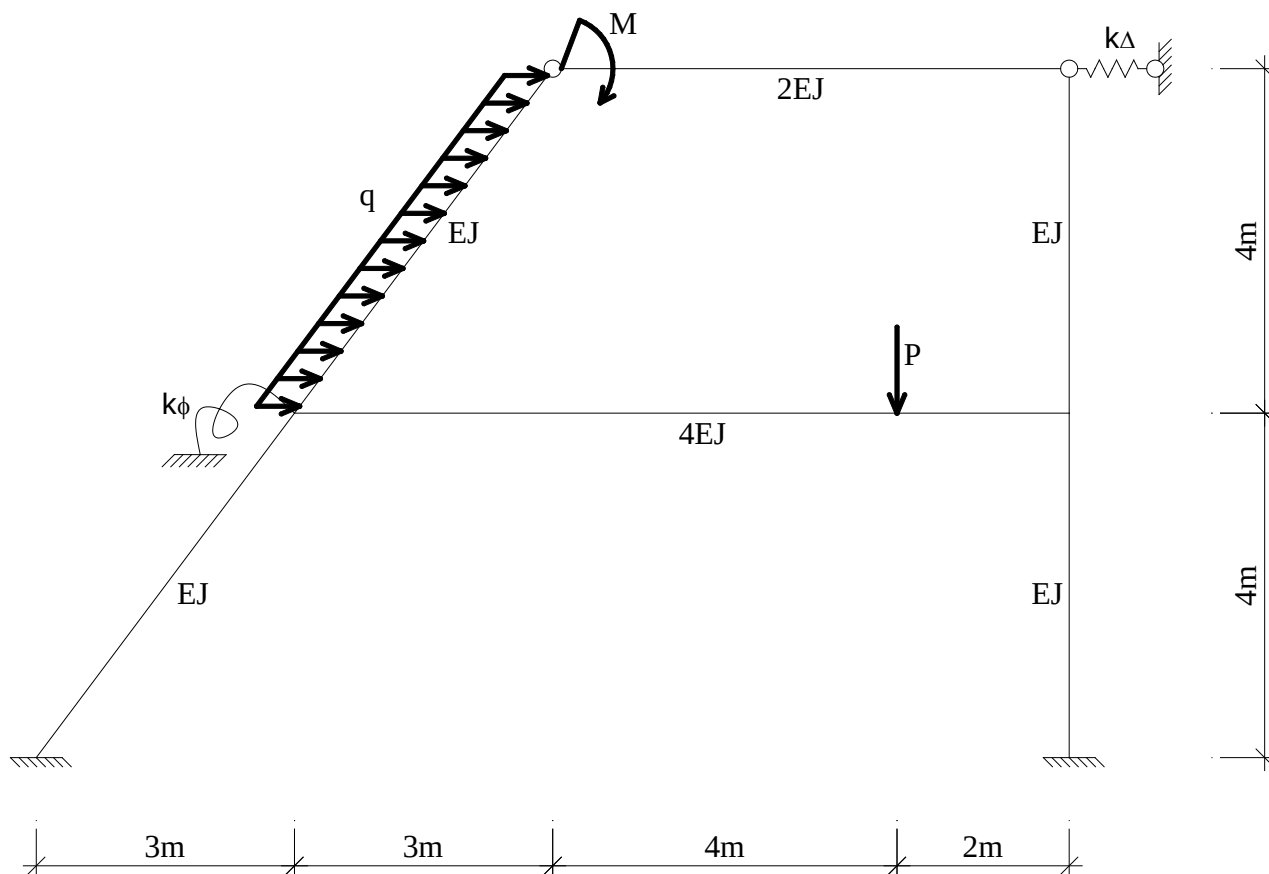


ROZWIĄZANIE RAMY METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

Dla ramy geometrycznie niewyznaczalnej o schemacie i obciążeniu jak na rysunku 1 należy:

- 1) Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu,
- 2) Stosując metodę przemieszczeń obliczyć siły przekrojowe i sporządzić ich wykresy,
- 3) Przeprowadzić stosowne kontrole rozwiązania.

Rys. 1. Zadany układ



Dane:

$$M = 26 \text{ kNm}, P = 25 \text{ kN}, q = 4 \text{ kN/m}, k_{\Delta} = 8 \frac{EJ}{m^3}, k_{\phi} = 4 \frac{EJ}{m}$$

1. Sprawdzenie geometrycznej niezmienności

1.1. Kryterium ilościowe geometrycznej niezmienności

$$n = e - 3 \cdot t$$

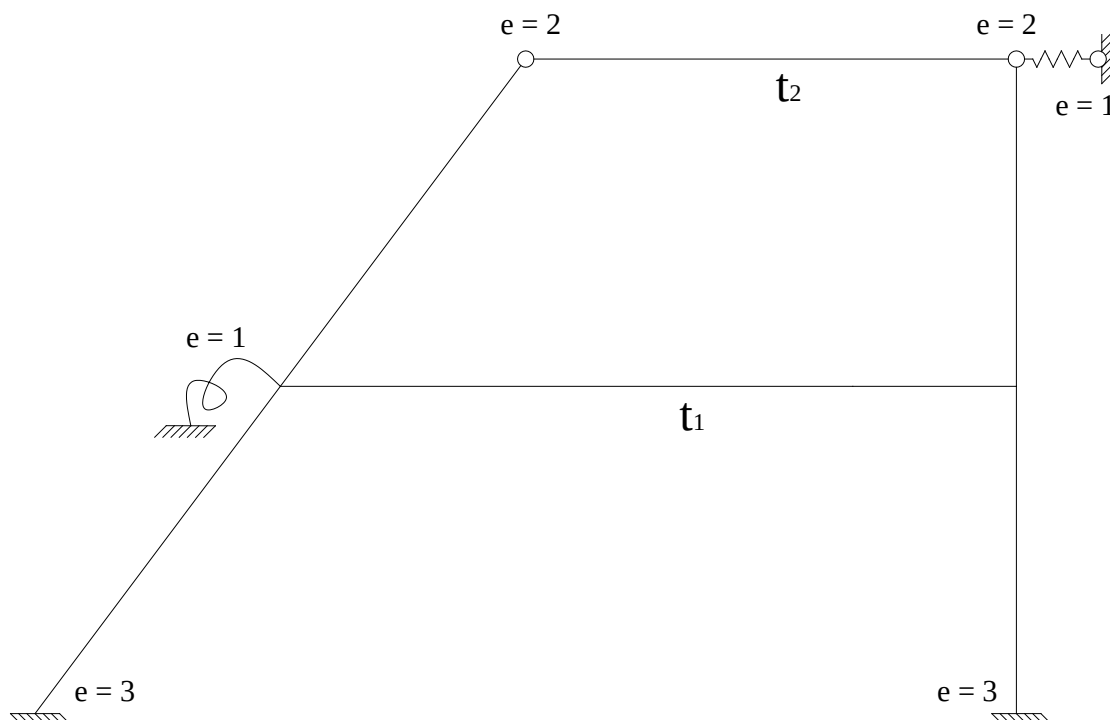
$$n = 12 - 3 \cdot 2$$

$$n = 6$$

Oznacza to, że układ jest sześciokrotnie statycznie niewyznaczalny (hiperstatyczny) oraz geometrycznie niezmienny pod względem ilościowym.

1.2. Kryterium jakościowe geometrycznej niezmienności

Rys. 2. Analiza geometrycznej niezmienności



Analizowany układ składa się z dwóch tarcz. Tarcze t_1 oraz t_2 połączone są ze sobą czterema niezbieźnymi więziami, a więc korzystając z twierdzenia o dwóch tarczach uzasadnia się geometryczną niezmiennąść układu (t_1 i t_2). Następnie tarcze te są połączone z fundamentem za pomocą ośmiu niezbieźnych więzi tworząc w ten sposób układ geometrycznie niezmienny. Stąd cały układ jest geometrycznie niezmienny pod względem jakościowym.

1.3. Podsumowanie

Wobec zachowanego kryterium ilościowego oraz jakościowego geometrycznej niezmienności stwierdza się, że analizowany układ jest **geometrycznie niezmienny**.

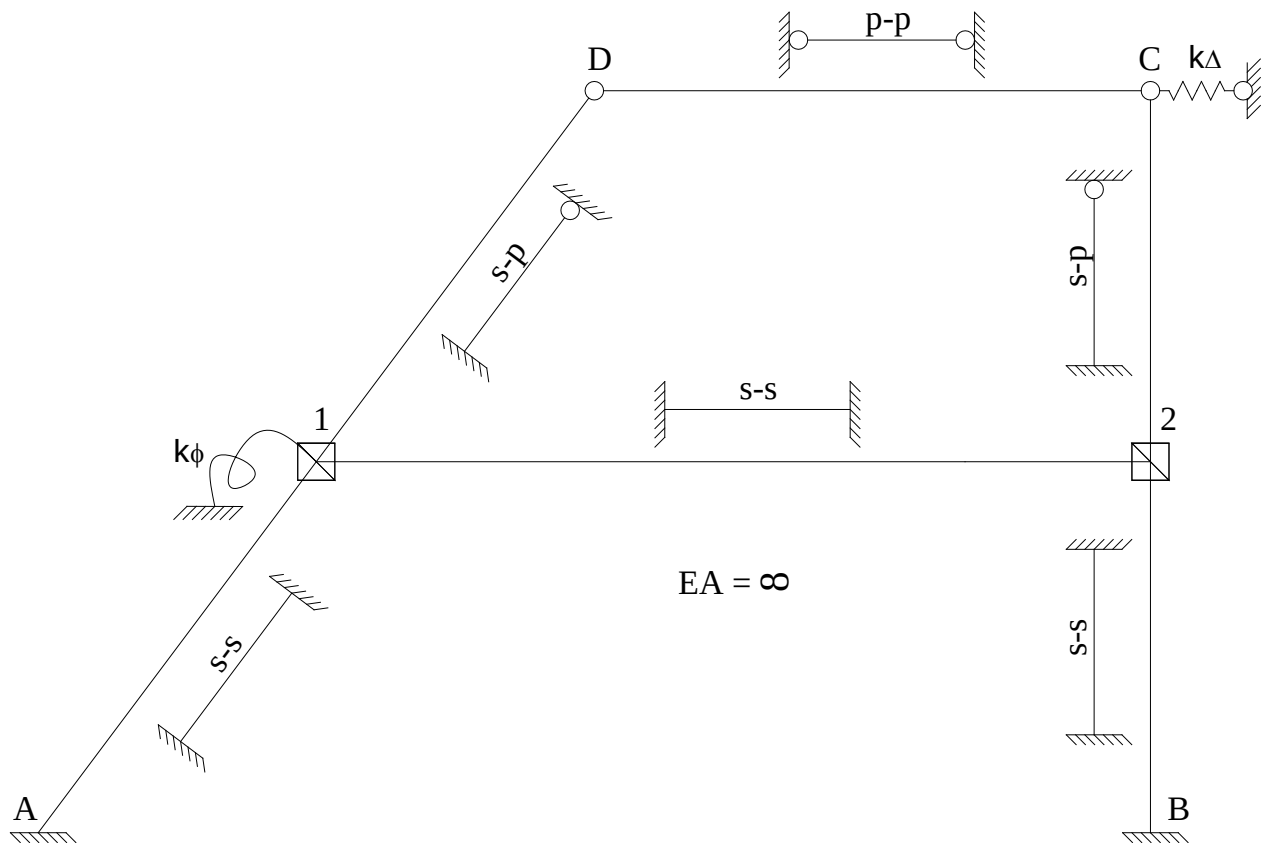
2. Ustalenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności. Układ podstawowy metody przemieszczeń

2.1. Wyznaczenie liczby stopni swobody obrotu węzłów

$n_\phi = 2$ – liczba węzłów sztywnych w układzie mających swobodę obrotu

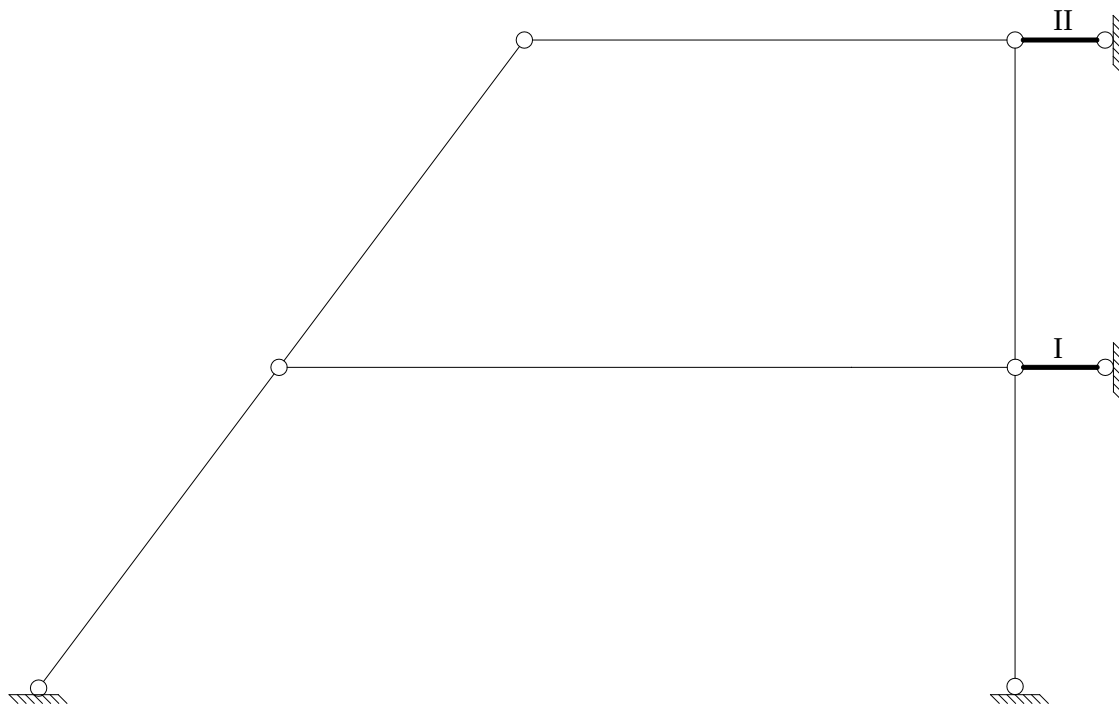
Analizowany układ podzielono na trzy pręty sztywno-sztywne, dwa pręty sztywno-przegubowe oraz jeden pręt przegubowo-przegubowy, mając przy tym na uwadze założenie $EA = \infty$.

Rys. 3. Podział układu na elementy, dla których dane są wzory transformacyjne



2.2. Wyznaczenie liczby stopni swobody przesuwu węzłów

Rys. 4. Schemat kinematyczny



geometrycznie niezmienny i statycznie wyznaczalny.

$$n_{\delta} = 2w - p - r = 2 \cdot 6 - 6 - 4 = 2$$

gdzie: w – liczba węzłów przegubowych,

p – liczba prętów,

r – liczba reakcji.

2.3. Stopień geometrycznej niewyznaczalności

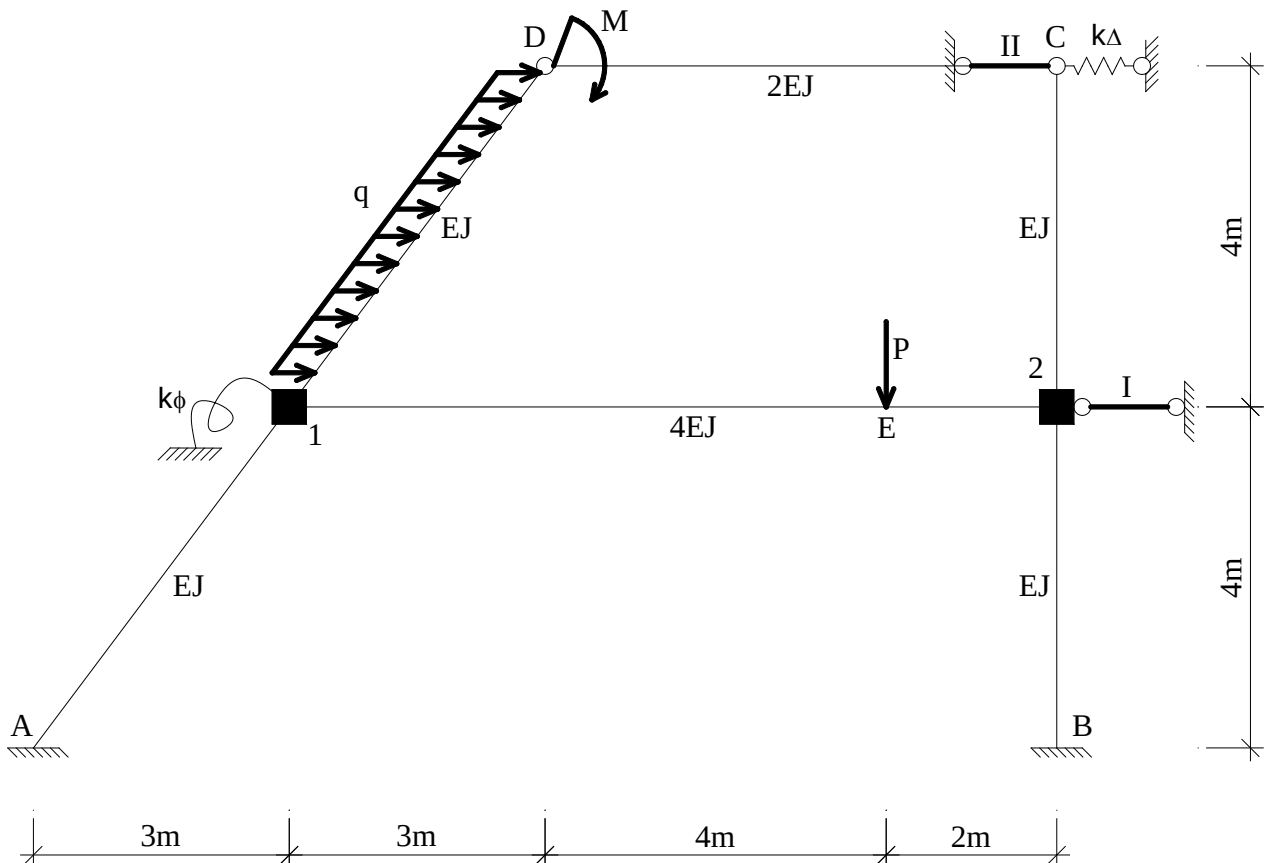
$$n_g = n_\phi + n_\delta$$

$$n_{\text{ga}} = 2 + 2 = 4$$

$$n_g = 4$$

2.4. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Rys. 5. Układ podstawowy



3. Rozwiązanie układu podstawowego od składowych stanów obciążeń

3.1. Stan obciążenia danego $F = (M, P, q)$

Z tablic odczytano wartości momentów brzegowych dla poszczególnych prętów.

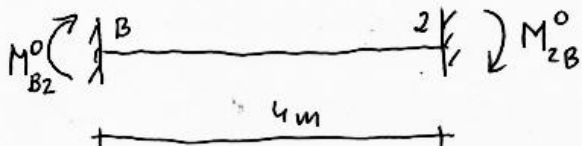
3.1.1. PRĘT A-1



PRĘT NIEOBCIĄŻONY

$$M_{A1}^0 = M_{1A}^0 = 0$$

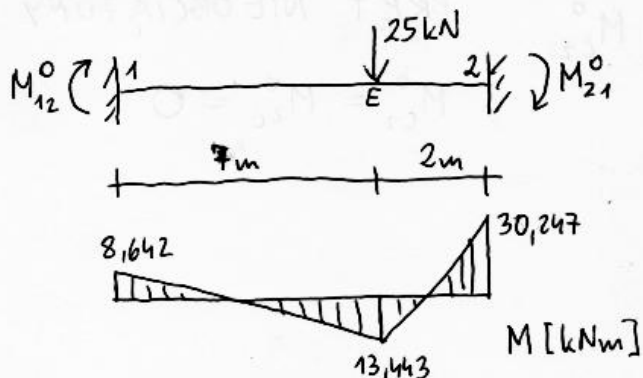
3.1.2. PRĘT B-2



PRĘT NIEOBCIĄŻONY

$$M_{2B}^0 = M_{B2}^0 = 0$$

3.1.3. PRĘT 1-2

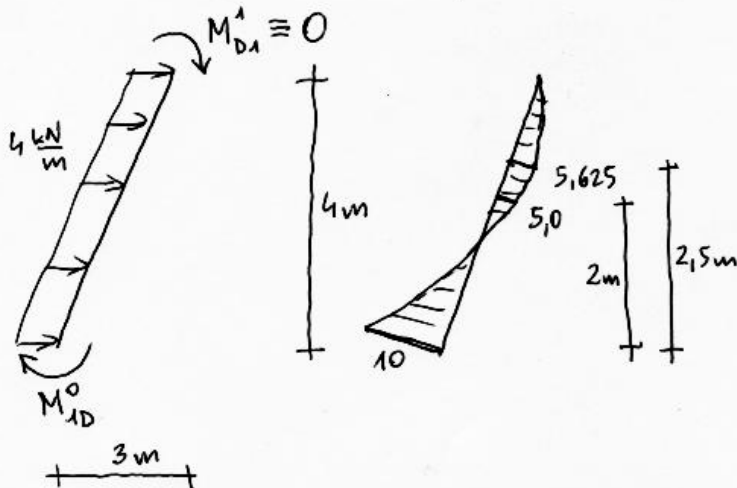


$$M_{12}^0 = -8,642 \text{ kNm}$$

$$M_{21}^0 = 30,247 \text{ kNm}$$

$$M_{12}^0(7\text{m}) = M_E^0 = 13,443 \text{ kNm}$$

3.1.4. PRĘT 1-D

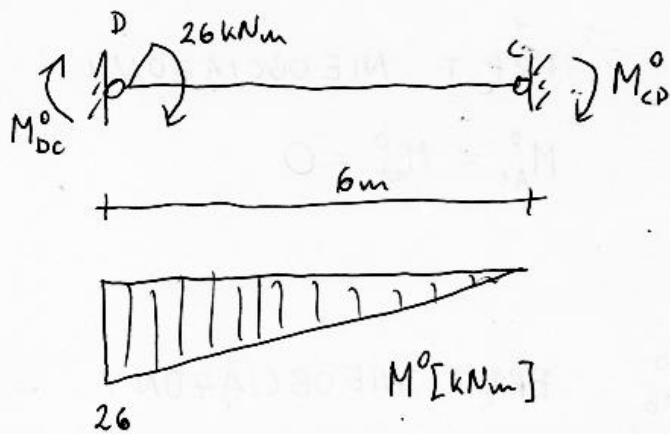


$$M_{1D}^0 = -10 \text{ kNm}$$

$$M_{D1}^0 = 0$$

$$M_{1D}^0(2\text{m}) = 5 \text{ kNm}$$

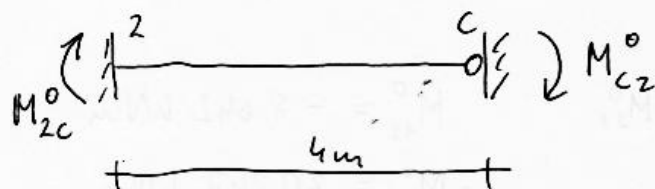
3.1.5. PRĘT D-C



$$M_{CD}^0 \equiv 0$$

$$M_{DC}^0 = 26 \text{ kNm}$$

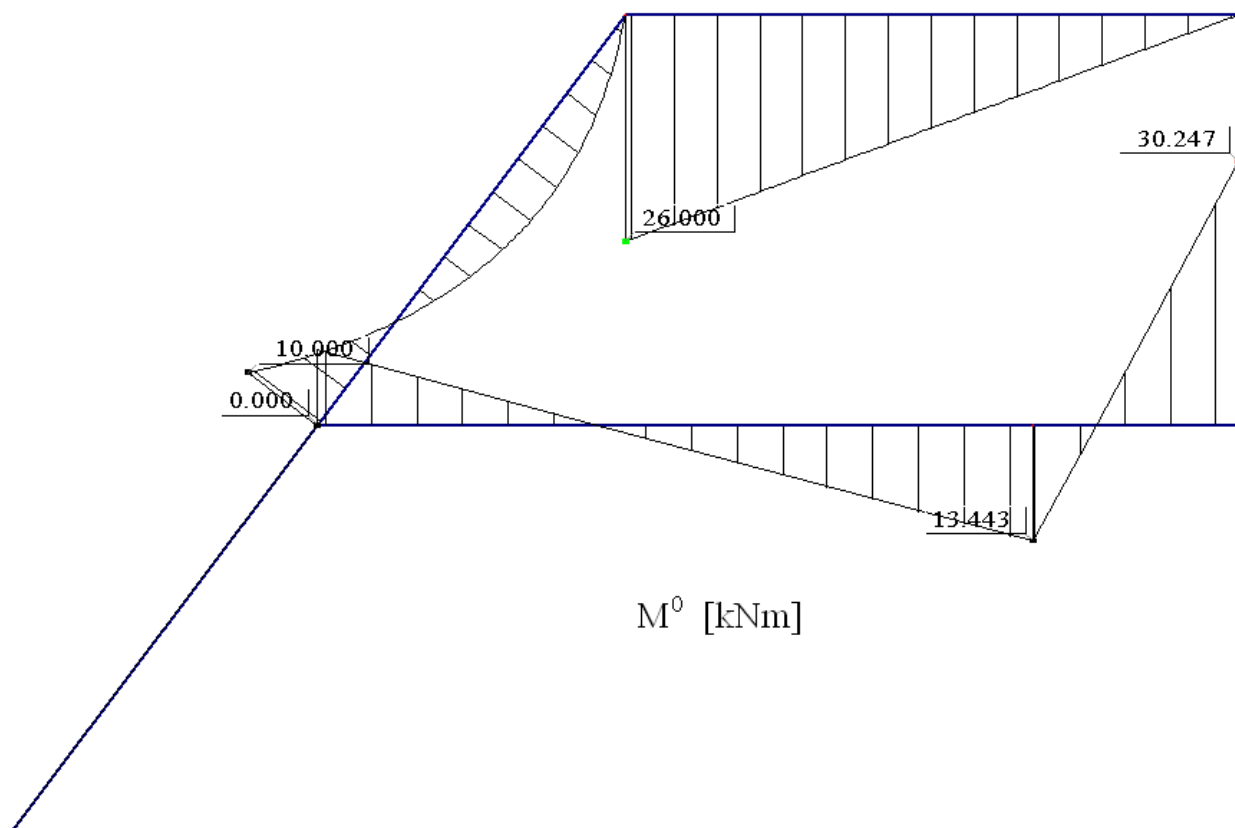
3.1.6. PRĘT 2-C



PRĘT NIEOBCIĄŻONY

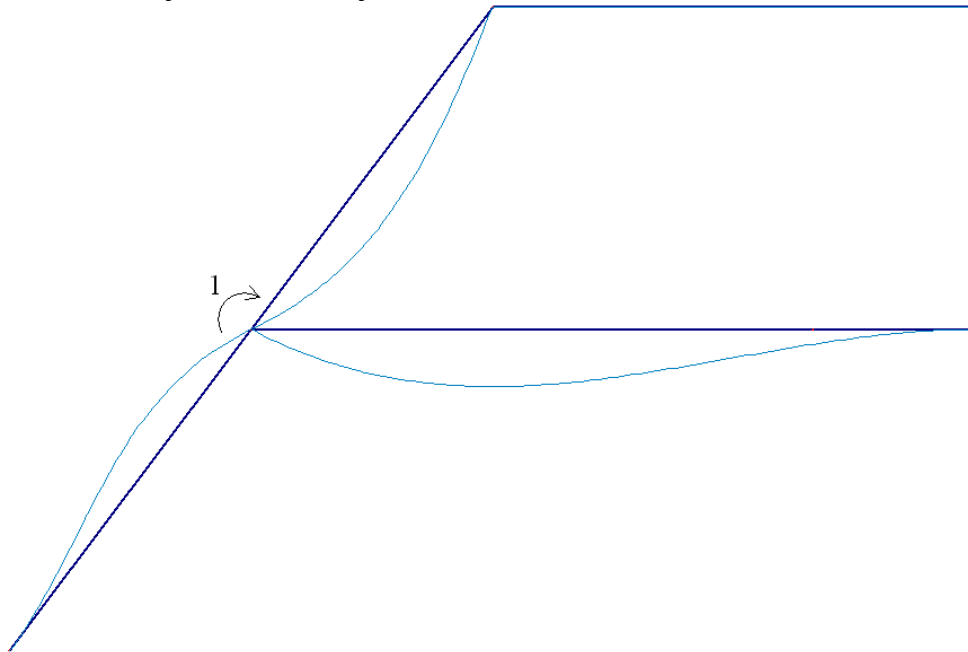
$$M_{C2}^0 = M_{2C}^0 = 0$$

Rys. 6. Wykres momentów zginających – stan obciążenia danego



3.2. Stan $\phi_1 = 1$ [-]

Rys. 7. Widok konstrukcji odkształconej



3.2.1. PRET A-1

DLA PRĘTA SZTYWNO-SZTYWNEGO : $M_{ij} = \left(\frac{EJ}{L}\right)_{ij} \cdot (4\varphi_i + 2\varphi_j - 6\psi_j)$

$$M_{A1}^1 = \frac{EI}{5m} (2 \cdot 1) = \frac{2EI}{5m} = 0,4 \frac{EI}{m}$$

$$M_{1A}^1 = \frac{EI}{5m} (4 \cdot 1) = \frac{4EI}{5m} = 0,8 \frac{EI}{m}$$

3.2.2. PRET B-2

$$M_{B2}^1 = M_{2B}^1 = 0$$

3.2.3. PRET 1-2

$$M_{12}^1 = \frac{4EJ}{9m} (4-1) = \frac{16EJ}{9m} = 1,778 \frac{EJ}{m}$$

$$M_{21}^1 = \frac{4EJ}{9m} (2-1) = \frac{8EJ}{9m} = 0,889 \frac{EJ}{m}$$

3.2.4. PRĘT 1-D

DLA PRĘTA SZTYWNO-PRZEGUBOWEGO : $M_{ij} = \left(\frac{EJ}{L}\right)_{ij} (3\psi_i - 3\psi_{ij})$

$$M_{10}^1 = \frac{EJ}{5m} (3 \cdot 1) = \frac{3EJ}{5m} = 0,6 \frac{EJ}{m}$$

$$M_{D1}^1 = 0$$

3.2.5. PRĘT D-C

PRĘT PRZEGUBOWO - PRZEGUBOWY : $M_{ij} = M_{ji} = 0$

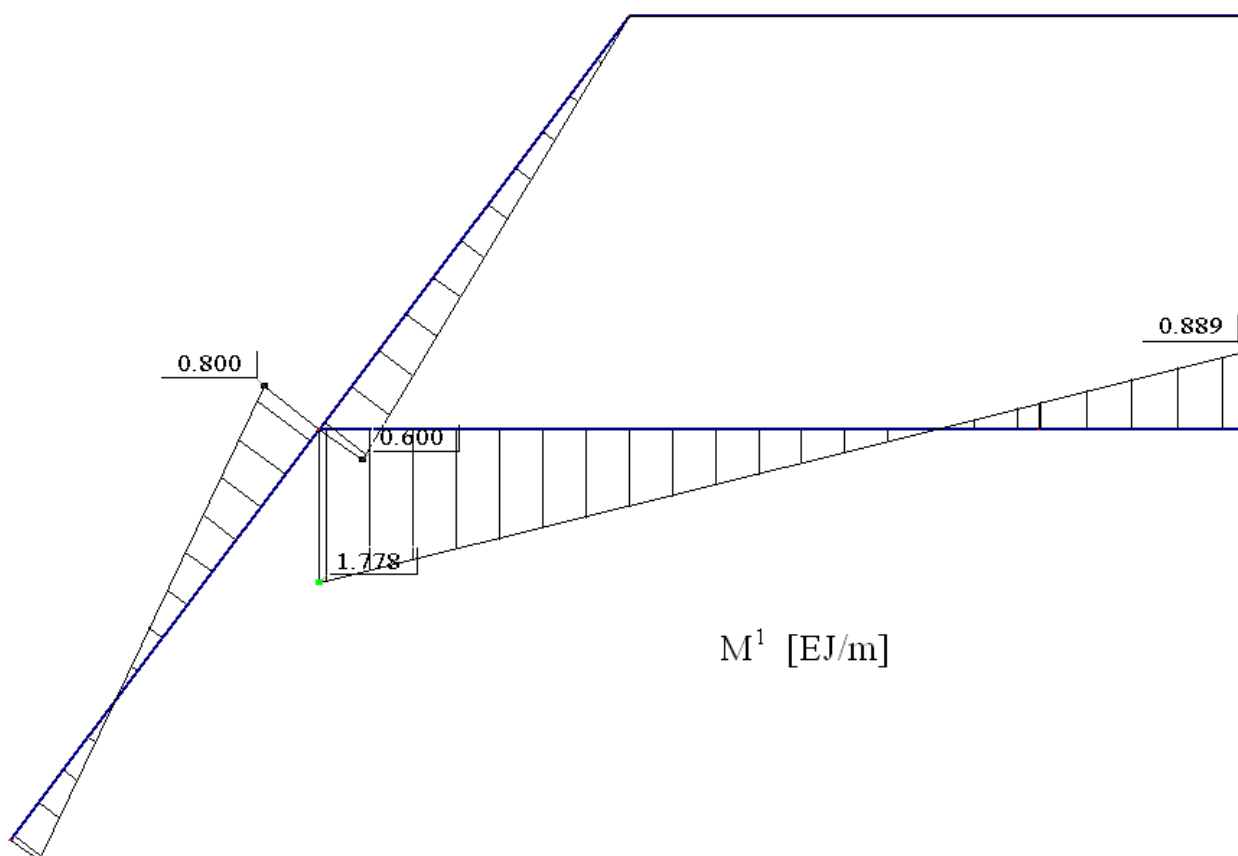
$$M_{DC}^1 = M_{CD}^1 = 0$$

3.2.6. PRĘT 2-C

$$M_{2c}^1 = \frac{EJ}{4m} (3 \cdot 0) = 0$$

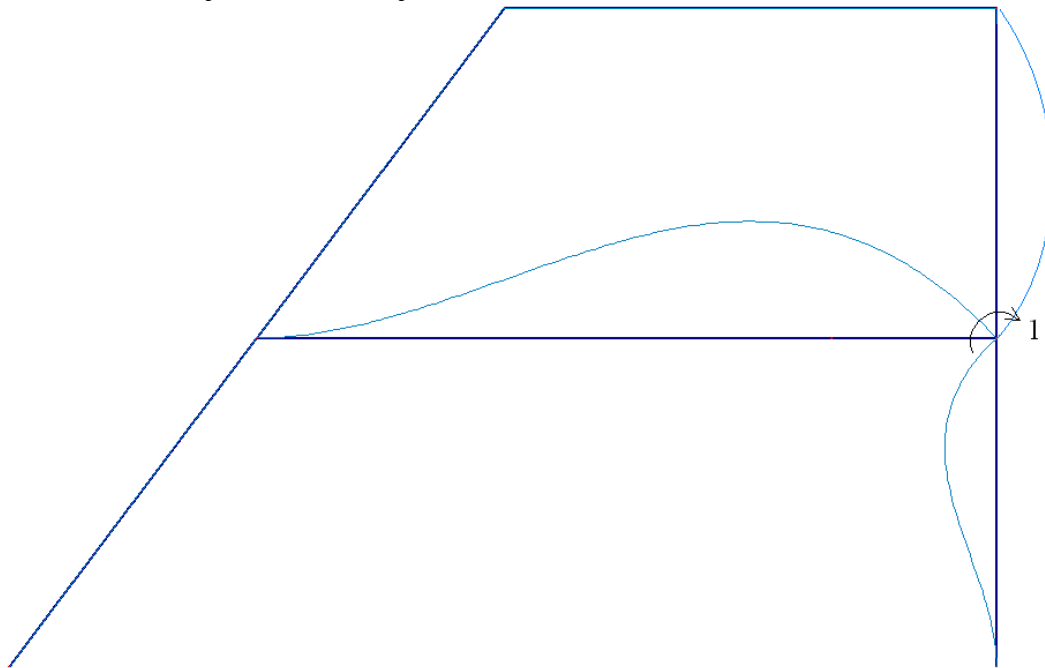
$$M_{c2}^1 = 0$$

Rys. 8. Wykres momentów zginających – stan $\phi_1 = 1 [-]$



3.3. Stan $\phi_2 = 1$ [-]

Rys. 9. Widok konstrukcji odkształconej



3.3.1. PRĘT A-1

$$M_{A1}^2 = M_{1A}^2 = 0$$

3.3.2. PRĘT B-2

$$M_{B2}^2 = \frac{EJ}{4m} (2 \cdot 1) = 0,5 \frac{EJ}{m}$$

$$M_{2B}^2 = \frac{EJ}{4m} (4 \cdot 1) = \frac{EJ}{m}$$

3.3.3. PRĘT 1-2

$$M_{12}^2 = \frac{4EJ}{9m} (2 \cdot 1) = \frac{8EJ}{9m} = 0,889 \frac{EJ}{m}$$

$$M_{21}^2 = \frac{4EJ}{9m} (4 \cdot 1) = \frac{16EJ}{9m} = 1,778 \frac{EJ}{m}$$

3.3.4. PRĘT 1-D

$$M_{1D}^2 = M_{D1}^2 = 0$$

3.3.5. PRĘT D-C

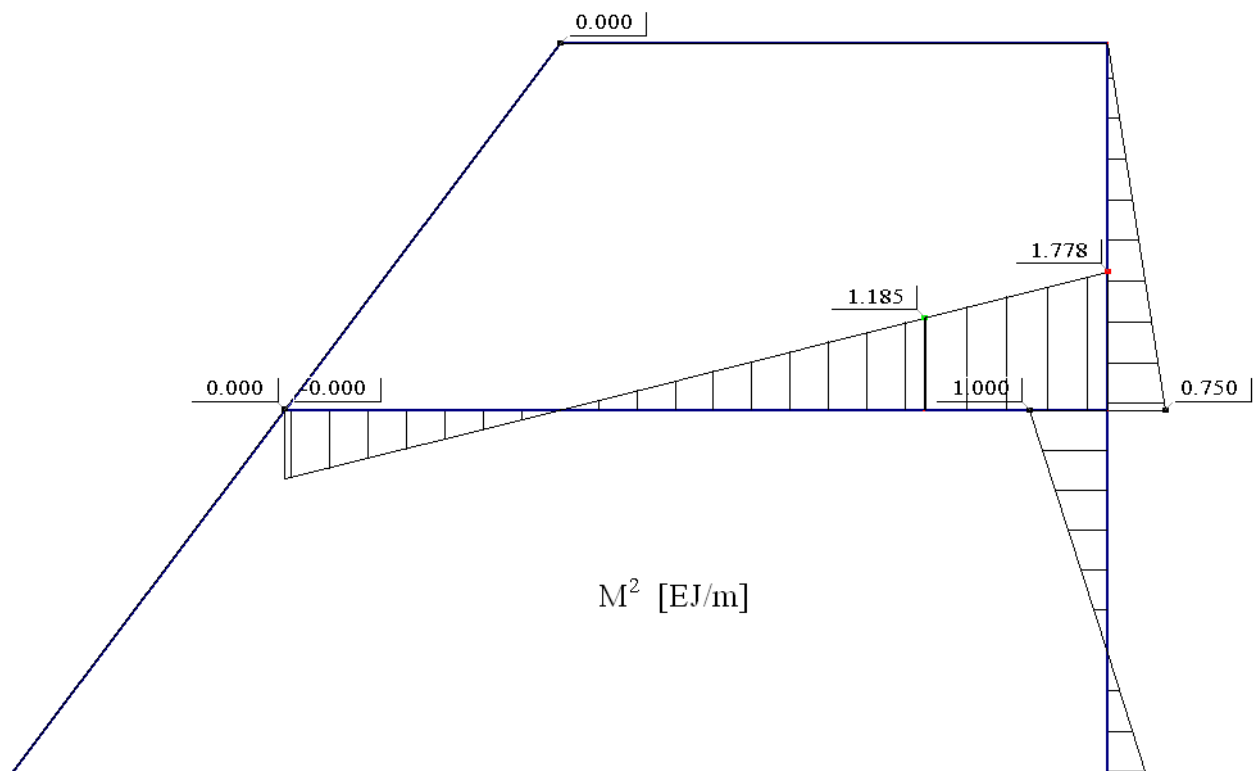
$$M_{DC}^2 = M_{CD}^2 = 0$$

3.3.6. PRZET 2-C

$$M_{2c}^2 = \frac{EJ}{4m} (3 \cdot 1) = 0,75 \frac{EJ}{m}$$

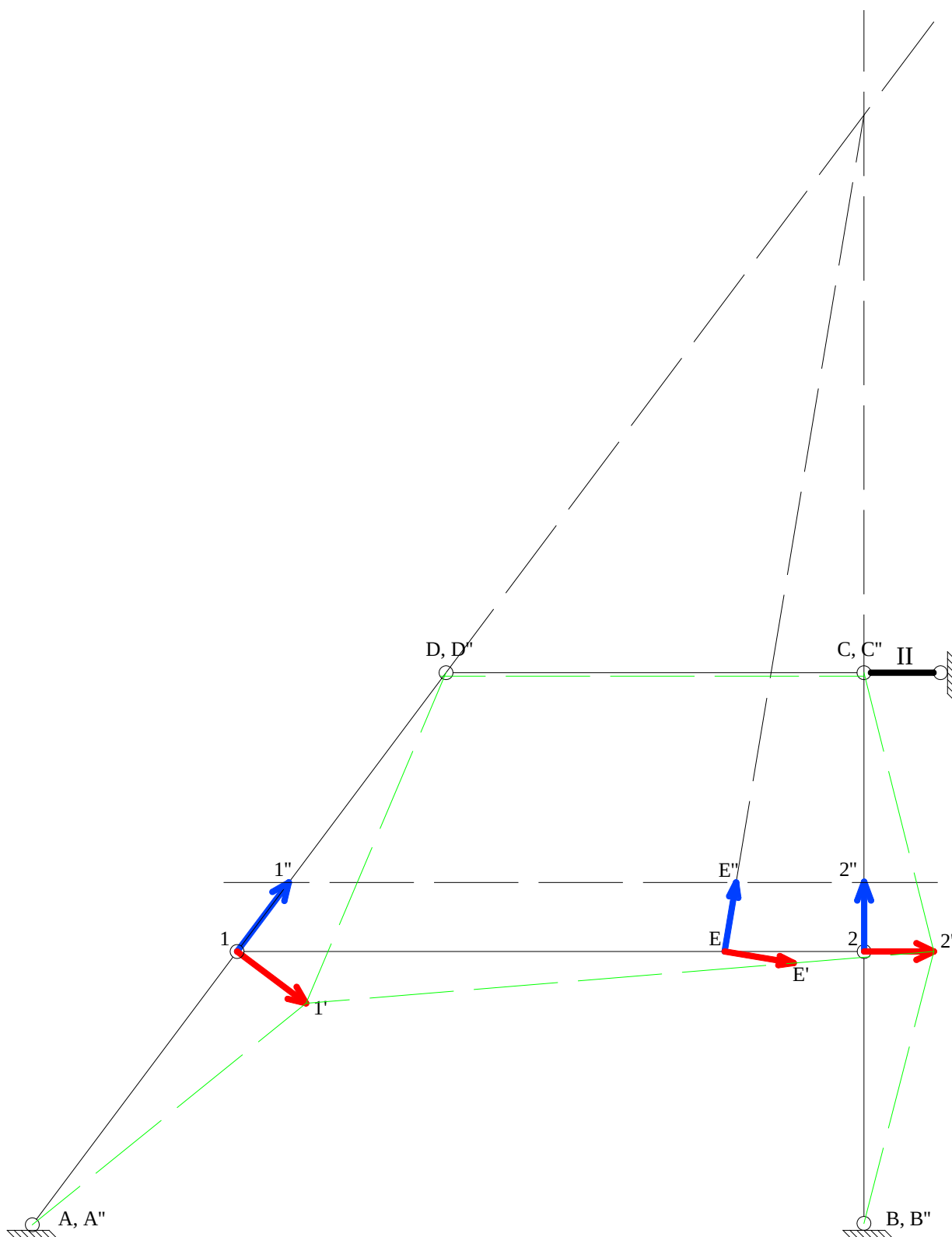
$$M_{c2}^2 = 0$$

Rys. 10. Wykres momentów zginających – stan $\phi_2 = 1$ [-]

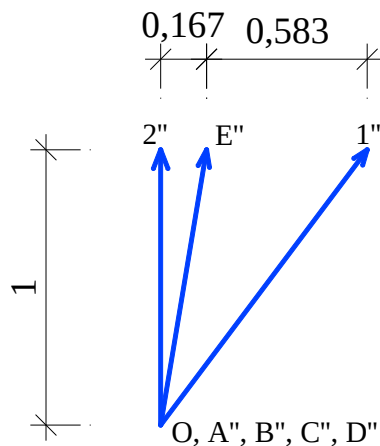


3.4. Stan $\delta_I = 1$ [-]

Rys. 11. Plan przemieszczeń obróconych



Rys. 12. Biegunowy plan przemieszczeń obroconych



3.4.1. PRĘT A-1

$$\psi_{A1}^I = \frac{|A''1''|}{L_{A1}} = \frac{1,25}{5\text{ m}} = \frac{1}{4\text{ m}}$$

$$M_{A1}^I = M_{1A}^I = \frac{EJ}{5\text{ m}} \cdot \left(-6 \cdot \frac{1}{4\text{ m}}\right) = -\frac{6EJ}{20\text{ m}^2} = -0,3 \frac{EJ}{\text{m}^2}$$

3.4.2. PRĘT B-2

$$\psi_{B2}^I = \frac{|B''2''|}{L_{B2}} = \frac{1}{4\text{ m}}$$

$$M_{B2}^I = M_{2B}^I = \frac{EJ}{4\text{ m}} \left(-6 \cdot \frac{1}{4\text{ m}}\right) = -\frac{6EJ}{16\text{ m}^2} = -0,375 \frac{EJ}{\text{m}^2}$$

3.4.3. PRĘT 1-2

$$\psi_{12}^I = -\frac{|1''2''|}{L_{12}} = -\frac{0,75}{9\text{ m}} = -0,0833 \frac{1}{\text{m}}$$

$$M_{12}^I = M_{21}^I = \frac{4EJ}{9\text{ m}} \left(-6 \cdot \left(-0,0833 \frac{1}{\text{m}}\right)\right) = 0,222 \frac{EJ}{\text{m}^2}$$

3.4.4. PRĘT 1-D

$$\psi_{1D}^I = -\frac{|1''D''|}{L_{1D}} = -\frac{1,25}{5\text{ m}} = -\frac{1}{4\text{ m}}$$

$$M_{1D}^I = \frac{EJ}{5\text{ m}} \left(-3 \cdot \left(-\frac{1}{4\text{ m}}\right)\right) = 0,15 \frac{EJ}{\text{m}^2}, M_{D1}^I = 0$$

3.4.5. PRĘT D-C

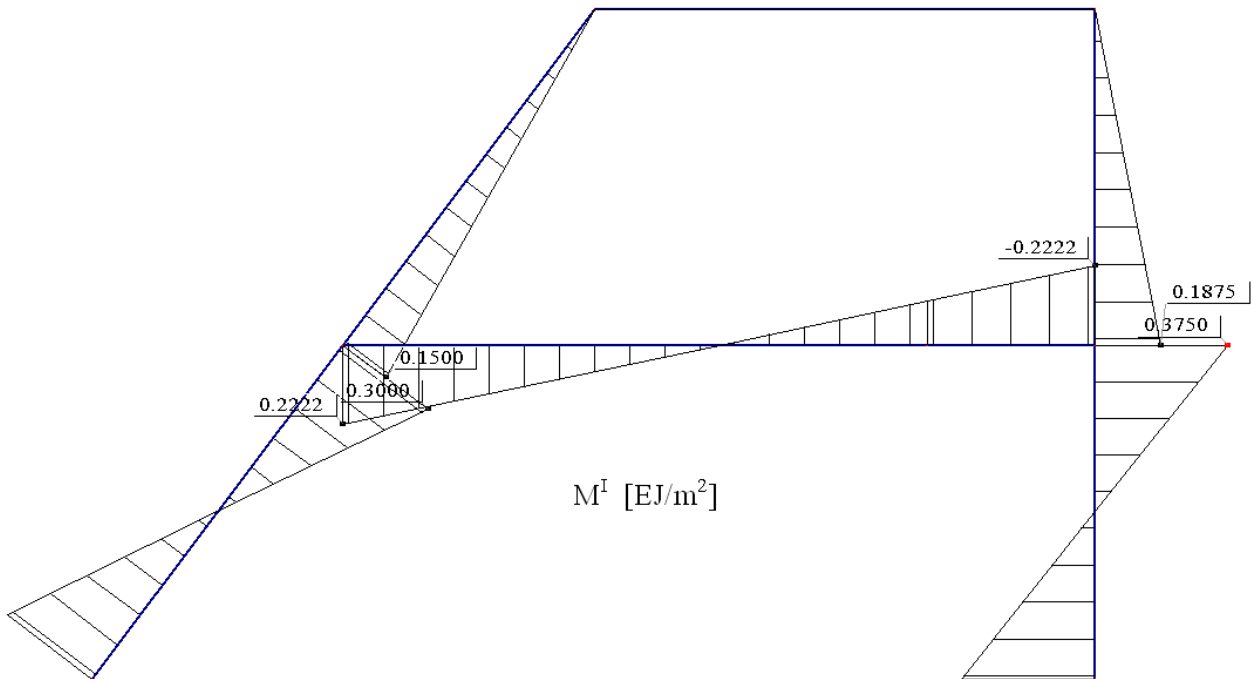
$$M_{DC}^I = 0, M_{CD}^I = 0$$

3.4.6. PRĘT 2-C

$$\psi_{2C}^I = -\frac{|2''C''|}{L_{2C}} = -\frac{1}{4\text{ m}}$$

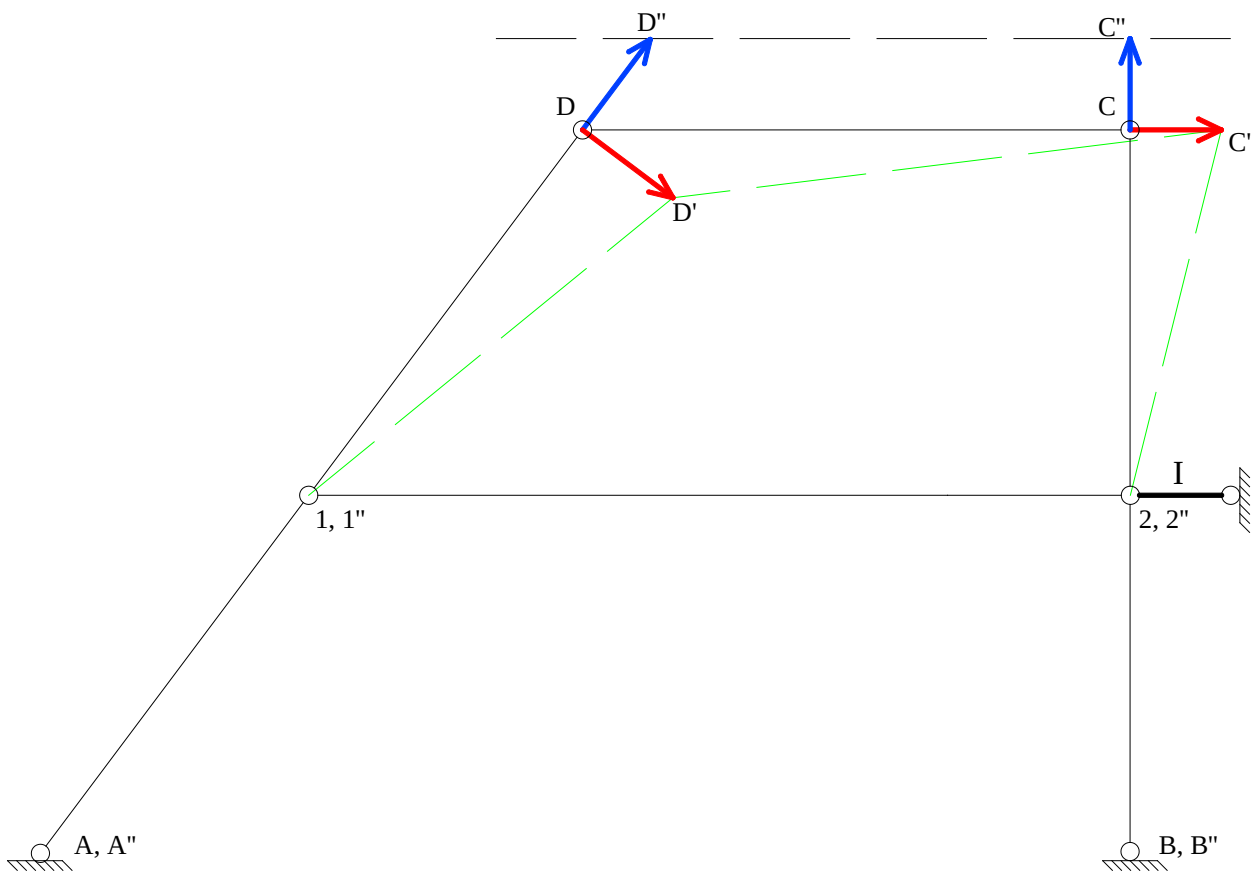
$$M_{2C}^I = \frac{EJ}{4\text{ m}} \left(-3 \cdot \left(-\frac{1}{4\text{ m}}\right)\right) = \frac{3EJ}{16\text{ m}^2} = 0,1875 \frac{EJ}{\text{m}^2}, M_{C2}^I = 0$$

Rys. 13. Wykres momentów zginających – stan $\delta_I = 1$ [-]

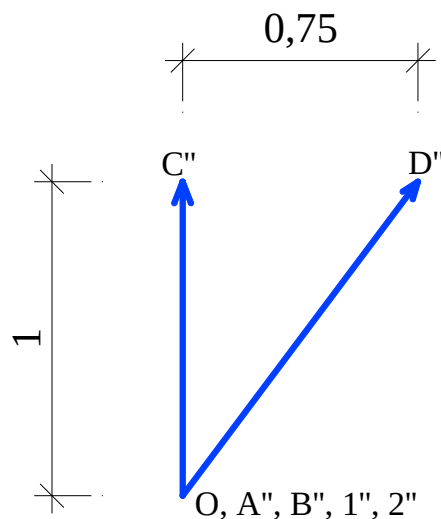


3.5. Stan $\delta_{II} = 1$ [-]

Rys. 14. Plan przemieszczeń obróconych



Rys. 15. Biegunowy plan przemieszczeń obroconych



3.5.1. PRĘT A-1

$$\psi_{A1}^{\bar{u}} = 0, \quad M_{A1}^{\bar{u}} = M_{1A}^{\bar{u}} = 0$$

3.5.2. PRĘT B-2

$$\psi_{B2}^{\bar{u}} = 0, \quad M_{B2}^{\bar{u}} = M_{2B}^{\bar{u}} = 0$$

3.5.3. PRĘT 1-2

$$\psi_{12}^{\bar{u}} = 0, \quad M_{12}^{\bar{u}} = M_{21}^{\bar{u}} = 0$$

3.5.4. PRĘT 1-D

$$\psi_{1D}^{\bar{u}} = \frac{11^{\circ}D^{\bar{u}}}{L_{1D}} = \frac{1,25}{5\text{ m}} = \frac{1}{4\text{ m}}$$

$$M_{1D}^{\bar{u}} = \frac{EJ}{5\text{ m}} \left(-3 \cdot \left(\frac{1}{4\text{ m}} \right) \right) = -\frac{3EJ}{20\text{ m}^2} = -0,15 \frac{EJ}{\text{m}^2}, \quad M_{D1}^{\bar{u}} = 0$$

3.5.5. PRĘT D-C

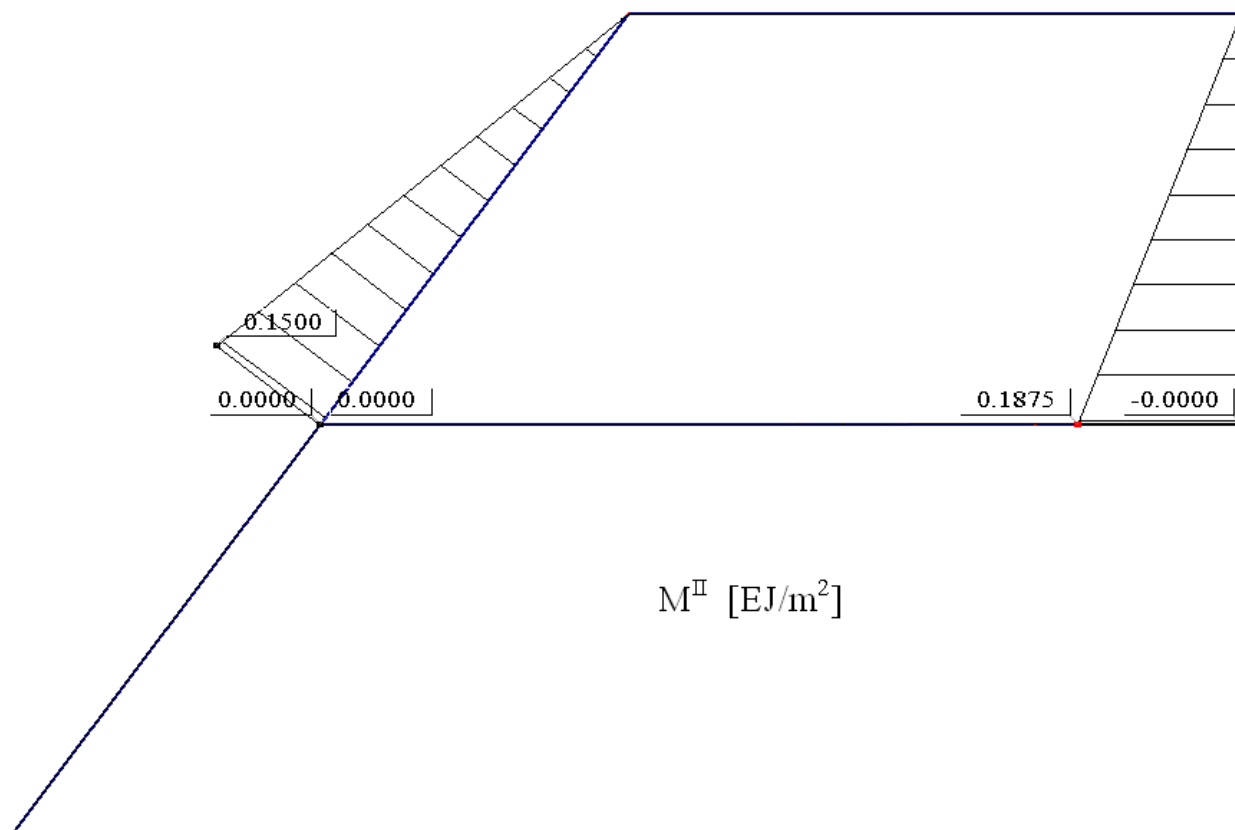
$$\psi_{DC}^{\bar{u}} = -\frac{1D^{\bar{u}}C^{\bar{u}}}{L_{DC}} = -\frac{0,75}{6\text{ m}} = -\frac{1}{8\text{ m}}, \quad M_{DC}^{\bar{u}} = M_{CD}^{\bar{u}} = 0$$

3.5.6. PRĘT 2-C

$$\psi_{2C}^{\bar{u}} = \frac{12^{\bar{u}}C^{\bar{u}}}{L_{2C}} = \frac{1}{4\text{ m}}$$

$$M_{2C}^{\bar{u}} = \frac{EJ}{4\text{ m}} \left(-3 \cdot \left(\frac{1}{4\text{ m}} \right) \right) = -\frac{3EJ}{16\text{ m}^2} = -0,1875 \frac{EJ}{\text{m}^2}, \quad M_{C2}^{\bar{u}} = 0$$

Rys. 16. Wykres momentów zginających – stan $\delta_{II} = 1$ [-]



4. Układ równań metody przemieszczeń i jego rozwiązanie

4.1. Postać ogólna układu równań w odniesieniu do przyjętego układu podstawowego

$$k_{11} * \varphi_1 + k_{12} * \varphi_2 + k_{1I} * \delta_I + k_{1II} * \delta_{II} + k_{10} = 0$$

$$k_{21} * \varphi_1 + k_{22} * \varphi_2 + k_{2I} * \delta_I + k_{2II} * \delta_{II} + k_{20} = 0$$

$$k_{I1} * \varphi_1 + k_{I2} * \varphi_2 + k_{II} * \delta_I + k_{III} * \delta_{II} + k_{I0} = 0$$

$$k_{II1} * \varphi_1 + k_{II2} * \varphi_2 + k_{III} * \delta_I + k_{IIII} * \delta_{II} + k_{II0} = 0$$

4.2. Obliczenie współczynników układu równań

$$k_{11} = \sum_j M_{1j}^1 + k'_\varphi = M_{1A}^1 + M_{12}^1 + M_{1D}^1 + k_\varphi = 0,8 \frac{EJ}{m} + 1,778 \frac{EJ}{m} + 0,6 \frac{EJ}{m} + 4 \frac{EJ}{m} = 7,178 \frac{EJ}{m}$$

$$k_{12} = k_{21} = M_{12}^2 = M_{21}^1 = 0,889 \frac{EJ}{m}$$

$$k_{1I} = k_{I1} = \sum_j M_{1j}^I = M_{1A}^I + M_{12}^I + M_{1D}^I = -0,3 \frac{EJ}{m^2} + 0,222 \frac{EJ}{m^2} + 0,15 \frac{EJ}{m^2} = 0,072 \frac{EJ}{m^2}$$

$$k_{1II} = k_{II1} = \sum_j M_{1j}^{II} = M_{1A}^{II} + M_{12}^{II} + M_{1D}^{II} = -0,15 \frac{EJ}{m^2}$$

$$k_{22} = \sum_j M_{2j}^2 + k'_\varphi = M_{2B}^2 + M_{21}^2 + M_{2C}^2 + 0 = \frac{EJ}{m} + 1,778 \frac{EJ}{m} + 0,75 \frac{EJ}{m} = 3,528 \frac{EJ}{m}$$

$$k_{2I} = k_{I2} = \sum_j M_{2j}^I = M_{2B}^I + M_{21}^I + M_{2C}^I = -0,375 \frac{EJ}{m^2} + 0,222 \frac{EJ}{m^2} + 0,1875 \frac{EJ}{m^2} = 0,0345 \frac{EJ}{m^2}$$

$$k_{2II} = k_{II2} = \sum_j M_{2j}^{II} = M_{2B}^{II} + M_{21}^{II} + M_{2C}^{II} = 0 + 0 - 0,1875 \frac{EJ}{m^2} = -0,1875 \frac{EJ}{m^2}$$

$$k_{II} = - \sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^I + \sum_s k_s \delta_s^I \delta_s^I = -(-0,3 \frac{EJ}{m^2} - 0,3 \frac{EJ}{m^2}) \cdot \frac{1}{4m} + -(-0,375 \frac{EJ}{m^2} - 0,375 \frac{EJ}{m^2}) \frac{1}{4m} - (0,222 \frac{EJ}{m^2} + 0,222 \frac{EJ}{m^2}) (-0,0833 \frac{1}{m}) + -(0,15 \frac{EJ}{m^2} + 0) (-\frac{1}{4m}) - 0 - (0,1875 \frac{EJ}{m^2} + 0) (-\frac{1}{4m}) = 0,4589 \frac{EJ}{m^3}$$

$$k_{I,II} = k_{II,I} = - \sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^{II} + \sum_s k_s \delta_s^I \delta_s^{II} = 0 - 0 - 0 - (0,15 \frac{EJ}{m^2} + 0) \frac{1}{4m} + -0 - (0,1875 \frac{EJ}{m^2} + 0) (\frac{1}{4m}) + 0 = -0,0844 \frac{EJ}{m^3}$$

$$k_{II,II} = - \sum_{ij} (M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II}) \psi_{ij}^{II} + \sum_s k_s \delta_s^{II} \delta_s^{II} = 0 - 0 - 0 - (-0,15 \frac{EJ}{m^2} + 0) \frac{1}{4m} + -0 - (-0,1875 \frac{EJ}{m^2} + 0) \frac{1}{4m} + 8 \frac{EJ}{m^3} \cdot 1 \cdot 1 = 8,0844 \frac{EJ}{m^3}$$

$$k_{10} = \sum_j M_{1j}^0 - M_1^0 = M_{1A}^0 + M_{12}^0 + M_{1D}^0 + 0 = 0 - 8,642 \text{ kNm} - 10 \text{ kNm} = -18,642 \text{ kNm}$$

$$k_{20} = \sum_j M_{2j}^0 - M_2^0 = M_{2B}^0 + M_{21}^0 + M_{2C}^0 + 0 = 0 + 30,247 \text{ kNm} + 0 = 30,247 \text{ kNm}$$

$$k_{I0} = -\sum_{ij} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \Psi_{ij}^I - \sum_p P_p \cdot \delta_p^I = 0 - 0 - (-8,642 \text{ kNm} + 30,247 \text{ kNm})(-0,0833 \frac{1}{m}) \\ - (-10 \text{ kNm} + 0)(-\frac{1}{4m}) - (26 \text{ kNm} + 0) \cdot 0 - 0 - 25 \text{ kN} \cdot 0,167 - 4 \frac{\text{kN}}{m} \cdot \frac{5m}{2} \cdot 1 = \\ = -14,866 \text{ kN}$$

$$k_{II0} = -\sum_{ij} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \Psi_{ij}^{II} - \sum_p P_p \cdot \delta_p^{II} = 0 - 0 - 0 - (-10 \text{ kNm} + 0) \frac{1}{4m} + \\ - (26 \text{ kNm} + 0)(-\frac{1}{8m}) - 0 - 4 \frac{\text{kN}}{m} \cdot \frac{5m}{2} \cdot 1 = -4,25 \text{ kN}$$

4.3. Postać szczegółowa układu równań

$$7,178 \frac{EJ}{m} * \varphi_1 + 0,889 \frac{EJ}{m} * \varphi_2 + 0,072 \frac{EJ}{m^2} * \delta_I - 0,15 \frac{EJ}{m^2} * \delta_{II} = 18,642 \text{ kNm}$$

$$0,889 \frac{EJ}{m} * \varphi_1 + 3,528 \frac{EJ}{m} * \varphi_2 + 0,0345 \frac{EJ}{m^2} * \delta_I - 0,1875 \frac{EJ}{m^2} * \delta_{II} = -30,247 \text{ kNm}$$

$$0,072 \frac{EJ}{m^2} * \varphi_1 + 0,0345 \frac{EJ}{m^2} * \varphi_2 + 0,4589 \frac{EJ}{m^3} * \delta_I - 0,0844 \frac{EJ}{m^3} * \delta_{II} = 14,866 \text{ kN}$$

$$-0,15 \frac{EJ}{m^2} * \varphi_1 - 0,1875 \frac{EJ}{m^2} * \varphi_2 - 0,0844 \frac{EJ}{m^3} * \delta_I + 8,0844 \frac{EJ}{m^3} * \delta_{II} = 4,25 \text{ kN}$$

4.4. Rozwiązanie układu równań

$$\varphi_1 = 3,489 \frac{\text{kNm}^2}{EJ}$$

$$\varphi_2 = -9,735 \frac{\text{kNm}^2}{EJ}$$

$$\delta_I = 32,709 \frac{\text{kNm}^3}{EJ}$$

$$\delta_{II} = 0,706 \frac{\text{kNm}^3}{EJ}$$

5. Obliczenie wartości rzeczywistych sił przekrojowych

5.1. Momenty zginające

Wartości rzeczywistych momentów zginających wyznaczono wykorzystując zasadę superpozycji.

Rzędna charakt.	M_1 [EJ/m]	ϕ_1 [kNm ² /EJ]	M_2 [EJ/m]	ϕ_2 [kNm ² /EJ]	M_I [EJ/m ²]	δ_I [kNm ³ /EJ]	M_{II} [EJ/m ²]	δ_{II} [kNm ³ /EJ]	M_0 [kNm]	M_{rz} [kNm]
M_{A1}	0,4000	3,489	0,0000	-9,735	-0,3000	32,709	0,0000	0,706	0,000	-8,417
M_{1A}	0,8000	3,489	0,0000	-9,735	-0,3000	32,709	0,0000	0,706	0,000	-7,022
M_{B2}	0,0000	3,489	0,5000	-9,735	-0,3750	32,709	0,0000	0,706	0,000	-17,133
M_{2B}	0,0000	3,489	1,0000	-9,735	-0,3750	32,709	0,0000	0,706	0,000	-22,001
M_{12}	1,7780	3,489	0,8890	-9,735	0,2220	32,709	0,0000	0,706	-8,642	-3,832
M_{21}	0,8890	3,489	1,7780	-9,735	0,2220	32,709	0,0000	0,706	30,247	23,301
$M_{12(7m)}$	-0,2963	3,489	-1,1853	-9,735	-0,1233	32,709	0,0000	0,706	13,443	19,914
M_{1D}	0,6000	3,489	0,0000	-9,735	0,1500	32,709	-0,1500	0,706	-10,000	-3,106
M_{D1}	0,0000	3,489	0,0000	-9,735	0,0000	32,709	0,0000	0,706	0,000	0,000
$M_{1D(2,5m)}$	0,3000	3,489	0,0000	-9,735	0,0750	32,709	-0,0750	0,706	5,000	8,447
M_{DC}	0,0000	3,489	0,0000	-9,735	0,0000	32,709	0,0000	0,706	26,000	26,000
M_{CD}	0,0000	3,489	0,0000	-9,735	0,0000	32,709	0,0000	0,706	0,000	0,000
M_{2C}	0,0000	3,489	0,7500	-9,735	0,1875	32,709	-0,1875	0,706	0,000	-1,301
M_{C2}	0,0000	3,489	0,0000	-9,735	0,0000	32,709	0,0000	0,706	0,000	0,000

5.2. Siły tnące oraz osiowe

5.2.1. PRĘT A-1

$$\sum y = 0 \rightarrow V_{A1} = V_{1A}$$

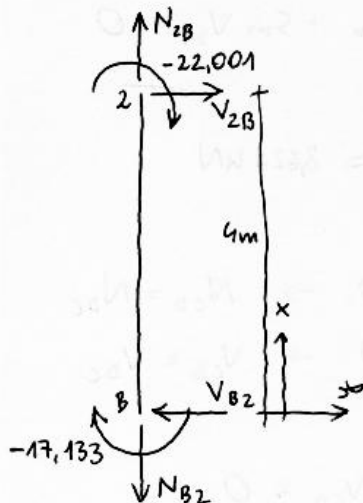
$$\sum x = 0 \rightarrow N_{A1} = N_{1A}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-7,022 \text{ kNm} - 8,417 \text{ kNm} + 5 \text{ m} \cdot V_{1A} = 0$$

$$V_{1A} = V_{A1} = 3,088 \text{ kN}$$

5.2.2. PRET B-2



$$\sum x = 0 \rightarrow N_{B2} = N_{2B}$$

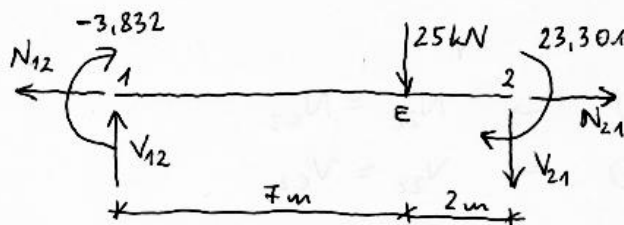
$$\sum y = 0 \rightarrow V_{B2} = V_{2B}$$

$$\sum M_B = 0$$

$$-17,133 \text{ kNm} - 22,001 \text{ kNm} + 4 \text{ m} \cdot V_{2B} = 0$$

$$V_{2B} = V_{B2} = 9,784 \text{ kN}$$

5.2.3. PRET 1-2



$$\sum x = 0 \rightarrow N_{12} = N_{21}$$

$$\sum y = 0$$

$$-V_{12} + 25 \text{ kN} + V_{21} = 0$$

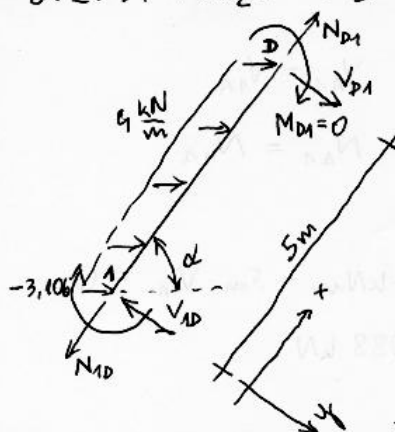
$$V_{12} = 25 + V_{21}$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow -3,832 \text{ kNm} + 23,301 \text{ kNm} + 7 \text{ m} \cdot 25 \text{ kN} + 9 \text{ m} \cdot V_{21} = 0$$

$$V_{21} = -21,608 \text{ kN}$$

$$V_{12} = 25 \text{ kN} - 21,608 \text{ kN} = 3,392 \text{ kN}$$

5.2.4. PRET 1-D



$$\cos \alpha = 0,6 \quad , \quad \sin \alpha = 0,8$$

$$\sum x = 0$$

$$-N_{1D} + 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 0,6 \cdot 5 \text{ m} + N_{D1} = 0$$

$$N_{1D} = 12 \text{ kN} + N_{D1}$$

$$\sum y = 0$$

$$-V_{1D} + 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 0,8 \cdot 5 \text{ m} + V_{D1} = 0$$

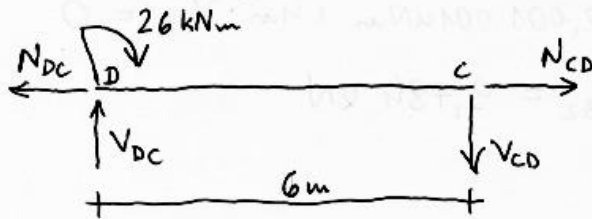
$$V_{1D} = V_{D1} + 16 \text{ kN}$$

$$\sum M_1 = 0 \rightarrow 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 5 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} - 3,106 \text{ kNm} + 5 \text{ m} V_{D1} = 0$$

$$V_{D1} = -7,379 \text{ kN}$$

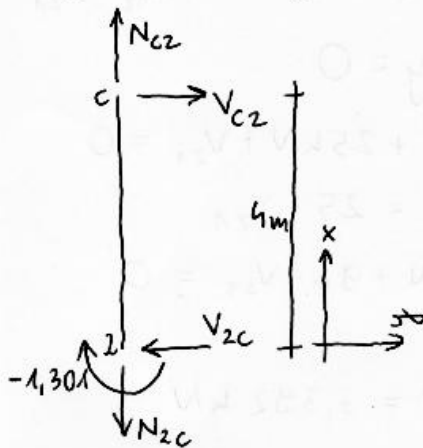
$$V_{1D} = 16 \text{ kN} - 7,379 \text{ kN} = 8,621 \text{ kN}$$

5.2.5. PRĘT D-C



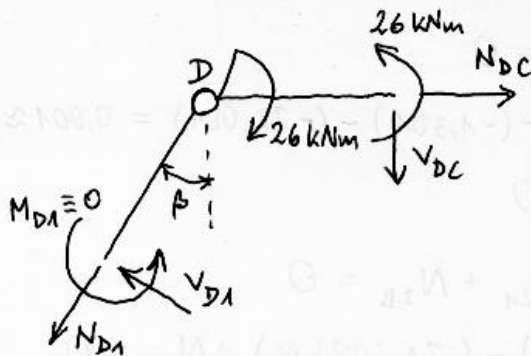
$$\begin{aligned}\sum x &= 0 \rightarrow N_{CD} = N_{DC} \\ \sum y &= 0 \rightarrow V_{CD} = V_{DC} \\ \sum M_D &= 0 \\ 26 \text{ kNm} + 6 \text{ m} \cdot V_{CD} &= 0 \\ V_{CD} = V_{DC} &= -4,333 \text{ kN}\end{aligned}$$

5.2.6. PRĘT 2-C



$$\begin{aligned}\sum x &= 0 \rightarrow N_{2C} = N_{C2} \\ \sum y &= 0 \rightarrow V_{2C} = V_{C2} \\ \sum M_2 &= 0 \rightarrow -1,301 \text{ kNm} + 4 \text{ m} \cdot V_{C2} = 0 \\ V_{C2} = V_{2C} &= 0,325 \text{ kN}\end{aligned}$$

5.2.7. RÓWNOWAŻA WĘZŁA D $\cos \beta = 0,8$ $\sin \beta = 0,6$



$$\begin{aligned}\sum M_D &= 0 \rightarrow -26 \text{ kNm} + 26 \text{ kNm} = 0 \\ \sum y &= 0 \\ V_{DC} + 0,8 N_{DA} - 0,6 V_{DA} &= 0 \\ -4,333 \text{ kN} + 0,8 N_{DA} - 0,6 \cdot (-7,379 \text{ kN}) &= 0 \\ N_{DA} &= -0,118 \text{ kN} \\ N_{1D} &= 12 \text{ kN} + N_{DA} = 12 \text{ kN} - 0,118 \text{ kN} = \\ &= 11,882 \text{ kN}\end{aligned}$$

$$\sum x = 0$$

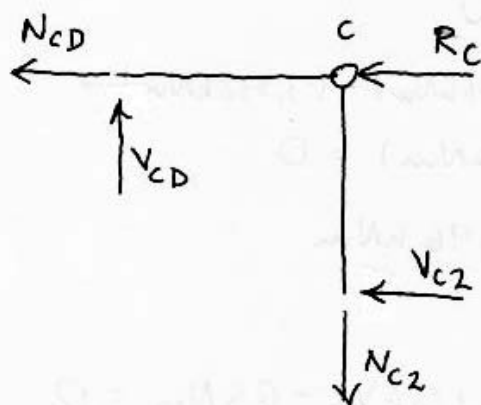
$$N_{DC} - 0,6 \cdot N_{DA} - 0,8 V_{DA} = 0$$

$$N_{DC} - 0,6 \cdot (-0,118 \text{ kN}) - 0,8 \cdot (-7,379 \text{ kN}) = 0$$

$$N_{DC} = -5,974 \text{ kN}$$

$$N_{CD} = N_{DC} = -5,974 \text{ kN}$$

5.2.8. RÓWNOWAGA WĘZŁA C



$$\sum x = 0$$

$$-N_{CD} - V_{C2} - R_C = 0$$

$$-(-5,974 \text{ kN}) - 0,325 \text{ kN} - R_C = 0$$

$$R_C = 5,649 \text{ kN}$$

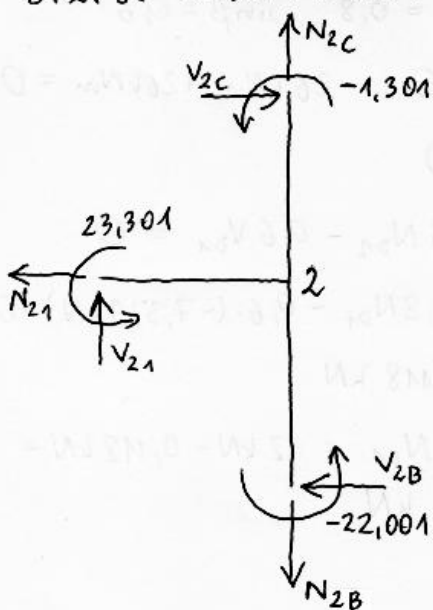
$$\sum y = 0$$

$$-V_{CD} + N_{C2} = 0$$

$$N_{C2} = -4,333 \text{ kN}$$

$$N_{2C} = N_{C2} = -4,333 \text{ kN}$$

5.2.9. RÓWNOWAGA WĘZŁA 2



$$\sum M_2 = 0$$

$$-23,301 - (-1,301) - (-22,001) = 0,001 \approx 0$$

$$\sum y = 0$$

$$-N_{2C} - V_{21} + N_{2B} = 0$$

$$-(-4,333 \text{ kN}) - (-21,608 \text{ kN}) + N_{2B} = 0$$

$$N_{2B} = -25,941 \text{ kN}$$

$$N_{B2} = N_{2B} = -25,941 \text{ kN}$$

$$\sum x = 0$$

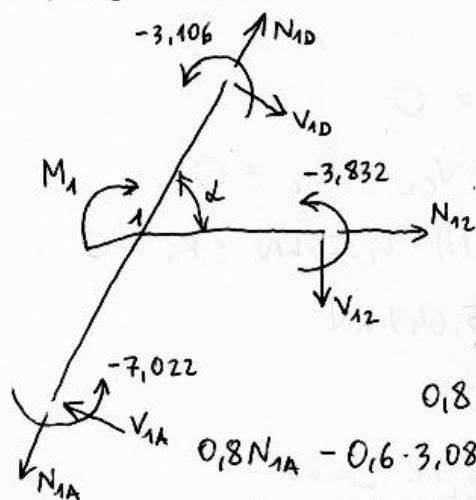
$$V_{2C} - N_{21} - V_{2B} = 0$$

$$0,325 \text{ kN} - N_{21} - 9,784 \text{ kN} = 0$$

$$N_{21} = -9,459 \text{ kN}$$

$$N_{12} = N_{21} = -9,459 \text{ kN}$$

5.2.10. RÓWNOWAGA WĘZŁA 1



$$\sum M_1 = 0$$

$$M_1 - (-3,106 \text{ kNm}) - (-3,832 \text{ kNm}) + (-7,022 \text{ kNm}) = 0$$

$$M_1 = -13,96 \text{ kNm}$$

$$\sum y = 0$$

$$0,8 N_{1A} - 0,6 V_{1A} + V_{12} + 0,6 V_{1D} - 0,8 N_{1D} = 0$$

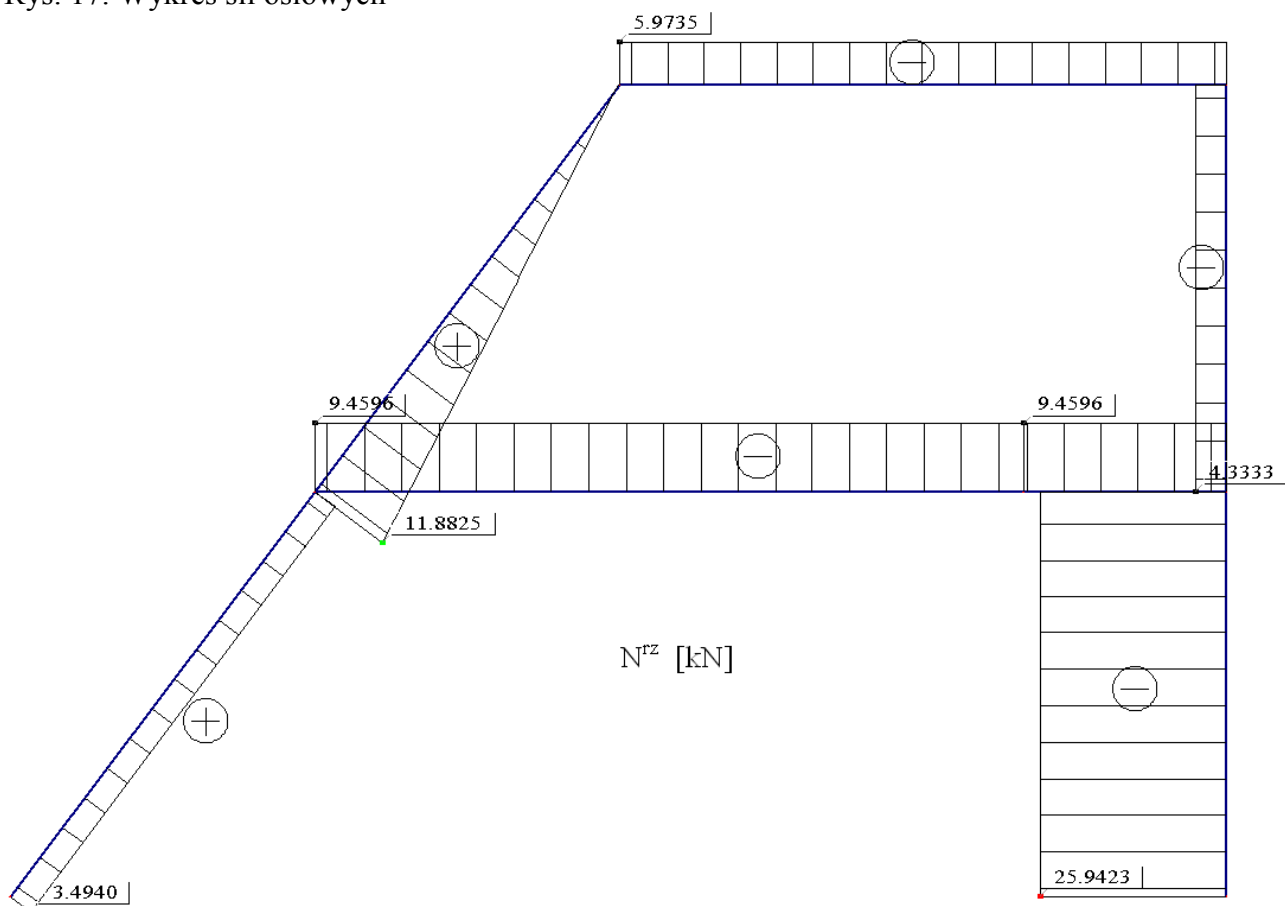
$$0,8 N_{1A} - 0,6 \cdot 3,088 \text{ kN} + 3,392 \text{ kN} + 0,6 \cdot 8,621 \text{ kN} - 0,8 \cdot 11,882 \text{ kN} = 0$$

$$N_{1A} = 3,492 \text{ kN}$$

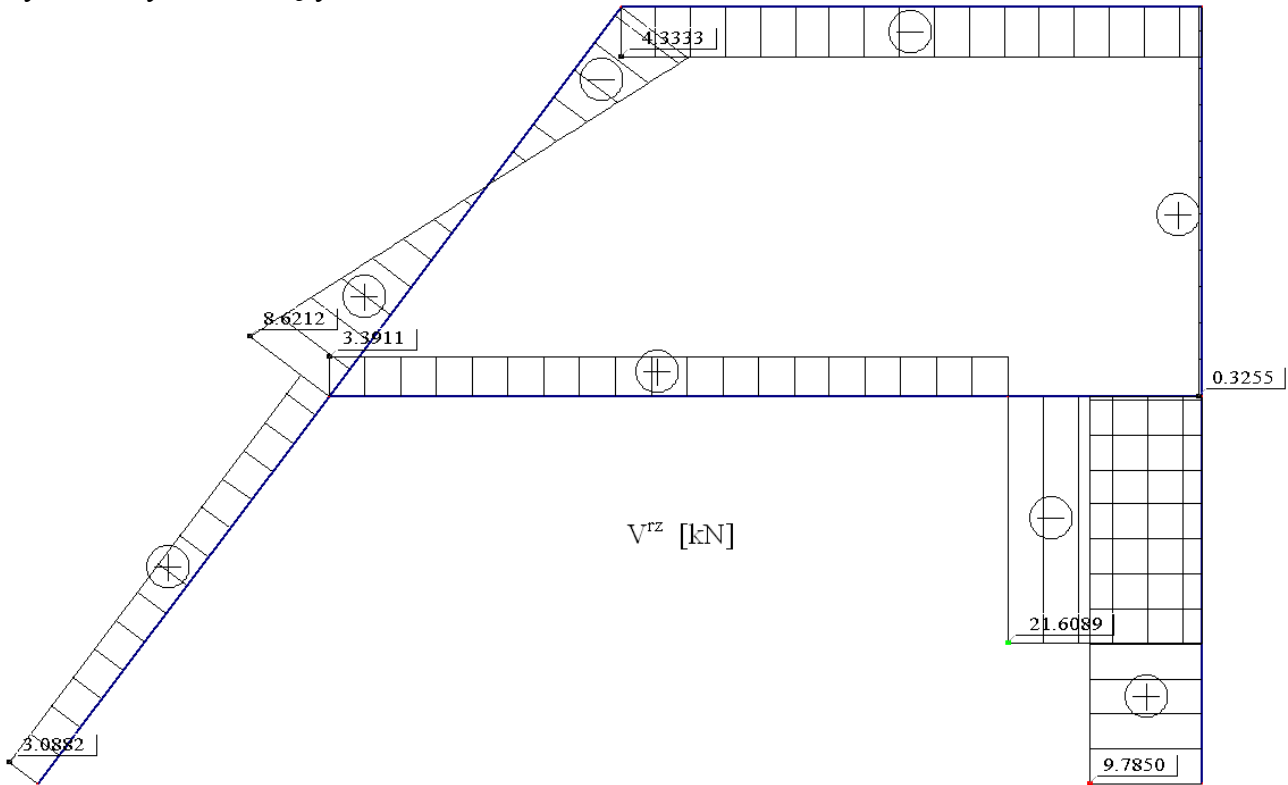
$$N_{A1} = N_{1A} = 3,492 \text{ kN}$$

5.3. Wykresy rzeczywistych sił przekrojowych

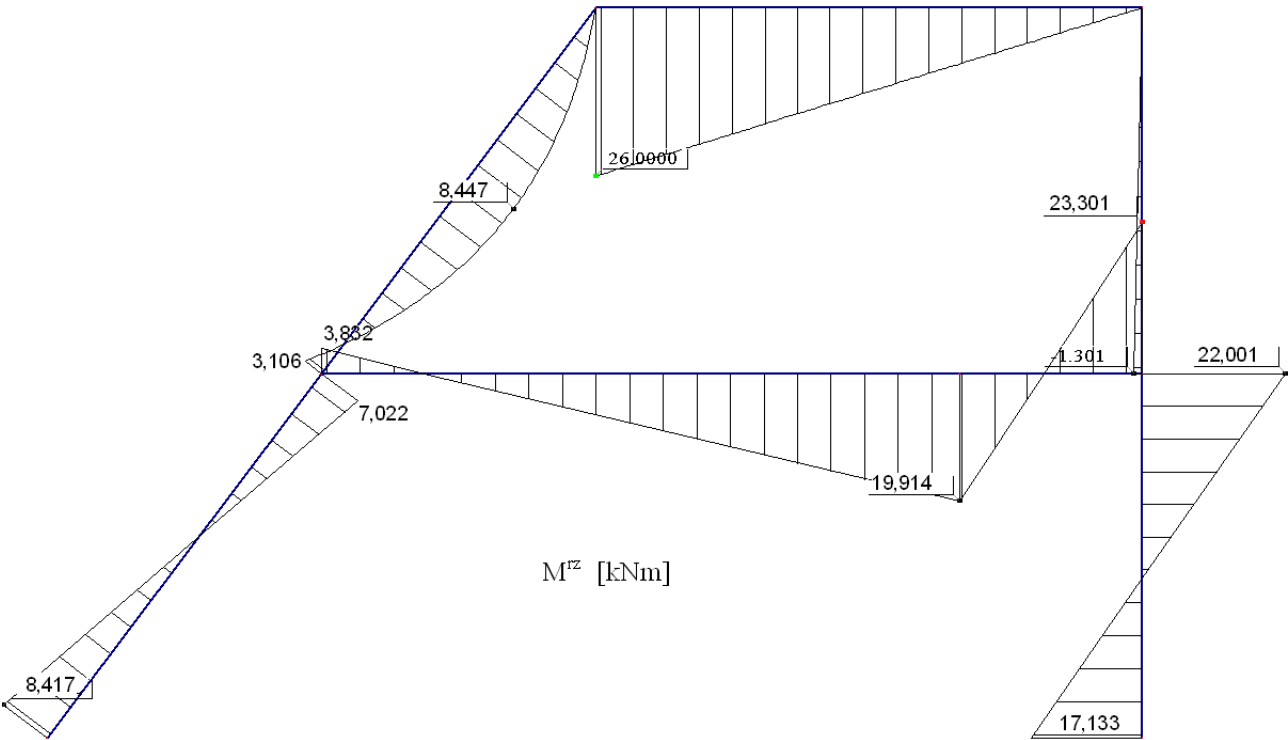
Rys. 17. Wykres sił osiowych



Rys. 18. Wykres sił tnących



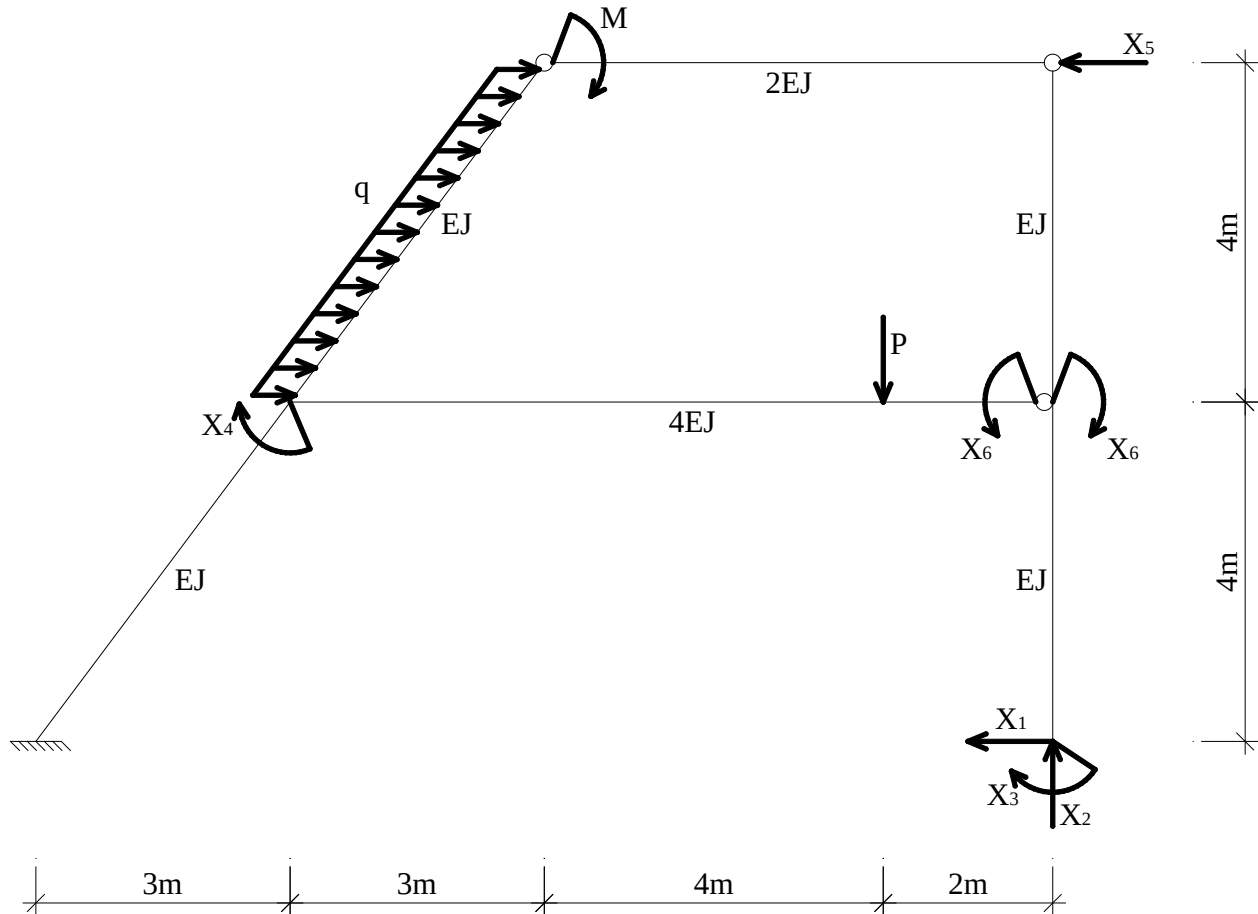
Rys. 19. Wykres momentów zginających



6.3. Kontrola kinematycznej zgodności przemieszczeń

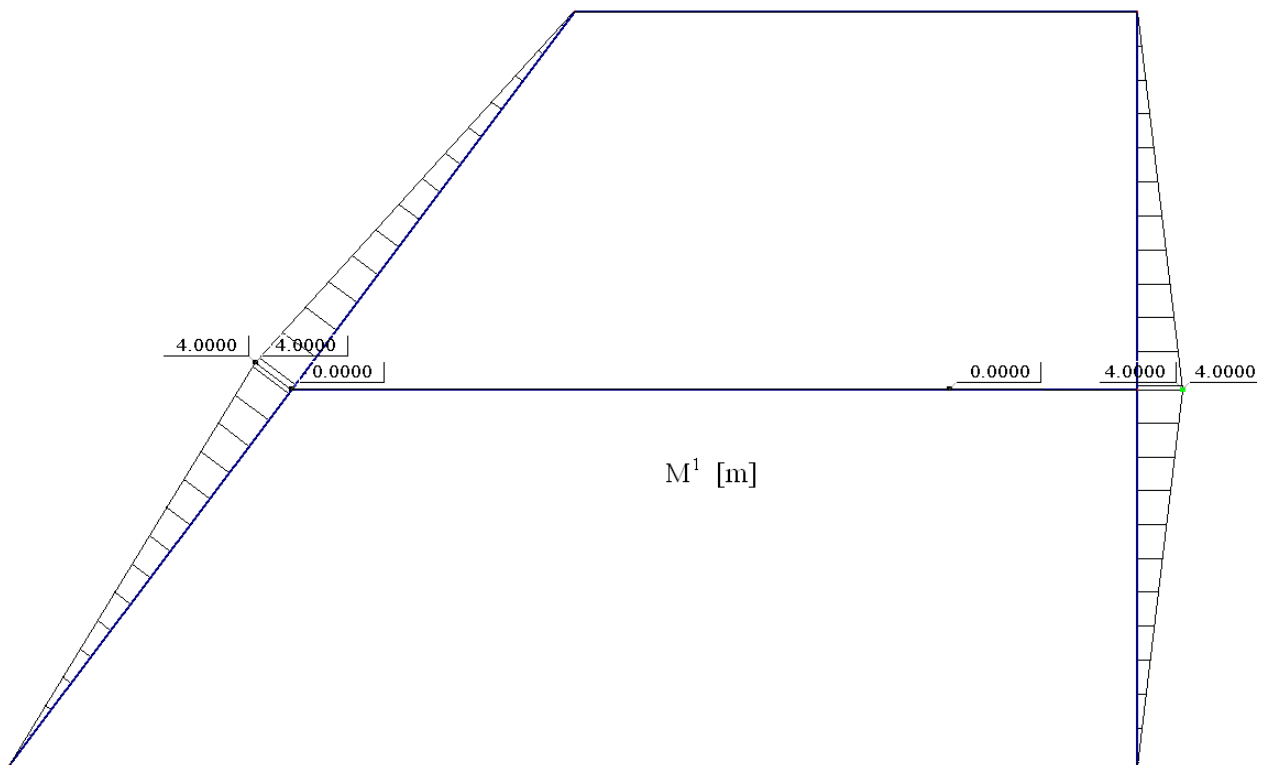
Kontrola kinematycznej zgodności przemieszczeń polega na sprawdzeniu czy wynikające z rozwiązania przemieszczenia w poszczególnych punktach spełniają warunki podparcia i ciągłości.

Rys. 21. Schemat podstawowy metody sił



6.3.1. Stan $X_1 = 1$ [-]

Rys. 22. Wykres momentów jednostkowych – stan $X_1 = 1$ [-]



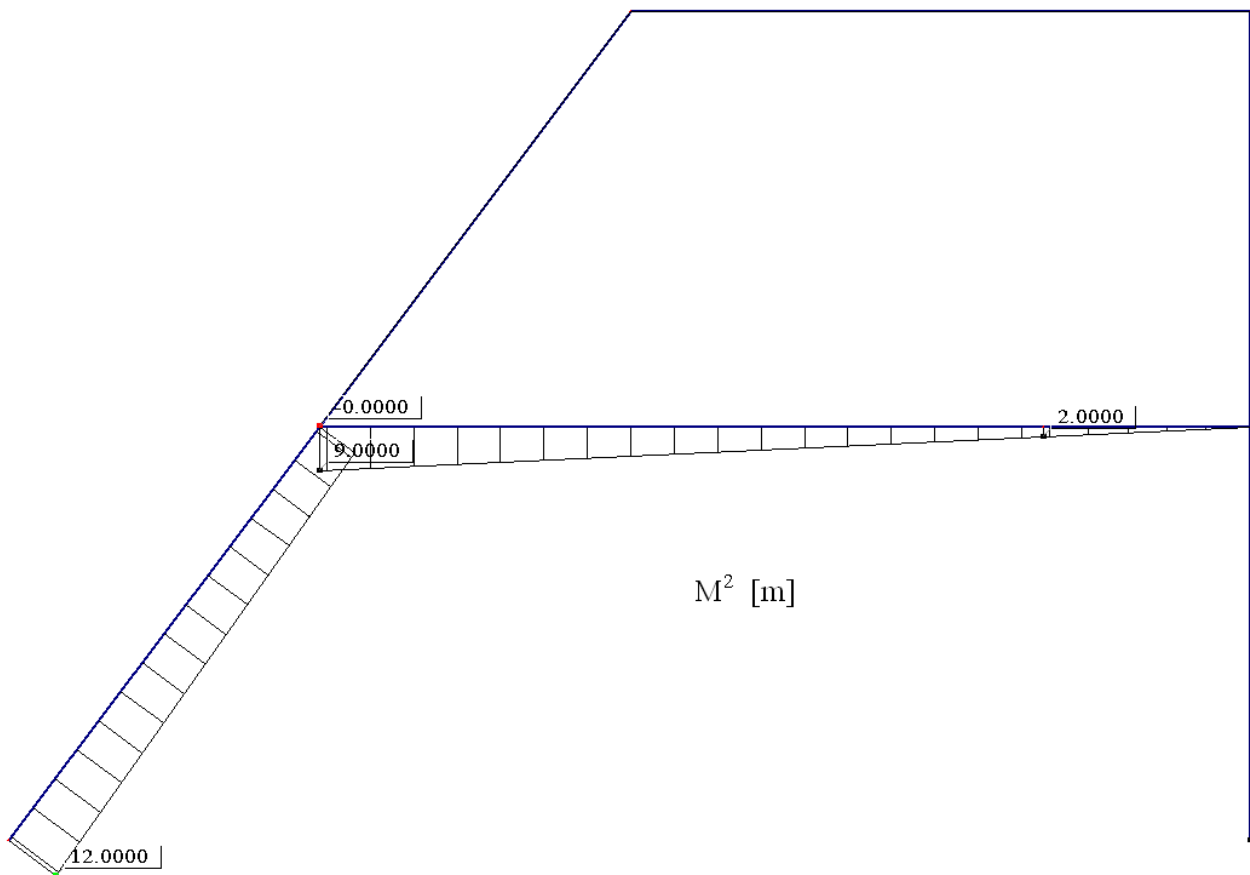
* Przemieszczenie Δ_{1rz}

Przedział	L [m]	EJ	M_{p1} [m]	M_{s1} [m]	M_{k1} [m]	M_{prz} [kNm]	M_{srz} [kNm]	M_{krz} [kNm]	Δ_{1rz} [kNm ³ /EJ]
A-1	5,00	1	0,000	-2,000	-4,000	-8,417	-0,698	7,022	-18,75667
B-2	4,00	1	0,000	2,000	4,000	-17,133	2,434	22,001	71,65067
1-E	7,00	4	0,000	0,000	0,000	-3,832	8,041	19,914	0,00000
E-1	2,00	4	0,000	0,000	0,000	19,914	-1,694	-23,301	0,00000
1-D	5,000	1	-4,000	-2,000	0,000	-3,106	8,447	0,000	-45,96000
D-C	6,000	2	0,000	0,000	0,000	26,000	13,000	0,000	0,00000
2-C	4,00	1	4,000	2,000	0,000	-1,301	-0,651	0,000	-6,93867
$\Delta_{1rz} =$									-0,00467

$$\Delta_{1,rz} = -0,00467 \frac{kNm^3}{EJ} \approx 0$$

6.3.2. Stan $X_2 = 1$ [-]

Rys. 23. Wykres momentów jednostkowych – stan $X_2 = 1$ [-]



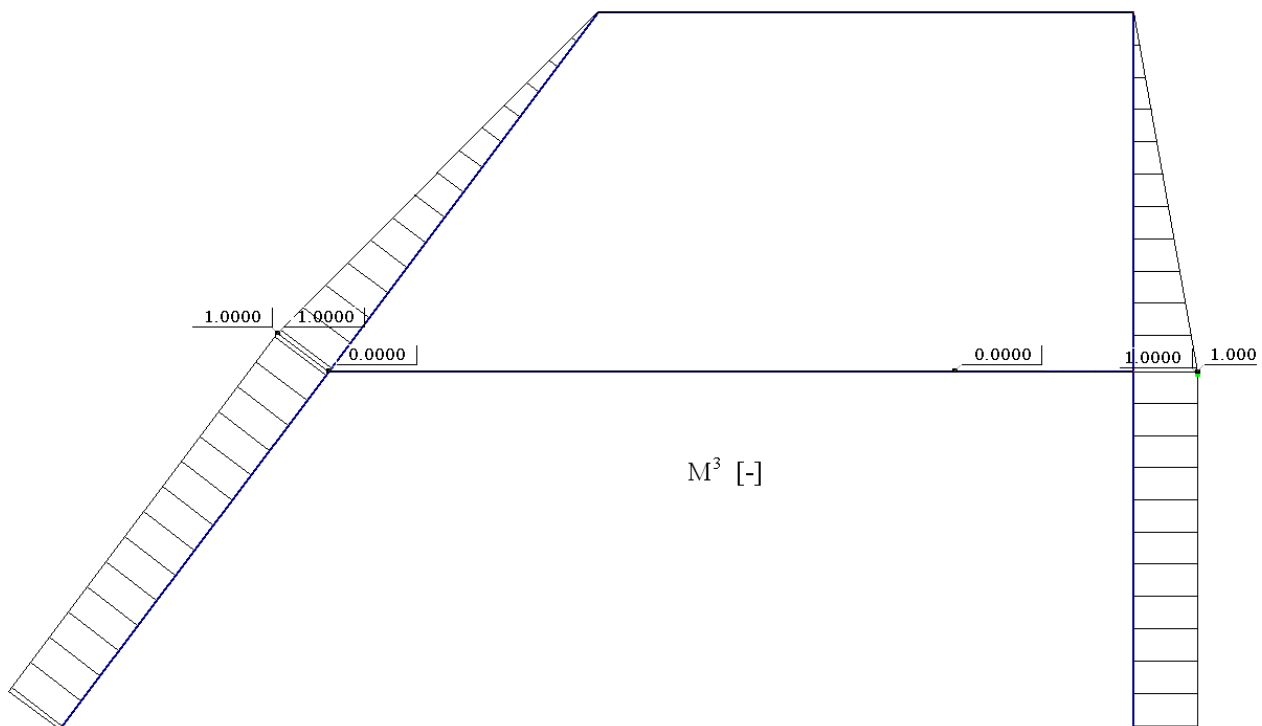
* Przemieszczenie Δ_{2rz}

Przedział	L [m]	EJ	M_{p1} [m]	M_{s1} [m]	M_{k1} [m]	M_{prz} [kNm]	M_{srz} [kNm]	M_{krz} [kNm]	Δ_{2rz} [kNm ³ /EJ]
A-1	5,00	1	12,000	10,500	9,000	-8,417	-0,698	7,022	-55,91750
B-2	4,00	1	0,000	0,000	0,000	-17,133	2,434	22,001	0,00000
1-E	7,00	4	9,000	5,500	2,000	-3,832	8,041	19,914	53,15392
E-1	2,00	4	2,000	1,000	0,000	19,914	-1,694	-23,301	2,75450
1-D	5,00	1	0,000	0,000	0,000	-3,106	8,447	0,000	0,00000
D-C	6,00	2	0,000	0,000	0,000	26,000	13,000	0,000	0,00000
2-C	4,00	1	0,000	0,000	0,000	-1,301	-0,651	0,000	0,00000
$\Delta_{2rz} =$									-0,00908

$$\Delta_{2,rz} = -0,00908 \frac{kNm^3}{EJ} \approx 0$$

6.3.3. Stan $X_3 = 1$ [-]

Rys. 24. Wykres momentów jednostkowych – stan $X_3 = 1$ [-]



* Przemieszczenie Δ_{3rz}

Przedział	L [m]	EJ	M_{p1} [-]	M_{s1} [-]	M_{k1} [-]	M_{prz} [kNm]	M_{srz} [kNm]	M_{krz} [kNm]	Δ_{3rz} [kNm ² /EJ]
A-1	5,00	1	-1,000	-1,000	-1,000	-8,417	-0,698	7,022	3,48750
B-2	4,00	1	1,000	1,000	1,000	-17,133	2,434	22,001	9,73600
1-E	7,00	4	0,000	0,000	0,000	-3,832	8,041	19,914	0,00000
E-1	2,00	4	0,000	0,000	0,000	19,914	-1,694	-23,301	0,00000
1-D	5,000	1	-1,000	-0,500	0,000	-3,106	8,447	0,000	-11,49000
D-C	6,000	2	0,000	0,000	0,000	26,000	13,000	0,000	0,00000
2-C	4,00	1	1,000	0,500	0,000	-1,301	-0,651	0,000	-1,73467
$\Delta_{3rz} =$									-0,00117

$$\Delta_{3,rz} = -0,00117 \frac{kNm^2}{EJ} \approx 0$$

Z kontroli rozwiązania wynika, że siły przekrojowe wywołane obciążeniem $P = (M, F, q)$ zostały wyznaczone poprawnie z dokładnością do trzeciego miejsca po przecinku !!!