



Politechnika Wrocławska

MECHANIKA BUDOWLI

Wykład 9 Ustroje prętowo ciągnowe

1

Prowadzący: dr inż. Olga Szyłko-Bigus

• •

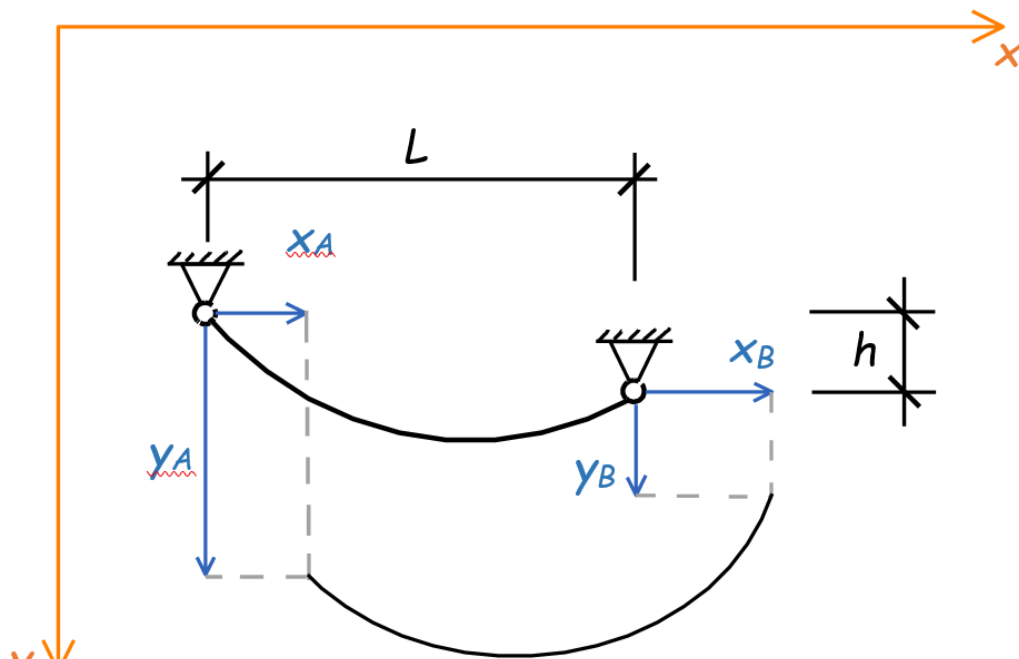
1. Wpływ przemieszczeń podpór

Cięgna występujące w obiektach budowlanych zwykle mocowane są do innych elementów konstrukcyjnych, takich jak słupy, belki czy pierścienie.

W wyniku naprężeń powstających w linach, elementy podpierające mogą się deformować, co z kolei wpływa na wartości sił w cięgnach.

Z punktu widzenia obliczeń statycznych cięgien, deformacje elementów podpierających można potraktować jako przemieszczenia podpór.

Nowa długość cięgna wynosi:



$$L_c^A = \sqrt{(L + x_B - x_A)^2 + (h + y_B - y_A)^2} \quad (1)$$

1. Wpływ przemieszczeń podpór

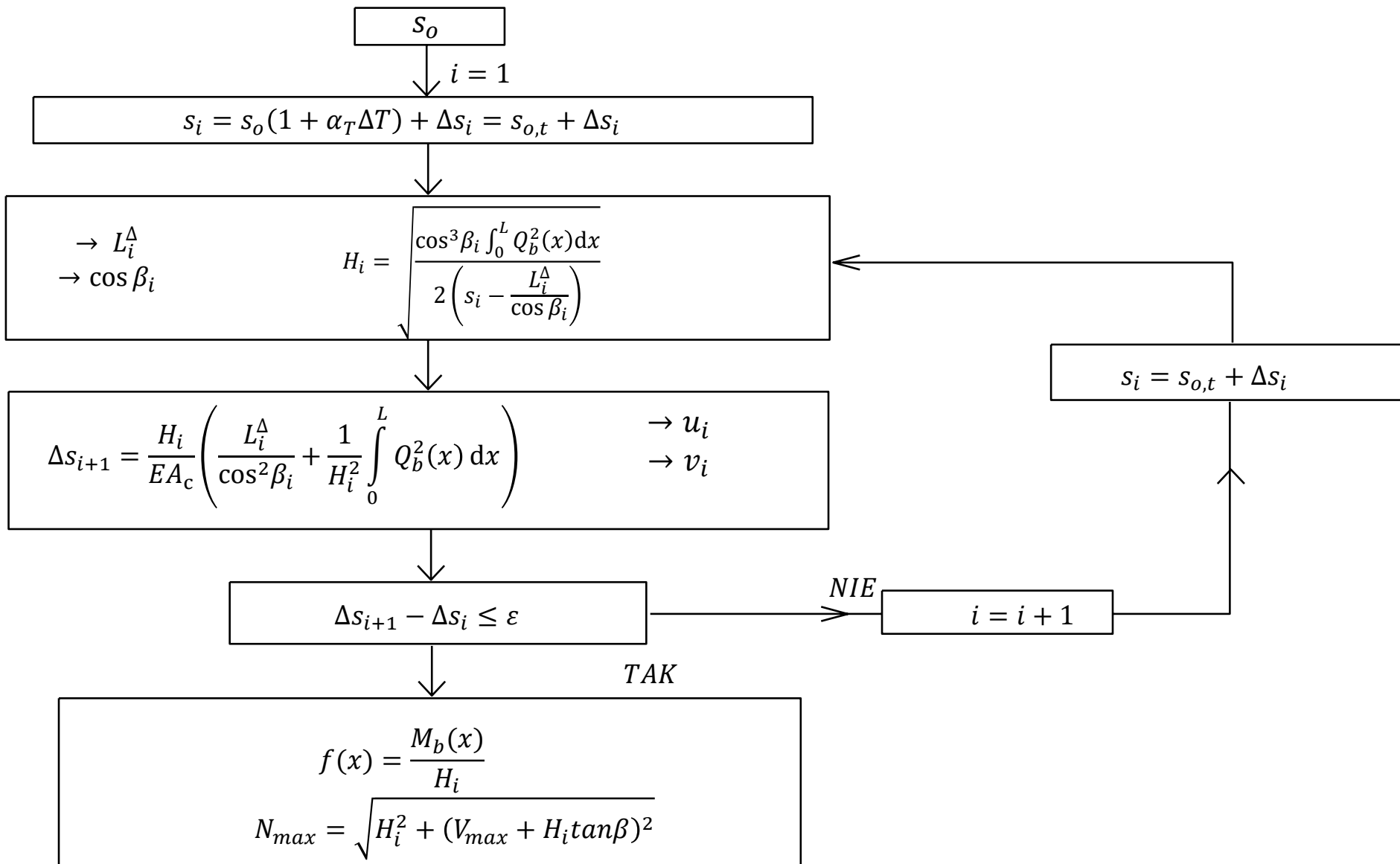
Aby uwzględnić wpływ niewielkich przemieszczeń podpór w równaniu sześciennym wystarczy za pierwotną długość cięciwy $L_c = \frac{L}{\cos\beta}$ wstawić nową długość opisaną równaniem (1)

$$S^3 + S^2 EA \left[1 - \frac{1}{s_o} (L_c^\Delta - \alpha_t \Delta T s_o) \right] = \frac{EA \cos\beta}{2s_o} \int_0^L Q_b^2(x) dx \quad (2)$$

Formalnie zmianie ulec powinien także kąt β występujący po prawej stronie równania oraz górna granica przedziału całkowania. Jednakże, ze względu na rozpatrywanie jedynie niewielkich przemieszczeń podpór w odniesieniu do wymiarów cięgna, ich wpływ na ostateczny wynik jest niewielki.

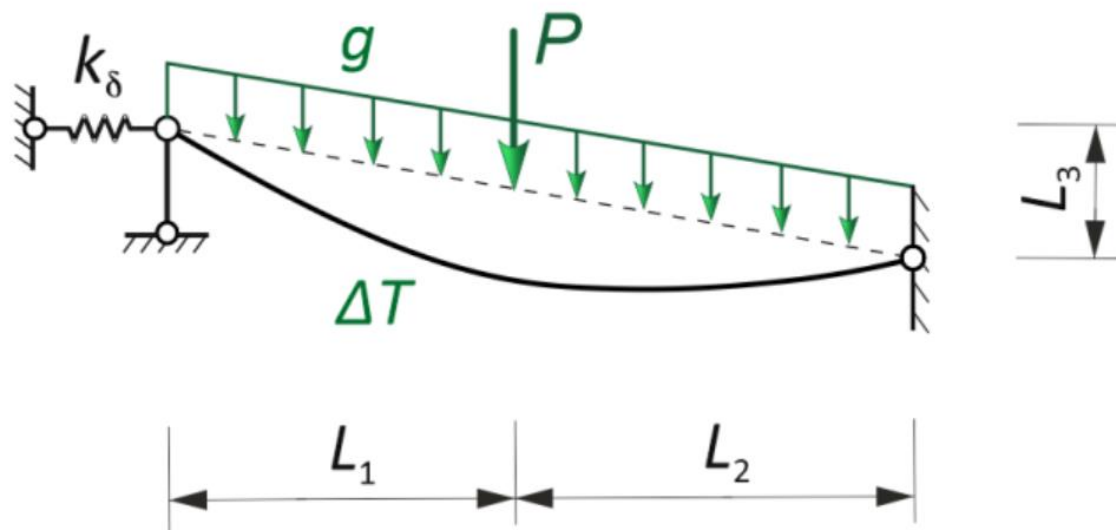


Procedura iteracyjna



2. Przykład obliczeniowy

Dany jest płaski ustrój cięgnowy o schemacie statycznym jak na rysunku.



Dane:

$$L_1 = 13m,$$

$$L_2 = 12m, \quad L_3 = 4m$$

$$\Delta T = -22^\circ\text{C}, \quad g = \frac{9\text{kN}}{m}$$

$$P = 22\text{kN}$$

Przyjęto:

$$E_c = 160\text{ GPa}$$

$$A_c = 7,69\text{cm}^2$$

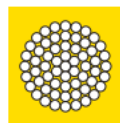
$$EA_c = 123040\text{ kN};$$

$$m_c = 6,1\text{kq/m}$$

$$S_m = 100\text{kN};$$

Przyjęto: lina Pfeifer PG 125 1x61

Nośność obliczeniowa: $F_{Rd} = 721\text{ kN}$



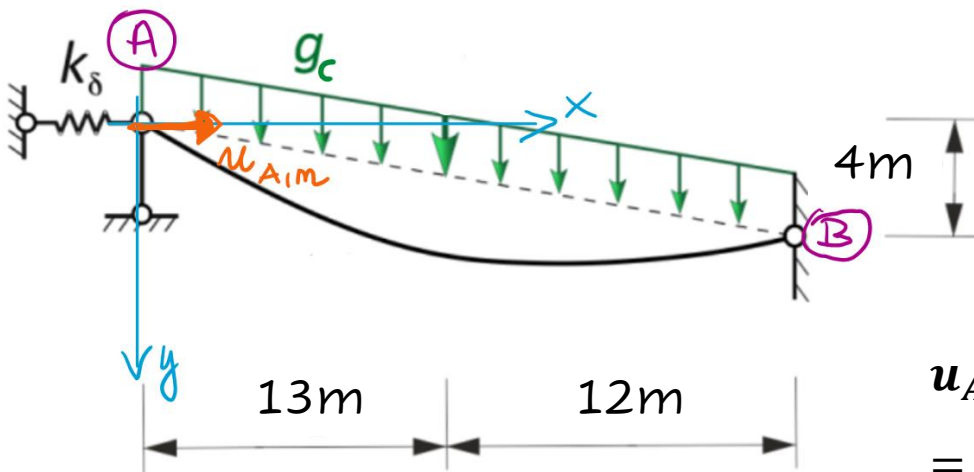
2. Przykład obliczeniowy

1. FAZA MONTAŻU - równanie sześciennne

Równanie cięga

$$\beta = \arctan(L_3/(L_1 + L_2)) = \arctan(0,16) = 9,09^\circ$$

$$S_m^3 + S_m^2 EA_c \left[1 - \frac{L_{c,m}}{s_0} \right] = \frac{EA_c \cos \beta}{2s_0} \int_0^L Q_b^2(x) dx,$$



Przemieszczenie poziome w wieży sprężystej

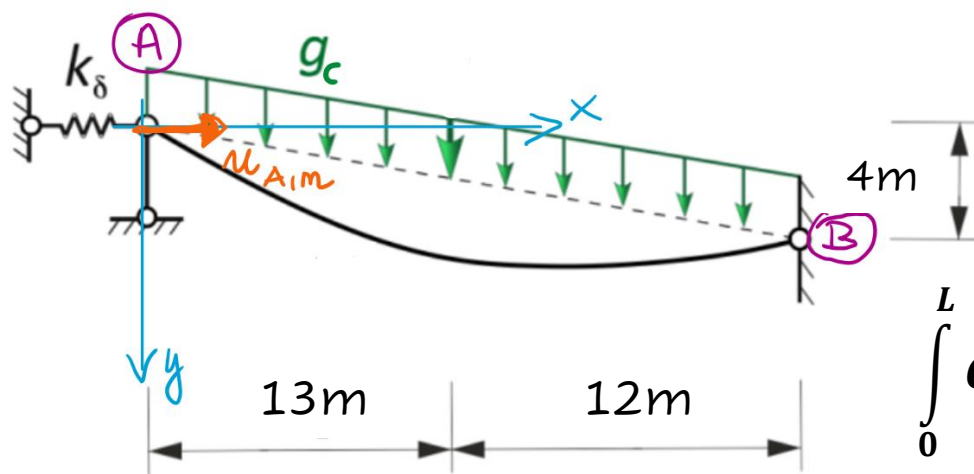
$$u_{A,m} = \frac{H_m}{k_s} = \frac{S_m \cos \beta}{k_s} = \frac{100 \text{ kN} \cdot \cos 9,09^\circ}{5235 \text{ kN/m}} = 0,018862 \text{ m}$$

Długość cięgi cięga w fazie montażu

$$L_{c,m} = \sqrt{(L - u_{a,m})^2 + L_3^2} = \sqrt{(25\text{m} - 0,018862\text{m})^2 + 4\text{m}^2} = 25,29935 \text{ m}$$

2. Przykład obliczeniowy

1. FAZA MONTAŻU - równanie sześciennne



Ze wzoru Simpsona mamy:

$$\int_0^L Q_b^2(x) dx = \frac{q_{c,\perp}^2 L^3}{12} = \frac{(q_c / \cos \beta)^2 (L_1 + L_2)^3}{12}$$

$$= \frac{\left(0,061 \frac{\text{kN}}{\text{m}} / \cos 9,09^\circ\right)^2 (25\text{m})^3}{12}$$

$$= 4,969085 \text{ kN}^2 \text{ m}$$

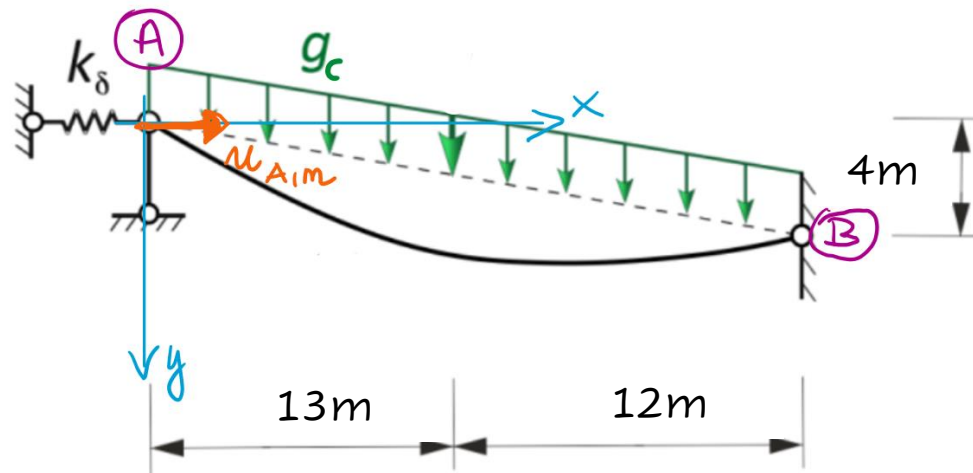
Po podstawieniu wartości liczbowych, otrzymujemy równanie:

$$(100\text{kN})^3 + (100\text{kN})^2 \cdot 123040\text{kN} \cdot \left[1 - \frac{25,29935\text{m}}{s_0}\right]$$

$$= \frac{123\,040\text{kN} \cos 9,09^\circ}{2s_0} \cdot 4,969085 \Big) \text{ kN}^2 \text{ m},$$

2. Przykład obliczeniowy

1. FAZA MONTAŻU - równanie sześciennne



Długość cięgna w stanie nieobciążonym:

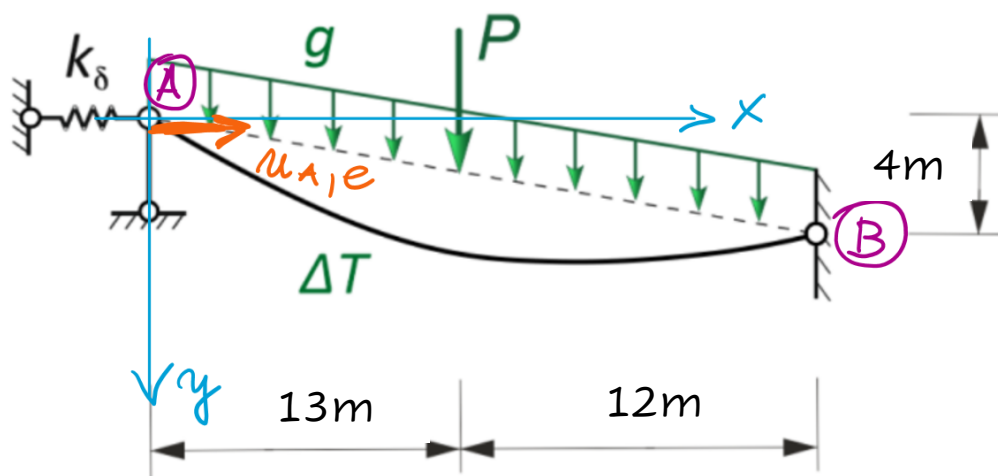
$$s_0 = 25,27905253 \text{ m.}$$

Wydłużenie sprężyste cięgna:

$$\Delta s_{s,m} \approx \frac{S_m s_0}{EA_c} = \frac{100 \text{ kN} \cdot 25,27905253 \text{ m}}{123040 \text{ kN}} = 0,020545 \text{ m}$$

2. Przykład obliczeniowy

2. FAZA EKSPLOATACJI – podejście iteracyjne



Modyfikacja długości początkowej s_0 z uwagi na działanie temperatury:

$$\begin{aligned}
 s_{o,t} &= s_0(1 + \alpha_t \Delta T) \\
 &= 25,27905253m \\
 &\cdot \left[1 + 1,2 \cdot \frac{10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot (-22^{\circ}\text{C}) \right] \\
 &= 25,27238m
 \end{aligned}$$

Ponieważ

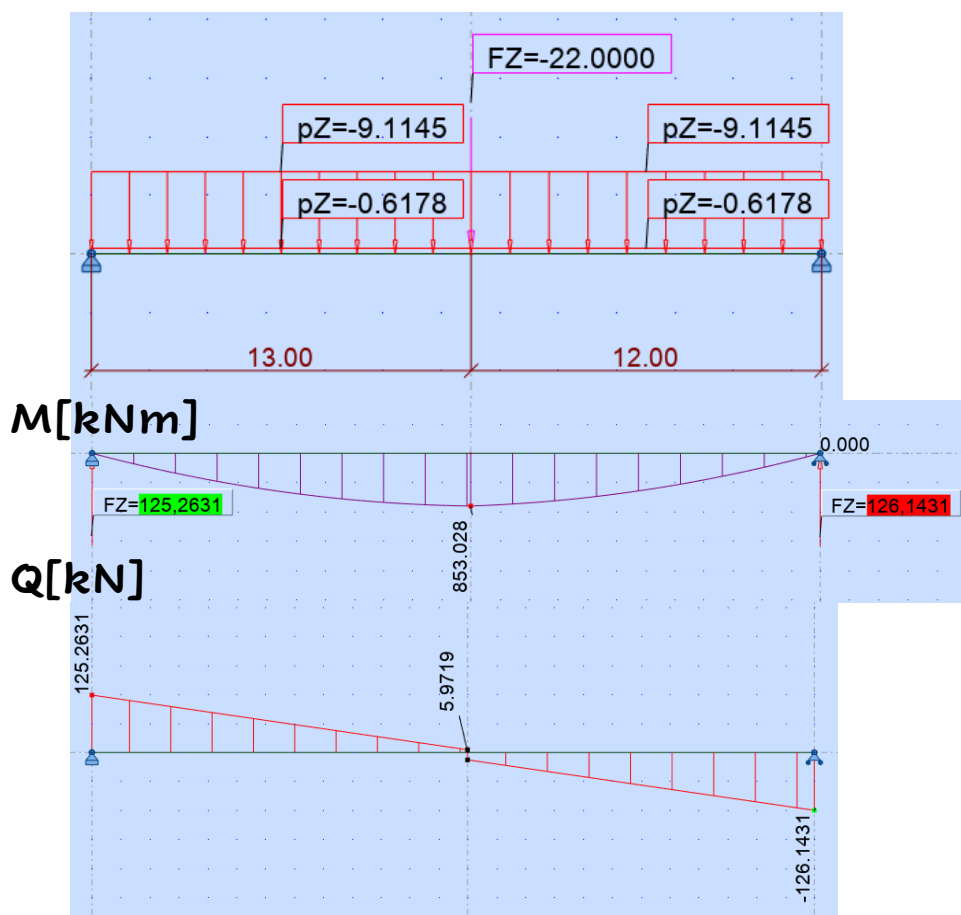
$$s_{o,t} - \frac{L}{\cos \beta} = -0,046 < 0$$

Więc długość cięga w pierwszej iteracji należy zwiększyć tak, aby procedura mogła wystartować.

2. Przykład obliczeniowy

2. FAZA EKSPLOATACJI – podejście iteracyjne

Belka zastępcza



Reakcja pionowa w węźle A:

$$V_{A,b} = P \frac{L_1}{L} + 0,5q_{c,\perp}L + 0,5g_{\perp}L_1$$

$$V_{A,b} = 22 \text{ kN} \cdot \frac{12 \text{ m}}{25 \text{ m}} + 0,5 \cdot \left(0,061 \frac{\text{kN}}{\text{m}} + 9 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right) / \cos 9,09^\circ \cdot 25 \text{ m}$$

$$V_{A,b} = 125,2631 \text{ kN}$$

2. Przykład obliczeniowy

Siła tnąca:

- przedział 1: $x \in [0; L_2]$

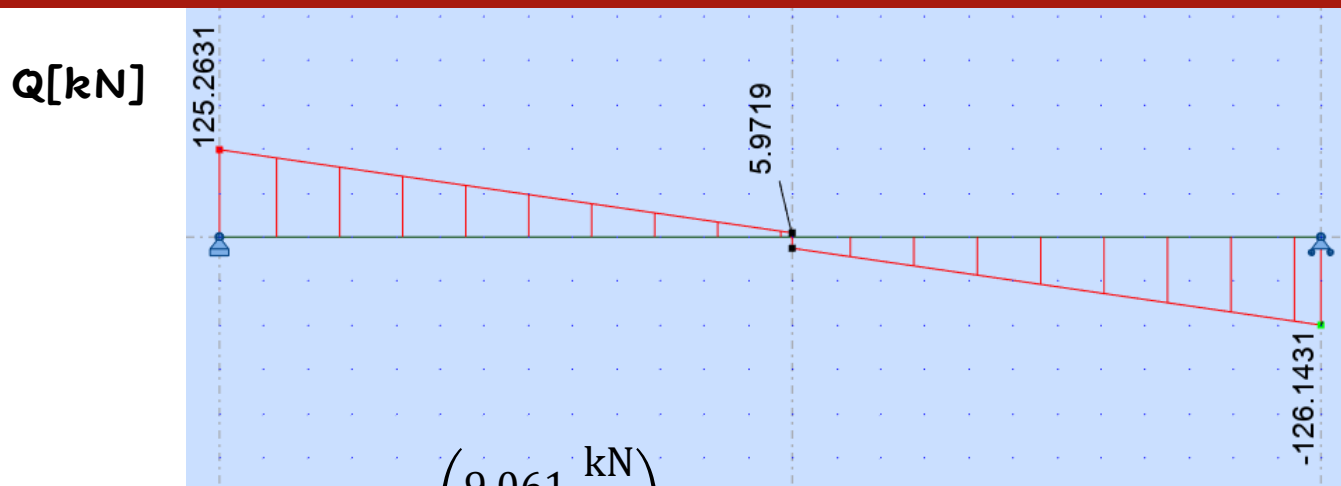
$$Q_{b,1}(x) = V_{A,b} - (q_{c,\perp} + g_{\perp})x = 125,2631 - \left(\frac{9,061 \frac{\text{kN}}{\text{m}}}{\cos 9,09^\circ} \right) x = 1265,2631 - 9,1762x \text{ [kN]}$$

- przedział 2: $x \in [L_2; L]$

$$Q_{b,2}(x) = V_{A,b} - P - (q_{c,\perp} + g_{\perp})x = 103,2631 - 9,1762x \text{ [kN]}$$

Całka z kwadratu siły tnącej

$$\begin{aligned} \int_0^L Q_b^2(x) dx &= \int_0^{L_1} Q_{b,1}^2(x) dx + \int_{L_1}^L Q_{b,2}^2(x) dx = \frac{13}{6} [125,2631 + 4 \cdot 65,6175^2 + 5,9719^2] + \\ &+ \frac{12}{6} [(-16,0281)^2 + 4 \cdot (-71,0856)^2 + (-126,1431)^2] = 144153,05 \text{ kN}^2 \text{m} \end{aligned}$$



2. Przykład obliczeniowy

Procedura iteracyjna

$$u_{A,i} = \frac{H_i}{k_s}, \quad H_i = \sqrt{\frac{\cos^3 \beta_i \int_0^L Q_b^2(x) dx}{2 \left(s_i - \frac{L_i}{\cos \beta_i} \right)}}, \quad \Delta s_{i+1} = \frac{H_i}{EA_c} \left(\frac{L_i}{\cos^2 \beta_i} + \frac{1}{H_i^2} \int_0^L Q_b^2(x) dx \right)$$

$$1^0 \quad s_1 = s_0(1 + \alpha_T \cdot \Delta T) + 4\Delta s_{s,m} = 25,31347\text{m}$$

$$L_{e,1} = L - u_{A,m} = 24,98114\text{m}$$

$$h_{e,1} = h_2 = 4\text{m}$$

$$\beta_1 = \arctan(h_{e,1}/L_{e,1}) = 9,097^\circ$$

$$H_1 = 2217,068\text{kN}$$

$$\Delta_{H,1} = |H_1 - H_m| = 2118,324$$

$$u_{A,2} = 0,4235087\text{m}$$

$$\Delta s_{s,2} = 0,46220658\text{m}$$

$$2^0 \quad s_2 = s_0(1 + \alpha_T \cdot \Delta T) + \Delta s_{s,2} = 25,734585\text{m}$$

$$L_{e,2} = L - u_{A,2} = 24,5764913\text{m}$$

$$h_{e,2} = h_2 = 4\text{m}$$

$$\beta_2 = \arctan(h_{e,2}/L_{e,2}) = 9,2442^\circ$$

$$H_2 = 288,147\text{kN}$$

$$\Delta_{H,2} = |H_2 - H_1| = 1928,921\text{kN}$$

$$u_{A,3} = -0,055042364\text{m}$$

$$\Delta s_{s,3} = 0,06314617\text{m}$$



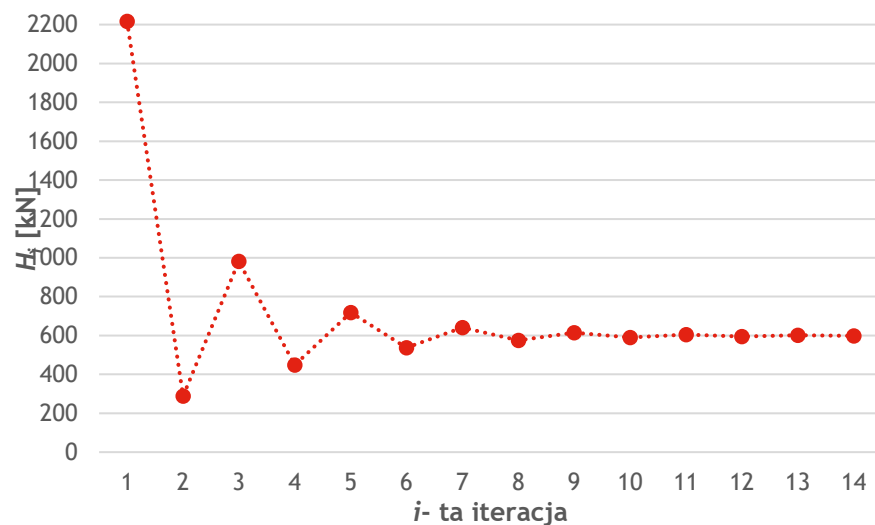
2. Przykład obliczeniowy

Procedura iteracyjna

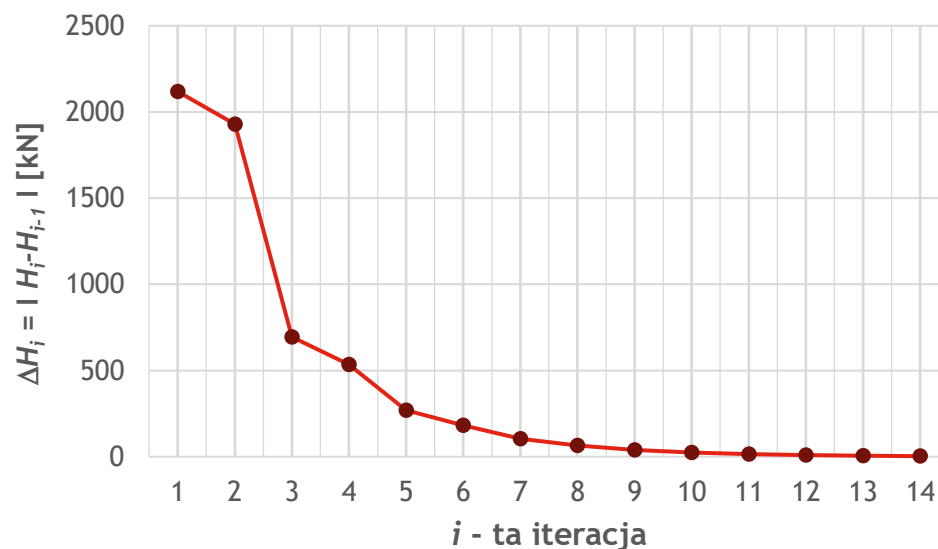
	s_i	$L_{e,i}$	$h_{e,i}$	β		H_i	ΔH_i	u_{i+1}	Δs_{i+1}	$\Delta H_i/H_i$
	[m]	[m]	[m]	[rad]	[°]	[kN]	[kN]	[m]	[m]	[-]
1	25,31346965	24,98113771	4	0,15877	9,09703	2217,068092	2118,324029	0,423508709	0,462206583	95,55%
2	25,73458544	24,57649129	4	0,16134	9,24424	288,1467767	1928,921315	0,055042364	0,063146172	669,42%
3	25,33552503	24,94495764	4	0,15900	9,11000	982,3646092	694,2178325	0,18765322	0,205476959	70,67%
4	25,47785582	24,81234678	4	0,15983	9,15787	448,2617494	534,1028598	0,085627841	0,095359765	119,15%
5	25,36773863	24,91437216	4	0,15919	9,12099	718,71034	270,4485906	0,137289463	0,150913071	37,63%
6	25,42329193	24,86271054	4	0,15952	9,13963	536,6387683	182,0715716	0,102509793	0,113428656	33,93%
7	25,38580752	24,89749021	4	0,15930	9,12708	640,6086368	103,9698685	0,122370322	0,134803722	16,23%
8	25,40718258	24,87762968	4	0,15942	9,13424	574,7007362	65,90790062	0,109780465	0,121242208	11,47%
9	25,39362107	24,89021953	4	0,15934	9,12970	613,9551082	39,25437199	0,117278913	0,129315149	6,39%
10	25,40169401	24,88272109	4	0,15939	9,13240	589,6556032	24,29950497	0,112637173	0,124316191	4,12%
11	25,39669505	24,88736283	4	0,15936	9,13073	604,350498	14,6948948	0,115444221	0,127338675	2,43%
12	25,39971754	24,88455578	4	0,15938	9,13174	595,3357181	9,014779851	0,1137222	0,125484271	1,51%
13	25,39786313	24,8862778	4	0,15937	9,13112	600,8179921	5,482273973	0,114769435	0,126611932	0,91%
14	25,39899079	24,88523057	4	0,15937	9,13150	597,4661846	3,351807485	0,114129166	0,125922461	0,56%

2. Przykład obliczeniowy

PRZEBIEG ZMIAN SKŁADOWEJ POZIOMEJ
SIŁY OSIOWEJ W CIĘGNI



WARTOŚCI BŁĘDU ΔH_i W KOLEJNYCH
ITERACJACH



Odpowiedź statyczna ustroju

Ostatecznie przyjęto wyniki uzyskane w iteracji nr 13, w której błąd względny składowej poziomej siły osiowej w cięgnie

$$\varepsilon_{H_{13}} = \frac{\Delta_{H,13}}{H_{13}} \cdot 100\% = 0,91\% < 1\%.$$

2. Przykład obliczeniowy

Zatem: $H_e = H_{13} \cong 600,818 \text{ kN}$

Maksymalna siła osiowa w ciągu:

$$N_{\max, e} = \sqrt{H_e^2 + (V_{A,b} + H_e \tan \beta_{13})^2} \cong 640,4625 \text{ kN}$$

Nośność obliczeniowa liny Pfeifer PG125: $721 \text{ kN} > 640,4625 \text{ kN}$

$$\text{Siła naciągu } S = \frac{H_{13}}{\cos \beta_{13}} = \frac{600,818 \text{ kN}}{\cos(9,13112^\circ)} = 608,530 \text{ kN}$$

Przemieszczenia punktów podparcia: $u_{A,e} = u_{A,13} = 11,477 \text{ cm}$.

Maksymalny pionowy zwis ciągu:

$$f_{\max, e} = \frac{M_b(13 \text{ m})}{H_e} = \frac{852,939 \text{ kNm}}{600,818 \text{ kN}} = 1,41963 \text{ m} \cong 14200 \text{ mm}$$

Maksymalny zwis ciągu mierzony prostopadle do cięciwy:

$$f_{\max, e, \perp} = f_{\max, e} \cos \beta_{13} = 1,4016 \text{ m} \leq 2,4886 \text{ m} = 0,1 L_{c, e}$$

$$\frac{f_{\max, e, \perp}}{L_{c, e}} = 0,056 < 0,1$$



2. Przykład obliczeniowy

Zastosowanie równania sześciennego w fazie eksploatacji:

Równanie cięgna

$$S_e^3 + S_e^2 EA_c \left[1 - \frac{1}{s_0} (L_c^\Delta - \alpha_t \Delta T s_0) \right] = \frac{EA_c \cos \beta}{2s_0} \int_0^L Q_b^2(x) dx,$$

Długość cięciwy cięgna w fazie eksploatacji

$$L_{c,e}^\Delta = \sqrt{(L - u_{A,e})^2 + L_3^2} = \sqrt{(25\text{m} - u_{A,e})^2 + 4\text{m}^2}$$

$$EA_c = 123040 \text{ kN}$$

$$u_{A,e} = \frac{H_e}{k_s} = \frac{S_e \cos \beta}{k_s} = \frac{S_e \cdot \cos 9,09^\circ}{5235 \text{ kN/m}}$$

$$s_0 = 25,27905253\text{m}$$

$$\int_0^L Q_b^2(x) dx = 144153,05 \text{ kN}^2\text{m}$$



2. Przykład obliczeniowy

Zastosowanie równania sześciennego w fazie eksploatacji:

Równanie cięgna

$$S_e^3 + S_e^2 EA_c \left[1 - \frac{1}{s_0} (L_{c,e}^\Delta - \alpha_t \Delta T s_0) \right] = \frac{EA_c \cos \beta}{2s_0} \int_0^L Q_b^2(x) dx,$$

$$L_{c,e}^\Delta = \sqrt{\left(25\text{m} - \frac{S_e \cdot \cos 9,09^\circ}{5235 \text{ kN/m}} \right)^2 + 4\text{m}^2}$$

$$s_0 = 25,27905253\text{m} \quad EA_c = 123040 \text{ kN} \quad \int_0^L Q_b^2(x) dx = 144153,05\text{kN}^2\text{m}$$

$$S_e^3 + S_e^2 \cdot 123040\text{kN} \cdot \left[1 - \frac{1}{25,27905253\text{m}} \left(\sqrt{\left(25\text{m} - \frac{S_e \cdot \cos 9,09^\circ}{5235 \text{ kN/m}} \right)^2 + 4\text{m}^2} - 1,2 \cdot \frac{10^{-5}}{^\circ\text{C}} \cdot (-22^\circ\text{C}) \cdot 25,27905253 \right) \right] = \frac{123\,040\text{kN} \cos 9,09^\circ}{2 \cdot 25,27905253\text{m}} \cdot 144153,05\text{kN}^2\text{m}$$

$$\rightarrow S_e = 607,977\text{kN} \rightarrow H_e = 600,342\text{kN}$$

różnica wynosi 0,476kN



Podsumowanie

Cięgno analizujemy dwuetapowo:

1. Faza montażu, gdzie:

- Jako obciążenie analizuje się jedynie ciężar własny cięgna
- Wyznacza się z równania sześciennego opisującego równowagę statyczną cięgna w sposób bezpośredni (analitycznie) lub iteracyjnie
 - długość początkową nieobciążonego cięgna s_0
 - lub montażową siłę naciągu S_m , która determinuje długość cięgna s_0

2. Faza eksploatacji, gdzie:

- Do obliczeń uwzględnia się ciężar własny i zadane obciążenie czynne (obciążenie mechaniczne i niemechaniczne)
- Wyznacza się z równania sześciennego opisującego równowagę statyczną cięgna w sposób bezpośredni lub iteracyjnie:
 - Siłę osiową w cięgni N
 - siłę naciągu cięgna S
 - wydłużenie sprężyste cięgna Δs
 - długość cięgna obciążonego s
 - zwis cięgna f
 - reakcje podporowe w ustroju cięgnowym R