

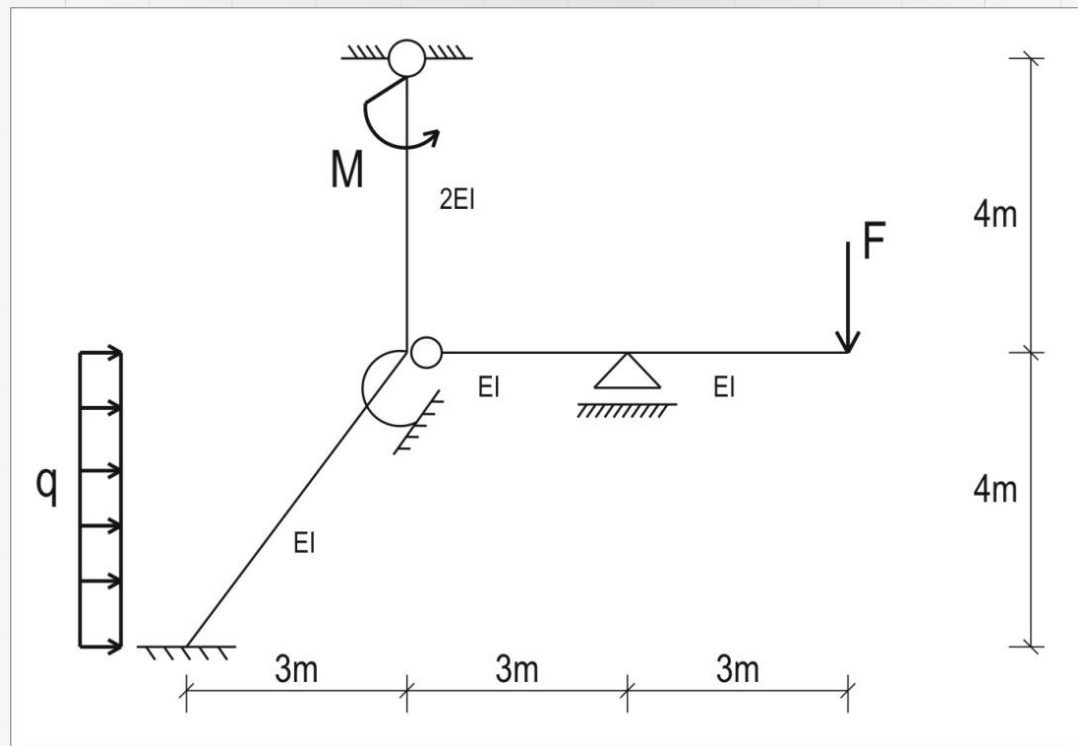


Politechnika
Wroclawska

METODA PRZEMIESZCZEŃ



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Dane do zadania:

$$M = 40 \text{ kNm}$$

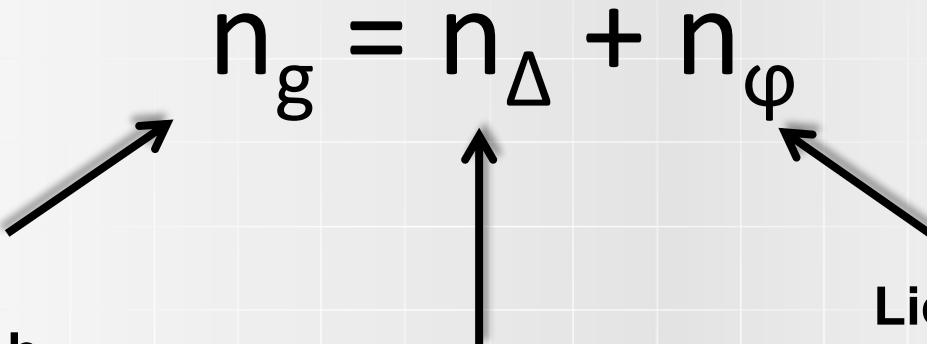
$$q = 5 \text{ kN/m}$$

$$F = 10 \text{ kN}$$

$$k_{\varphi} = 10 \frac{EI}{m}$$

1. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu

Stopień Geom. Niewyzn. = Liczba niewiadomych przemieszczeń

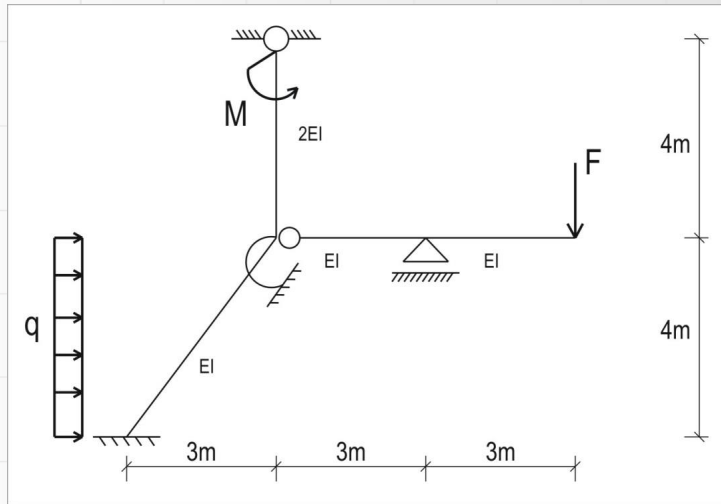
$$n_g = n_{\Delta} + n_{\varphi}$$


Liczba niewiadomych przemieszczeń

Liczba niewiadomych przesuwów

Liczba niewiadomych obrotów

1. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu

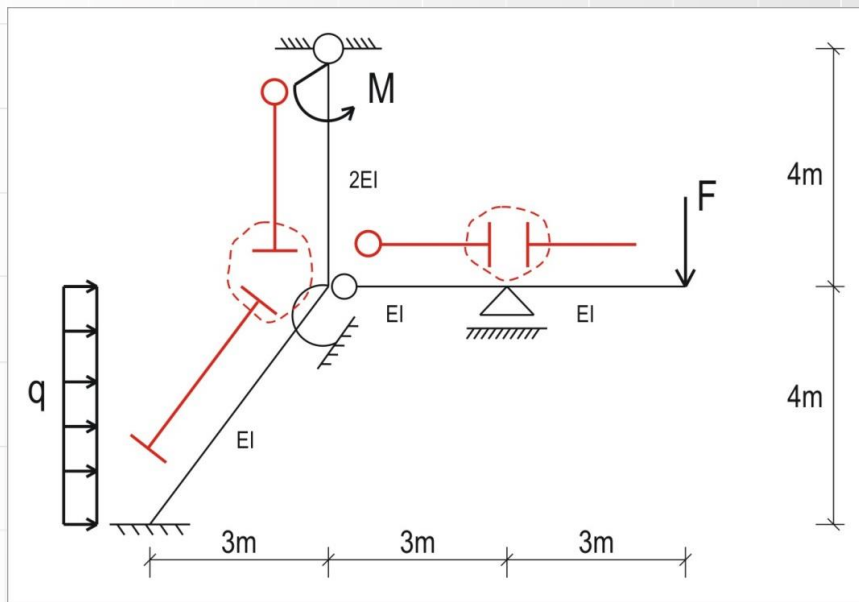


$$n_g = n_{\Delta} + n_{\varphi}$$

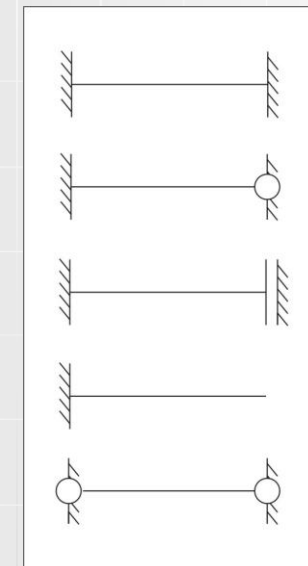
1a. Obliczenie liczby niewiadomych obrotów:

n_{φ} - liczba węzłów sztywnych, niepodporowych.

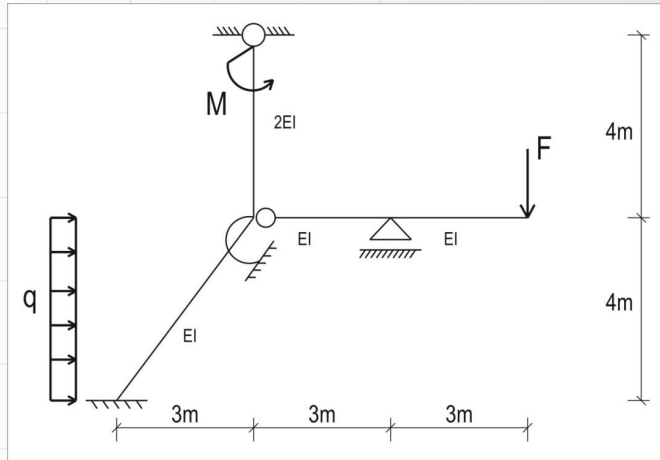
TYPY PRĘTÓW:



$$n_{\varphi} = 2$$






1. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu



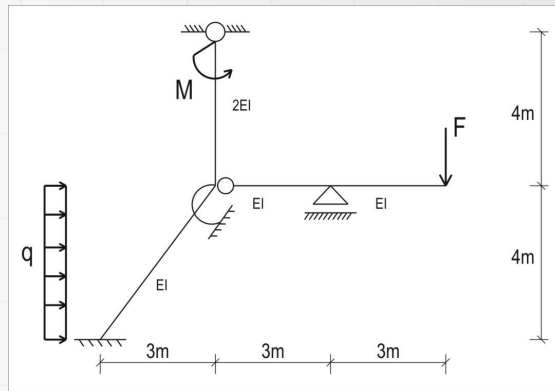
$$n_g = n_{\Delta} + n_{\varphi}$$

1b. Obliczenie liczby niewiadomych przesuwów:

BUDOWA MODELU PRZEGUBOWEGO

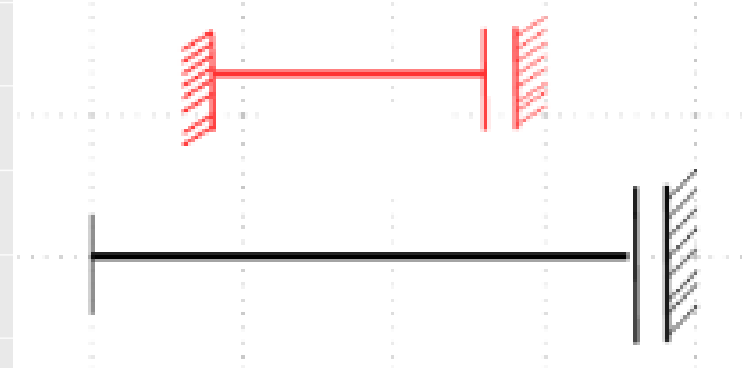
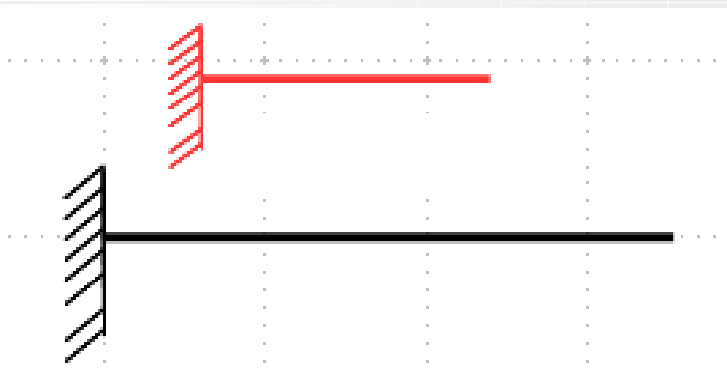
1. Z układu zadanego należy usunąć więzi sprężyste. 
2. W każdym węźle sztywnym układu zadanego należy wstawić przegub, również w podporowym. 
3. Podporę łożwową układu zadanego zamienia się na więź elementarną na kierunku zablokowanego przesuwu. 

1. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu

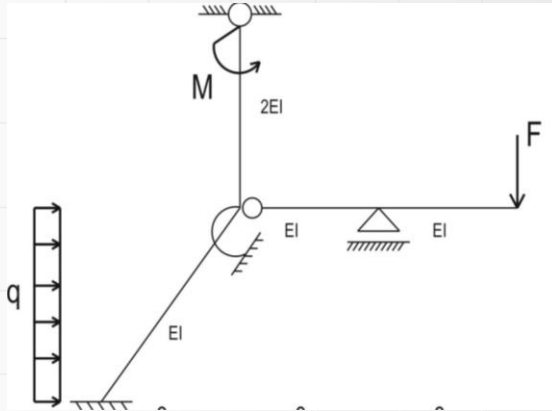


$$n_g = n_{\Delta} + n_{\varphi}$$

BUDOWA MODELU PRZEGUBOWEGO

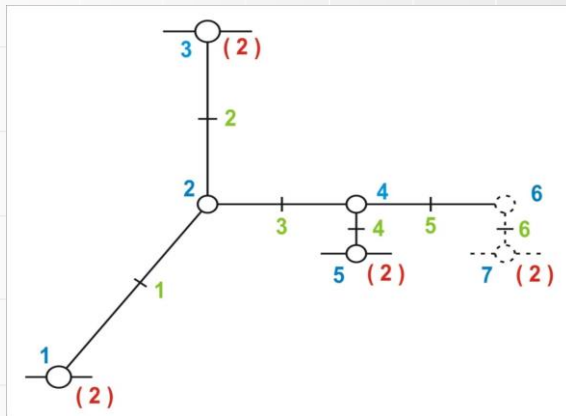


1. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu



$$n_{gg} = n_{\Delta} + n_{\varphi}$$

BUDOWA MODELU PRZEGUBOWEGO



$$n_{\Delta} = 2w - (p + r)$$

Gdzie:

w – liczba węzłów,

p – liczba prętów,

r – liczba reakcji

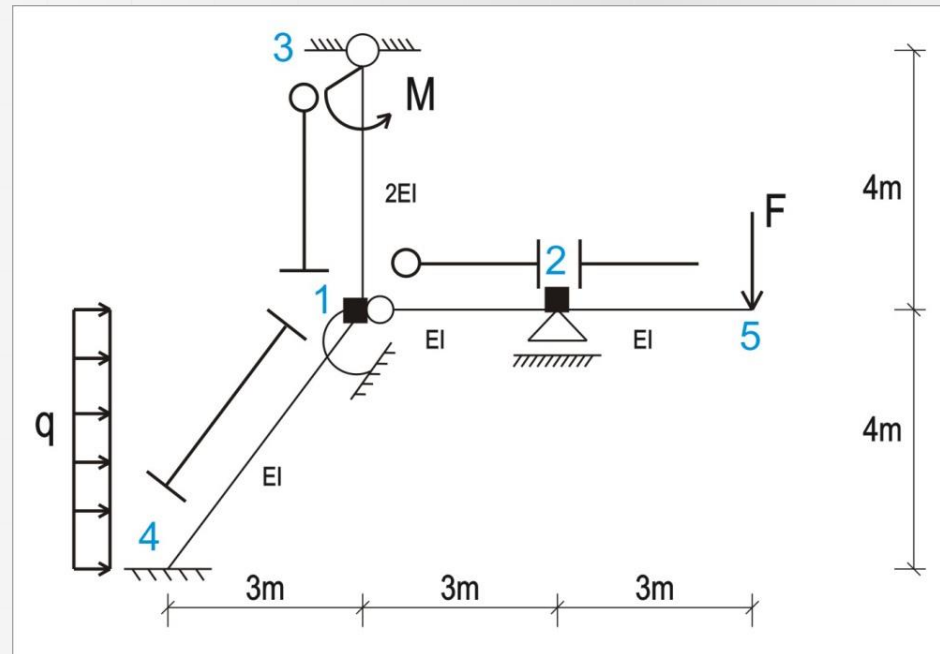
$$n_{\Delta} = 2 \times 7 - (6 + 8) = 0$$

Uwaga:

Więź oznaczona przerywaną linią odbiera stopień przesuwu, który uwzględniony będzie we wzorze transformacyjnym dla pręta sztywny-łyżwa.

$$n_{gg} = 0 + 2 = 2$$

2. UKŁAD PODSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ - tworzymy z układu zadanego przez dodanie fikcyjnych więzi, ale w taki sposób, żeby układ był geometrycznie niezmienny oraz kinematycznie wyznaczalny o znanych, równych zero, przemieszczeniach węzłów.



3. Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń:

a) postać ogólna

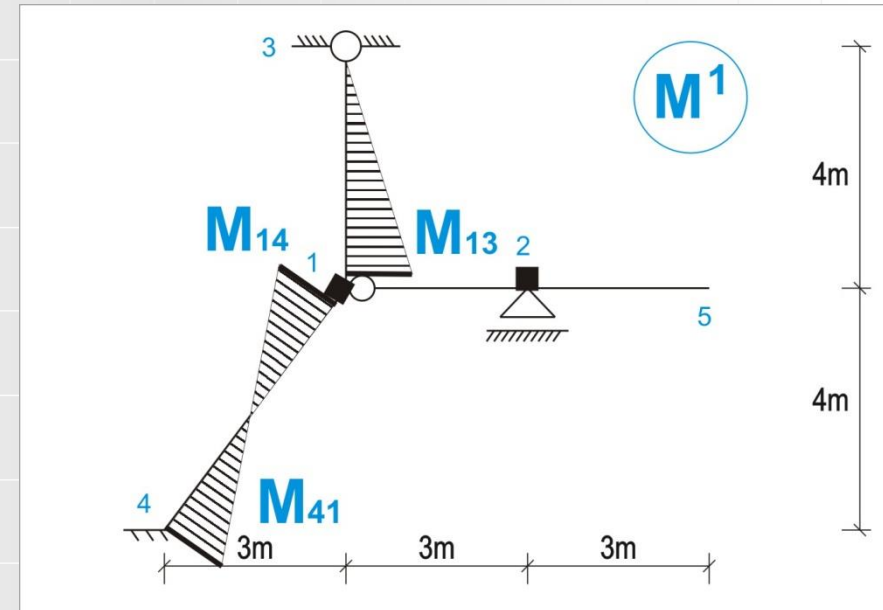
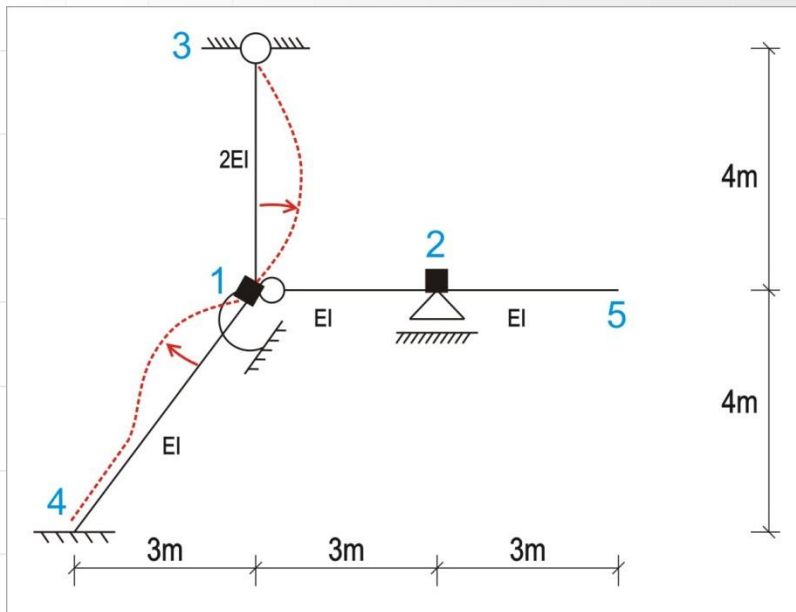
$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{k}_{11} \varphi_1 + \mathbf{k}_{12} \varphi_2 + \mathbf{k}_{10} = 0 \\ \mathbf{k}_{21} \varphi_1 + \mathbf{k}_{22} \varphi_2 + \mathbf{k}_{20} = 0 \end{array} \right.$$

\mathbf{k}_{11} - moment w więzi 1 spowodowany obrotem węzła 1 o kąt $\varphi_1 = 1$ Rad

b) Obliczenie współczynników:

stan $\varphi_1 = 1$ ($\varphi_2 = 0$, obc.zew = 0, $\Delta_1 = 0$)

! Wykres po
stronie włókien
rozciąganych



$$M_{13}^1 = 3 \left(\frac{EI}{l} \right)_{13} = 3 \times \left(\frac{2EI}{4m} \right) = 1,5 EI/m$$

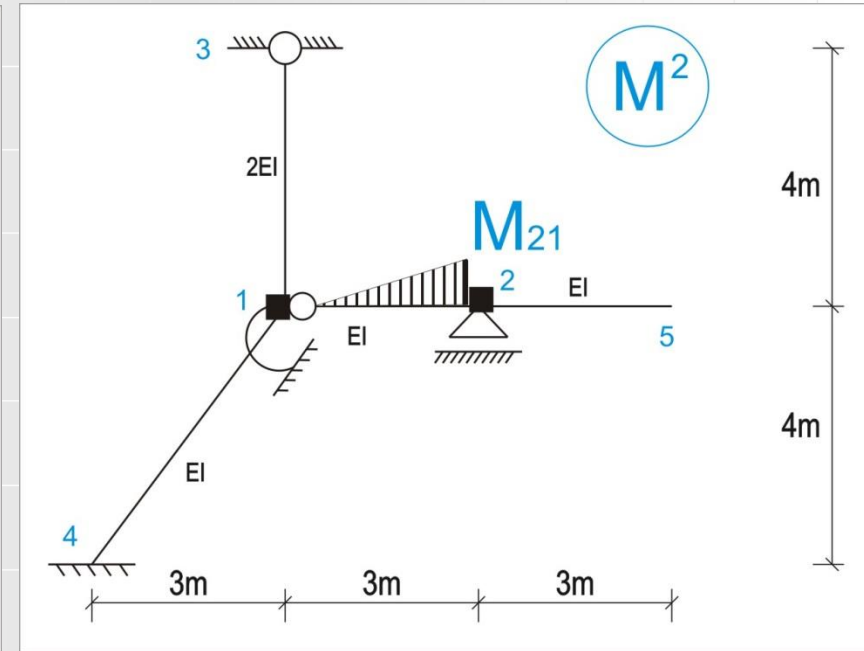
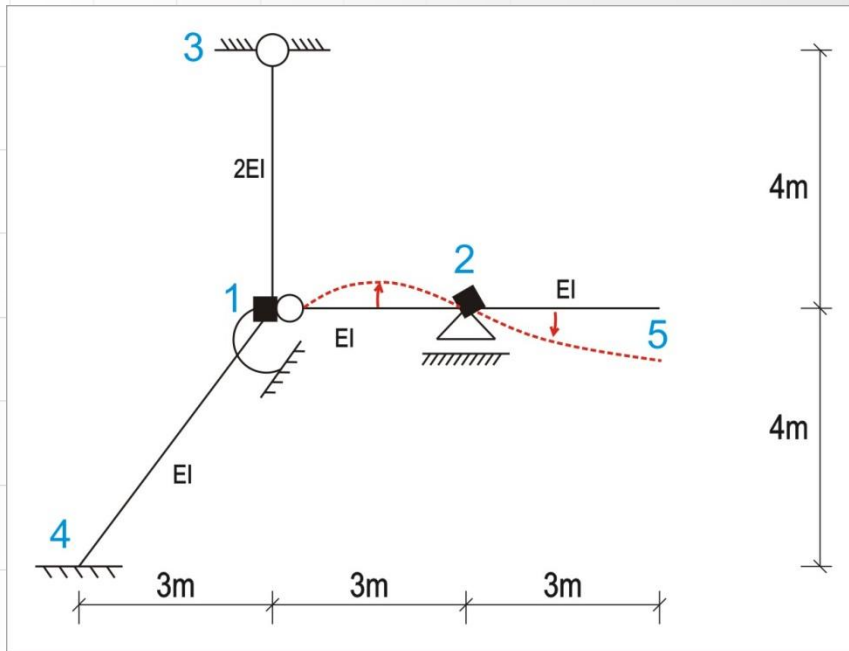
$$M_{14}^1 = 4 \left(\frac{EI}{l} \right)_{13} = 4 \times \left(\frac{EI}{5m} \right) = 0,8 EI/m$$

$$M_{41}^1 = 0,5 M_{14}^1 = 0,4 EI/m$$

b) Obliczenie współczynników:

stan $\varphi_2 = 1$ ($\varphi_1 = 0$, obc.zew = 0, $\Delta_1 = 0$)

! Wykres po
stronie włókien
rozciąganych



$$M_{21}^2 = 3 (EI/l)_{21} = 3 \times (3EI/3m) = 1,0EI/m$$

$$M_{25}^2 = 0$$

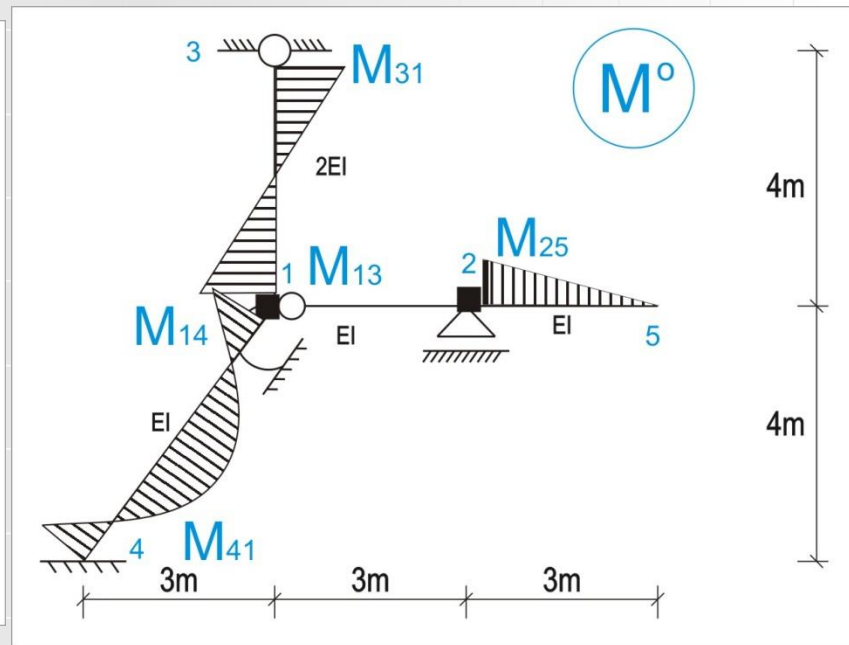
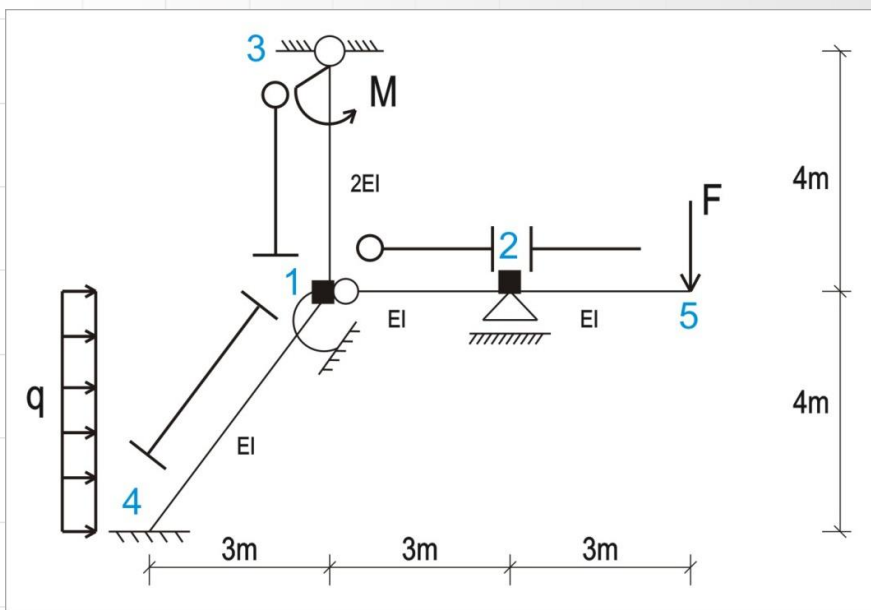


W ukł. statycznie
wyznaczalnych nie ma sił
wewn. od obciążeń
niemechanicznych.

b) Obliczenie współczynników:

stan od obc. zewn. ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, $\Delta_1 = 0$)

! Wykres po
stronie włókien
rozciąganych



$$M_{14}^o = ql^2/12 = 5 \times 4^2/12 = 6,66 \text{ kNm}$$

$$M_{41}^o = -ql^2/12 = 5 \times 4^2/12 = -6,66 \text{ kNm}$$

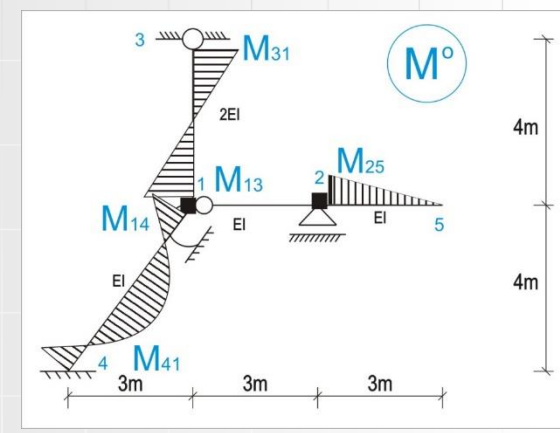
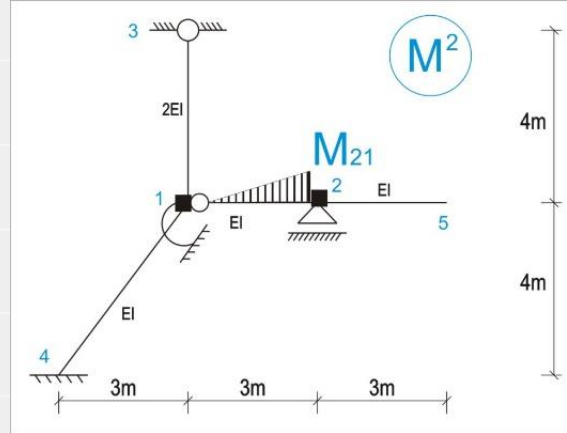
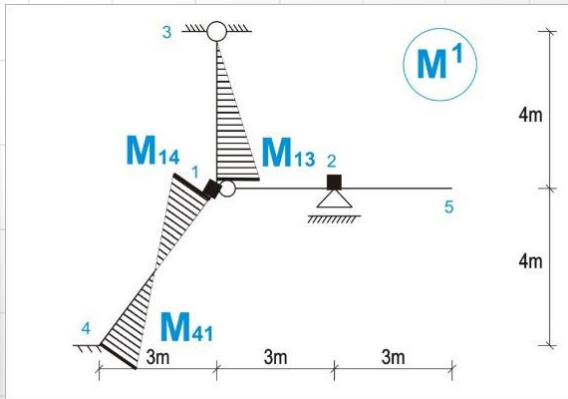
$$M_{13}^o = M/2 = 40 \text{ kNm} / 2 = 20 \text{ kNm}$$

$$M_{31}^o = M = 40 \text{ kNm}$$

$$M_{25}^o = -30 \text{ kNm}$$



b) Obliczenie współczynników:



$$M_{14}^0 = 6,66 \text{ kNm}$$

$$M_{41}^0 = -6,66 \text{ kNm} \quad M_{25}^0 = -30 \text{ kNm}$$

$$M_{13}^0 = 20 \text{ kNm}$$

$$M_{31}^0 = 40 \text{ kNm}$$

$$M_{14}^1 = 0,8 \text{ EI/m}$$

$$M_{21}^2 = 1,0 \text{ EI/m}$$

$$M_{41}^1 = 0,4 \text{ EI/m}$$

$$M_{13}^1 = 1,5 \text{ EI/m}$$

$$k_{11} = M_{14}^1 + M_{13}^1 + k\varphi = (1,5 + 0,8) \text{ EI/m} + k\varphi = 2,3 \text{ EI/m} + k\varphi = 12,3 \text{ EI/m}$$

$$k_{12} = k_{21} = 0$$

$$k_{22} = M_{21}^2 + M_{25}^2 = 1,0 \text{ EI/m}$$

$$k_{10} = M_{14}^0 + M_{13}^0 = -13,33 \text{ kNm}$$

$$k_{20} = M_{25}^0 = -30 \text{ kNm}$$



c) Szczegółowa postać układu równań kanonicznych

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{12,3 \text{ EI/m} \varphi_1 + \mathbf{0} - \mathbf{13,33kNm} = \mathbf{0} \\ \mathbf{0} + \mathbf{EI/m} \varphi_2 - \mathbf{30kNm} = \mathbf{0} \end{array} \right.$$

d) Rozwiązanie układu równań

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_1 = \mathbf{1,08 \text{ kNm}^2 / \text{EI}} \\ \varphi_2 = \mathbf{30 \text{ kNm}^2 / \text{EI}} \end{array} \right.$$

4. Obliczenie sił rzeczywistych

Momenty zginające:

I sposób : zastosowanie wzorów transformacyjnych:

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji}) + M_{ij}^o,$$

$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

| i | j | a_{ij} | a_{ji} | $b_{ij} = b_{ji}$ | $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ | $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$ |
|---|---|----------|----------|-------------------|----------------------------|----------------------------|
|  | | 4 | 4 | 2 | 6 | 6 |
|  | | 3 | 0 | 0 | 3 | 0 |
|  | | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 |
|  | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

II sposób : z użyciem superpozycji

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \varphi_1 + M_{ij}^2 \varphi_2 + M_{ij}^0$$

Siły tnące i osiowe:

Siły tnące można wyznaczyć ze wzorów transformacyjnych lub z superpozycji.

Siły osiowe uzyskuje się z warunków równowagi sił w węzłach po wcześniejszym wyznaczeniu wartości sił tnących.

5. KONTROLA KINEMATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA.

- a) Wyznaczyć stopień statycznej niewyznaczalności układu
- b) Przyjąć układ podstawowy metody sił
- c) Rozwiązać układ podstawy metody sił od jednostkowych sił hiperstatycznych
- d) Sprawdzić kinematyczną zgodność przemieszczeń