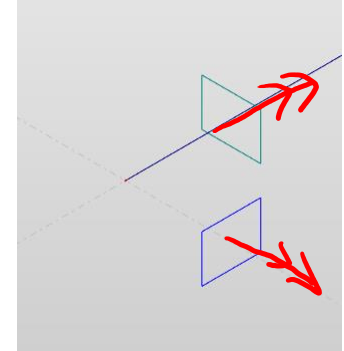
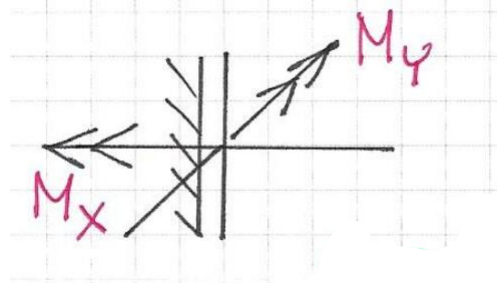
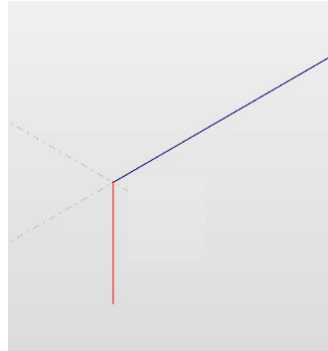
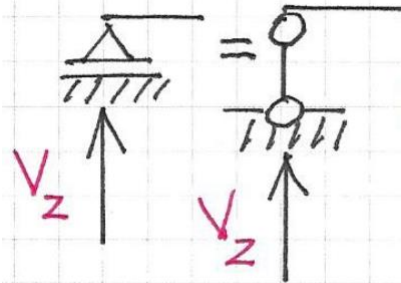
□ Siły przekrojowe w układach załamanych:

- Siły pionowe V_z ,
- Momenty skręcające M_x ,
- Momenty zginające M_y .



4. Dźwigary załamane w planie

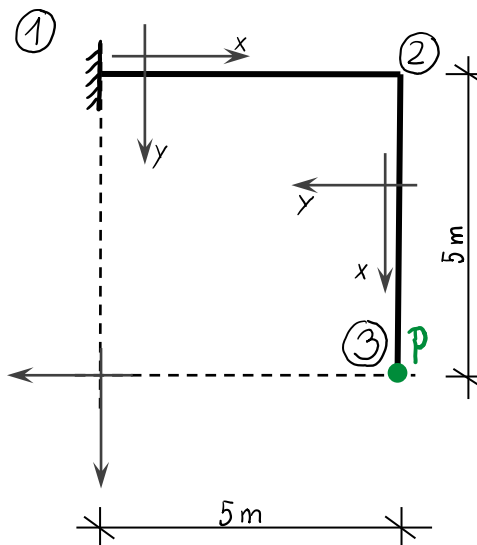
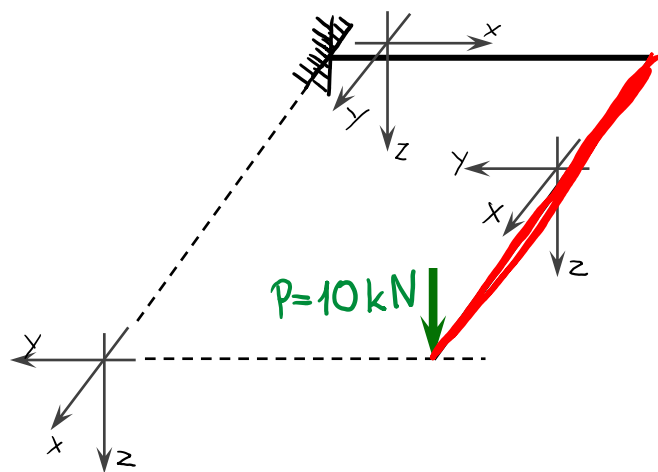
□ Więzy podporowe i połączenia między tarczami:





Przykład

Wyznaczenie sił wewnętrznych dla SW dźwigara załamanego w planie- sporządzić wykresy M_x , M_y , V_z



$$M_{y,32} = 0$$

$$M_{y,23} = -P \cdot 5m = -50 \text{ kN} \cdot m$$

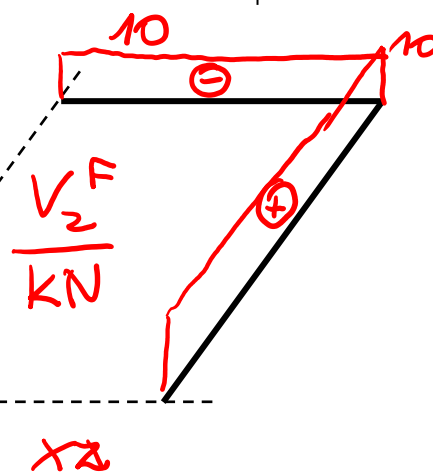
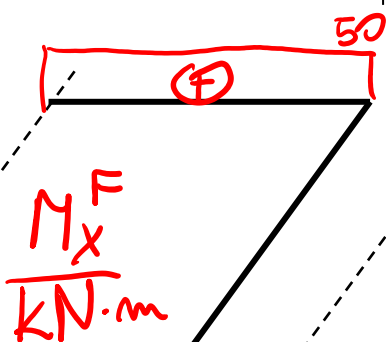
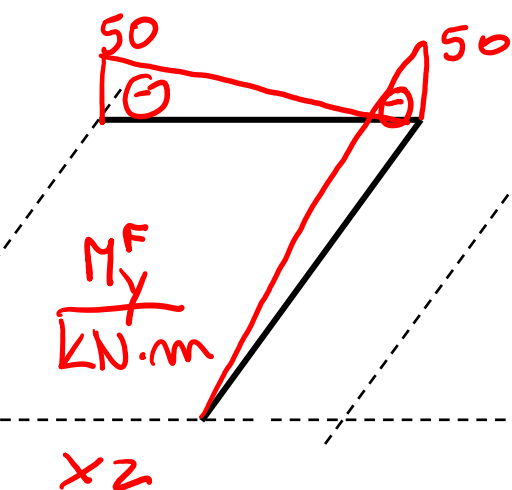
$$M_{y,21} = 0$$

$$M_{y,12} = -P \cdot 5m = -50 \text{ kN} \cdot m$$

$$M_{x,32} = M_{x,23} = 0$$

$$M_{x,21} = M_{x,12} = P \cdot 5m = 50 \text{ kN} \cdot m$$

$$V_{z,3} = V_{z,2} = V_{z,1} = P = 10 \text{ kN}$$





4. Dźwigary załamane w planie

- Wyznaczanie przemieszczeń w układach SW załamanych w planie od obciążeń mechanicznych

$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \int \frac{Mx^i \cdot Mx^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot My^F}{EI_y} \cdot dx + \cancel{\int \frac{\kappa_z \cdot Vz^i \cdot Vz^F}{GA} \cdot dx} + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s}$$

Δ - przemieszczenie (może to być przesunięcie, kąt obrotu lub wzajemne przemieszczenie) lub przyrost określonej wielkości

$Mx=Mx(x)$ – moment skręcający,

$My=My(x)$

– momenty zginające,

$Vz=Vz(x)$ – siły tnące (poprzeczne),

Ω - pole wykresu siły przekrojowej

S – siła w więzi sprężystej (moment w więzi rotacyjnej lub siła podłużna w więzi translacyjnej),

k – sztywność więzi sprężystej,

κ_z - współczynniki zależne od kształtu przekroju,

E, G – moduły sprężystości podłużnej i poprzecznej materiału (Younga i Kirchhoffa),

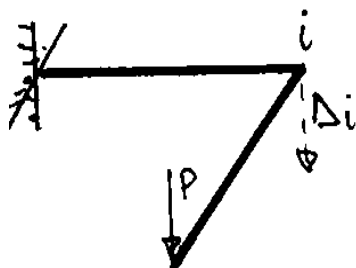
I_y – pole i momenty bezwładności poprzecznego przekroju pręta,

I_s - momenty bezwładności na skręcanie poprzecznego przekroju pręta (dla rur jest równy biegunowemu momentowi bezwładności).

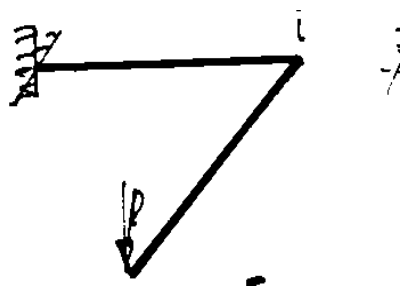
4. Dźwigary załamane w planie

□ Algorytm postępowania w celu obliczenia przemieszczenia od obciążenia mechanicznego

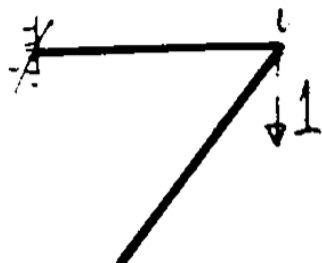
1) Układ dany



2) Rozwiązanie układu od obciążenia danego F



3) Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego 1

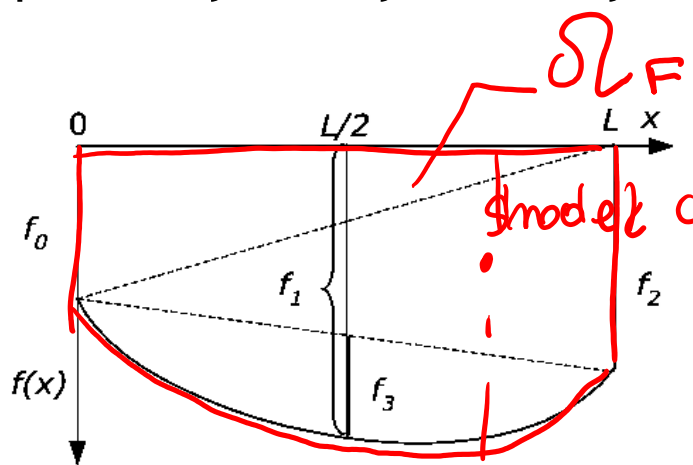




4. Dźwigary załamane w planie

Całkowanie wykresów

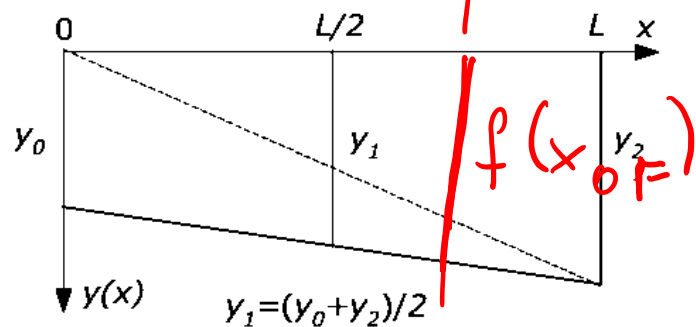
Funkcje $f(x)$ rozkłada się na sumę dwóch trójkątów oraz parabolę, której pole równa się $2/3$ pola otaczającego $f(x)$ prostokąta. Przedstawimy to w sposób wykresny i skorzystamy ze wzoru Wereszczagina.



wzór Wereszczagina.

model ciężkości

$$\int_0^L f(x) \cdot f(x) \cdot dx = \Omega_F \cdot f(x_{0F})$$

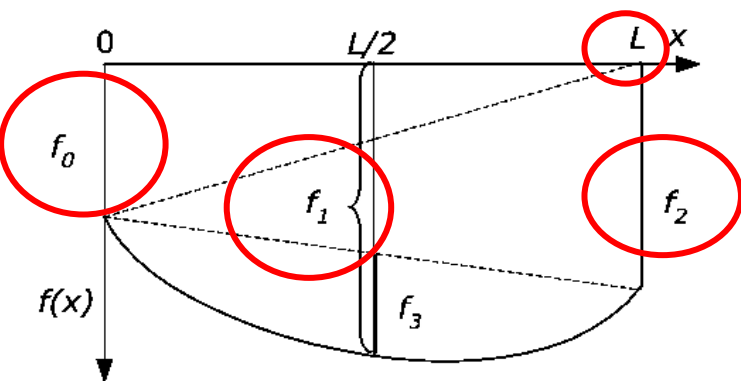




4. Dźwigary załamane w planie

Całkowanie wykresów

Funkcje $f(x)$ rozkłada się na sumę dwóch trójkątów oraz parabolę, której pole równa się $2/3$ pola otaczającego $f(x)$ prostokąta. Przedstawimy to w sposób wykresny i skorzystamy ze wzoru Wereszczagina.



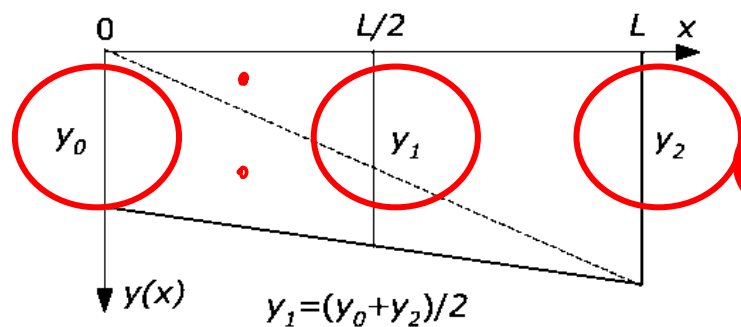
Wzór na obliczenie całki dwóch funkcji:

wzór Simpsona.

$$\int_0^l f(x) \cdot y(x) dx = \int_0^l (f_0 \nabla) y(x) dx + \int_0^l (\nabla f_2) y(x) dx + \int_0^l (\nabla f_3) y(x) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot L \cdot f_0 \cdot \left(\frac{1}{3} y_2 + \frac{2}{3} y_0 \right) + \frac{1}{2} \cdot L \cdot f_2 \cdot \left(\frac{2}{3} y_2 + \frac{1}{3} y_0 \right) + \frac{2}{3} \cdot L \cdot f_3 \cdot y_1 =$$

$$= \frac{L}{6} (f_0 \cdot y_0 + 4 \cdot f_1 \cdot y_1 + f_2 \cdot y_2)$$



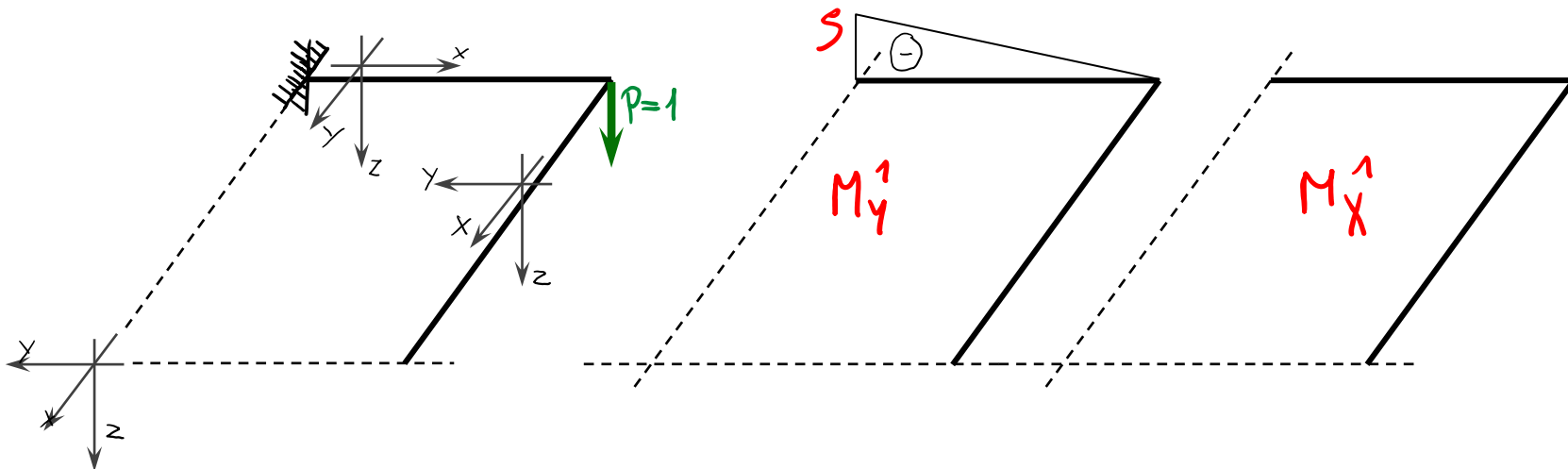
4. Dźwigary załamane w planie

-

-

4. Dźwigary załamane w planie

3. Wyznaczenie momentów zginających i skręcających od obciążenia jednostkowego na kierunku szukanego przemieszczenia



4. Obliczenie szukanego przemieszczenia od obciążenia mechanicznego

$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \int \frac{Mx^i \cdot Mx^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot My^F}{EI_y} \cdot dx$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ m} \cdot (5) \text{ m} \cdot \frac{2}{3} \cdot (50) \text{ kN} \cdot \text{m} = 0,0017 \text{ m} = 1,7 \text{ mm}$$

Diagram of a cantilever beam fixed at point 1 and free at point 2. The beam has a length of 5 m. A coordinate system (x, y, z) is shown at the free end, with x along the beam axis, y pointing left, and z pointing down. The beam is subjected to a temperature distribution: 10°C on the top surface and -10°C on the bottom surface. The thickness of the beam is $\Delta r = 0.01 \text{ m}$. The deflection at the free end is $\Delta_z = ?$.

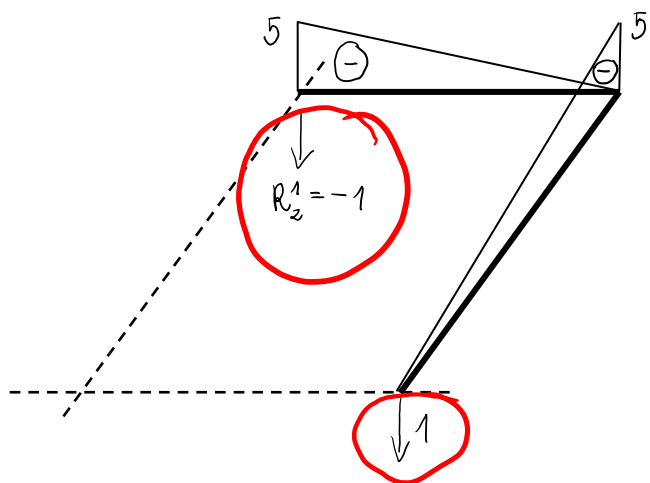
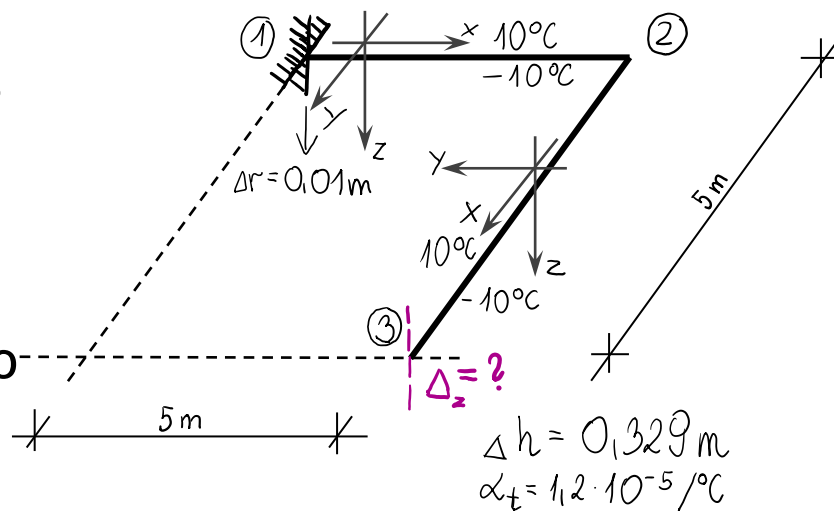


4. Dźwigary załamane w planie

❑ Przykład: Wyznaczanie przemieszczeń w układach SW załamanych w planie od obciążeń niemechanicznych

1. Układ dany - wyznaczyć przemieszczenie od obciążenia temperaturą i osiadaniem podpory

2. Wyznaczenie momentów zginających i skręcających od obciążenia jednostkowego na kierunku szukanego przemieszczenia

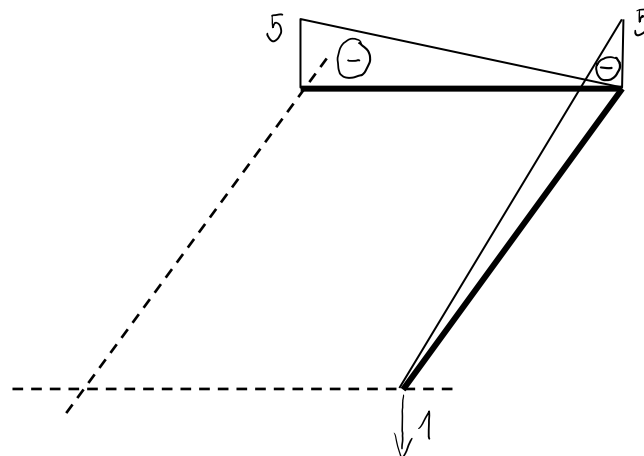
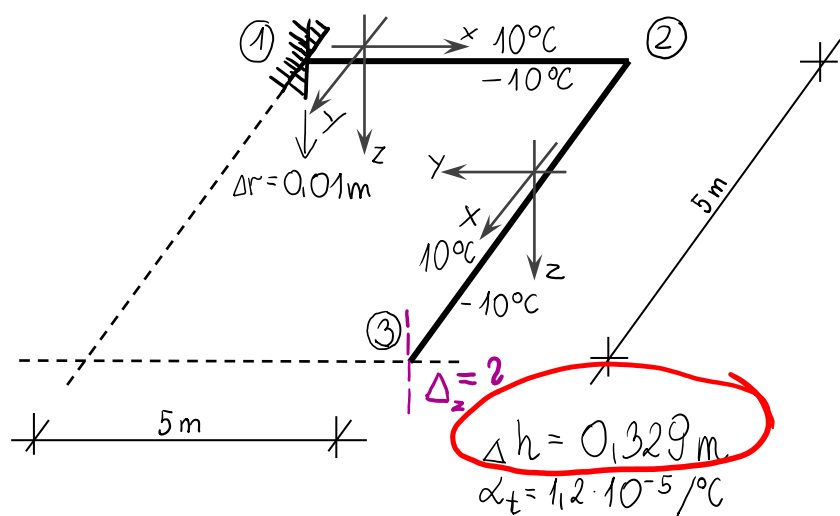


3. Obliczenie szukanego przemieszczenia od obciążenia przemieszczeniem podpór

$$\Delta_{i\Delta} = \Delta_i^\Delta = - \sum R_r^i \cdot \Delta_r = - (-1) \cdot 0.01 \text{ m} = 0.01 \text{ m}$$



4. Dźwigary załamane w planie



4. Obliczenie szukanego przemieszczenia od obciążenia temperaturą

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \sum_p \left(\frac{\alpha_T \cdot (\Delta T_{z^+} - \Delta T_{z^-})}{h_z} \cdot \Omega_{My^j} \right)_p = \alpha_T \cdot \frac{-10^\circ\text{C} - 10^\circ\text{C}}{0,329\text{m}} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot 5\text{m} \cdot (-5)\text{m} \right] = 0,018\text{m}$$

4. Dźwigary załamane w planie

- ❑ **RUSZTY I DŹWIGARY ZAŁAMANE W PLANIE**, jakie będziemy rozpatrywać, są układami płaskimi o obciążeniu działającym prostopadle do płaszczyzny dźwigara skonstruowanymi tak, że obciążenia te nie wywołują sił w płaszczyźnie dźwigara.
- ❑ W układach tych do liczby e zalicza się tylko więzi translacyjne prostopadłe do płaszczyzny dźwigara i więzi rotacyjne usytuowane w płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny dźwigara.
- ❑ **Stopień statycznej niewyznaczalności (SSN)** dla układu załamanego w planie, gdzie występują tylko trzy rodzaje sił wewnętrznych tj. M_x, V_z, M_y wynosi:

$$n_h = e - 3t$$

gdzie: e - liczb stopni swobody.

t - liczba tarcz.