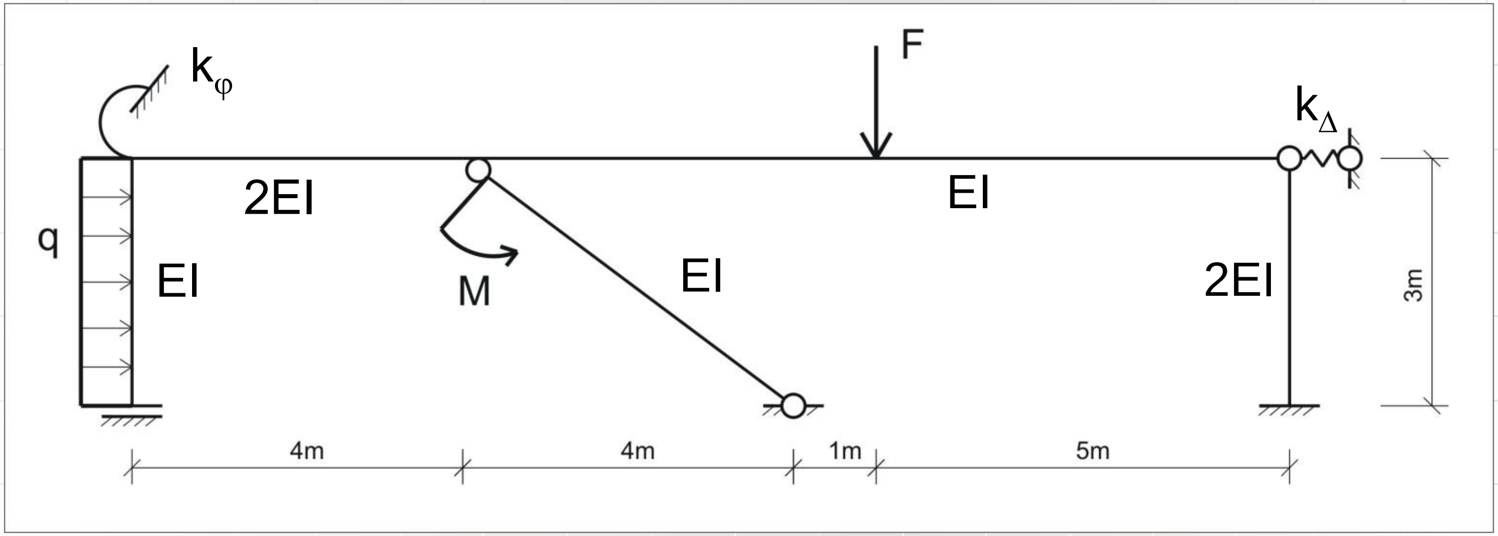
Politechnika Wrocławska

METODA PRZEMIESZCZEŃ

- przykład

HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Dane do zadania:

$M = 40$ kNm

$q = 6$ kN/m

$F = 20$kN

$k_\Delta = 5\frac{EI}{m^3}$

$k_\varphi = 10\frac{EI}{m}$

1. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu

Stopień Geom. Niewyzn. = Liczba niewiadomych przemieszczeń

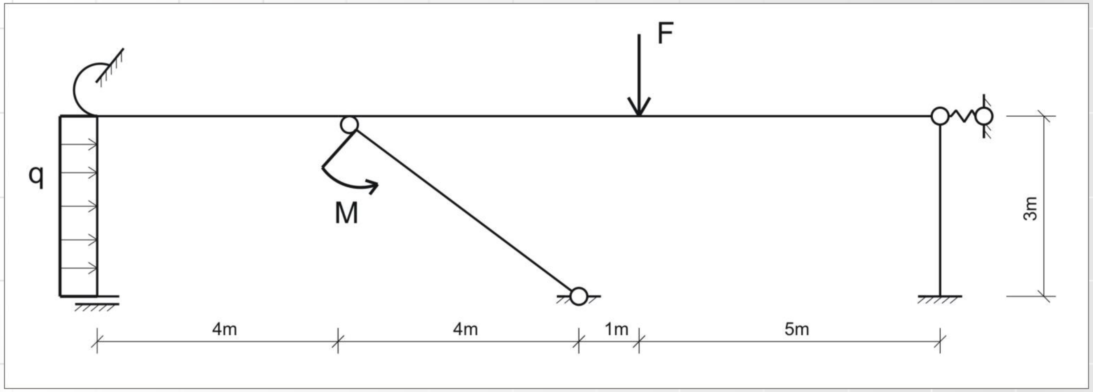
$$n_g = n_\Delta + n_\varphi$$

Liczba niewiadomych przemieszczeń

Liczba niewiadomych przesuwów

Liczba niewiadomych obrotów

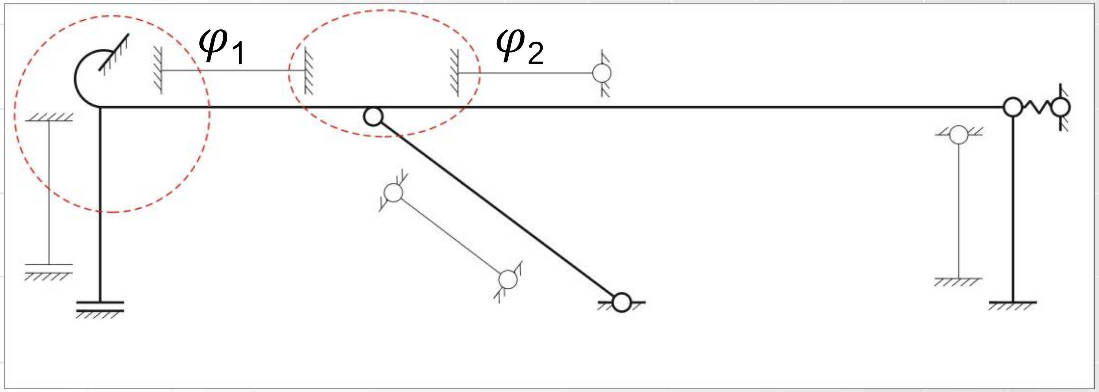
1. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu



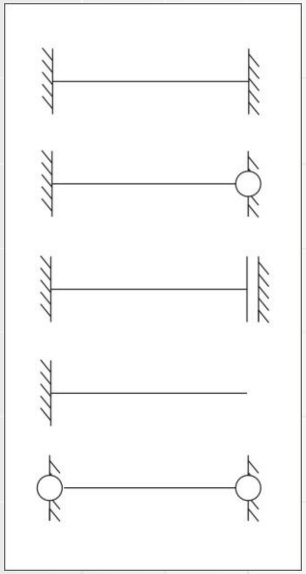
$$n_g = n_\Delta + n_\varphi$$

1a. Obliczenie liczby niewiadomych obrotów:

$n\varphi$ - liczba węzłów sztywnych, niepodporowych.

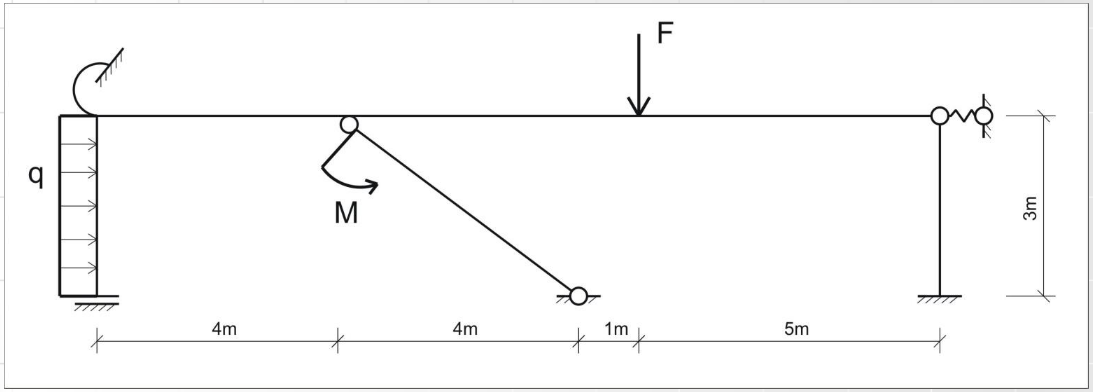


TYPY PRĘTÓW:



$$n\varphi = 2$$

1. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu



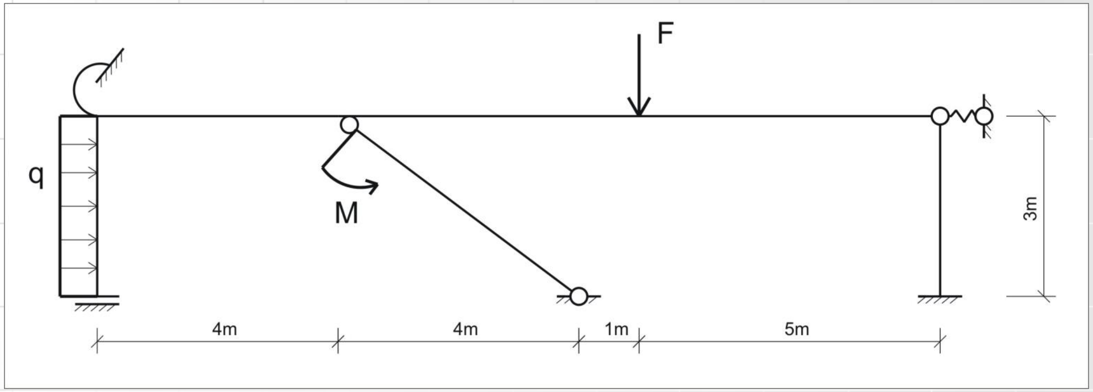
$$n_g = n_\Delta + n_\varphi$$

1b. Obliczenie liczby niewiadomych przesuwów:

BUDOWA MODELU PRZEGUBOWEGO

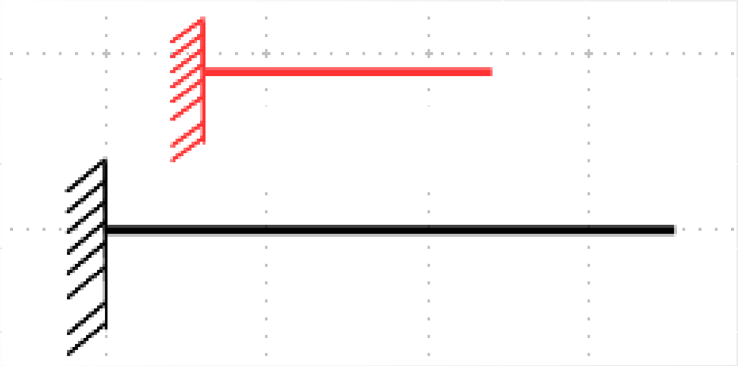
1. Z układu zadanego należy usunąć więzi sprężyste.
2. W każdym węźle sztywnym układu zadanego należy wstawić przegub, również w podporowym.
3. Podporę łyżwową układu zadanego zamienia się na więź elementarną na kierunku zablokowanego przesuwu.

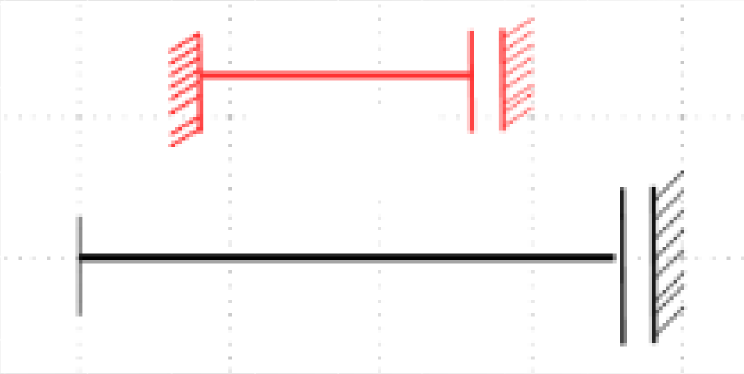
1. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu

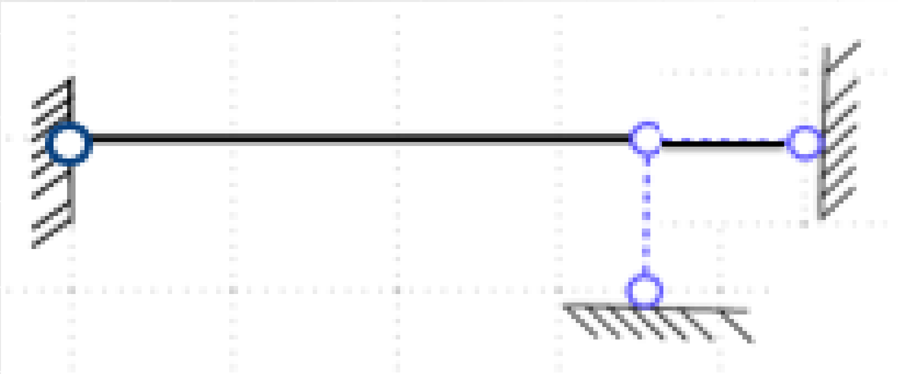


$$n_g = n_\Delta + n_\varphi$$

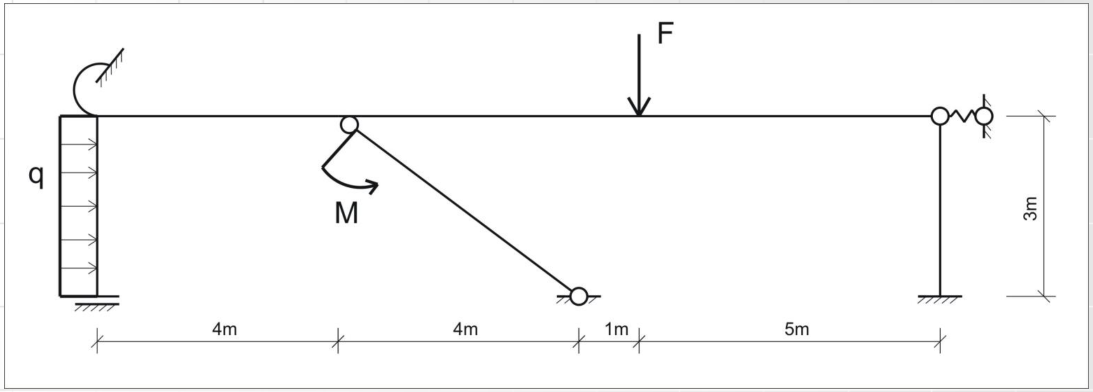
BUDOWA MODELU PRZEGUBOWEGO





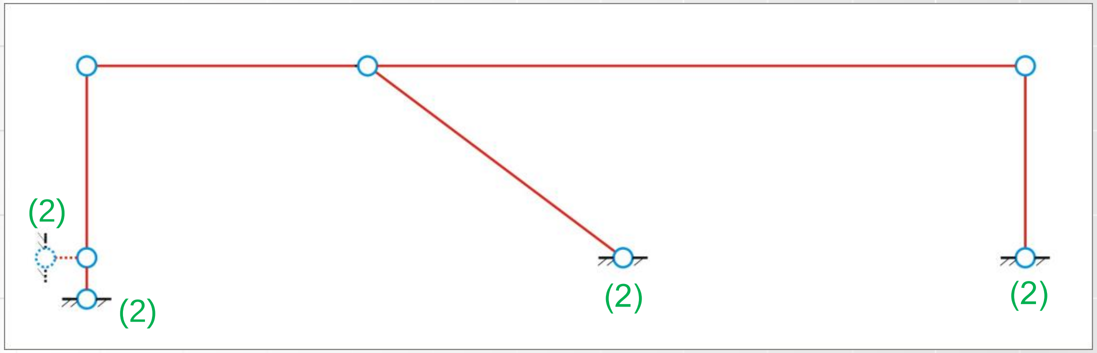


1. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu



$$n_g = n_\Delta + n_\varphi$$

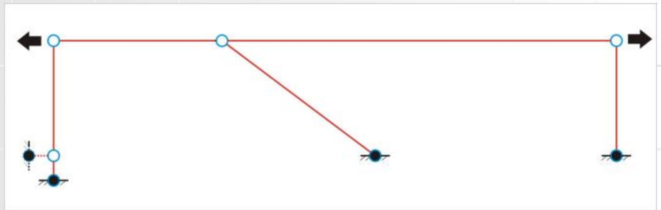
BUDOWA MODELU PRZEGUBOWEGO



$$n_\Delta = 2w - (p + r)$$

Gdzie:
w – liczba węzłów,
p – liczba prętów,
r – liczba reakcji

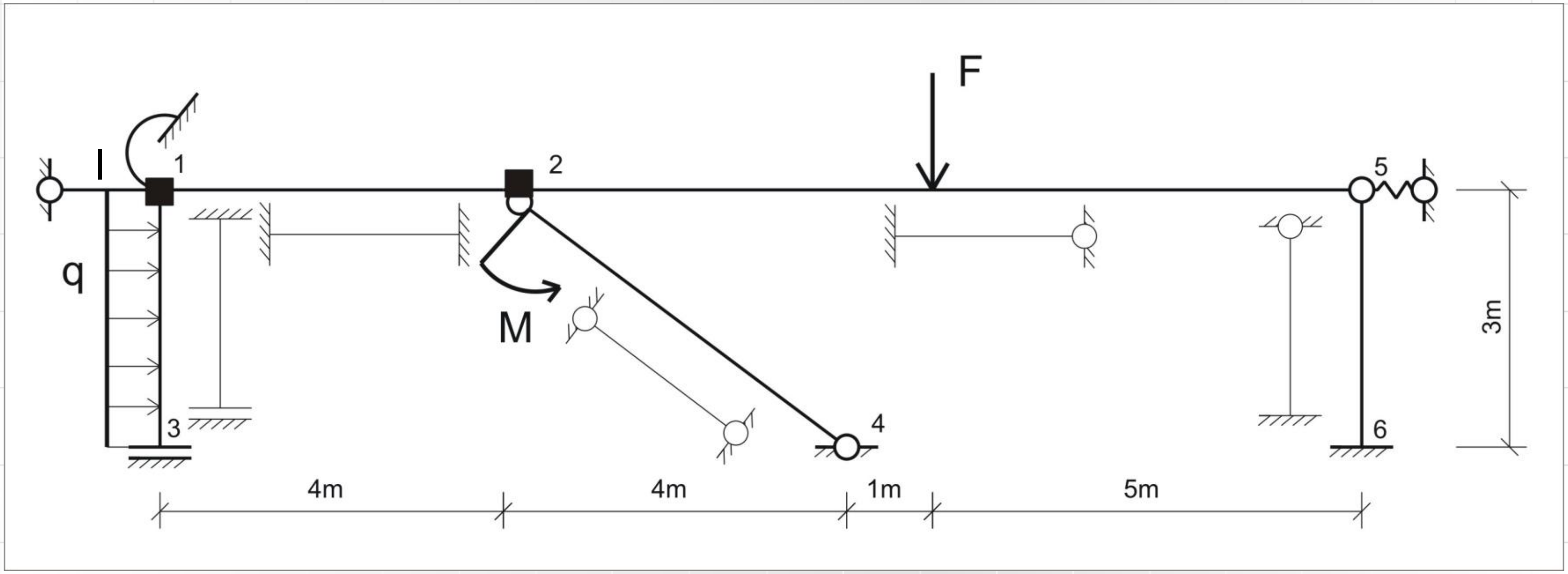
$$n_\Delta = 2 \times 8 - (7 + 8) = 1$$



Uwaga:
Więź oznaczona przerywaną linią odbiera stopień przesuwu, który uwzględniony będzie we wzorze transformacyjnym dla pręta sztywny-łyżwa.

$$n_g = 1 + 2 = 3$$

2. UKŁAD PODSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ - tworzymy z układu zadanego przez dodanie fikcyjnych więzi, ale w taki sposób, żeby układ był był geometrycznie niezmienny oraz kinematycznie wyznaczalny o znanych, równych zero, przemieszczeniach węzłów.



3. Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń:

a) postać ogólna

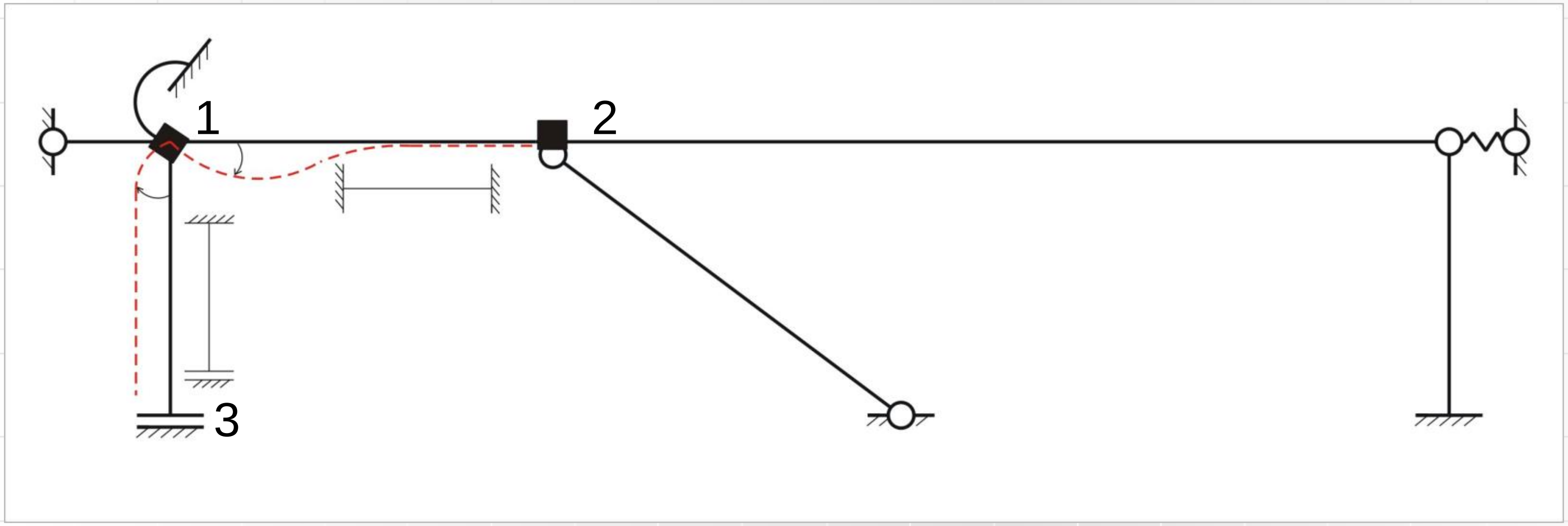
$$\begin{cases} k_{11}\varphi_1 + k_{12}\varphi_2 + k_{1I}\Delta_I + k_{10} = 0 \\ k_{21}\varphi_1 + k_{22}\varphi_2 + k_{2I}\Delta_I + k_{20} = 0 \\ k_{I1}\varphi_1 + k_{I2}\varphi_2 + k_{II}\Delta_I + k_{I0} = 0 \end{cases}$$

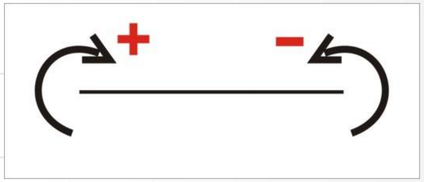
k_{11} - moment w więzi 1 spowodowany obrotem węzła 1 o kąt φ_1 = 1 Rad

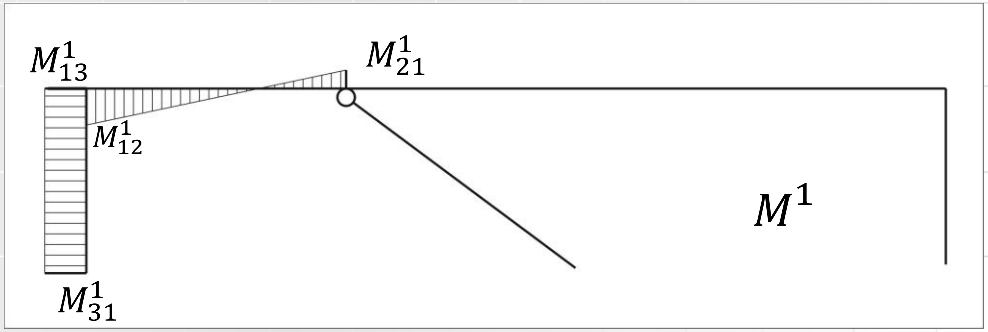
b) Obliczenie współczynników:

stan $\varphi_1 = 1$ ($\varphi_2 = 0$, obc.zew = 0, $\Delta_I = 0$)

! Wykres po stronie włókien rozciąganych







$$M_{12}^1 = 4\left(\frac{EI}{l}\right)_{12} = \frac{4\ x\ 2EI}{4} = 2\,\frac{EI}{m}$$

$$M_{31}^1 = -\left(\frac{EI}{l}\right)_{31} = -\frac{EI}{3} = -0.33\,\frac{EI}{m}$$

$$M_{21}^1 = 2\left(\frac{EI}{l}\right)_{21} = \frac{2\ x\ 2EI}{4} = 1\,\frac{EI}{m}$$

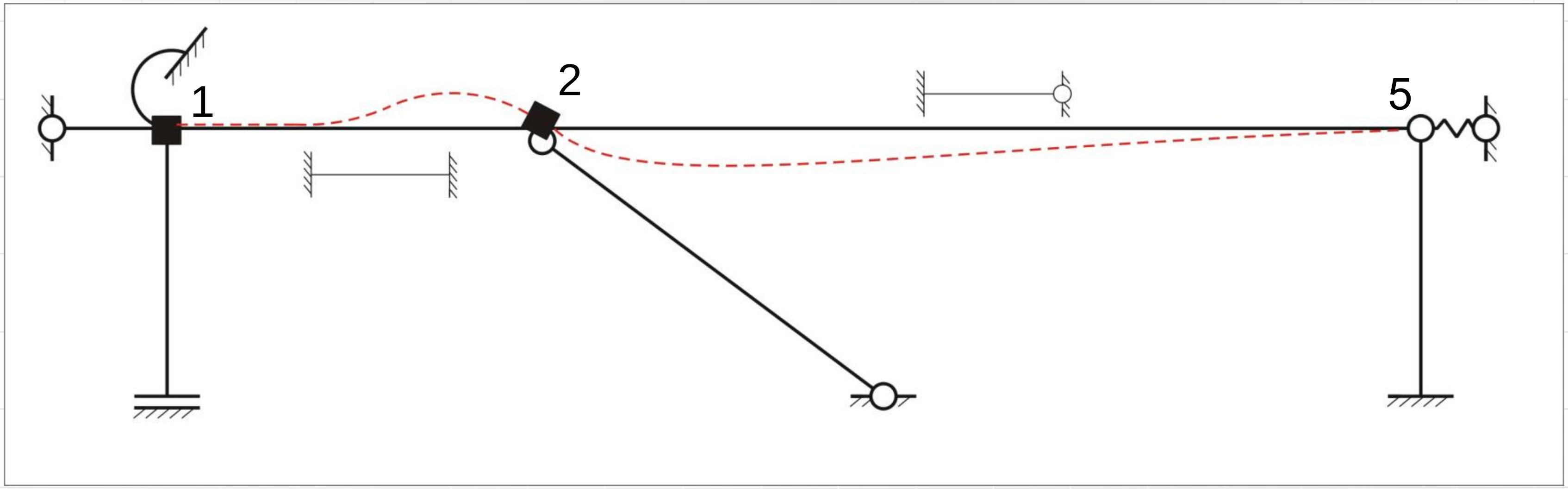
$$M_{13}^1 = \left(\frac{EI}{l}\right)_{13} = \frac{EI}{3} = 0.33\,\frac{EI}{m}$$

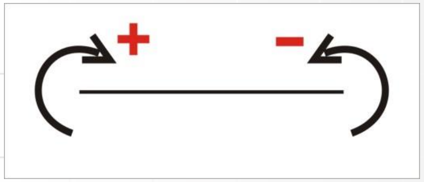
$$k_{11} = M_{12}^1 + M_{13}^1 + M_{1\varphi}^{spr} = 2\,\frac{EI}{m} + 0.33\,\frac{EI}{m} + 10\,\frac{EI}{m} = 12.33\,\frac{EI}{m}$$

b) Obliczenie współczynników:

stan $\varphi_2 = 1$ ($\varphi_1 = 0$, obc.zew = 0, $\Delta_I = 0$)

! Wykres po stronie włókien rozciąganych

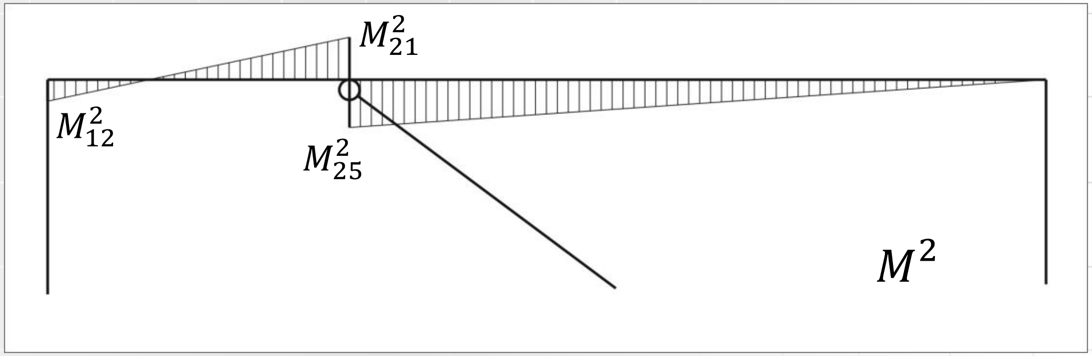




$$M_{21}^{2} = 4\left(\frac{EI}{l}\right)_{21} = \frac{4\ x\ 2EI}{4} = 2\,\frac{EI}{m}$$

$$M_{25}^{2} = 3\left(\frac{EI}{l}\right)_{25} = \frac{3\ x\ EI}{10} = 0.3\,\frac{EI}{m}$$

$$M_{12}^{2} = 2\left(\frac{EI}{l}\right)_{12} = \frac{2\ \ x\ 2EI}{4} = 1\,\frac{EI}{m}$$



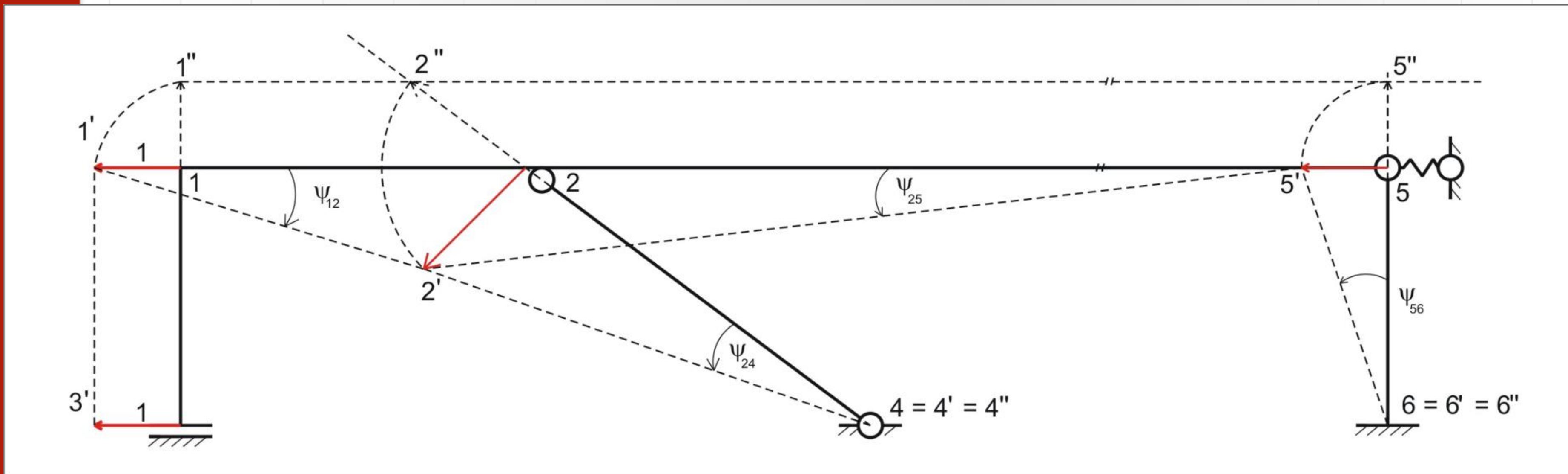
$$k_{22} = M_{21}^{2} + M_{25}^{2} = 2\,\frac{EI}{m} + 0.3\,\frac{EI}{m} = 2.3\,\frac{EI}{m}$$

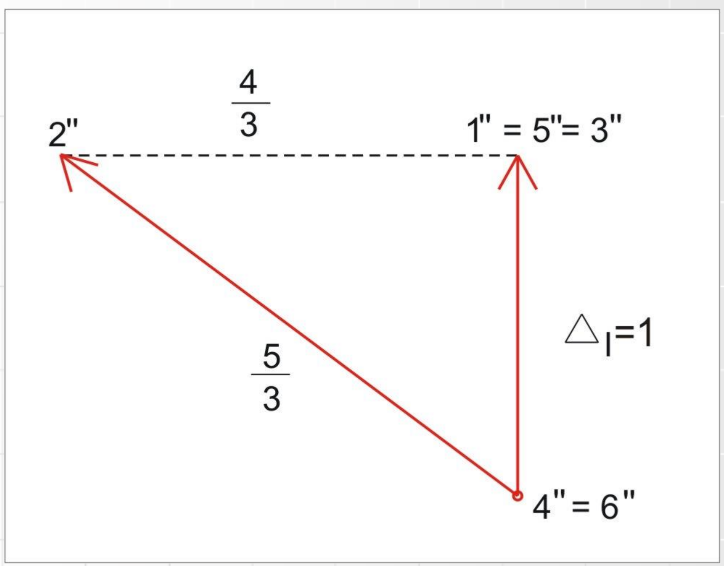
$$k_{12} = k_{21} = M_{12}^{2} = 1\,\frac{EI}{m}$$

Politechnika Wrocławska

b) Obliczenie współczynników:

stan $\Delta_I = 1$ ($\varphi_1 = 0$, $\varphi_2 = 0$, obc.zew = 0)





Δ - wzajemne przesunięcie końców pręta

ψ - kąt obrotu cięciwy pręta

ψ dodatni – obrót w prawo

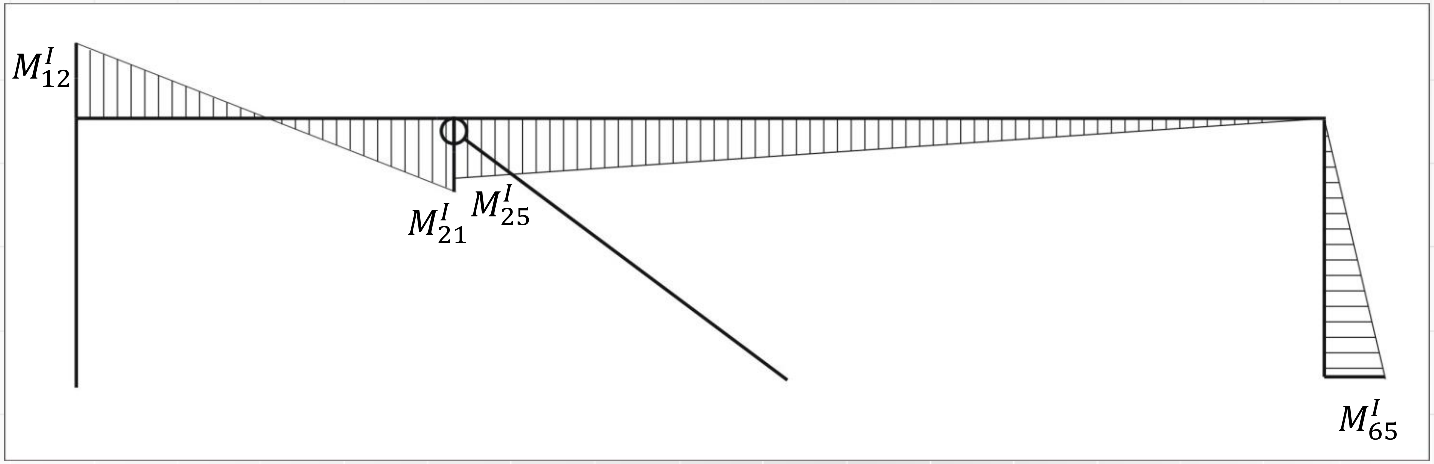
$$\Delta_{12} = \frac{4}{3}$$
$$\Delta_{24} = \frac{5}{3}$$
$$\Delta_{25} = \frac{4}{3}$$
$$\Delta_{56} = 1$$

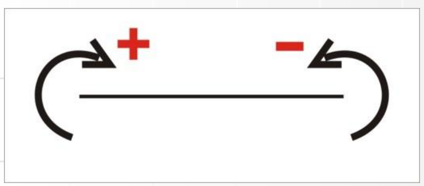
$$\Psi_{12}^{I} = \frac{\Delta_{12}}{l_{12}} = \frac{1}{3}\, m$$
$$\Psi_{24}^{I} = \frac{\Delta_{24}}{l_{24}} = -\frac{1}{3}\, m$$
$$\Psi_{25}^{I} = \frac{\Delta_{25}}{l_{25}} = -\frac{2}{15}\, m$$
$$\Psi_{56}^{I} = \frac{\Delta_{56}}{l_{56}} = -\frac{1}{3}\, m$$

b) Obliczenie współczynników:

stan Δ_I = 1 (φ_1 = 0, φ_2 = 0, obc.zew = 0)

! Wykres po stronie włókien rozciąganych





$$M^I_{21} = -6\left(\frac{EI}{l}\right)_{21} x\ \Psi_{21} = -\frac{6\ x\ 2EI}{4}\ x\ \frac{1}{3} = -1\,\frac{EI}{m^2}$$

$$M^I_{12} = -6\left(\frac{EI}{l}\right)_{12} x\ \Psi_{12} = -\frac{6\ x\ 2EI}{4}\ x\ \frac{1}{3} = -1\,\frac{EI}{m^2}$$

$$M^I_{25} = -3\left(\frac{EI}{l}\right)_{25} x\ \Psi_{25} == 0.04\,\frac{EI}{m^2}$$

$$M^I_{65} = -3\left(\frac{EI}{l}\right)_{65} x\ \Psi_{56} == \frac{2}{3}\,\frac{EI}{m^2}$$

$k_{1I} = M^I_{12} = -1\frac{EI}{m^2}$

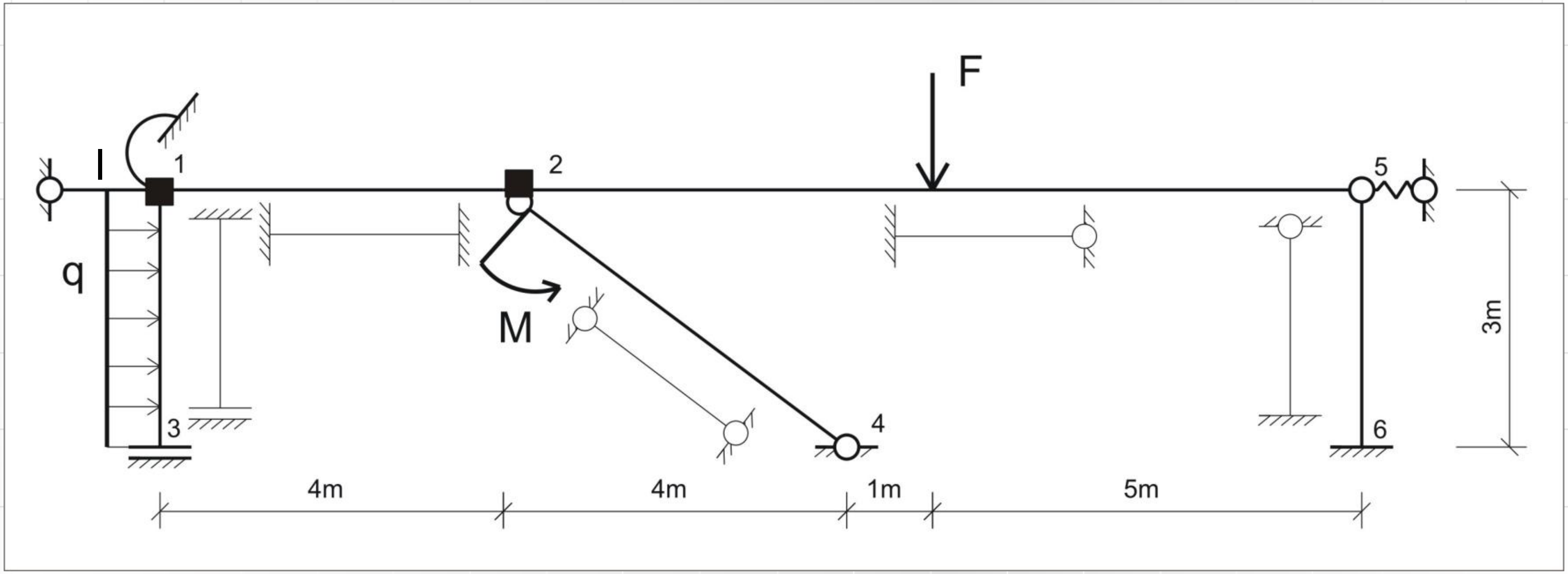
$k_{2I} = M^I_{21} + M^I_{25} = -1\frac{EI}{m^2} + 0.04\frac{EI}{m^2} = -0.96\frac{EI}{m^2}$

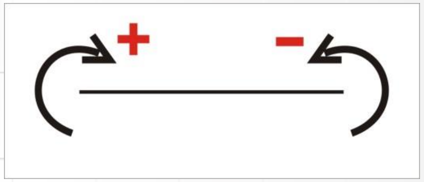
$k_{II} = -[(M^I_{12} + M^I_{21})\Psi_{12} + (M^I_{25} + M^I_{52})\Psi_{25} + M^I_{65} x\ \Psi_{56}] + k_\Delta\ x\ \delta^I_s\ x\ \delta^I_s = 5.894\ \frac{EI}{m^3}$

b) Obliczenie współczynników:

stan od obc. zewn. (φ_1 = 0 , φ_2 = 0, Δ_l = 0)

! Wykres po stronie włókien rozciąganych



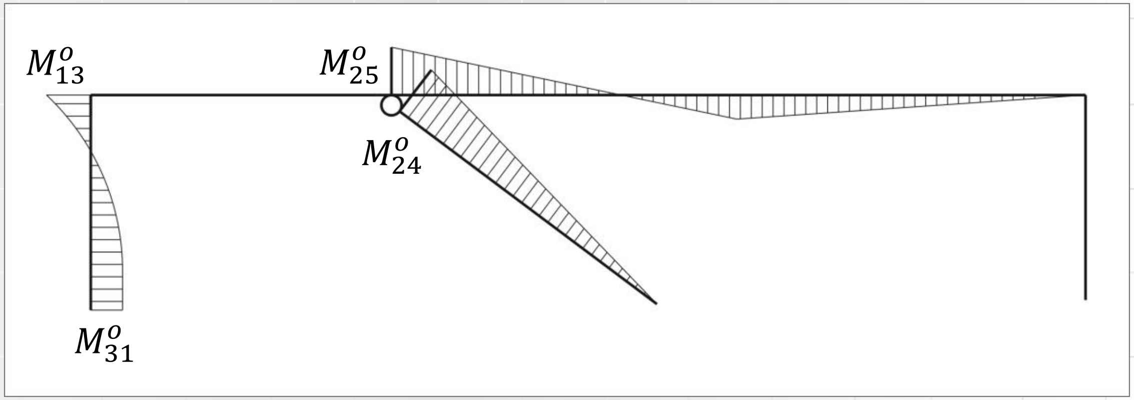


$$M_{13}^{o} = \frac{ql^2}{3} = 18\ kNm$$

$$M_{31}^{o} = \frac{ql^2}{6} = 9\ kNm$$

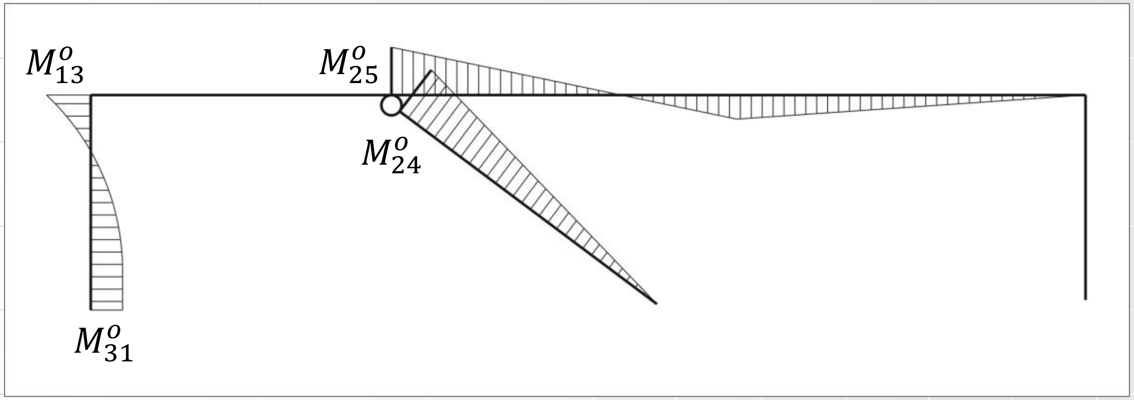
$$M_{24}^{o} = -40\ kNm$$

$$M_{25}^{o} = -\ \frac{3}{16} Fl = \ -37.5\ kNm$$



b) Obliczenie współczynników:

stan od obc. zewn. (φ_1 = 0 , φ_2 = 0, Δ_l = 0)



$$M_{13}^{o} = \frac{ql^2}{3} = 18\ kNm$$

$$M_{31}^{o} = \frac{ql^2}{6} = 9\ kNm$$

$$M_{24}^{o} = -40\ kNm$$

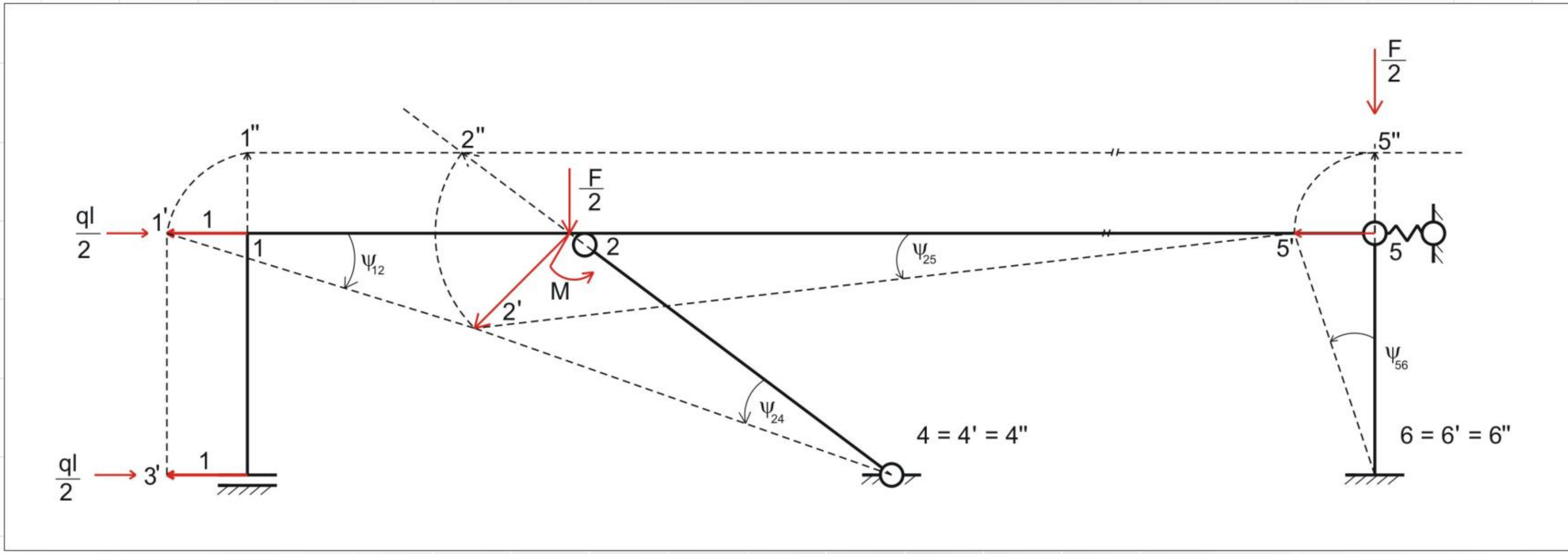
$$M_{25}^{o} = -\frac{3}{16}Fl = -37.5\ kNm$$

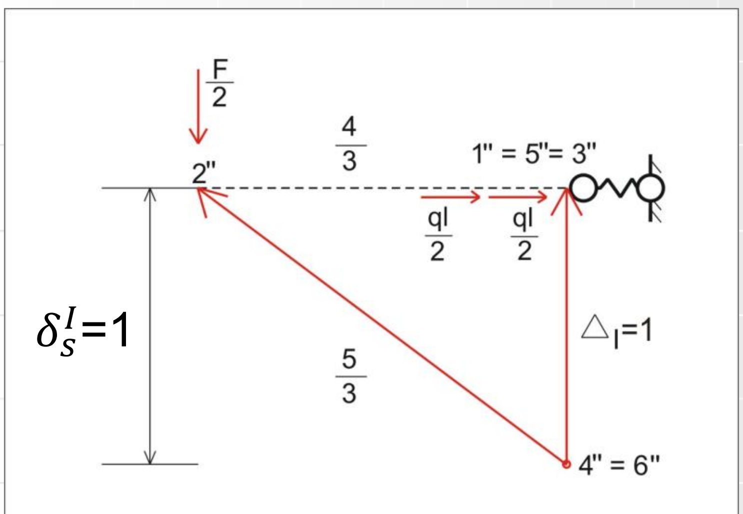
k_{10} = M_{13}^{o} = 18 kNm

k_{20} = $M_{21}^{o} + M_{25}^{o}$ = -37,5 kNm

b) Obliczenie współczynników:

stan od obc. zewn. (φ_1 = 0 , φ_2 = 0, Δ_I = 0)





$$P\delta_p = -\left(\frac{ql}{2}\,x\,1\right)x\,2 + \frac{F}{2}\,x\,\frac{4}{3}$$
$$= -4.67\ kN$$

Praca sił zewnętrznych na odpowiadających im przemieszczeniach

k$_{I0}$ = $-\sum_{ij}(M_{ij}^o + M_{ij}^o)\Psi_{ij}^I - P\delta_p^I$

k$_{I0}$ = $-\left[(M_{12}^o + M_{21}^o)\Psi_{12} + (M_{24}^o + M_{42}^o)\Psi_{24} + (M_{25}^o + M_{52}^o)\Psi_{25} + (M_{65}^o + M_{56}^o)\Psi_{56} + (M_{13}^o + M_{31}^o)\Psi_{13}\right] - P\delta_p^I = -13{,}66\ kN$

k$_{I0}$ $= -13{,}66\ kN$

Politechnika Wrocławska

c) Układ równań kanonicznych

$$
\begin{cases}
k_{11}\varphi_1 + k_{12}\varphi_2 + k_{1I}\Delta_I + k_{10} = 0 \\
k_{21}\varphi_1 + k_{22}\varphi_2 + k_{2I}\Delta_I + k_{20} = 0 \\
k_{I1}\varphi_1 + k_{I2}\varphi_2 + k_{II}\Delta_I + k_{I0} = 0
\end{cases}
$$

Zapis macierzowy

$$
\begin{bmatrix} k_{11} & \cdots & k_{1I} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ k_{I1} & \cdots & k_{II} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \delta_1 \end{bmatrix}
+
\begin{bmatrix} k_{10} \\ k_{20} \\ k_{I0} \end{bmatrix}
$$

c) Szczegółowa postać układu równań kanonicznych

$$\begin{cases} 12.33\,\frac{EI}{m}\varphi_1 + \frac{EI}{m}\varphi_2 - \frac{EI}{m^2}\Delta_I + 18\text{ kNm} = 0 \\ \frac{EI}{m}\varphi_1 + 2{,}33\,\frac{EI}{m}\varphi_2 - 0.96\,\frac{EI}{m^2}\Delta_I - 37.5\text{ kNm} = 0 \\ -\varphi_1 - 0.96\,\frac{EI}{m^2}\varphi_2 + 5.894\,\frac{EI}{m^3}\Delta_I - 13{,}66\text{ kN} = 0 \end{cases}$$

d) Rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} \varphi_1 = -\,2.63\,\frac{kNm^2}{EI} \\ \varphi_2 = 19.56\,\frac{kNm^2}{EI} \\ \Delta_I = -\,5{,}06\,\frac{kNm^3}{EI} \end{cases}$$

4. Obliczenie sił rzeczywistych

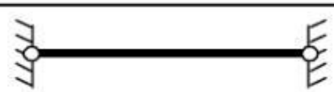
Momenty zginające:

I sposób : zastosowanie wzorów transformacyjnych:

$$Mij = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}}\left(a_{ij}\varphi_{ij} + b_{ij}\varphi_{ij} - c_{ij}\Psi_{ij}\right) + M_{ij}^{0}$$

$$Mji = \frac{EI_{ji}}{L_{ji}}\left(a_{ji}\varphi_{ji} + b_{ji}\varphi_{ji} - c_{ji}\Psi_{ji}\right) + M_{ji}^{0}$$

Tabela 1

i j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	c_{ij}	c_{ji}
	4	4	2	6	6
	3	0	0	3	0
	1	1	-1	0	0
	0	0	0	0	0
	0	0	0	0	0

II sposób : z użyciem superpozycji

$$Mij = M_{ij}^{1}\varphi_1 + M_{ij}^{2}\varphi_2 + M_{ij}^{I}\delta_1 + M_{ij}^{0}$$

Siły tnące i osiowe:

Siły tnące można wyznaczyć ze wzorów transformacyjnych lub z superpozycji.

Siły osiowe uzyskuje się z warunków równowagi sił w węzłach po wcześniejszym wyznaczeniu wartości sił tnących.

5. KONTROLA KINEMATYCZNEJ DOPUSZCZALNOŚCI ROZWIĄZANIA.

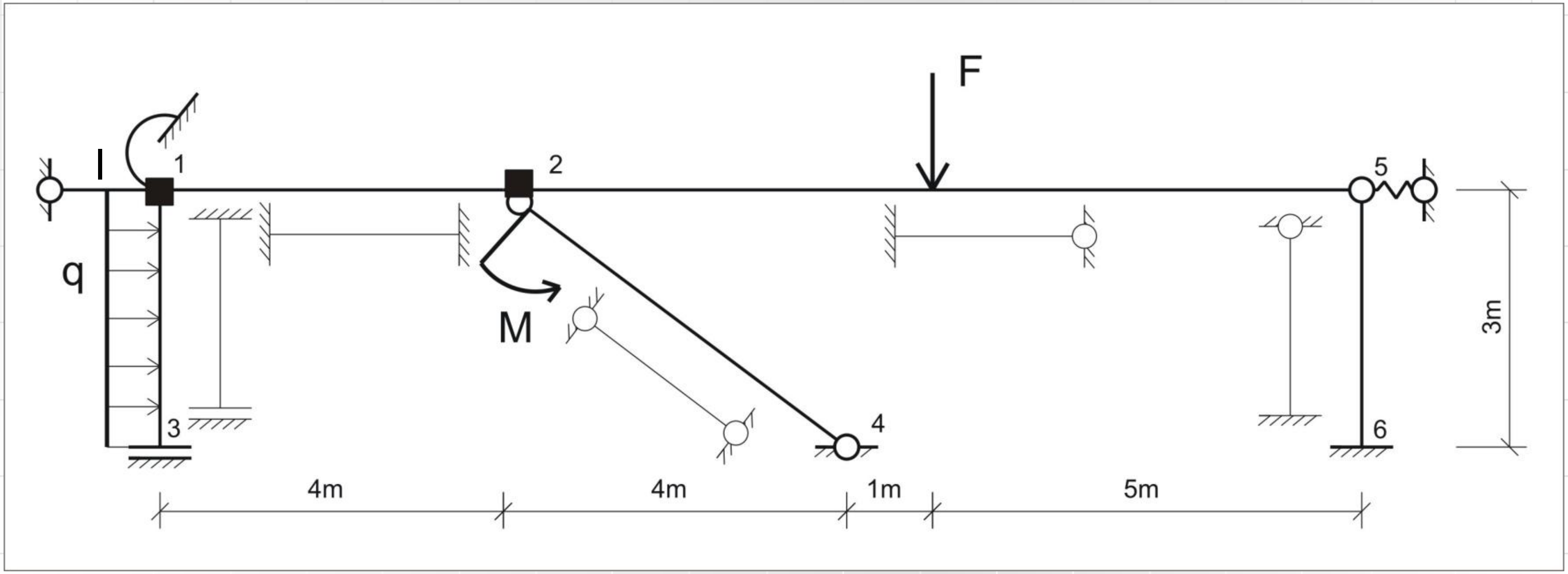
a) Wyznaczyć stopień statycznej niewyznaczalności układu

b) Przyjąć układ podstawowy metody sił

c) Rozwiązać układ podstawy metody sił od jednostkowych sił hiperstatycznych

d) Sprawdzić kinematyczną zgodność przemieszczeń

2. UKŁAD PODSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ



Dane do zadania:

M = 40 kNm
q = 6 kN/m
F = 20kN
$k_{\Delta} = 5\frac{EI}{m^3}$
$k_{\varphi} = 10\frac{EI}{m}$

Przypadki obciążenia:

1. CW
2. OM
3. Fi1
4. Fi2
5. D1