

Zadanie 3. Rama płaska – stateczność

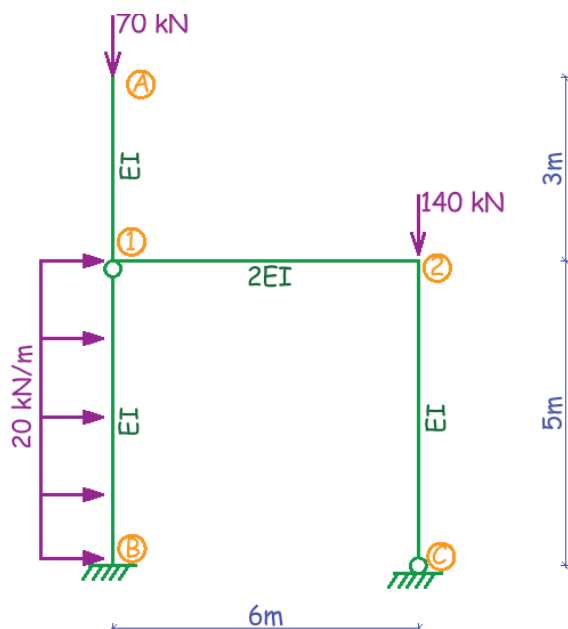
Dany jest płaski ustrój ramowy o schemacie statycznym jak na rysunku. Pręty układu są zabezpieczone przed wyboczeniem z płaszczyzny i zwichrzeniem. Należy:

1. Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
2. Korzystając z programu komputerowego wyznaczyć siły osiowe w prętach.
3. Stosując metodę przemieszczeń zbudować równanie stateczności,
4. Rozwiązać równanie stateczności, obliczyć mnożnik obciążenia krytycznego i współczynniki długości wyboczeniowych prętów ściskanych.
5. Skomentować uzyskane wyniki.
6. Wyznaczyć wektor własny odpowiadający 1 postaci wyboczenia.

Dane:

IPE 200

Stal: S 235;



Wyniki z programu komputerowego dla zaznaczonego słupa:

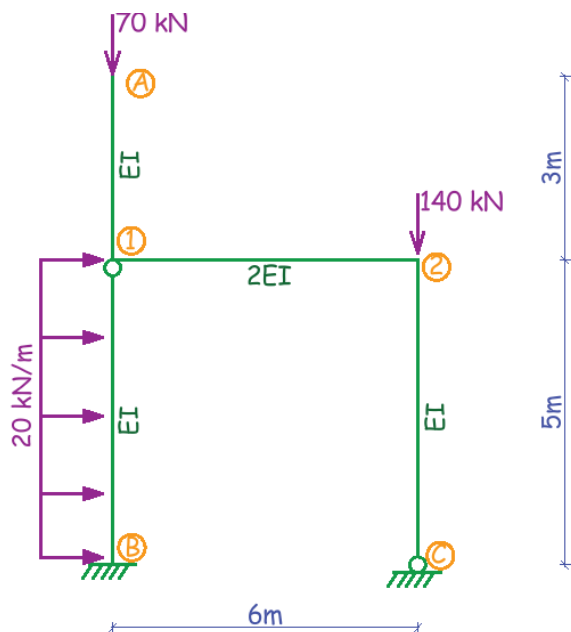
- Forma nr 1 -> $\alpha_{cr,1} = 3.258$
- Wektor własny dla 1 formy wyboczeniowej: $w_1 = \begin{bmatrix} -0,0400 \text{ rad} \\ 0,0669 \text{ rad} \\ 1 \text{ m} \end{bmatrix}$

Przypadek/Forma	Wsp.krytyczny
2/ 1	3,25825e+00
2/ 2	8,94906e+00
2/ 3	1,74704e+01
2/ 4	4,88910e+01
2/ 5	5,70888e+01

Węzeł/Przypadek/Forma	Wektor własny UX	Wektor własny RY
1/ 2/ 1	0,9997	-0,0400
2/ 2/ 1	1,0000	0,0669

1. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU

Warunek ilościowy geometrycznej niezmienności układu:



$$e \geq 3t$$

$$t = 2, e = 7 \rightarrow$$

$$n_h = e - 3t = 7 - 3 \cdot 2 = 1$$

$$7 > 3 \cdot 2 - \text{warunek spełniony}$$

Warunek jakościowy:

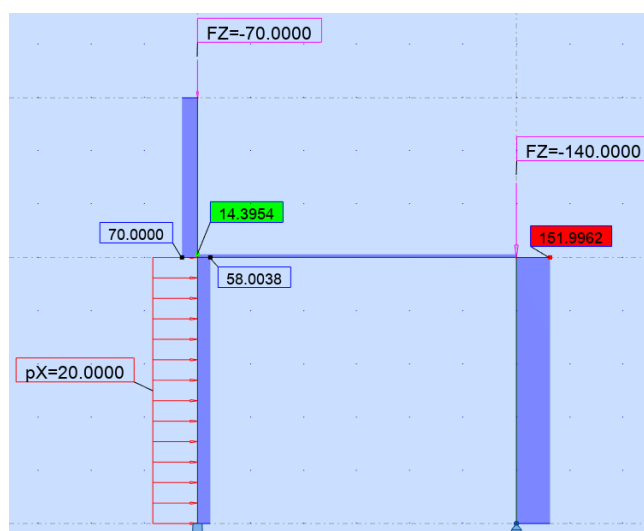
Układ ramowy składa się z dwóch tarcz połączonych z ostoją 7 więziami, spośród których można wyróżnić 6 więzi które są niezbieżne i nierównoległe. Korzystając z twierdzenia o 2 tarczach układ jest geometrycznie niezmienny.

Z przeprowadzonej analizy można

stwierdzić, że zarówno warunek ilościowy geometrycznej niezmienności jak i warunek jakościowy są spełnione.

2. ROZWIĄZANIE RAMY WG TEORII RZĘDU I. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH

Korzystając z programu komputerowego ROBOT rozwiązano ramę o zadanych przekrojach od obciążenia danego. Obliczone wartości sił osiowych zestawiono poniżej.

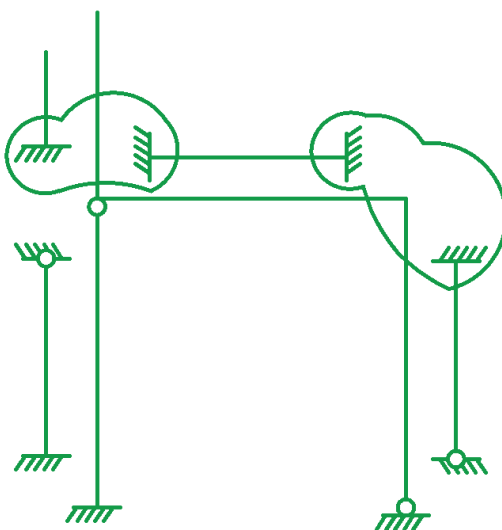


3. PRZYJĘCIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ DO ANALIZY STATECZNOŚCI

Aby dobrać układ podstawowy metody przemieszczeń należy obliczyć stopień geometrycznej (kinematycznej) niewyznaczalności układu. Stopień n_g oblicza się korzystając ze wzoru:

$$n_g = n_\varphi + n_\delta$$

4.1. Podział układu na elementy o znanych wzorach transformacyjnych i obliczenie liczby niezależnych obrotów n_φ



Nieznane kąty obrotu, które występują we wzorach transformacyjnych: $\varphi_1 \neq 0$ oraz $\varphi_2 \neq 0$.

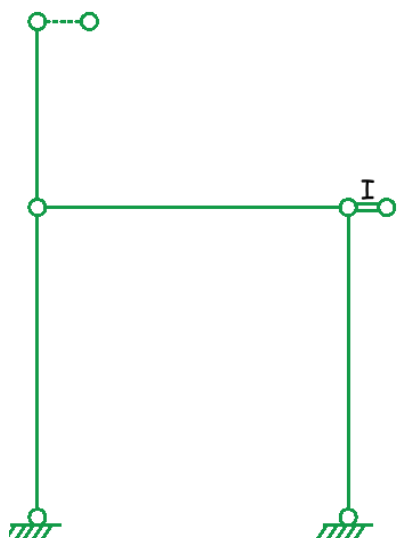
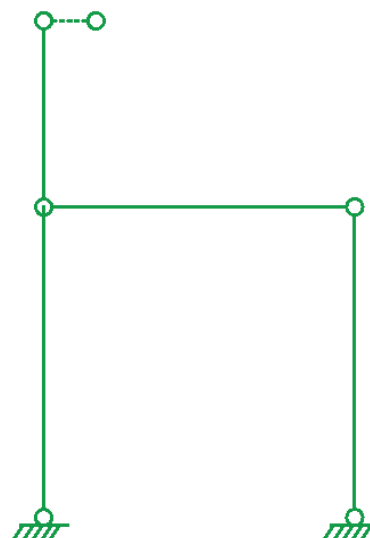
Liczba nieznanymi więzi rotacyjnych: $n_\varphi = 2$

4.2. Zbudowanie modelu przegubowego układu i obliczenie liczby niezależnych przesunięć n_δ

- Kąty obrotu cięciw w stanie $\delta_I = 1$

Warunek konieczny, ale niewystarczający:

$$\begin{aligned} n_\delta &\geq 2w - p - r \\ n_\delta &\geq 2 \cdot 6 - 5 - 6 \\ n_\delta &\geq 1 \end{aligned}$$

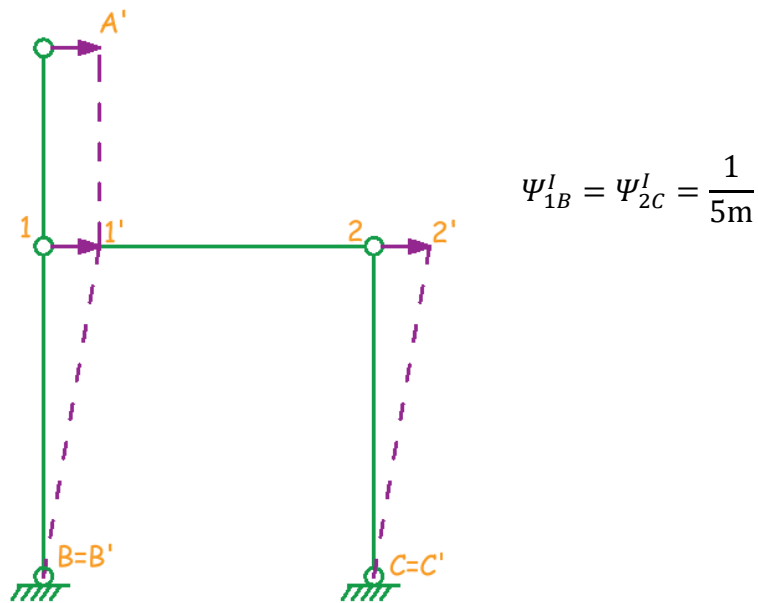


Analiza kinematyczna:

Dołożenie jednej więzi na kierunku możliwego ruchu (dołożona więź pozioma albo w węźle D, albo E) spowoduje całkowite usztywnienie układu.

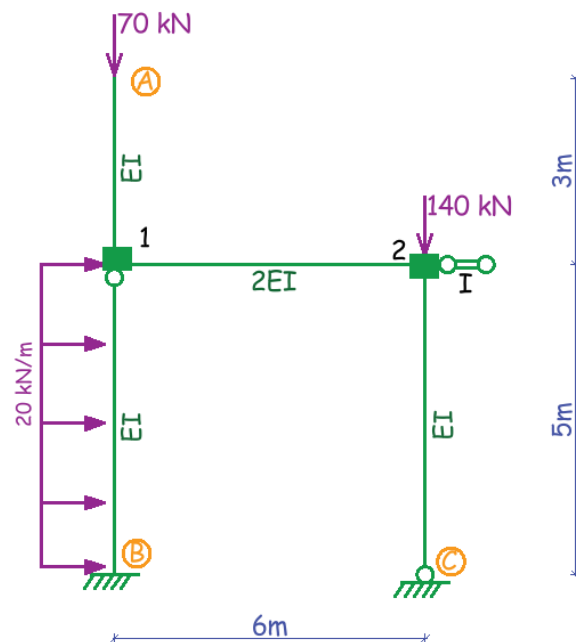
Ostatecznie liczba niezależnych przesuwów węzłów wynosi $n_\delta = 1$.

- Kąty obrotu cięciw w stanie $\delta_I = 1$



4.3. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Układ podstawowy tworzymy z układu zadanego poprzez dodanie n_ϕ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych.



4. OGÓLNA POSTAĆ RÓWNIANIA STATECZNOŚCI

$$\det K(\alpha_{cr}) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} k_{11}(\alpha_{cr}) & k_{12}(\alpha_{cr}) & k_{1I}(\alpha_{cr}) \\ k_{21}(\alpha_{cr}) & k_{22}(\alpha_{cr}) & k_{2I}(\alpha_{cr}) \\ k_{I1}(\alpha_{cr}) & k_{I2}(\alpha_{cr}) & k_{II}(\alpha_{cr}) \end{bmatrix} = 0$$

gdzie α_{cr} to globalny, krytyczny mnożnik obciążenia.

5. OBLICZENIE ELEMENTÓW MACIERZY SZTYWNOŚCI WG TEORII II RZĘDU. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ RÓWNANIA STATECZNOŚCI

5.1 Parametry stateczności prętów

W obliczeniach założono profile podane w temacie. Przekrojowe sztywności giętne prętów wynoszą:

$$EI = EI_{1A} = EI_{1B} = EI_{2C} = 210 \text{ GPa} \cdot 1943,17 \text{ cm}^4 = 4080,66 \text{ kNm}^2,$$

$$EI_{12} = 2EI = 2 \cdot 210 \text{ GPa} \cdot 25\,170 \text{ cm}^4 = 8161,32 \text{ kNm}^2.$$

Wartości sił osiowych obliczonych według teorii I rzędu z pominięciem imperfekcji

$$N_{1A} = -70,00 \text{ kN}, N_{1B} = -58,00 \text{ kN}, N_{12} = -14,40, N_{2C} = -152,00 \text{ kN}.$$

Parametry stateczności prętów wynoszą:

$$\lambda_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{ij}|}{EI_{ij}}}$$

$$\lambda_{1A} = L_{1A} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{1A}|}{EI_{1A}}} = 3,0 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |-70|}{4080,66 \text{ kNm}^2}} = 0,3929 \sqrt{\alpha_{cr}}$$

$$\lambda_{1B} = L_{CD} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{1B}|}{EI_{1B}}} = 5,0 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |-58,00 \text{ kN}|}{4080,66 \text{ kNm}^2}} = 0,5961 \sqrt{\alpha_{cr}}$$

$$\lambda_{12} = L_{12} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{12}|}{EI_{12}}} = 6,0 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |-14,40 \text{ kN}|}{8161,32 \text{ kNm}^2}} = 0,2520 \sqrt{\alpha_{cr}}$$

$$\lambda_{2C} = L_{2C} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{2C}|}{EI_{2C}}} = 5,0 \text{ m} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |-152,00 \text{ kN}|}{4080,66 \text{ kNm}^2}} = 0,9650 \sqrt{\alpha_{cr}}$$

7.3. Współczynniki macierzy sztywności w ujęciu teorii II rzędu

$$k_{11}(\alpha_{cr}) = \sum_j a_{1j} \cdot \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} = a_{1A}''(\lambda_{1A}) \frac{EI_{1A}}{L_{1A}} + a_{12}(\lambda_{12}) \frac{EI_{12}}{L_{12}}$$

$$= -\lambda_{1A} \cdot tg \lambda_{1A} \cdot \frac{EI_{1A}}{L_{1A}} + \lambda_{12} \frac{\sin \lambda_{12} - \lambda_{12} \cos \lambda_{12}}{2(1 - \cos \lambda_{12}) - \lambda_{12} \sin \lambda_{12}} \cdot \frac{EI_{12}}{L_{12}}$$

$$k_{12}(\alpha_{cr}) = k_{21}(\alpha_{cr}) = b_{12}(\lambda_{12}) \frac{EI_{12}}{L_{12}} = \lambda_{12} \frac{\lambda_{12} - \sin \lambda_{12}}{2(1 - \cos \lambda_{12}) - \lambda_{12} \sin \lambda_{12}} \cdot \frac{EI_{12}}{L_{12}}$$

$$k_{1I}(\alpha_{cr}) = k_{I1}(\alpha_{cr}) = - \sum_j c_{1j} \cdot \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} \cdot \Psi_{1j}^I = 0$$

$$k_{22}(\alpha_{cr}) = \sum_j a_{2j} \cdot \frac{EI_{2j}}{L_{2j}} = a_{12}(\lambda_{12}) \frac{EI_{12}}{L_{12}} + a_{2c}(\lambda_{2c}) \frac{EI_{2c}}{L_{2c}} =$$

$$= \lambda_{12} \frac{\sin \lambda_{12} - \lambda_{12} \cos \lambda_{12}}{2(1 - \cos \lambda_{12}) - \lambda_{12} \sin \lambda_{12}} \cdot \frac{EI_{12}}{L_{12}} + (\lambda_{2c})^2 \frac{\sin \lambda_{2c}}{\sin \lambda_{2c} - \lambda_{2c} \cos \lambda_{2c}} \cdot \frac{EI_{2c}}{L_{2c}}$$

$$k_{21}(\alpha_{cr}) = k_{12}(\alpha_{cr}) = - \sum_j c_{2j} \cdot \frac{EI_{2j}}{L_{2j}} \cdot \Psi_{2j}^I = -c_{2c}(\lambda_{2c}) \frac{EI_{2c}}{L_{2c}} \cdot \Psi_{2c}^I$$

$$= -(\lambda_{2c})^2 \frac{\sin \lambda_{2c}}{\sin \lambda_{2c} - \lambda_{2c} \cos \lambda_{2c}} \cdot \frac{EI_{2c}}{L_{2c}} \cdot \Psi_{2c}^I$$

$$k_{21}(\alpha_{cr}) = - \sum_j c_{2j} \cdot \frac{EI_{2j}}{L_{2j}} \cdot \Psi_{2j}^I = -c_{2c}(\lambda_{2c}) \frac{EI_{2c}}{L_{2c}} \cdot \Psi_{2c}^I$$

$$= -(\lambda_{2c})^2 \frac{\sin \lambda_{2c}}{\sin \lambda_{2c} - \lambda_{2c} \cos \lambda_{2c}} \cdot \frac{EI_{2c}}{L_{2c}} \cdot \Psi_{2c}^I = k_{11}(\alpha_{cr})$$

$$k_{11}(\alpha_{cr}) = \sum_{ij} d_{ij} \cdot \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \Psi_{1j}^I = d_{1B}(\lambda_{1B}) \frac{EI_{1B}}{L_{1B}} \cdot \Psi_{1B}^I \cdot \Psi_{1B}^I + d_{2c}(\lambda_{2c}) \frac{EI_{2c}}{L_{2c}} \cdot \Psi_{2c}^I \cdot \Psi_{2c}^I$$

$$= (\lambda_{1B})^3 \frac{\cos \lambda_{1B}}{\sin \lambda_{1B} - \lambda_{1B} \cos \lambda_{1B}} \cdot \frac{EI_{1B}}{L_{1B}} \cdot (\Psi_{1B}^I)^2 + (\lambda_{2c})^3 \frac{\cos \lambda_{2c}}{\sin \lambda_{2c} - \lambda_{2c} \cos \lambda_{2c}} \cdot \frac{EI_{2c}}{L_{2c}} \cdot (\Psi_{2c}^I)^2$$

7.4. Szczegółowa postać równanie stateczności i jego rozwiązanie

$$k_{11}(\alpha_{cr}) = -(0,3929\sqrt{\alpha_{cr}}) \cdot \operatorname{tg}(0,3929\sqrt{\alpha_{cr}}) \cdot \frac{4080,66 \text{ kNm}^2}{3\text{m}}$$

$$+ (0,2520\sqrt{\alpha_{cr}}) \frac{\sin(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}}) - (0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})\cos(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})}{2(1 - \cos(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})) - \lambda_{12}\sin(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{8161,32 \text{ kNm}^2}{6\text{m}}$$

$$k_{12}(\alpha_{cr}) = k_{21}(\alpha_{cr}) = (0,2520\sqrt{\alpha_{cr}}) \frac{(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}}) - \sin(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})}{2(1 - \cos(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})) - \lambda_{12}\sin(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{8161,32 \text{ kNm}^2}{6\text{m}}$$

$$k_{11}(\alpha_{cr}) = k_{11}(\alpha_{cr}) = 0$$

$$k_{22}(\alpha_{cr}) = (0,2520\sqrt{\alpha_{cr}}) \frac{\sin(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}}) - (0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})\cos(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})}{2(1 - \cos(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})) - (0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})\sin(0,2520\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{8161,32 \text{ kNm}^2}{6\text{m}}$$

$$+ (0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})^2 \frac{\sin(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})}{\sin(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}}) - (0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})\cos(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{4080,66 \text{ kNm}^2}{5\text{m}}$$

$$k_{21}(\alpha_{cr}) = k_{12}(\alpha_{cr})$$

$$= -(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})^2 \frac{\sin(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})}{\sin(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}}) - (0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})\cos(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})}$$

$$\cdot \frac{4080,66 \text{ kNm}^2}{5\text{m}} \cdot \left(\frac{1}{5\text{m}}\right)$$

$$k_{11}(\alpha_{cr}) = k_{11}(\alpha_{cr})$$

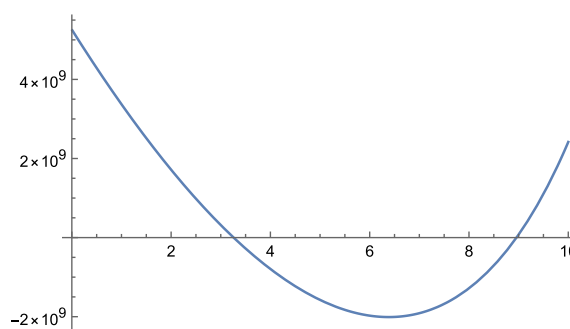
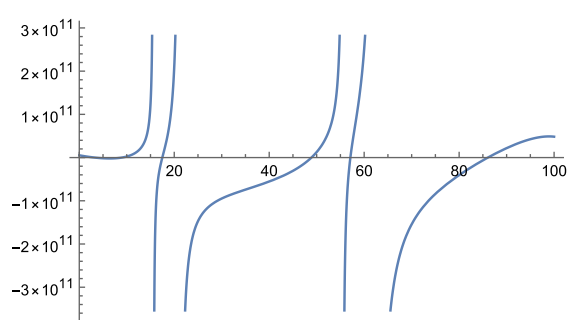
$$= -(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})^2 \frac{\sin(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})}{\sin(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}}) - (0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})\cos(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})}$$

$$\cdot \frac{4080,66 \text{ kNm}^2}{5\text{m}} \cdot \left(\frac{1}{5\text{m}}\right)$$

$$k_{II}(\alpha_{cr}) = (0,5961\sqrt{\alpha_{cr}})^3 \frac{\cos(0,5961\sqrt{\alpha_{cr}})}{\sin(0,5961\sqrt{\alpha_{cr}}) - (0,5961\sqrt{\alpha_{cr}})\cos(0,5961\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{4080,66 \text{ kNm}^2}{5\text{m}} \\ \cdot \left(\frac{1}{5\text{m}}\right)^2 + (0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})^3 \frac{\cos(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})}{\sin(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}}) - (0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})\cos(0,9650\sqrt{\alpha_{cr}})} \\ \cdot \frac{4080,66 \text{ kNm}^2}{5\text{m}} \cdot \left(\frac{1}{5\text{m}}\right)^2$$

$$\det \begin{bmatrix} k_{11}(\alpha_{cr}) & k_{12}(\alpha_{cr}) & k_{1I}(\alpha_{cr}) \\ & k_{22}(\alpha_{cr}) & k_{2I}(\alpha_{cr}) \\ \text{sym} & & k_{II}(\alpha_{cr}) \end{bmatrix} = 0$$

Pierwszy dodatni pierwiastek równania stateczności wyznaczono korzystając z programu *Mathematica*. Krytyczny mnożnik obciążeń obliczeniowych $\alpha_{cr,1} = 3,259$.



FindRoot[Det[K] == 0, {a, 3}]

[znajdź pi... | wyznacznik

{a -> 3.25899}

7.5. Współczynniki długości wyboczeniowych prętów ściskanych

Współczynniki długości wyboczeniowej poszczególnych elementów odpowiadające pierwszej formie utraty stateczności ramy wynoszą

$$\mu_{ij} = \frac{\pi}{L_{ij}} \sqrt{\frac{EI_{ij}}{\alpha_{cr}|N_{ij}|}}$$

$$\mu_{1A} = \frac{\pi}{L_{1A}} \sqrt{\frac{EI_{1A}}{\alpha_{cr}|N_{1A}|}} = \frac{\pi}{3,0\text{m}} \sqrt{\frac{4080,66 \text{ kNm}^2}{3,259 \cdot |-70,00\text{kN}|}} = 4,376$$

$$\mu_{1B} = \frac{\pi}{L_{1B}} \sqrt{\frac{EI_{1B}}{\alpha_{cr}|N_{1B}|}} = \frac{\pi}{5,0\text{m}} \sqrt{\frac{4080,66 \text{ kNm}^2}{3,259 \cdot |-58,00\text{kN}|}} = 2,884$$

$$\mu_{12} = \frac{\pi}{L_{12}} \sqrt{\frac{EI_{12}}{\alpha_{cr}|N_{12}|}} = \frac{\pi}{6,0\text{m}} \sqrt{\frac{8161,32 \text{ kNm}^2}{3,259 \cdot |-14,40\text{kN}|}} = 6,823$$

$$\mu_{2C} = \frac{\pi}{L_{2C}} \sqrt{\frac{EI_{2C}}{\alpha_{cr}|N_{2C}|}} = \frac{\pi}{5,0\text{m}} \sqrt{\frac{4080,66 \text{ kNm}^2}{3,259 \cdot |-152,00\text{kN}|}} = 1,782$$

Pręt	μ_{ij}		$\mu_{ij,lok}$	Typ pręta
------	------------	--	----------------	-----------

1A	4,376	>	2,0	Wsp
1B	2,884	>	0,7	Szt-przeg
12	6,823	>	0,5	Szt-szt
2C	1,782	>	0,7	Szt-przeg

Komentarz: Wszystkie obliczone współczynniki długości wybocheniowych są większe niż lokalne współczynniki długości wybocheniowych prętów, więc o nośności układu decyduje utrata stateczności w bazie globalnej.

8. WEKTOR WŁASNY

Wektor własny opisujący pierwszą postać wybochenia ramy opisuje dowolna liniowa kombinacja kolumn macierzy dołączonej do **K**, w tym także każda niezerowa kolumna tejże macierzy. W celu uproszczenia zapisu, pominięto jednostki współczynników, przy czym obliczając wartości skorzystano z następującego zestawu jednostek: rad, m, MN.

$$\mathbf{K}(\alpha_{cr,1}) = \begin{bmatrix} 4440.638 & 2664.878 & 0 \\ 2664.878 & 7116.833 & -368.720 \\ 0 & -368.720 & 24.640 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } \mathbf{K}(\alpha_{cr,1}) = \begin{bmatrix} 39405.12 & -65663.02 & -982595.10 \\ -65663.02 & 109418.06 & 1637354.51 \\ -982595.10 & 1637354.51 & 2.45017119 \times 10^7 \end{bmatrix}$$

Unormowany wektor własny

$$w_1 = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \\ \delta_{l,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,0401 \text{ rad} \\ 0,0668 \text{ rad} \\ 1 \text{ m} \end{bmatrix}$$

WYNIKI Z PROGRAMU ROBOT

1. KRYTYCZNY MNOŻNIK OBCIĄŻENIA

Przypadek/Forma	Wsp.krytyczny	Dokładność
2/ 1	3,25825e+00	1,06828e-09

2. DŁUGOŚCI WYBOCZENIOWE DLA PRĘTÓW

	Pręt/Przypadek/Forma	Wsp.krytyczny	Dokładność	Długość wybocheniowa Y (m)
12	10/ 2/ 1	3,25825e+00	1,06828e-09	40,94
2C	20/ 2/ 1	3,25825e+00	1,06828e-09	8,91
1B	30/ 2/ 1	3,25825e+00	1,06828e-09	14,42
1A	40/ 2/ 1	3,25825e+00	1,06828e-09	13,13

↑ $\alpha_{cr,1}$

Współczynniki długości wybocheniowych wg programu Robot

$$\text{Pręt 1A} - \mu_{1A} = \frac{L_{w,1A}}{L_{1A}} = \frac{13,13\text{m}}{73\text{m}} = 4,377$$

$$\text{Pręt 1B} - \mu_{1B} = \frac{L_{w,1B}}{L_{1B}} = \frac{14,42\text{m}}{5\text{m}} = 2,884$$

$$\text{Pręt 12} - \mu_{12} = \frac{L_{w,12}}{L_{12}} = \frac{40,94\text{m}}{6\text{m}} = 6,823$$

$$\text{Pręt 2C} - \mu_{2C} = \frac{L_{w,2C}}{L_{2C}} = \frac{8,91\text{m}}{5\text{m}} = 1,782$$

3. WEKTOR WŁASNY

Węzeł/Przypadek/Forma	Wektor własny UX	Wektor własny RY	
1/ 2/ 1	0,9997	-0,0400	φ_1
2/ 2/ 1	δI 1,0000	0,0669	φ_2