



Politechnika Wrocławska

MECHANIKA BUDOWLI

WYKŁAD 1 PRZESTRZENNE UKŁADY PRĘTOWE

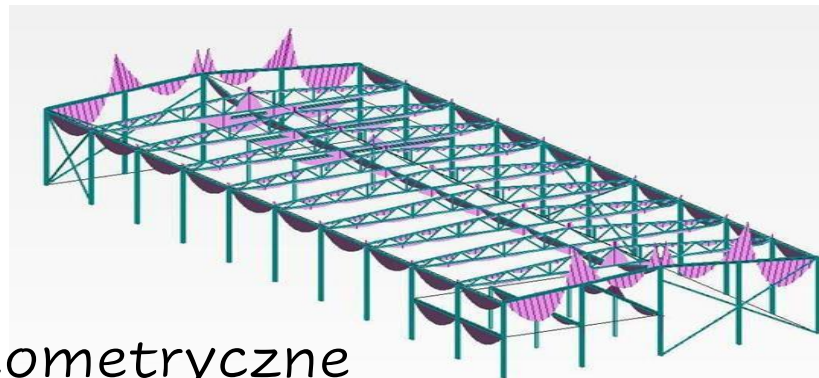
Prowadzący: dr inż. Olga Szytko-Bigus

1. Układy przestrzenne – podstawowe informacje

Charakterystyki modelu przestrzennego jako modelu statycznego konstrukcji budowlanych:

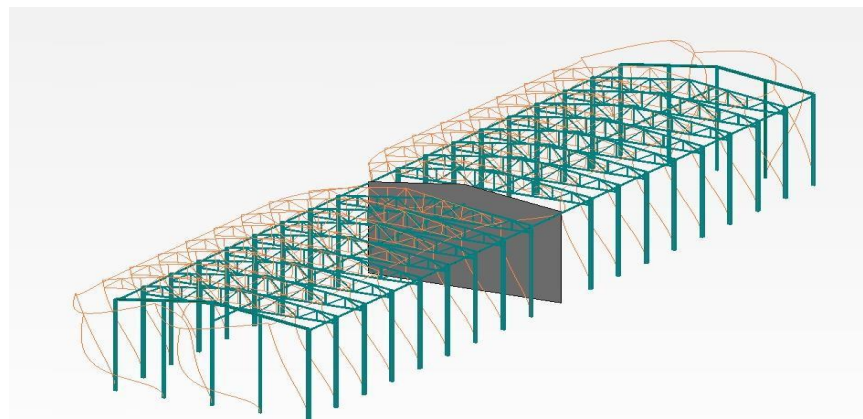
Uwzględnione składowe modelu:

- parametry materiałowe,
- przestrzenne charakterystyki geometryczne
- wszystkie występujące obciążenia, etc.



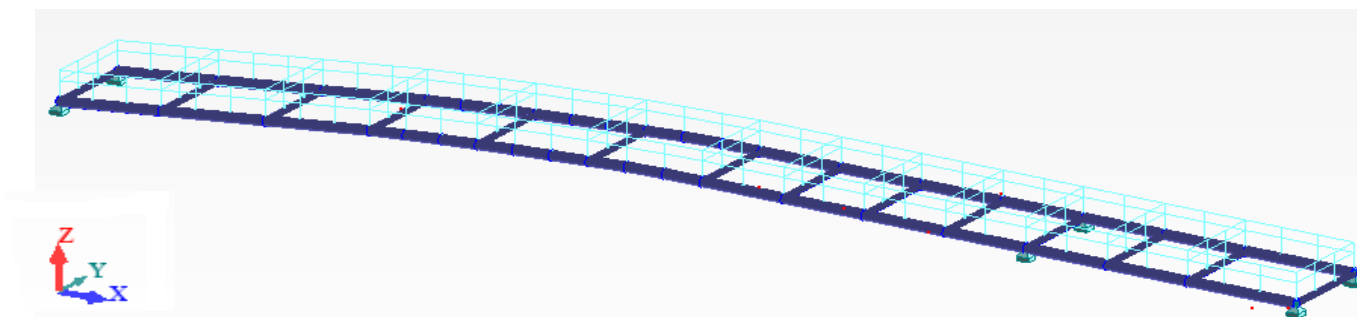
Rezultaty uzyskane w wyniku analizy modelu przestrzennego wykazują:

- pełen komplet wielkości statycznych tj. sił przekrojowych
- przemieszczeń etc.

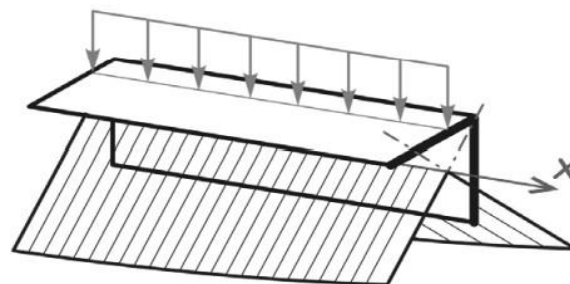


1. Układy przestrzenne – podstawowe informacje

- Konstrukcja płaska na płaszczyźnie (x, y) , na którą działają siły prostopadłe do tej płaszczyzny zgodnie z trzecim wymiarem (z) jest również układem przestrzennym

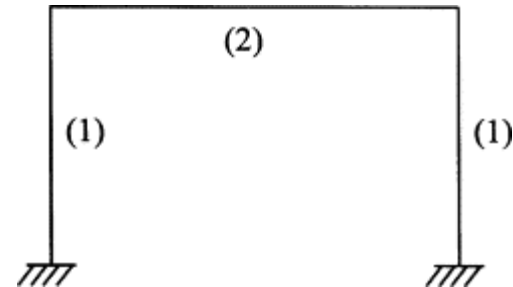
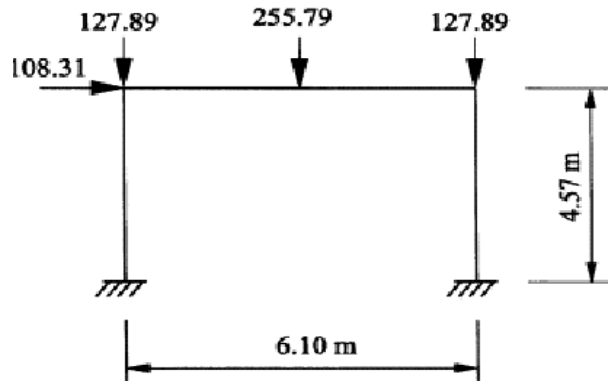


- Gdy profil elementu usytuowany jest tak, że obciążenie nie działa wzdłuż jednej z głównych centralnych osi bezwładności przekroju, tj. osi względem których momenty bezwładności osiągają ekstremalne wartości a moment dewiacji jest równy zero (def. osi głównych)

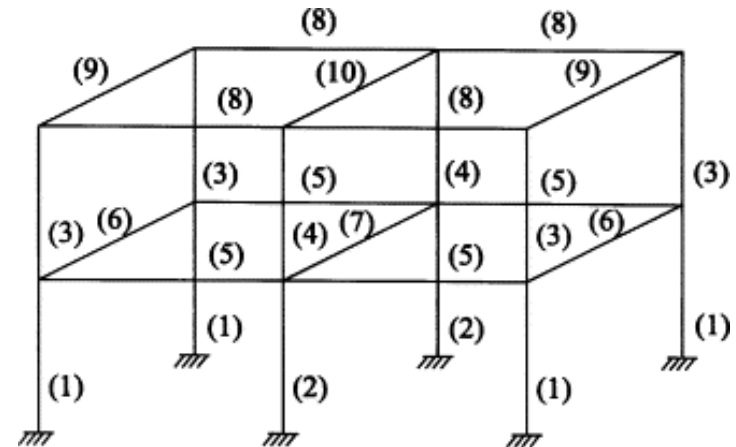
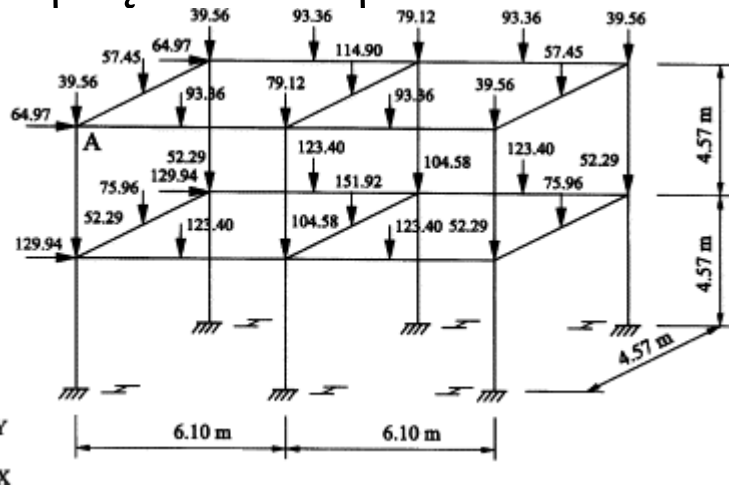


1. Układy przestrzenne – podstawowe informacje

- Płaski model statyczny konstrukcji zazwyczaj jest przyjmowany jako model uproszczony konstrukcji.



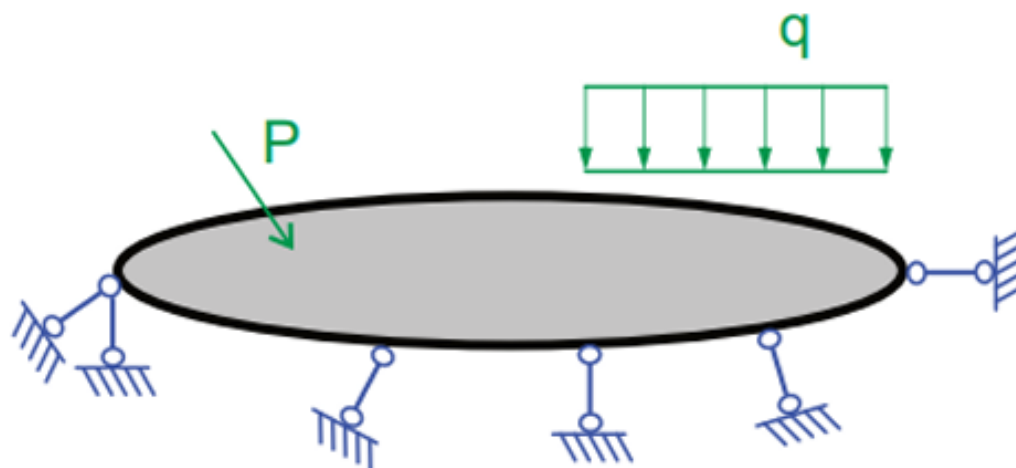
- Przestrzenny model konstrukcji uwzględnia rzeczywisty charakter pracy każdej konstrukcji – przestrzenny stan naprężenia i przemieszczenia,



2. Statyczna wyznaczalność

Obliczenie stopienia statycznej niewyznaczalności układu n_h

Układ rzeczywisty GN i SN



Układy przestrzenne

$$n_h = e - 6t$$

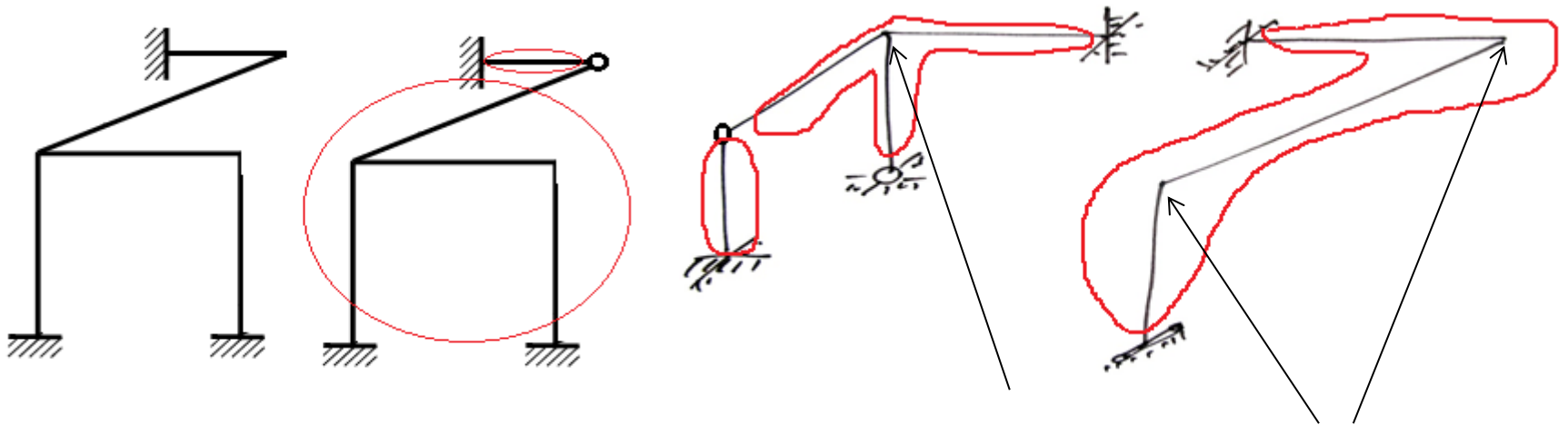
Układy płaskie

$$n_h = e - 3t$$

Konieczność przeprowadzenia pełnej analizy kinematycznej!

2. Statyczna wyznaczalność

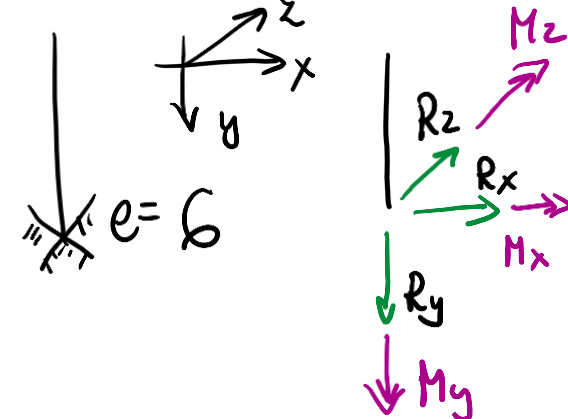
W przypadku ustrojów prętowych przez tarczę należy rozumieć pręt lub zbiór prętów połączonych węzłami sztywnymi i tworzącymi graf otwarty.



➤ Podpory i połączenia należy traktować przestrzennie

➤ Sztywne połączenia dwóch prętów lub pręta z fundamentem jest równoznaczne z zastosowaniem 6 więzi elementarnych ($e=6$) i odebraniem 6 stopni swobody

POŁĄCZENIE SZTYWNE



2. Statyczna wyznaczalność

Ilościowy warunek geometrycznej niezmienności (GN) i statycznej wyznaczalności (SW) układu prętowego w przestrzeni ma postać

$$e = 6t$$

gdzie

e - jest liczbą więzi elementarnych,

t - jest liczbą tarcz otwartych.

Konieczność przeprowadzenia pełnej analizy kinematycznej!

□ Stopień statecznej niewyznaczalności (SSN) układu prętowego określa wzór

$$n_h = e - 6t$$

Gdy:

$n_h = 0$ układ jest SW.

$n_h > 0$ układ jest SN.



3. Podpory i połączenia między prętami

➤ Liczba typów podpór w płaskich układach prętowych:

$$n_p^{2D} = \sum_{k=1}^{n=3} \binom{n}{k} = \frac{3!}{1!(3-1)!} + \frac{3!}{2!(3-2)!} + \frac{3!}{3!(3-3)!} = 7$$

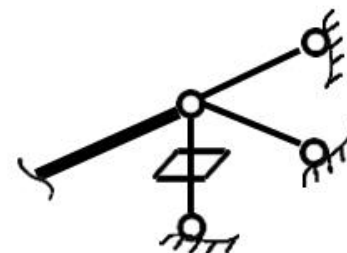
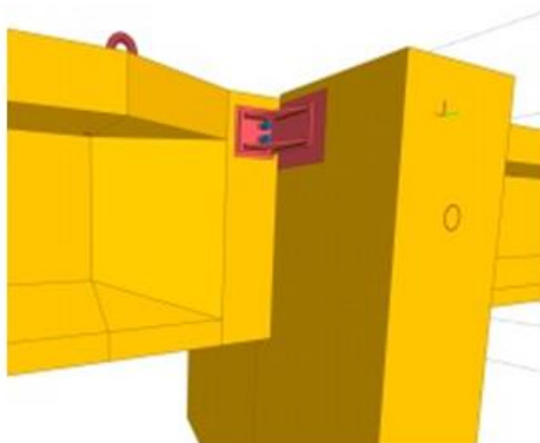
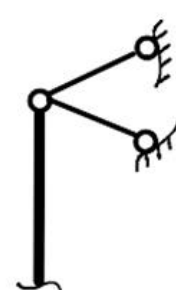
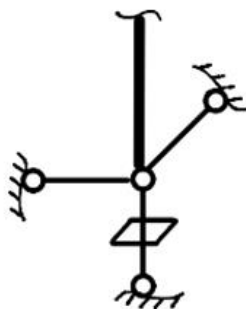
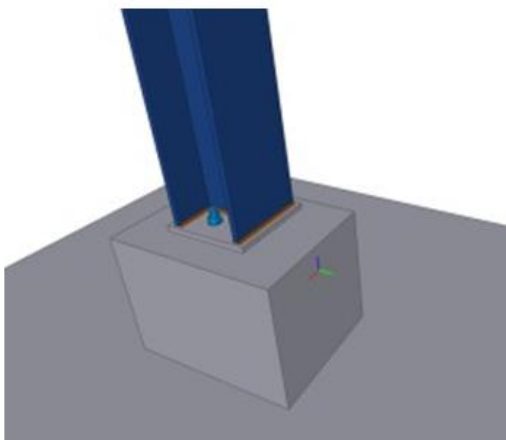
➤ Liczba typów podpór w układach przestrzennych:

$$n_p^{3D} = \sum_{k=1}^{n=6} \binom{n}{k} = \frac{6!}{1!(6-1)!} + \frac{6!}{2!(6-2)!} + \dots + \frac{6!}{6!(6-6)!} = 63$$

(kombinacje bez powtórzeń, symbol Newtona)

Jeśli uwzględnimy możliwość występowania więzi sprężystych, to liczba możliwych do skonstruowania podpór w układzie przestrzennym wyniesie aż **2509**.

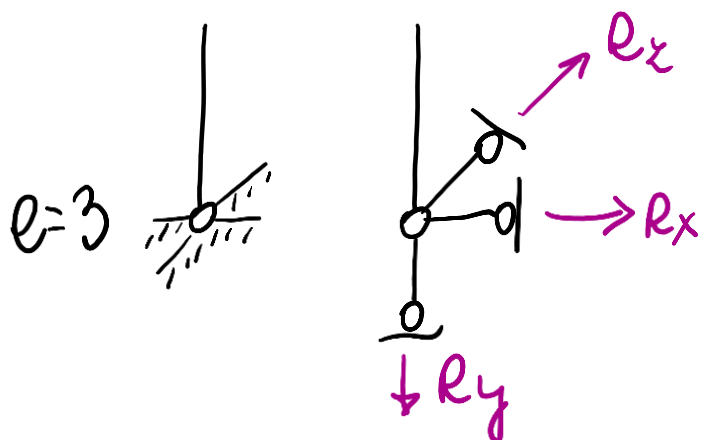
3. Podpory i połączenia między prętami



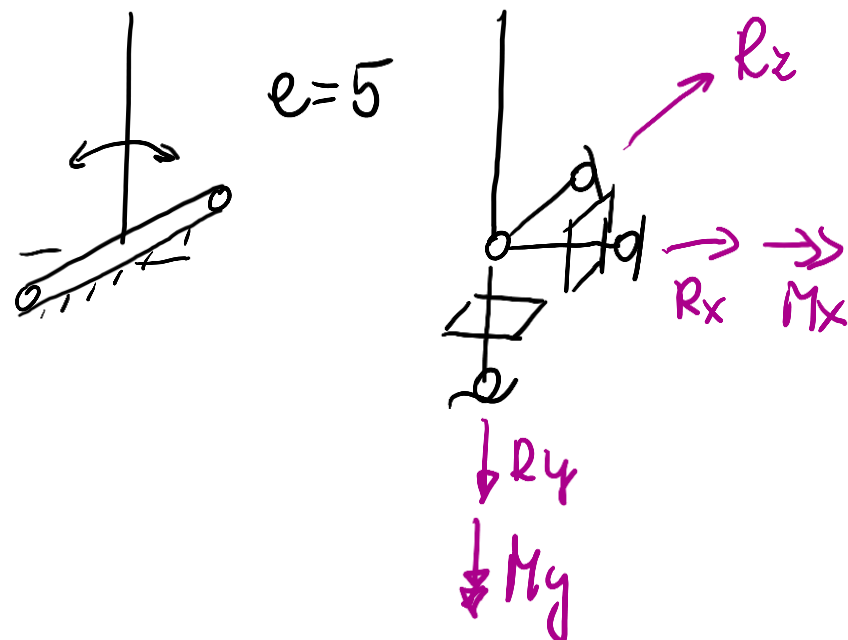


3. Podpory i połączenia między prętami

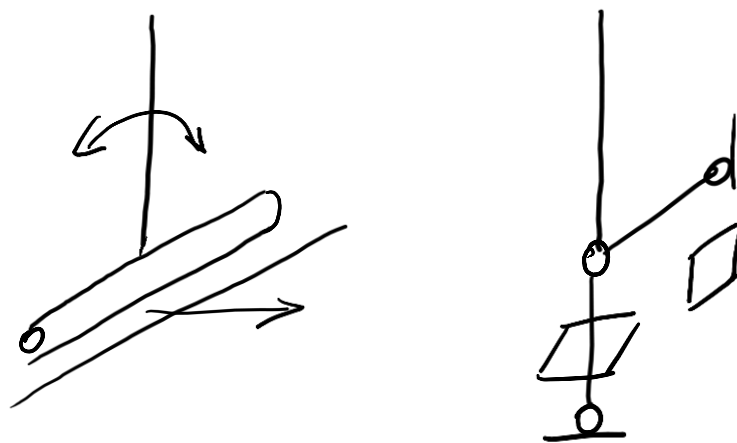
Przegub kołowy
(kulisty)



Przegub wałkowy

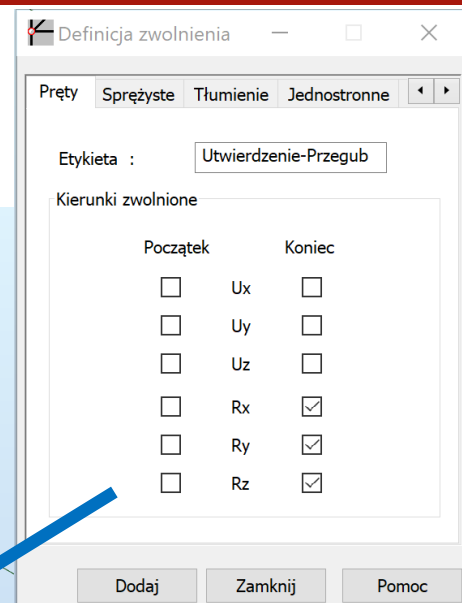
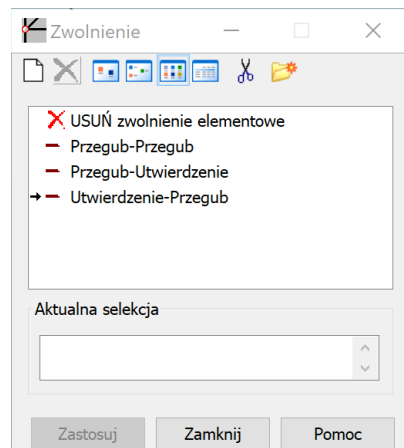
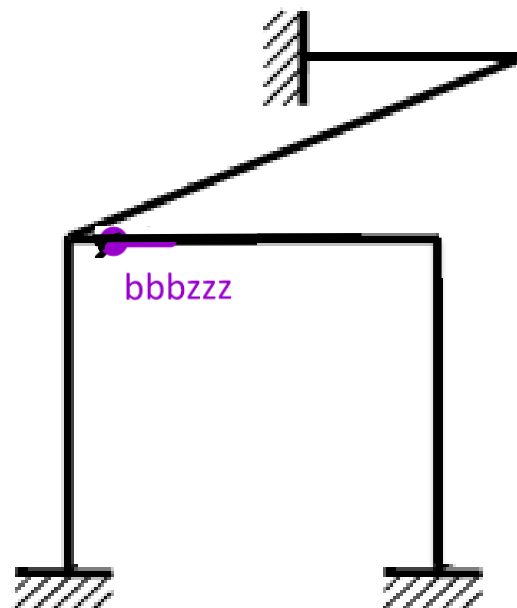


Przegub kulisty przesuwny

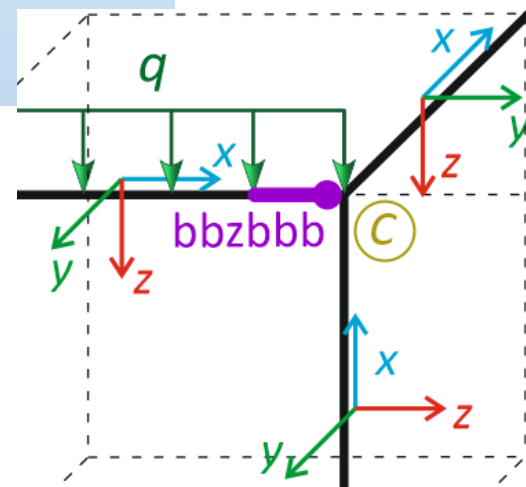
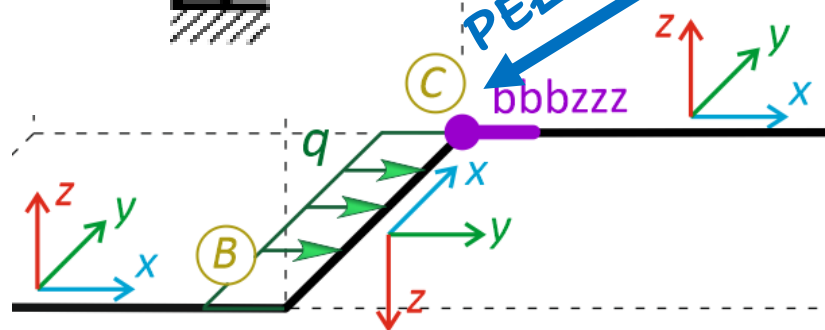


3. Podpory i połączenia między prętami

Ciągłość pręta zapewnia układ 6 więzi elementarnych odpowiedzialnych za przeniesienie kompletu sił wewnętrznych.

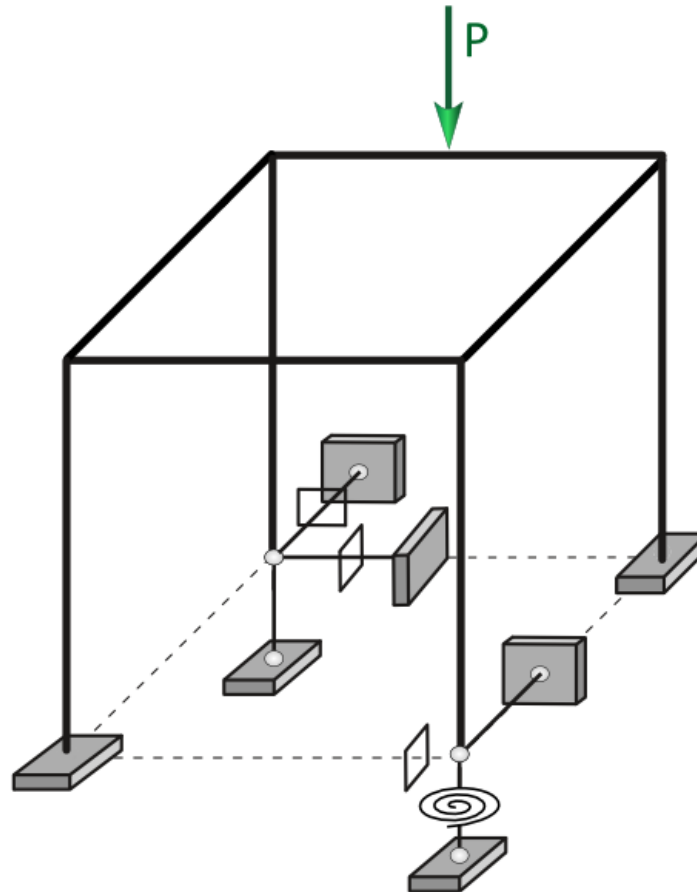


PEŁNY PRZEGUB



3. Podpory i połączenia między prętami

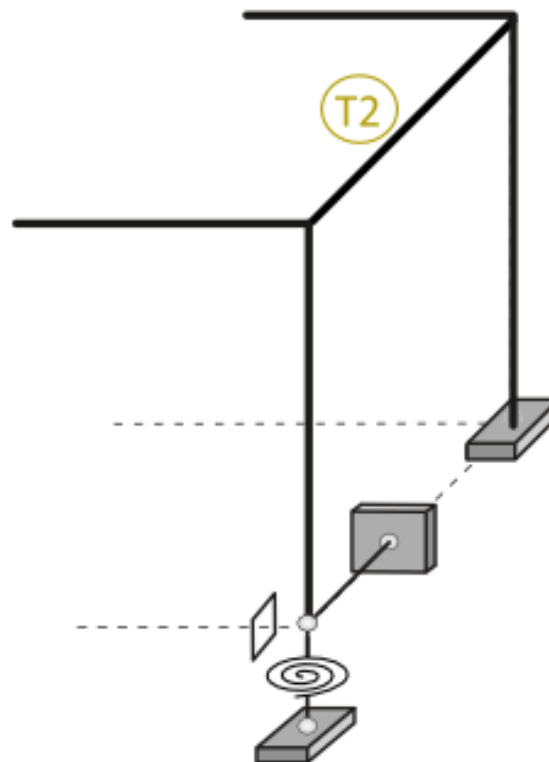
P1: Określ stopień statycznej niewyznaczalności ramy przestrzennej



$$n_h = e - 6t$$

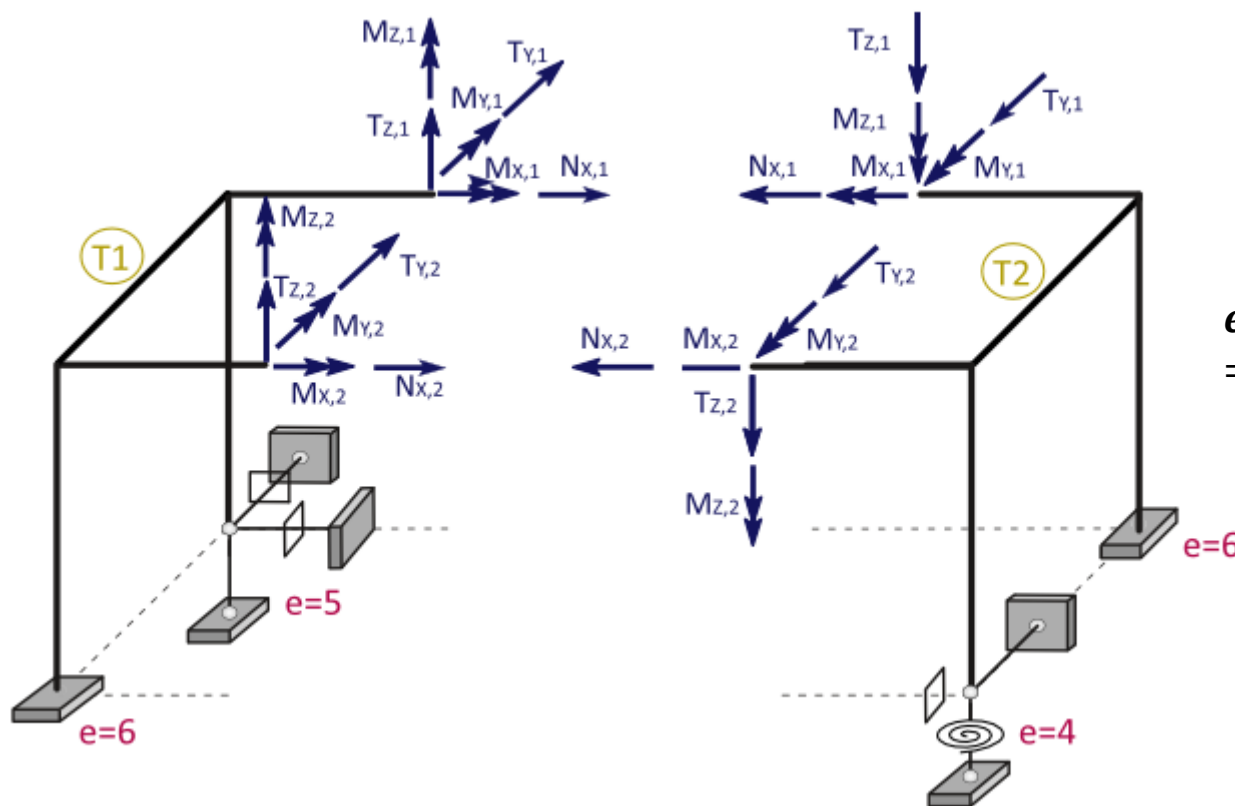


3.Podpory i połączenia między prętami





3. Podpory i połączenia między prętami



$$n_h = e - 6t$$

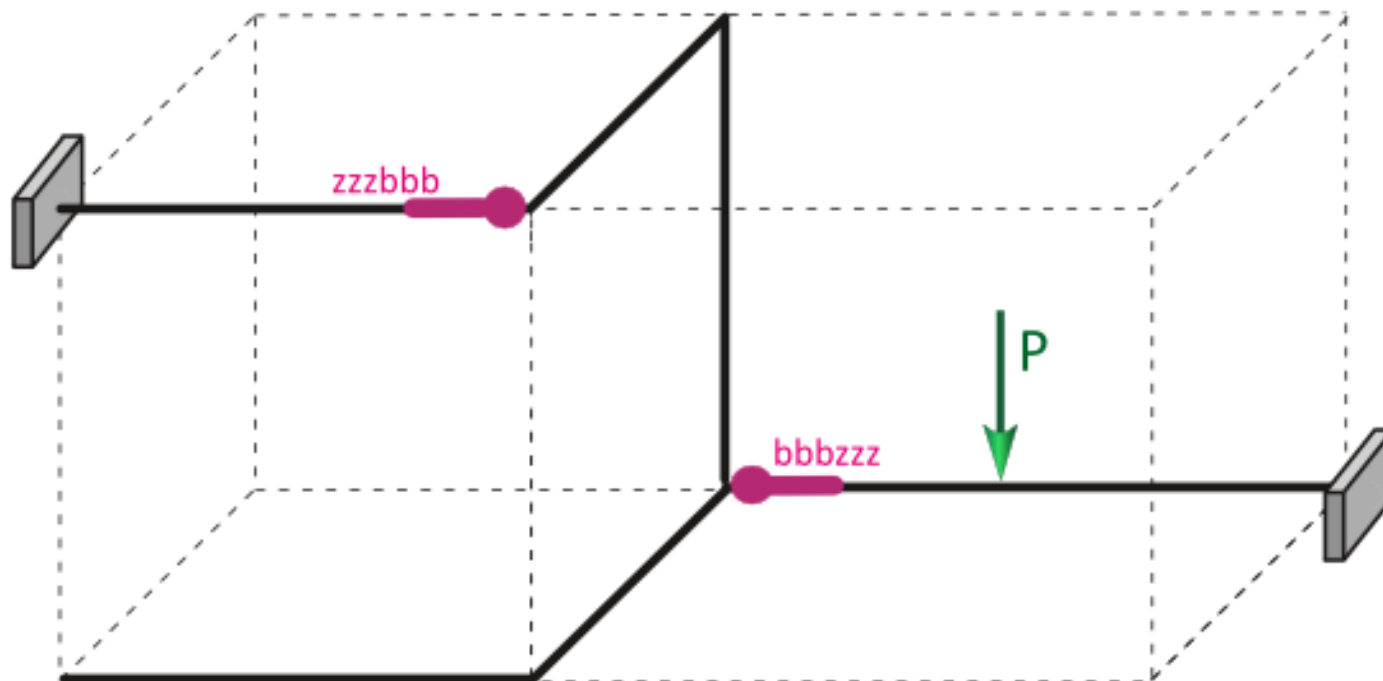
$$e = 6 + 5 + 6 + 4 + 6 + 6 = 33$$

$$t = 2$$

$$n_h = 33 - 6 \times 2 = 21$$

Ramy przestrzenne - przykład

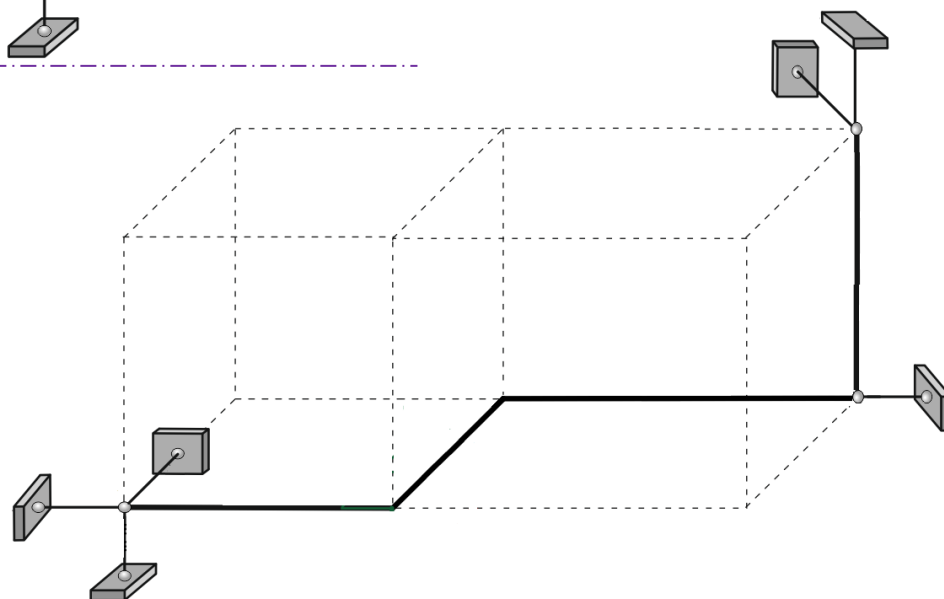
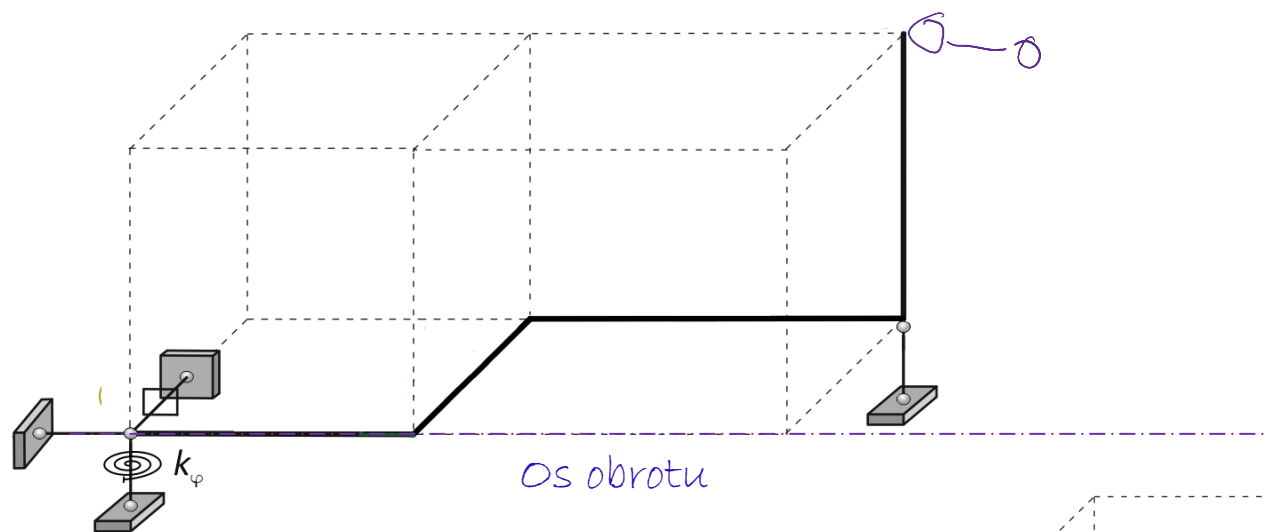
Przykład: Oblicz stopień statycznej niewyznaczalności ramy przestrzennej





4. Geometryczna niezmiennosć ram przestrzennych

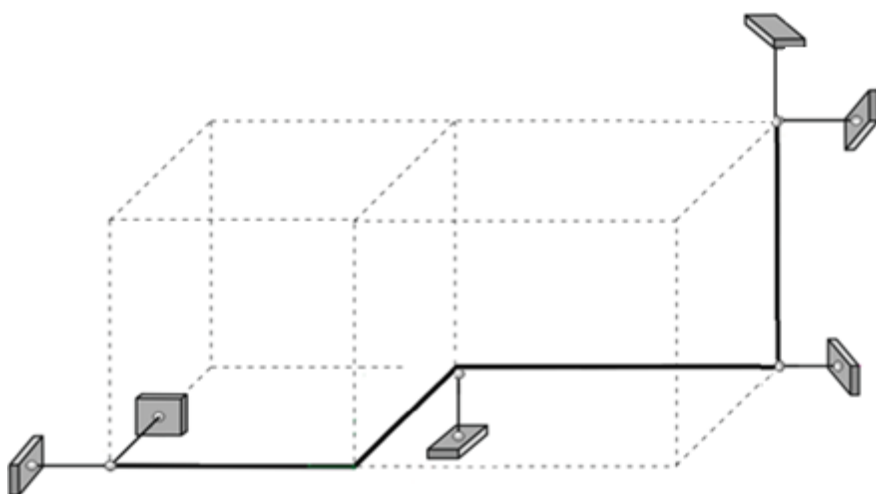
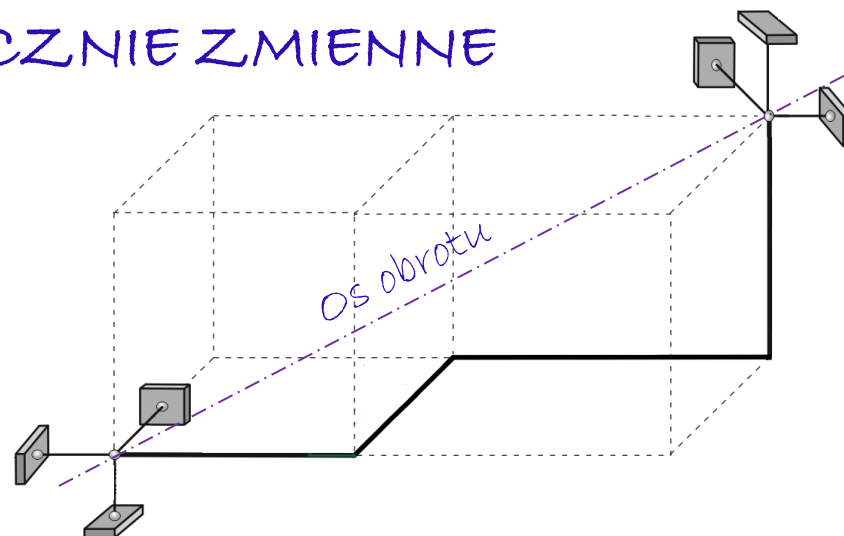
UKŁADY GEOMETRYCZNIE NIEZMIENNE





4. Geometryczna niezmiennosc ram przestrzennych

UKŁADY GEOMETRYCZNIE ZMIENNE



4. Geometryczna niezmiennosć ram przestrzennych

Możemy również zapisać komplet niezależnych równań równowagi statycznej (liczba równań powinna odpowiadać liczbie więzi elementarnych e)

$$Kq = F$$

i sprawdzić czy wyznacznik macierzy współczynników jest różny od zera

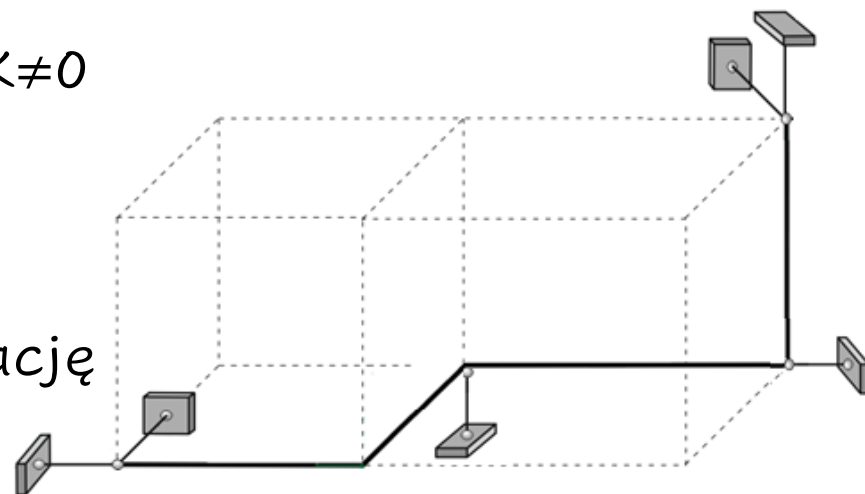
$$\det K \neq 0$$

gdzie:

K - macierz sztywności

q – wektor przemieszczeń

F – wektor zawierający informację o położeniu obciążeń



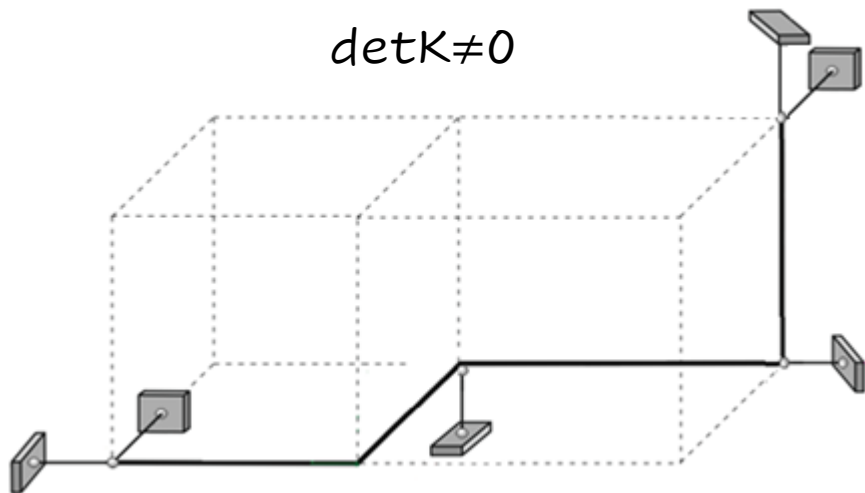
Macierz sztywności $\mathbf{K}$ musi być nieosobliwa i jest to jednocześnie warunek geometrycznej niezmienności konstrukcji!



4. Geometryczna niezmiennność ram przestrzennych

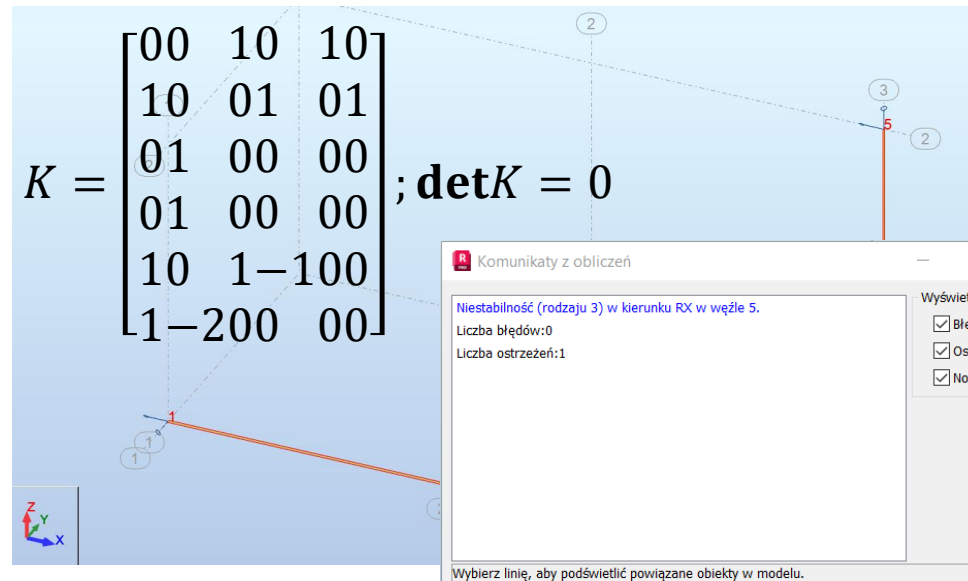
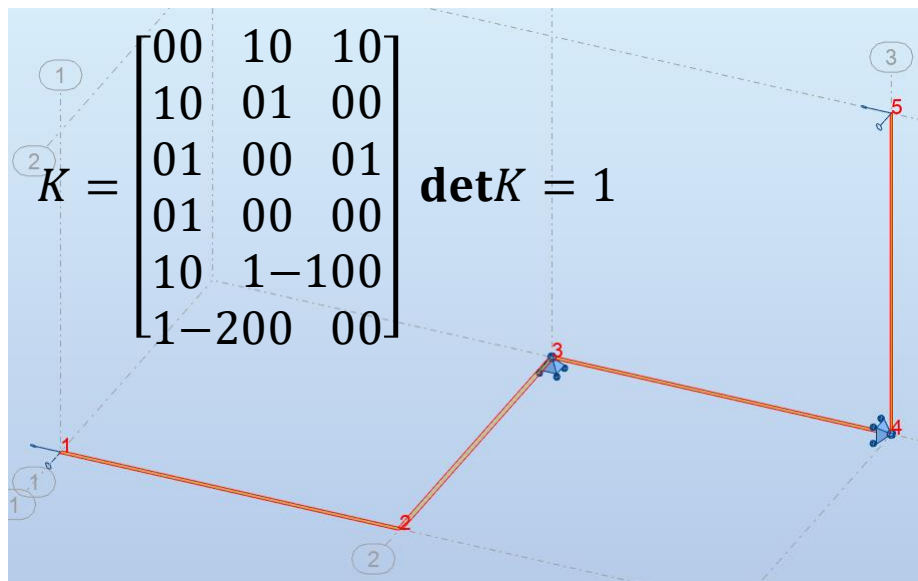
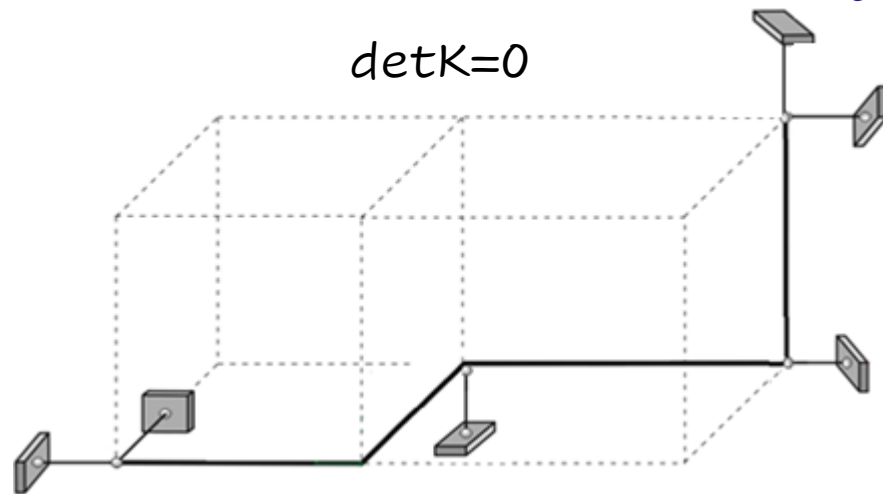
UKŁAD GEOMETRYCZNIE NIEZMIENNY

$\det K \neq 0$



UKŁAD GEOMETRYCZNIE ZMIENNY

$\det K = 0$

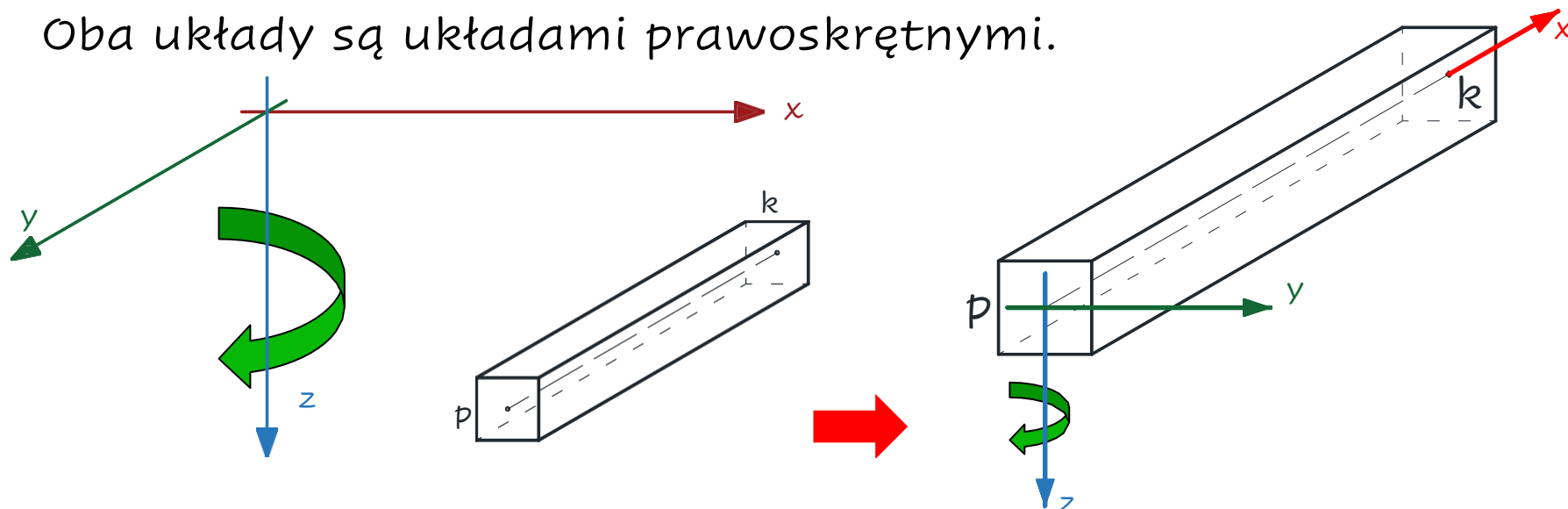


2. Konwencja znakowania sił przekrojowych

Dla konstrukcji przestrzennych przyjmuje się dwa układy współrzędnych:

- **globalny X, Y, Z** dla całej konstrukcji – UG,
- **lokalny x, y, z** dla każdego pręta – UL.

Oba układy są układami prawoskrętnymi.

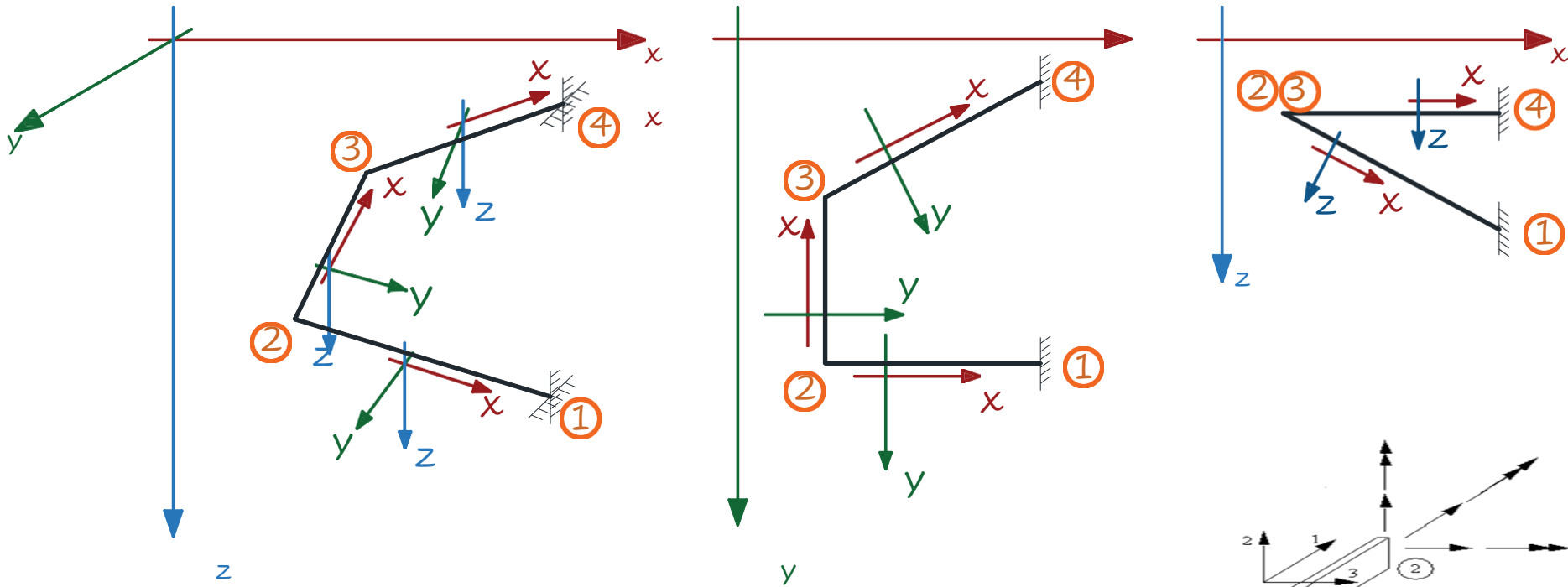


x jest osią styczną do osi pręta ze zwrotem od początku do końca pręta

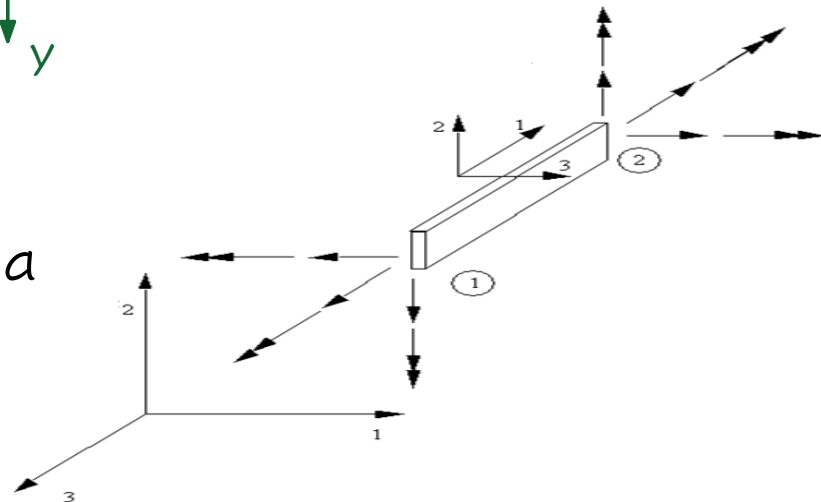
y, z są to osie główne przekroju poprzecznego pręta

2. Konwencja znakowania sił przekrojowych

- Układ globalny UG jest jeden dla całej konstrukcji,
- Układ lokalnych UL jest jeden dla każdego pojedynczego pręta



Przed przystąpieniem do analizy dla każdej konstrukcji należy przyjąć UG i dla każdego pojedynczego pręta UL.



2. Konwencja znakowania sił przekrojowych

- W UG definiujemy zwroty i wielkości zadanych obciążeń oraz odczytujemy zwroty i wielkości reakcji jak i przemieszczeń.
- W UL odczytujemy zwroty i wielkości sił wewnętrznych.

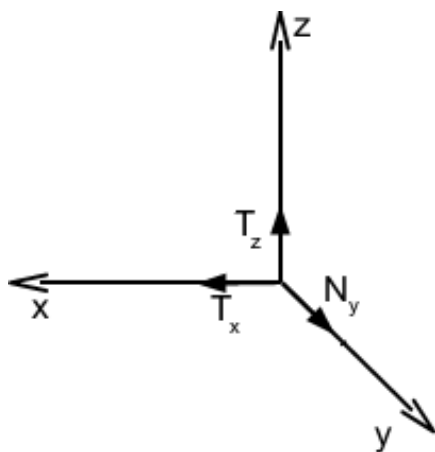
W układach przestrzennych występuje 6! warunków równowagi:

- równowaga sił
na trzech kierunkach X, Y, Z

$$1. \sum X = 0$$

$$2. \sum Y = 0$$

$$3. \sum Z = 0$$

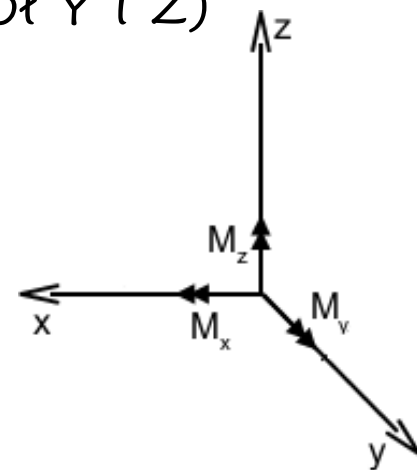


- równowaga momentów na
trzech kierunkach X, Y, Z
(skręcający wokół osi X i
zginający wokół Y i Z)

$$4. \sum M_x = 0$$

$$5. \sum M_y = 0$$

$$6. \sum M_z = 0$$

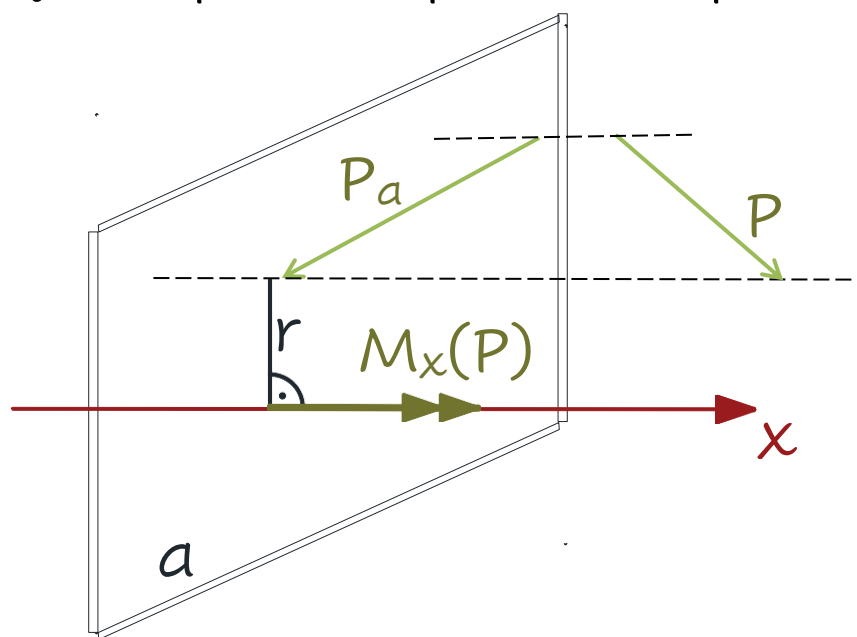


2. Konwencja znakowania sił przekrojowych

DEFINICJA:

Moment statyczny siły względem osi jest rzutem na tą oś wektora momentu tej siły liczonego względem dowolnego punktu tej osi.

Moment statyczny jest momentem rzutu siły P na płaszczyznę prostopadłą do osi x (wektor P_a) liczonym względem punktu przebiecia płaszczyzny tą osią (odległość r).



$$M_x = P_a \cdot r$$

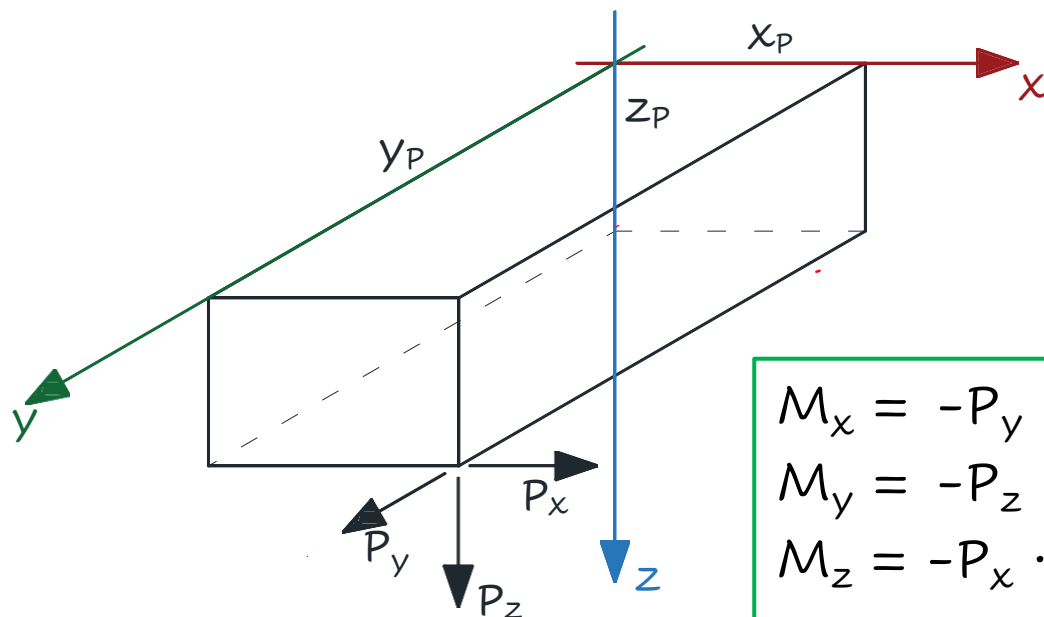
P_a – rzut wektora P na płaszczyznę „a”

2. Konwencja znakowania sił przekrojowych

Przykład:

Wyznaczyć moment siły P (P_x , P_y , P_z) względem osi x , y , z

x_P , y_P , z_P – współrzędne zaczepienia osi



$$\begin{aligned} M_x &= -P_y \cdot z_P + P_z \cdot y_P \\ M_y &= -P_z \cdot x_P + P_x \cdot z_P \\ M_z &= -P_x \cdot y_P + P_y \cdot x_P \end{aligned}$$



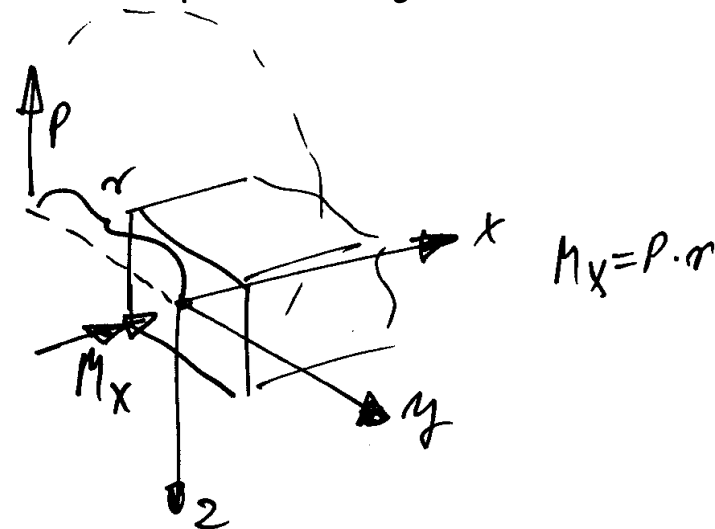
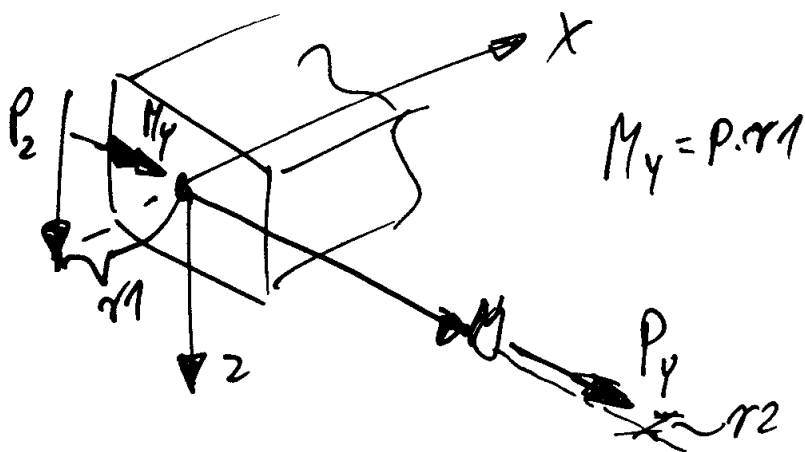
2. Konwencja znakowania sił przekrojowych

Moment skręcający - definicja

$M_x = M_s$ w rozpatrywanym przekroju jest równy sumie momentów statycznych względem osi stycznej do osi pręta x w tym przekroju wszystkich sił działających na część ustroju po jednej stronie przekroju.

Moment zginający - definicja

M_z (M_y) w rozpatrywanym przekroju jest równy sumie momentów statycznych względem osi z (y) wszystkich sił działających na ustrój po jednej stronie przekroju.



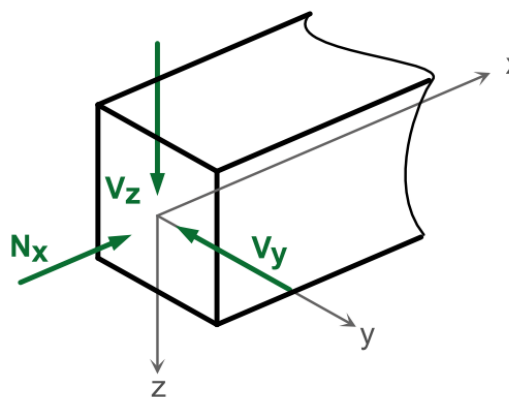
2. Konwencja znakowania sił przekrojowych

Siła osiowa

$N_x = N$ w rozpatrywanym przekroju jest równa sumie rzutów na oś x wszystkich sił działających na układ po jednej stronie przekroju.

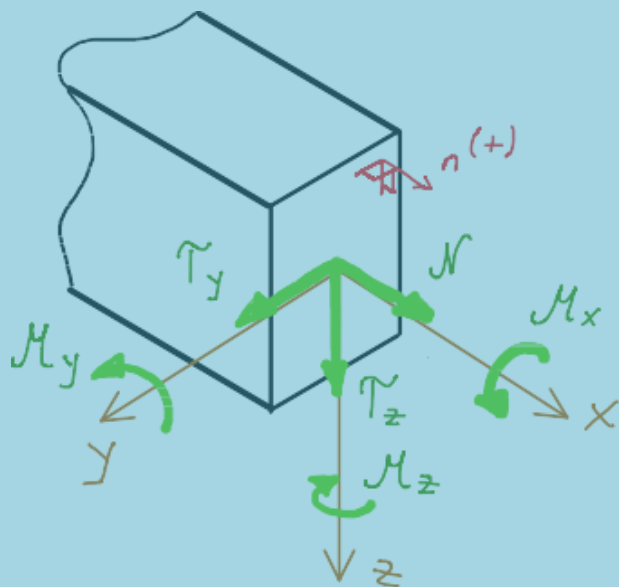
Siła tnąca

V_y (V_z) w rozpatrywanym przekroju jest równa sumie rzutów na oś y (z) wszystkich sił działających na układ po jednej stronie przekroju.



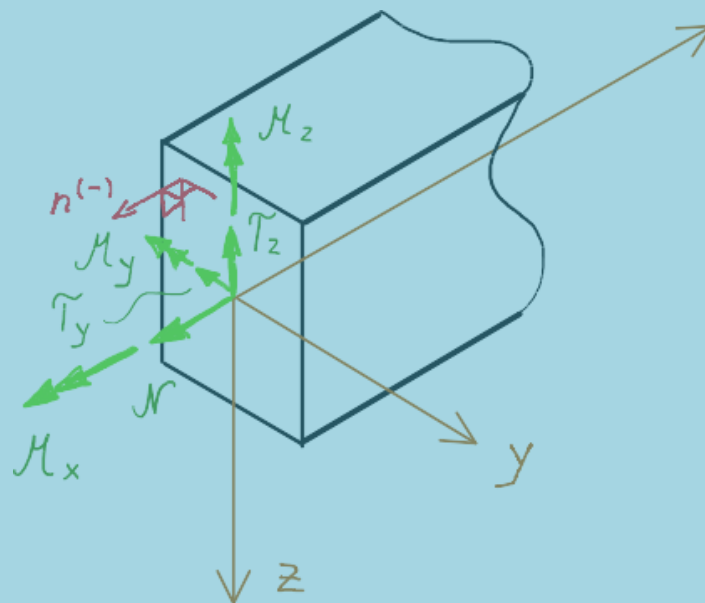
Sporządzając wykresy sił przekrojowych:
rządne wykresów momentów zginających odkładamy po stronie włókien rozciąganych!!!!

2. Konwencja znakowania sił przekrojowych



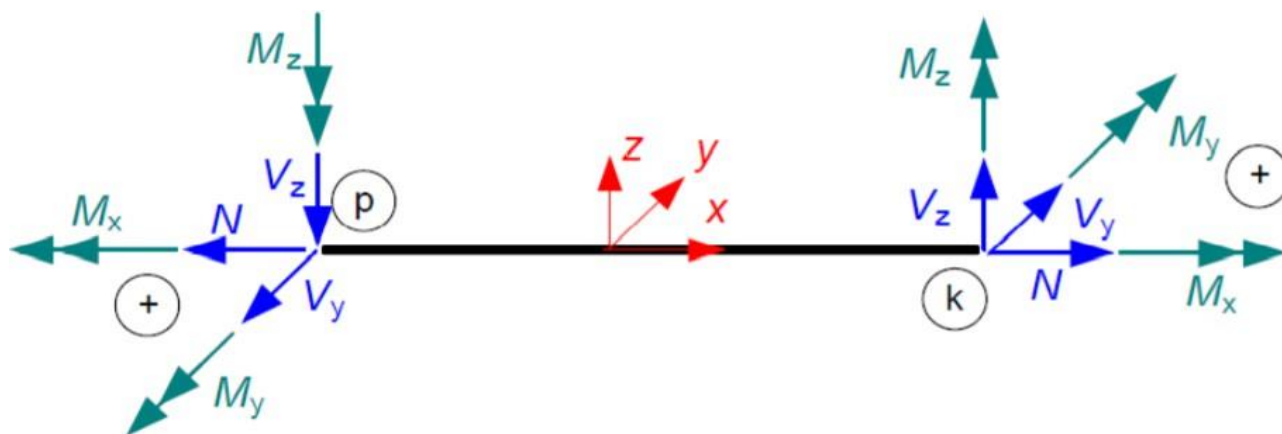
W przekrojach o **zewnątrznej normalnej dodatniej**, siły wewnętrzne, których zwroty są zgodne z LUW pręta uważamy za dodatnie.

W przekrojach o **zewnątrznej normalnej ujemnej**, siły wewnętrzne, których zwroty są przeciwne z LUW pręta uważamy za dodatnie.



2. Konwencja znakowania sił przekrojowych

Umowa znakowania sił przekrojowych wewnętrznych

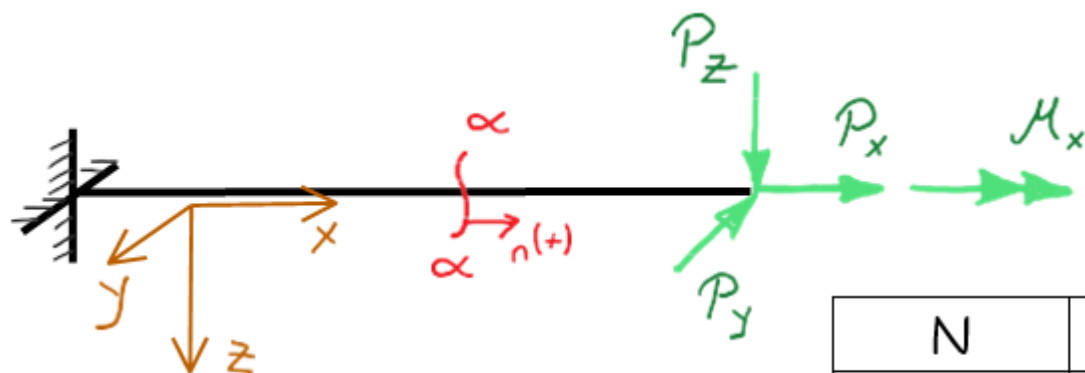


Siłom przekrojowym (wewnętrznym) liczonym w przekroju pręta od strony jego początku (P) przypisujemy **znak plus (+)**, gdy ich wektory mają zwroty **przeciwnie** niż odpowiadające im osie lokalnego układu współrzędnych.

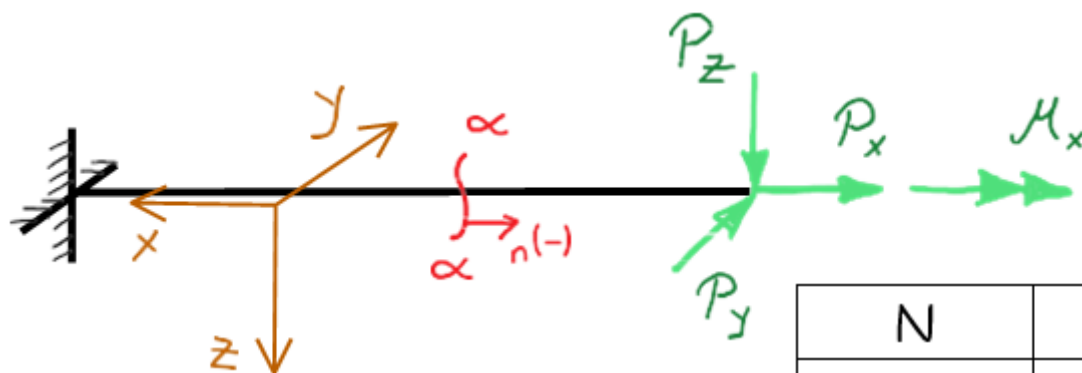
Siłom przekrojowym (wewnętrznym) liczonym w przekroju pręta od strony jego końca (K) przypisujemy **znak (-)**, gdy ich wektory mają zwroty **zgodne** z osiami lokalnego układu współrzędnych.



2. Konwencja znakowania sił przekrojowych



N	+	M_x	+
T_y	-	M_y	-
T_z	+	M_z	-



N	+	M_x	+
T_y	-	M_y	-
T_z	-	M_z	+

2. Konwencja znakowania sił przekrojowych

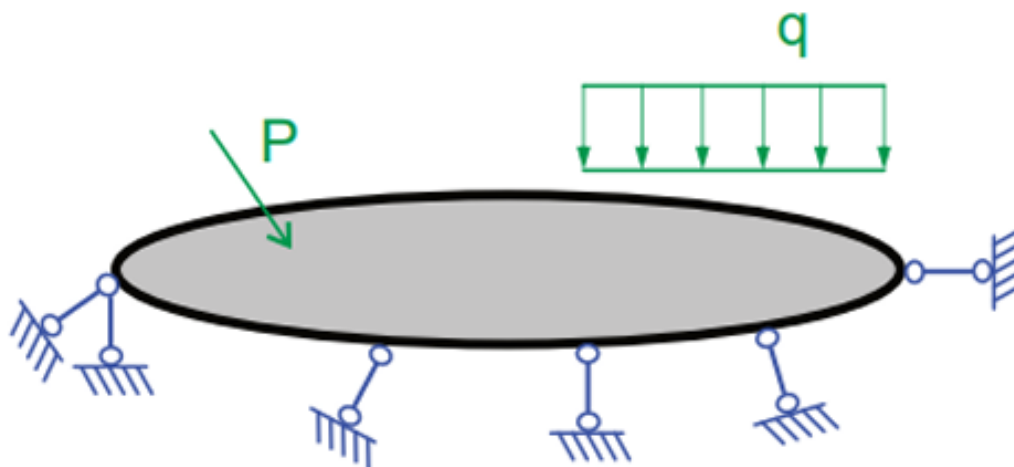
Niejednoznaczność konwencji znakowania sił wewnętrznych

W odniesieniu do momentów zginających obowiązuje nas dodatkowa konwencja dotycząca odkładania wykresów, dzięki czemu mimo braku jednoznaczności w zakresie znakowania, wykresy momentów zawsze będą odłożone po stronie włókien rozciąganych. Aby jednak ustalić charakter ścinania elementu w płaszczyźnie XZ niezbędne jest posługiwanie się LUW.

METODA SIŁ - PRZYPOMNIENIE

KROK 1. Obliczenie stopienia statycznej niewyznaczalności układu n_h

Układ rzeczywisty GN i SN



Układy przestrzenne

$$n_h = e - 6t$$

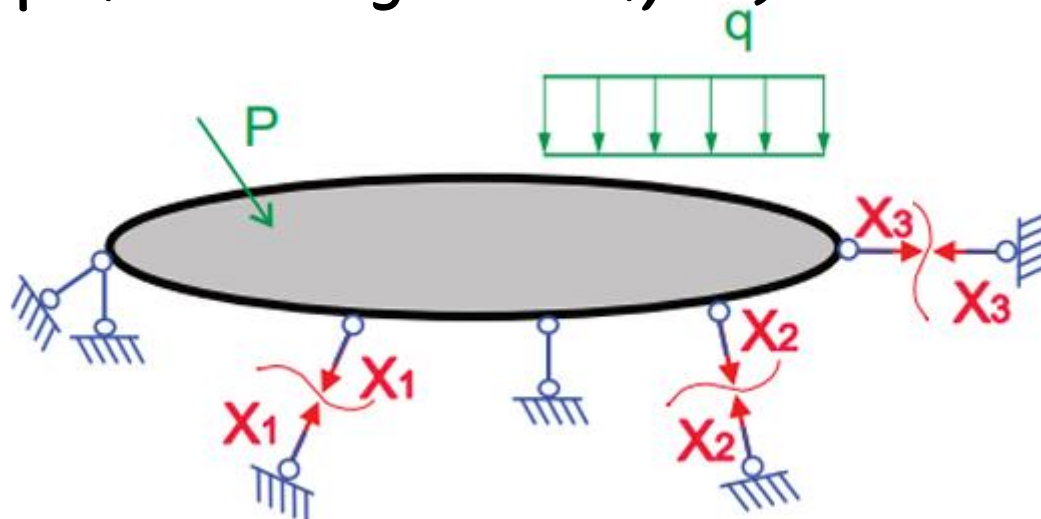
Układy płaskie

$$n_h = e - 3t$$

Konieczność przeprowadzenia pełnej analizy kinematycznej!

METODA SIŁ - PRZYPOMNIENIE

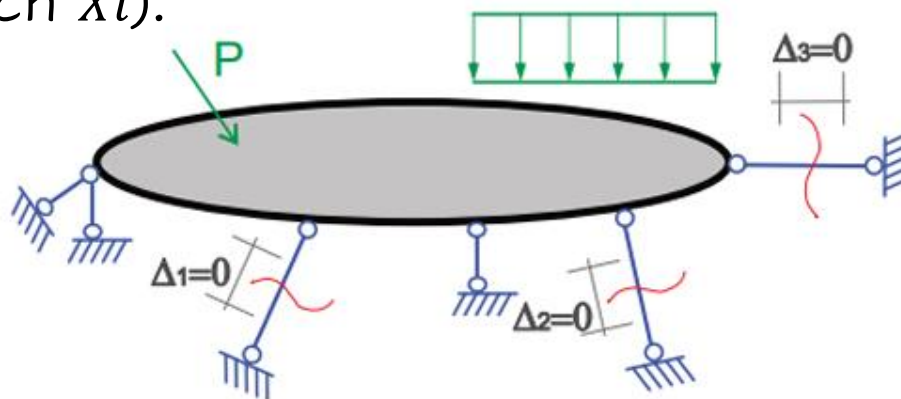
Utworzenie układu zastępczego
(tzw. układu podstawowego metody sił)



1. Aby utworzyć układ zastępczy, układ rzeczywisty pozbawia się wszystkich nadliczbowych nh więzi, tak by po przecięciu tych więzi układ pozostał geometrycznie niezmienny GN. Jeżeli przetniemy dokładnie nh więzi to układ zastępczy będzie także statycznie wyznaczalny SW.
2. W miejsce przeciętych więzi wprowadza się niewiadome siły uogólnione tzw. siły hiperstatyczne, oznaczone jako X_i , $i = \{1, \dots, nh\}$, które zastępują oddziaływanie przeciętej więzi na obydwie części łączonych przez wieź elementów konstrukcji.

METODA SIŁ - PRZYPOMNIENIE

KROK 3. Zbudowanie układu równań metody sił (z tego układu wylicza się wartości nadliczbowych sił hiperstatycznych X_i).



$$\bar{\Delta}_i = \sum_{j=1}^{n_h} \delta_{ij} X_j + \bar{\Delta}_{iF}$$

1. Przemieszczenia w układzie rzeczywistym Δ_i są przemieszczeniami w miejscu i na kierunku istniejących więzi, stąd każde z tych przemieszczeń musi równać się zero $\Delta_i = 0$, $i = \{1, \dots, n_h\}$.

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \bar{\Delta}_{1F} = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \bar{\Delta}_{2F} = 0$$

$$\delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \bar{\Delta}_{3F} = 0$$

Zapis macierzowy

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13} \\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23} \\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_{1F} \\ \bar{\Delta}_{2F} \\ \bar{\Delta}_{3F} \end{bmatrix} = 0$$

METODA SIŁ -Równanie kanoniczne

Ogólna postać liniowego układu równań metody sił (warunkowy układ równań metody sił, gdyż równania wynikają z warunku ciągłości konstrukcji, czyli ograniczeń jakie nakłada się na przemieszczenia konstrukcji w miejscu i na kierunku przeciętych więzi warunkowych Δ_i) ma postać:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n_h} \delta_{ij} X_j + \delta_{iF}$$

Należy wyznaczyć takie wartości sił nadliczbowych X_j , aby odkształcenia i przemieszczenia w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku przeciętych więzi były takie jak w układzie rzeczywistym.



METODA SIŁ - PRZYPOMNIENIE

KROK 4. Wyliczenie współczynników układu równań metody sił δ_{ij}

 $\bar{1}_i \delta_{ij}$

$$= \sum_p \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^j}{GI_x} dx + \sum_p \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^j}{EI_y} dx + \sum_p \int \frac{\bar{M}_z^i \bar{M}_z^j}{EI_z} + \sum_p \int \kappa_y \frac{\bar{T}_y^i \bar{T}_y^j}{GA} dx + \sum_p \int \kappa_z \frac{\bar{T}_z^i \bar{T}_z^j}{GA} dx + \sum_p \int \frac{\bar{N}^i \bar{N}^j}{EA} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^j}{k_n}$$

 $\bar{1}_i \delta_{iF}$

$$= \sum_p \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^F}{GI_x} dx + \sum_p \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^F}{EI_y} dx + \sum_p \int \frac{\bar{M}_z^i \bar{M}_z^F}{EI_z} + \sum_p \int \kappa_y \frac{\bar{T}_y^i \bar{T}_y^F}{GA} dx + \sum_p \int \kappa_z \frac{\bar{T}_z^i \bar{T}_z^F}{GA} dx + \sum_p \int \frac{\bar{N}^i \bar{N}^F}{EA} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^F}{k_n}$$

Nadkreślenie oznacza, że odpowiednie wartości wyliczane są w układzie podstawowym SW.

METODA SIŁ - PRZYPOMNIENIE

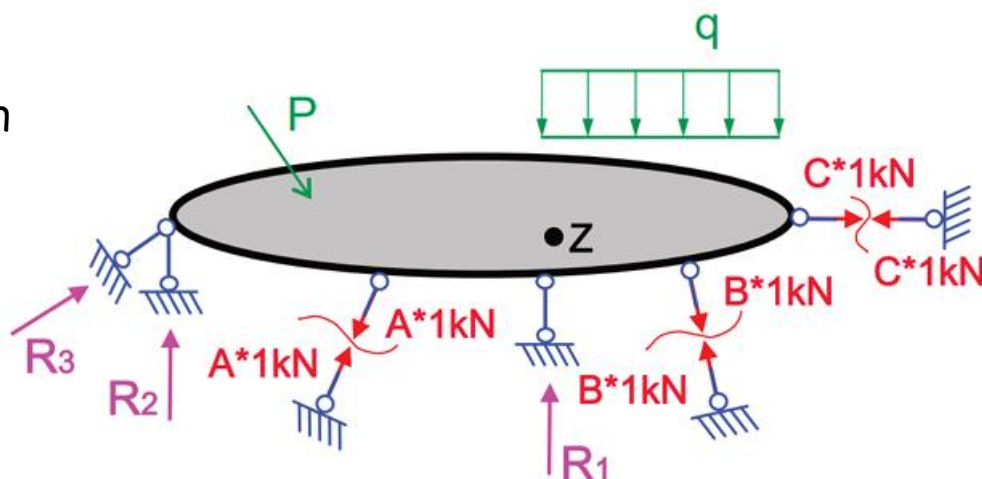
KROK 5. Rozwiązanie układu równań metody sił

Na tym etapie należy wyliczyć wartości niewiadomych sił hiperstatycznych X_i poprzez rozwiązanie układu równań metody sił.

$$X_1 = A, \quad X_2 = B, \quad X_3 = C.$$

KROK 6. Sporządzenie wykresów sił przekrojowych w układzie rzeczywistym SN.

Po wyznaczeniu niewiadomych wartości X_i pozostałe reakcje wylicza się za pomocą równań równowagi sił, czyli rzeczywista konstrukcja na tym etapie jest SW lub korzystając z superpozycji rozwiązania.





METODA SIŁ - PRZYPOMNIENIE

KROK 7. Kontrola poprawności uzyskanych rozwiązań

Kontrola statycznej dopuszczalności uzyskanych rozwiązań

Aby sprawdzić czy rozwiązanie jest statycznie dopuszczalne należy :

- sprawdzić równowagę sił we wszystkich węzłach
- sprawdzić równowagę sił we wszystkich prętach
- sprawdzić czy układ sił czynnych (obciążenie) i układ sił biernych (reakcje) tworzą zrównoważony układ sił

Kontrola kinematycznej dopuszczalności uzyskanych rozwiązań

Jest to tzw. kontrola ciągłości konstrukcji w wybranych jej punktach- zwykle w miejscu nadliczbowych sił, choć nie jest to warunek konieczny. W ramach kontroli kinematycznej sprawdzamy czy wyliczone przemieszczenia w układzie zadany są zgodne z warunkami podparcia i ciągłości konstrukcji.