

METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

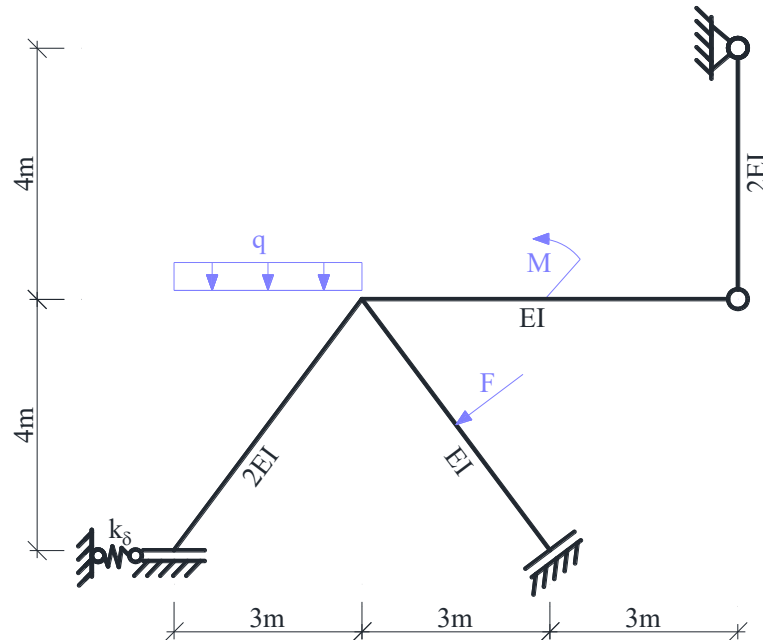
SPIS TREŚCI

1. DANE I SZUKANE	2
2. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI	2
3. OBLICZENIE STOPNIA GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU	3
3.1. PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW	3
3.2. WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW	3
3.3. STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU	5
4. UKŁAD POSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ	5
5. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD SKŁADOWYCH STAÓW OBCIĄŻEŃ	5
5.1. STAN OBCIĄŻENIA DANGO	5
5.2. PIERWSZY STAN ROTACYJNY	7
5.3. PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY	7
6. UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE	9
6.1. POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ	9
6.2. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ	9
6.3. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE	10
7. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW	10
7.1. OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH	10
7.2. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW	11
8. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA	14

1. DANE I SZUKANE

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu jak na rysunku 1.1. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia mechanicznego (obliczyć siły) przekrojowe i sporządzić ich wykresy.
- Przeprowadzić stosowne kontrole.

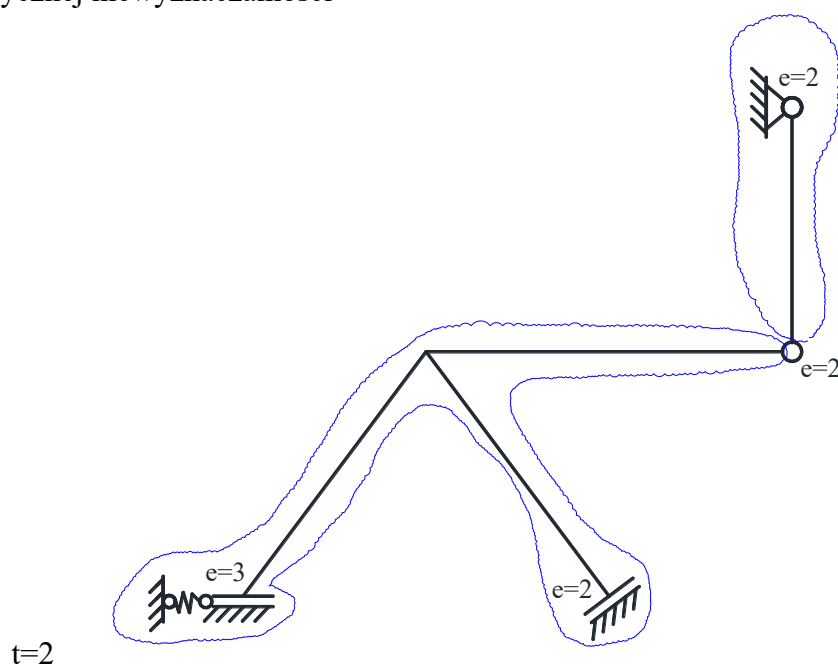


Rys. 1.1. Schemat statyczny

Dane do obliczeń: $F = 8 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$; $M = 24 \text{ kN m}$; $k_\phi = 8 EI/m$.

2. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

- Stopień statycznej niewyznaczalności



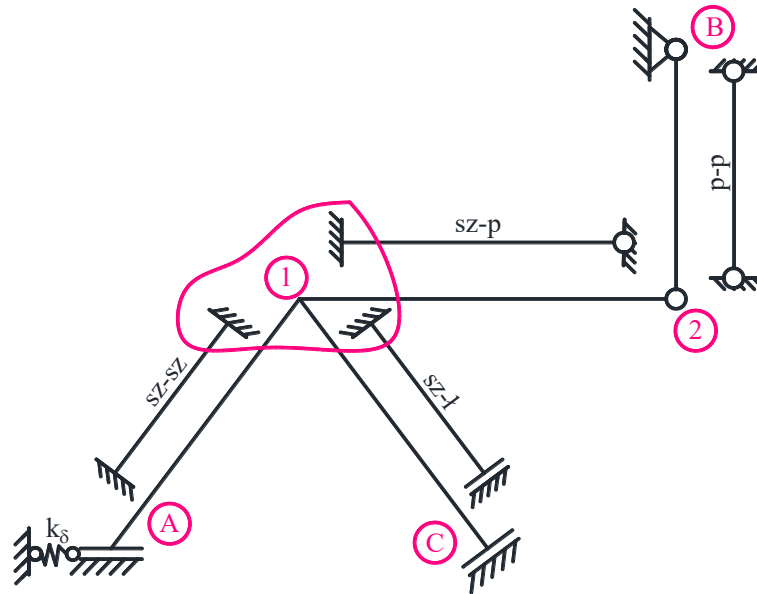
Rys. 2.1. Tarcze i więzi

$$t = 2, e = 9, \quad n_h = 9 - 3 \cdot 2 = 3$$

- Układ składa się z dwóch tarcz połączonych z ostoją siedmioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 6 niezbieżnych. Cała rama wraz z ostoją tworzy układ geometrycznie niezmienny

3. OBLICZENIE STOPNIA GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZLNOŚCI UKŁADU

3.1. PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW



Rys. 3.1.1. Numeracja węzłów i typów prętów

Z przyjętego podziału na pręty wynika, że:

- Dla prętów i-j stosowane będą wzory transformacyjne w postaci:

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o$$

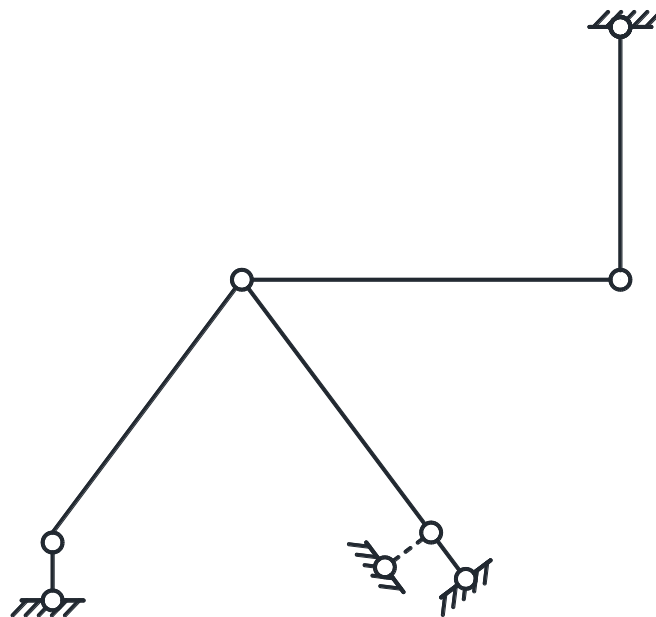
$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o$$

Uwzględniając, że $\varphi_{1A} = \varphi_{1C} = \varphi_{12} = \varphi_1$, stwierdzono, że liczba stopni swobody obrotu węzłów $n_\varphi = 1$.

3.2. WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Do wyznaczenia liczby stopni swobody przesuwu węzłów budowany jest model przegubowy. Należy:

- zwolnić więzi przenoszące momenty
- pominąć więzi sprężyste
- należy odebrać stopnie swobody przesuwu prętom typu wspornik, oraz prętom o lewym końcu utwierdzonym a prawym utwierdzony z przesuwnem poprzecznym (należy dodać więź oznaczoną linią przerywaną)



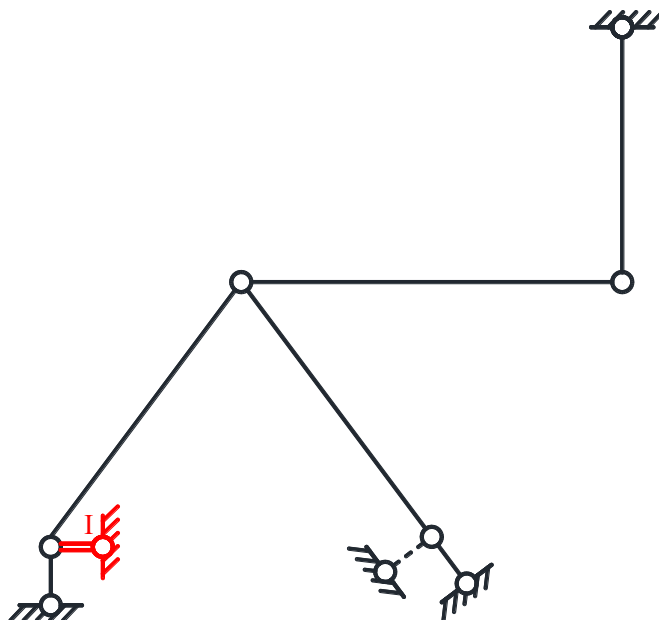
Rys. 3.2.1. Model przegubowy

Oszacowanie liczby stopni swobody przesuwu węzłów

$$n_s \geq 2 \cdot w - p - r = 2 \cdot 8 - 7 - 8 = 1$$

gdzie: $w = 8$ - liczba węzłów modelu,
 $p = 7$ - liczba prętów w modelu,
 $r = 8$ - liczba więzi podporowych modelu.

Oznacza to, że aby układ o węzłach przegubowych był geometrycznie niezmienny należy dodać co najmniej dwie więzi.



Rys. 3.2.2. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

Dopiero analiza kinematyczna potwierdza, że model przegubowy po dodaniu jednej więzi jest geometrycznie niezmienny.

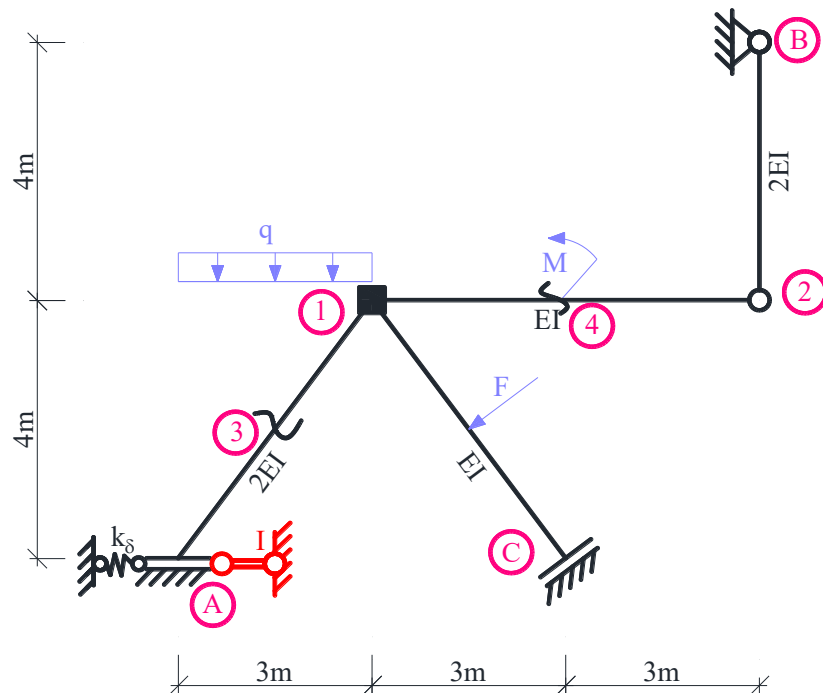
3.3. STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu wynosi:

$$n_g = n_\varphi + n_\delta = 1 + 1 = 1.$$

4. UKŁAD POSTAWOWY METODY PRZEMISZCZEŃ

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez dodanie n_φ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych (w tym przykładzie 1 więź rotacyjną i 1 więź translacyjną). Układ podstawowy metody przemieszczeń, pokazany na rys.4.1., jest geometrycznie wyznaczalny.

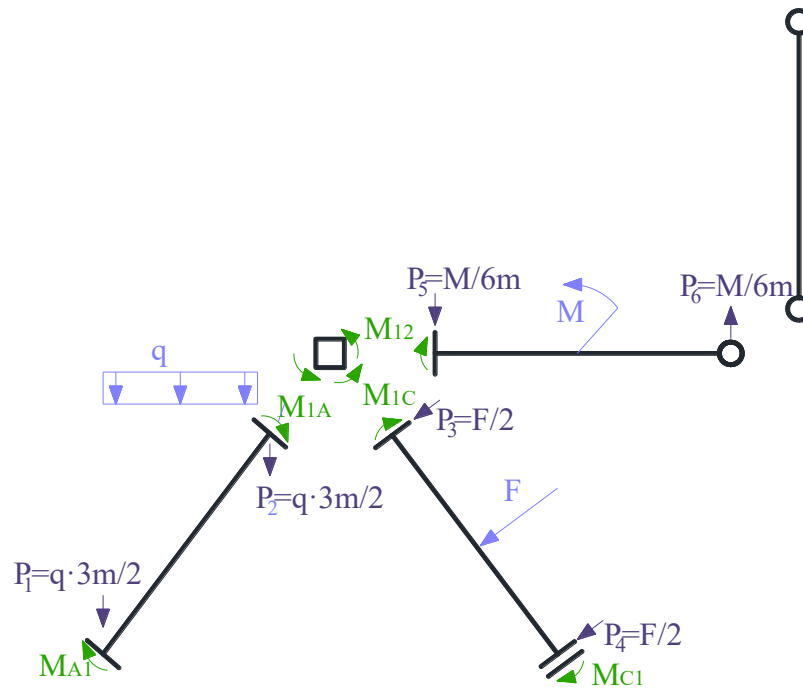


Rys. 4.1. Układ podstawowy metody przemieszczeń

5. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD SKŁADOWYCH STANÓW OBCIĄŻEŃ

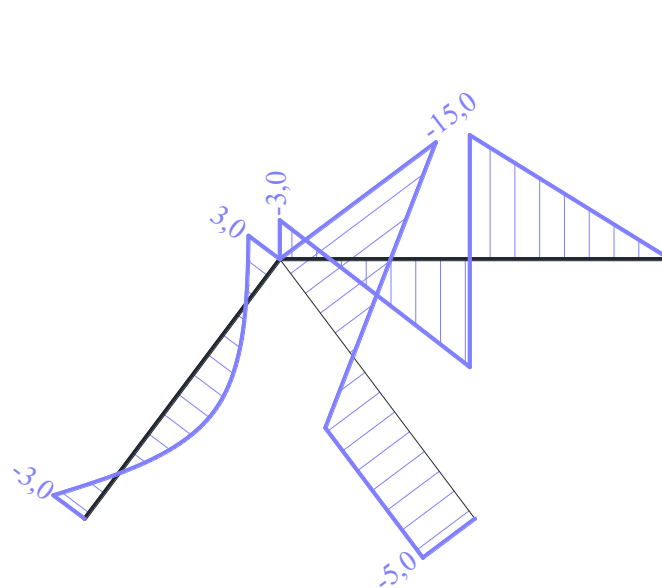
5.1. STAN OBCIĄŻENIA DANGO

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_I = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych w punkcie 3.1. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



Rys. 5.1.1. Momenty brzegowe od obciążenia zewnętrznego i siły równoważne.

$$\begin{aligned} M_{A1}^O &= -qL^2/12 = -\frac{4kN/m \cdot (3m)^2}{12} = -3kN \cdot m, & M_{1A}^O &= qL^2/12 = \frac{4kN/m \cdot (3m)^2}{12} = 3kN \cdot m, \\ M_{1C}^O &= -3FL/8 = -\frac{3 \cdot 8kN \cdot 5m}{8} = -15kN \cdot m, & M_{C1}^O &= -FL/8 = -\frac{8kN \cdot 5m}{8} = -5kN \cdot m, \\ M_{12}^O &= -M/8 = -\frac{24kN \cdot m}{8} = -3kN \cdot m, & M_{21}^O &= M_{2B}^O = M_{B2}^O = 0. \end{aligned}$$



Rys. 5.1.2. Wykres momentów M^O w $kN \cdot m$.

5.2. PIERWSZY STAN ROTACYJNY

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_I = \varphi_{Ij} = 1$, $\delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{1j}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{1j} \cdot \varphi_{1j} + b_{1j} \cdot \varphi_{j1}),$$

$$M_{j1}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{j1} \cdot \varphi_{j1} + b_{j1} \cdot \varphi_{1j}).$$

Momenty węzłowe wynoszą:

$$M_{1A}^1 = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}} (a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \varphi_{A1}) = \frac{2EI}{5m} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{8EI}{5m},$$

$$M_{A1}^1 = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}} (a_{A1} \cdot \varphi_{A1} + b_{A1} \cdot \varphi_{1A}) = \frac{2EI}{5m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{4EI}{5m},$$

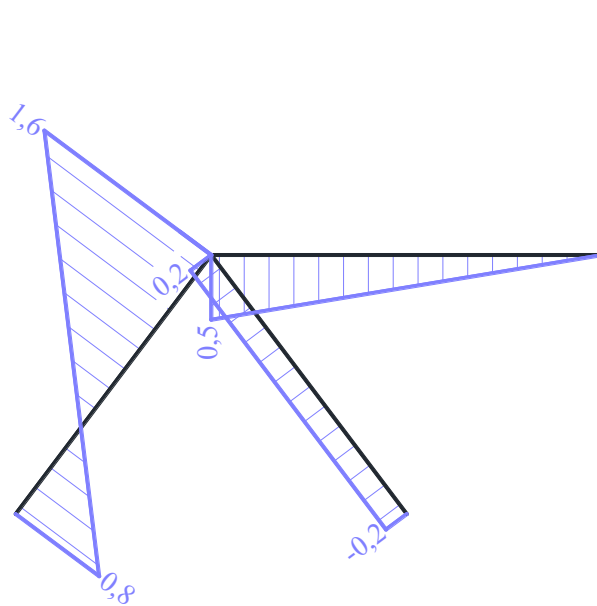
$$M_{1C}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{C1}) = \frac{EI}{5m} (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = \frac{1EI}{5m},$$

$$M_{C1}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{C1} \cdot \varphi_{C1} + b_{C1} \cdot \varphi_{1C}) = \frac{EI}{5m} (1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -\frac{1EI}{5m},$$

$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6m} (3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = \frac{1EI}{2m},$$

$$M_{21}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{2EI}{5m} (4 \cdot 0 + 0) = 0$$

$$M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$



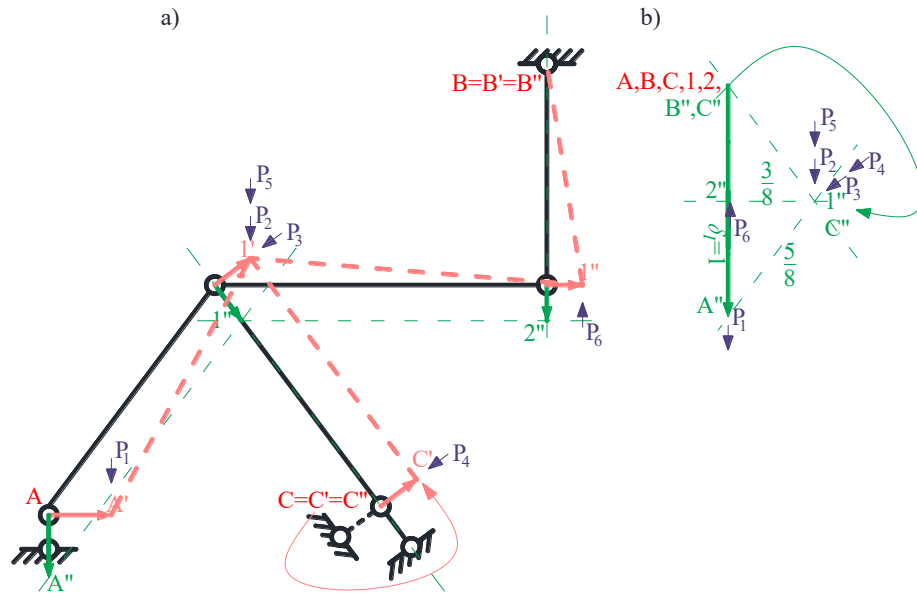
Rys. 5.2.1. Wykres momentów M^I w EI/m .

5.3. PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_I = 0$, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_I = 1$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I, \quad M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I.$$

W celu wyznaczenia szukanych kątów obrotu cięciw prętów rozpatrywany jest przegubowy model układy z dodanymi więzami translacyjnymi oraz wymuszone jest przesunięcie o wartości 1 w miejscu i na kierunku dodanej więzi I. Aby wyznaczyć szukane przemieszczenia oraz kąty obrotu cięciw prętów sporządzany jest biegunowy plan przesunięć obróconych.



Rys. 5.3.1. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) B.P.P.O.

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{1A}^I = |1''A''| = -\frac{5}{8},$$

$$\Delta_{1C}^I = |1''C''| = 0,$$

$$\Delta_{12}^I = |1''2''| = \frac{3}{8}$$

$$\Delta_{2B}^I = |2''B''| = -\frac{1}{2}.$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{1A}^I = \frac{\Delta_{1A}^I}{L_{1A}} = \frac{-\frac{5}{8}}{5m} = -\frac{1}{8m},$$

$$\psi_{1C}^I = \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{0}{5m} = 0,$$

$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{3}{8}}{6m} = \frac{1}{16m},$$

$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{1}{2}}{4m} = -\frac{1}{8m}.$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_I wynoszą:

$$M_{A1}^I = M_{1A}^I = -\frac{EI_{1A}}{L_{1A}} \cdot c_{A1} \cdot \psi_{1A}^I = -\frac{2EI}{5m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{8m}\right) = \frac{3}{10} \frac{EI}{m^2},$$

$$M_{1C}^I = M_{C1}^I = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{1C} \cdot \psi_{1C}^I = -\frac{EI}{5m} \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

$$M_{12}^I = -\frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot c_{12} \cdot \psi_{12}^I = -\frac{EI}{6m} \cdot 3 \cdot \frac{1}{16m} = -\frac{1}{32} \frac{EI}{m^2},$$

$$M_{21}^I = 0,$$

$$M_{2B}^I = M_{B2}^I = 0.$$

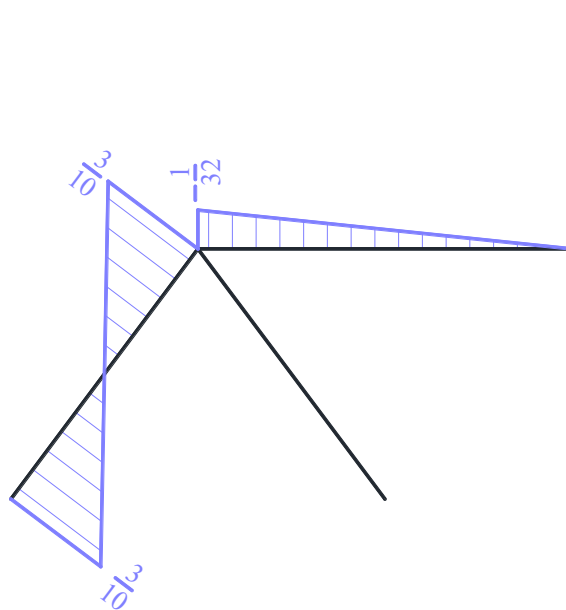
Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1^I = 0, \quad \delta_2^I = -\frac{3}{8}, \quad \delta_{3_x}^I = -\frac{1}{2}, \quad \delta_{4_x}^I = -\frac{1}{2}, \quad \delta_5^I = -\frac{3}{8}, \quad \delta_6^I = 0.$$

$$\delta_{3_y}^I = -\frac{3}{8}, \quad \delta_{4_y}^I = -\frac{3}{8},$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L_{k_\delta}^I = 1$

Siła w więzi sprężystej: $S_1^{\delta I} = k_\delta \cdot \Delta L_{k_\delta}^I = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 = 1 \frac{EI}{m^3}$



Rys. 5.3.2. Wykres momentów M^I w EI/m^2 .

6. UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

6.1. POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1o} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{Io} = 0$$

6.2. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

$$k_{11} = \sum_j M_{1j}^1 + k_1^\varphi = M_{12}^1 + M_{1A}^1 + M_{1C}^1 + k_1^\varphi = 0,5 \frac{EI}{m} + 1,6 \frac{EI}{m} + 0,2 \frac{EI}{m} + 5 \frac{EI}{m} = 7,3 \frac{EI}{m},$$

$$k_{1I} = \sum_j M_{1j}^I = M_{12}^I + M_{1A}^I + M_{1C}^I = -0,0313 \frac{EI}{m^2} + 0,3 \frac{EI}{m^2} + 0 = 0,2687 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1o} = \sum_j M_{1j}^o - M = M_{12}^o + M_{1A}^o + M_{1C}^o = -3kN \cdot m + 3kN \cdot m - 15kN \cdot m = -15kN \cdot m,$$

$$\begin{aligned}
 k_{I1} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi_{ij}^I \\
 &= -(M_{12}^1 + M_{21}^1) \psi_{12}^I - (M_{1A}^1 + M_{A1}^1) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^1 + M_{C1}^1) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^1 + M_{B2}^1) \psi_{2B}^I \\
 &= - \left(0,5 \frac{EI}{m} + 0 \right) \frac{1}{16m} - \left(1,6 \frac{EI}{m} + 0,8 \frac{EI}{m} \right) \cdot \left(-\frac{1}{8m} \right) - \left(0,2 \frac{EI}{m} \pm 0,2 \frac{EI}{m} \right) \cdot (0) \\
 &\quad - (0 + 0) \cdot \left(-\frac{1}{8m} \right) = 0,2687 \frac{EI}{m^2},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{I,I} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^I = -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^I - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^I - \\
 &\quad (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi_{2B}^I + k^\delta \cdot \delta^I \cdot \delta^I = \left(-0,0313 \frac{EI}{m^2} + 0 \right) \frac{1}{16m} - \\
 &\quad \left(0,3 \frac{EI}{m^2} + 0,3 \frac{EI}{m^2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{8m} \right) - (0 + 0) \cdot (0) - (0 + 0) \cdot (0) + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 1 = 8,0770 \frac{EI}{m^3},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{Io} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^o + M_{ji}^o) \psi_{ij}^I - \sum_P P_P \cdot \delta_P^I \\
 &= -(M_{12}^o + M_{21}^o) \psi_{12}^I - (M_{1A}^o + M_{A1}^o) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^o + M_{C1}^o) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^o + M_{B2}^o) \psi_{2B}^I - P_1 \cdot \delta_1^I - \\
 &\quad P_2 \cdot \delta_2^I - P_{3x} \cdot \delta_{3x}^I - P_{3y} \cdot \delta_{3y}^I - P_{4x} \cdot \delta_{4x}^I - P_{4y} \cdot \delta_{4y}^I - P_5 \cdot \delta_5^I - P_6 \cdot \delta_6^I \\
 &= -(-3kN \cdot m + 0) \frac{1}{16m} - (3 - kN \cdot m + 3kN \cdot m) \cdot \left(-\frac{1}{8m} \right) \\
 &\quad - (-15kN \cdot m - 3kN \cdot m) \cdot (0) - (0 + 0) \cdot (0) - 3kN \cdot 0 - 3kN \cdot \left(-\frac{3}{8} \right) - 3,2kN \\
 &\quad \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - 2,4kN \cdot \left(-\frac{3}{8} \right) - 3,2kN \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) - 2,4kN \cdot \left(-\frac{3}{8} \right) - 4kN \cdot \left(-\frac{3}{8} \right) - 4kN \cdot 0 \\
 &= 8,9375kN.
 \end{aligned}$$

6.3. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$\begin{aligned}
 7,3 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,2678 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I - 15kN \cdot m &= 0 \\
 0,2678 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 8,0770 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 8,9375kN &= 0 \\
 \varphi_1 = 2,0981 \frac{kN \cdot m^2}{EI}, \quad \delta_I = -1,1764 \frac{kN \cdot m^3}{EI}
 \end{aligned}$$

7. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

7.1. OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^o,$$

Momenty brzegowe:

Pręt	Punkt	$\frac{M_{ij}^1}{EI}$ $\frac{m}{m}$	$\frac{\varphi_1}{EI}$ $\frac{kN \cdot m^2}{EI}$	$\frac{M_{ij}^I}{EI}$ $\frac{m^2}{m^2}$	$\frac{\delta_I}{EI}$ $\frac{kN \cdot m^3}{EI}$	$\frac{M_{ij}^O}{EI}$ $\frac{m}{m}$	$\frac{M_{ij}}{EI}$ $\frac{kN \cdot m}{EI}$
1A	A	0,8	2.0981	0,3	-1,1764	-3,0	-1,6745
	1	1,6		0,3		3,0	6,0040
1C	1	0,2		0		-15,0	-14,5804
	C	-0,2		0		-5,0	-5,4196
12	1	0,5		-0,0313		-3,0	-1,9142
	2	0		0		0	0
2B	2	0		0		0	0
	B	0		0		0	0

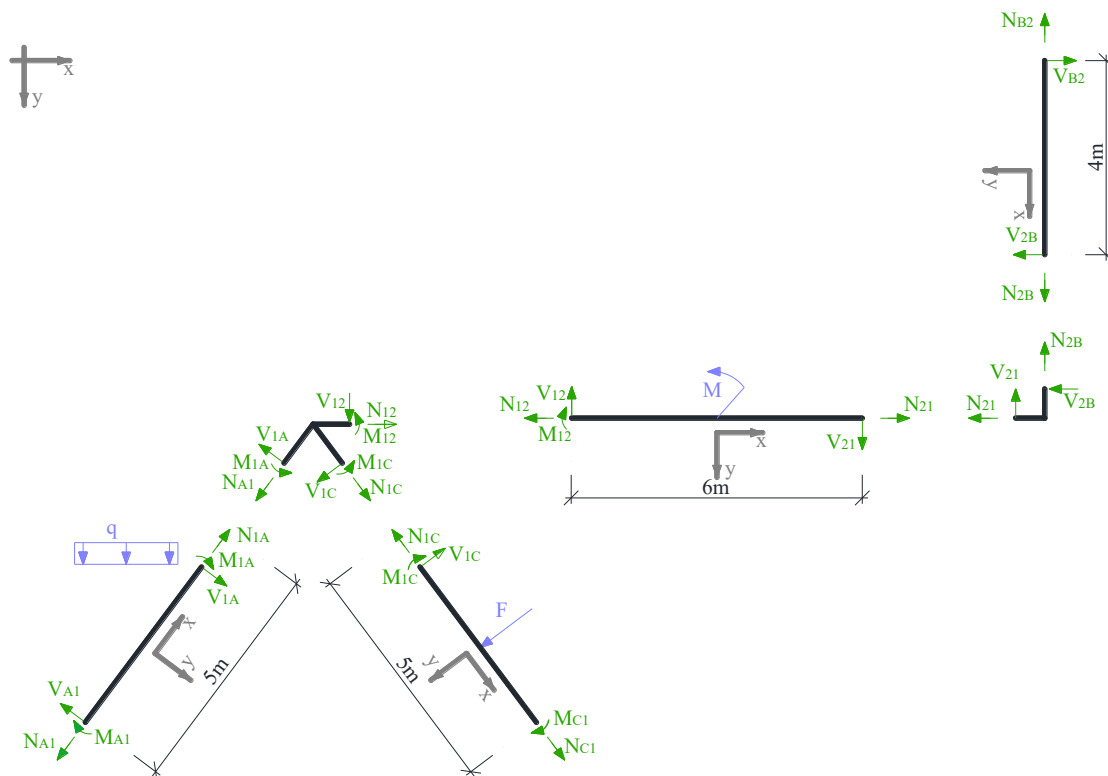
Siła więzi sprężystej:

$$S_\varphi = k_\varphi \cdot \varphi_1 = 5 \frac{EI}{m} \cdot (2.0981) \frac{kN \cdot m^2}{EI} = 10,4905 kN \cdot m$$

$$S_\delta = k_\delta \cdot \delta_I = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot (-1,1764) \frac{kN \cdot m^3}{EI} = -9,4112 kN$$

7.2. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Siły tnące określamy korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach. Siły osiowe wyznaczamy ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących oraz obciążeń działających w węzłach. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi.



Rys. 7.2.1. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

Pręt 2-B

$$\begin{aligned}\sum M_B &= M_{B2} + M_{2B} + V_{2B} \cdot 4m = 0 + 0 + V_{2B} \cdot 4m = 0 \Rightarrow V_{2B} = 0, \\ \sum V &= V_{2B} - V_{B2} = 0 - V_{B2} = 0 \Rightarrow V_{B2} = 0, \\ \sum N &= N_{2B} - N_{B2} = 0 \Rightarrow N_{B2} = N_{2B}.\end{aligned}$$

Pręt 1-2

$$\begin{aligned}\sum M_1 &= M_{12} - M + V_{21} \cdot 6m = [-1,9142 - 24 + V_{21} \cdot 6]kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{21} = 4,9190kN, \\ \sum V &= V_{12} - V_{21} = [V_{12} - 4,3190]kN = 0 \Rightarrow V_{12} = 4,3190kN \\ \sum N &= N_{12} - N_{21} = 0 \Rightarrow N_{12} = N_{21}.\end{aligned}$$

Pręt 1-C

$$\begin{aligned}\sum M_C &= M_{1C} + M_{C1} + V_{1C} \cdot 5m - F \cdot 2,5m \\ &= [-14,5804 - 5,4196 + V_{1C} \cdot 5 - 8 \cdot 2,5]kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{1C} = 8kN, \\ \sum M_1 &= M_{1C} + M_{C1} + F \cdot 2,5m = [-13,6646 - 6,3354 + 8 \cdot 2,5]kN \cdot m = 0, \\ \sum N &= N_{1C} - N_{C1} = 0 \Rightarrow N_{C1} = N_{1C}.\end{aligned}$$

Pręt 1-A

$$\begin{aligned}\sum M_A &= M_{A1} + M_{1A} + V_{1A} \cdot 5m + q \cdot 3m \cdot 1,5m \\ &= [-1,6745 + 6,0040 + V_{1A} \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5]kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{1A} \\ &= -4,9190kN, \\ \sum M_1 &= M_{A1} + M_{1A} + V_{A1} \cdot 4m - q \cdot 3m \cdot 1,5m \\ &= [-1,6745 + 6,0040 + V_{A1} \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5]kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{A1} \\ &= -2,7341kN, \\ \sum N &= N_{A1} - N_{1A} + q \cdot 3m \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow N_{A1} = N_{1A} - 4kN/m \cdot 3m \cdot 0,8.\end{aligned}$$

Węzeł 2

$$\begin{aligned}\sum M_2 &= M_{21} + M_{2B} = [0 + 0]kN \cdot m = 0, \\ \sum X &= V_{2B} + N_{21} = [0 + N_{21}]kN = 0 \Rightarrow N_{21} = 0, \\ \sum Y &= V_{21} + N_{2B} = [4,3190 + N_{2B}]kN = 0 \Rightarrow N_{2B} = -4,3190kN.\end{aligned}$$

Z trzeciego równania dla pręta 2-B $N_{B2} = N_{2B} = -3,9367kN$.

Z trzeciego równania dla pręta 1-2 $N_{12} = N_{21} = 0$.

Węzeł 1

$$\begin{aligned}\sum M_1 &= M_{12} + M_{1A} + M_{1C} + S_\varphi = [10,4905 - 1,9142 + 6,0040 - 14,5804]kN \cdot m = 0, \\ \sum X &= N_{12} + N_{1C} \cdot 0,6 - V_{1C} \cdot 0,8 - N_{1A} \cdot 0,6 - V_{1C} \cdot 0,8 \\ &= [0 + N_{1C} \cdot 0,6 - 8 \cdot 0,8 - N_{1A} \cdot 0,6 - (-4,3190) \cdot 0,8]kN = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sum Y &= -V_{12} + N_{1C} \cdot 0,8 + V_{1C} \cdot 0,6 + N_{1A} \cdot 0,8 - V_{1C} \cdot 0,6 \\ &= [-4,3190 + N_{1C} \cdot 0,8 + 8 \cdot 0,6 + N_{1A} \cdot 0,8 - (-4,3190) \cdot 0,6] kN = 0\end{aligned}$$

$$\Rightarrow N_{1A} = -9,7302 kN, \quad N_{1C} = -5,0180 kN$$

Z trzeciego równania dla pręta 1-A $N_{A1} = -9,7302 kN - 9,6 kN = -19,3302 kN$.

Z trzeciego równania dla pręta 1-C $N_{C1} = N_{1C} = -7,0495$

Obliczenie momentów zginających

$$M_{zgin,A1} = M_{A1} = -1,6745 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,1A} = -M_{1A} = -6,0040 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,1C} = M_{1C} = -14,5804 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,C1} = -M_{C1} = 5,4196 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,12} = M_{12} = -1,9142 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,21} = -M_{21} = 0$$

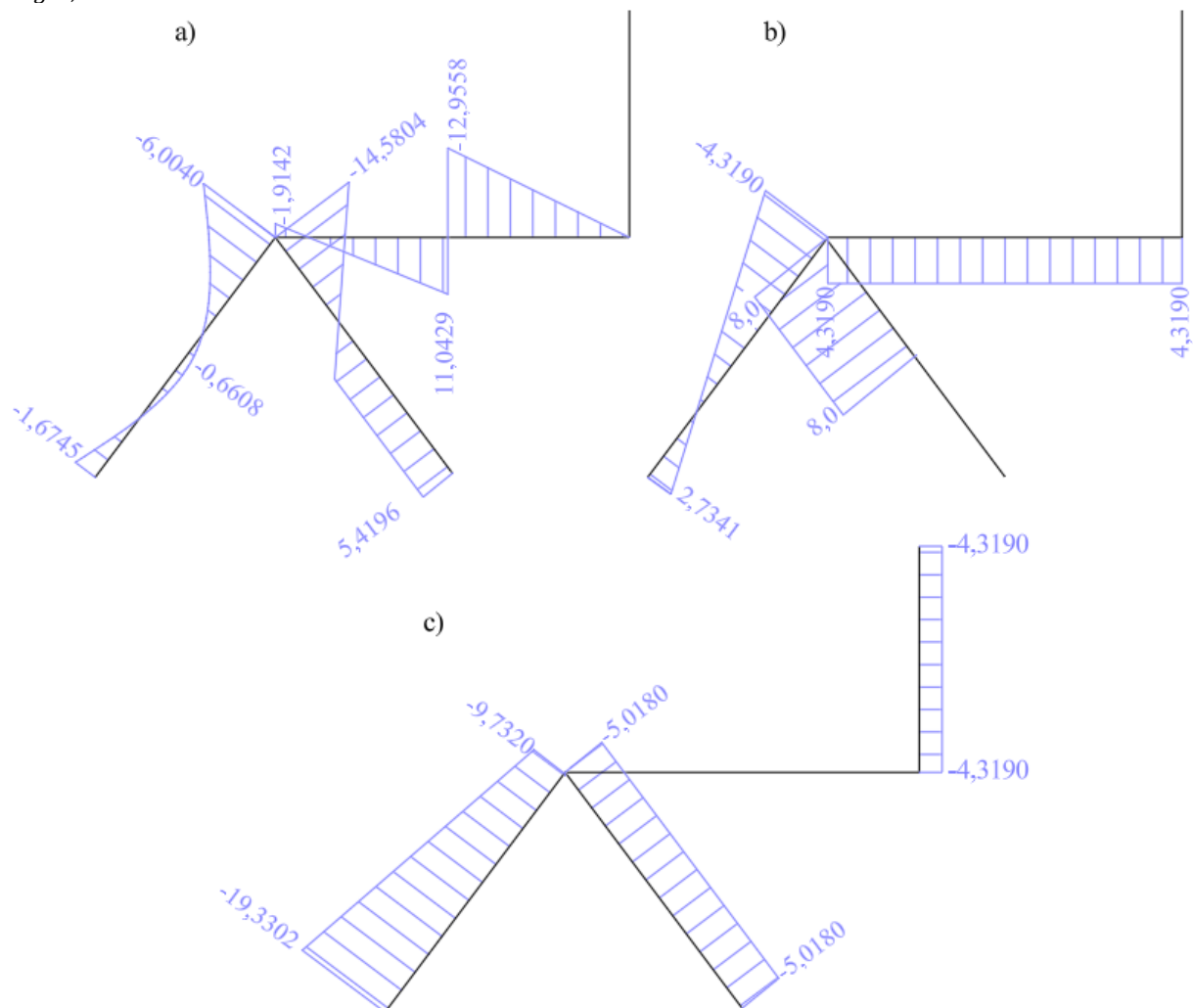
$$M_{zgin,2B} = M_{2B} = 0$$

$$M_{zgin,B2} = -M_{B2} = 0$$

$$\begin{aligned}M_{zgin,3} &= M_{A1} + V_{A1} \cdot 2,5m - q \cdot 1,5m \cdot \frac{1,5m}{2} \\ &= [-1,6745 + 2,7341 \cdot 2,5m - 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75] kN \cdot m = 0,6608 kN \cdot m\end{aligned}$$

$$M_{zgin,4}^P = -V_{21} \cdot 3m = -4,3190 kN \cdot 3m = -12,9558 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,4}^L = -V_{21} \cdot 3m + M = -4,3190 kN \cdot 3m + 24 kN \cdot m = 11,0429 kN \cdot m$$

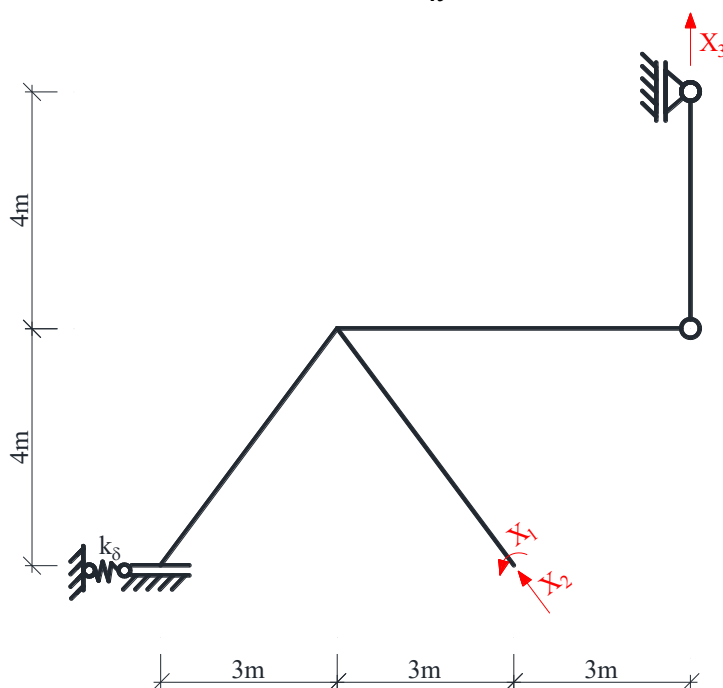


Rys. 5.2.2. Wykres a) momentów zginających M w $kN \cdot m$, b) sił tnących V w kN , c) sił osiowych N w kN

8. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach przeciętych więzi. W tym celu dobierany jest układ podstawowy metody sił. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu. Ponieważ dany układ jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalny dobrano układ podstawowy przecinając trzy więzi podporowe. Przemieszczenia obliczane są za pomocą wzoru

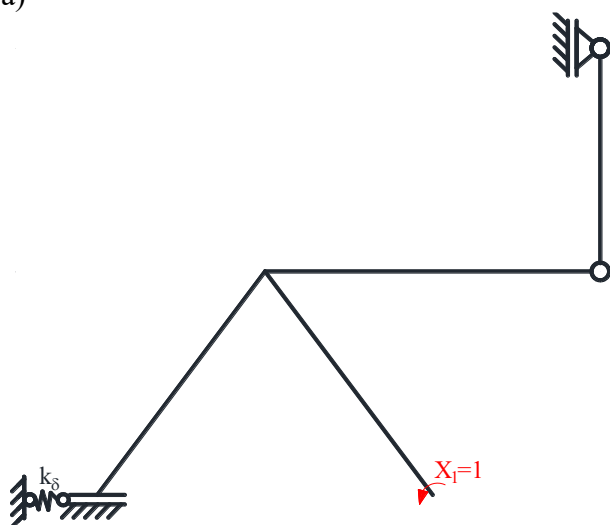
$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n}$$



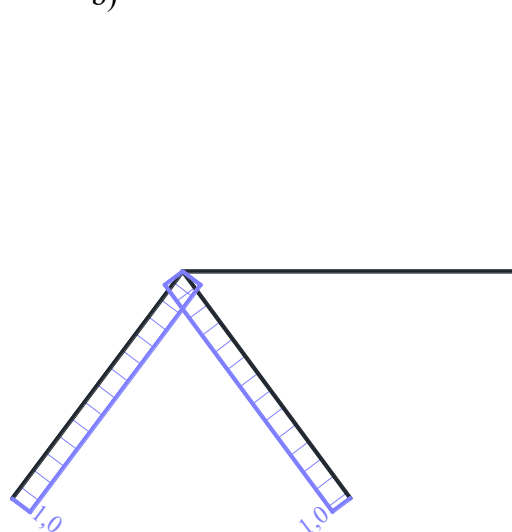
Rys. 8.1. Układ podstawowy metody sił bez obciążenia danego

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_1 = 1$

a)



b)

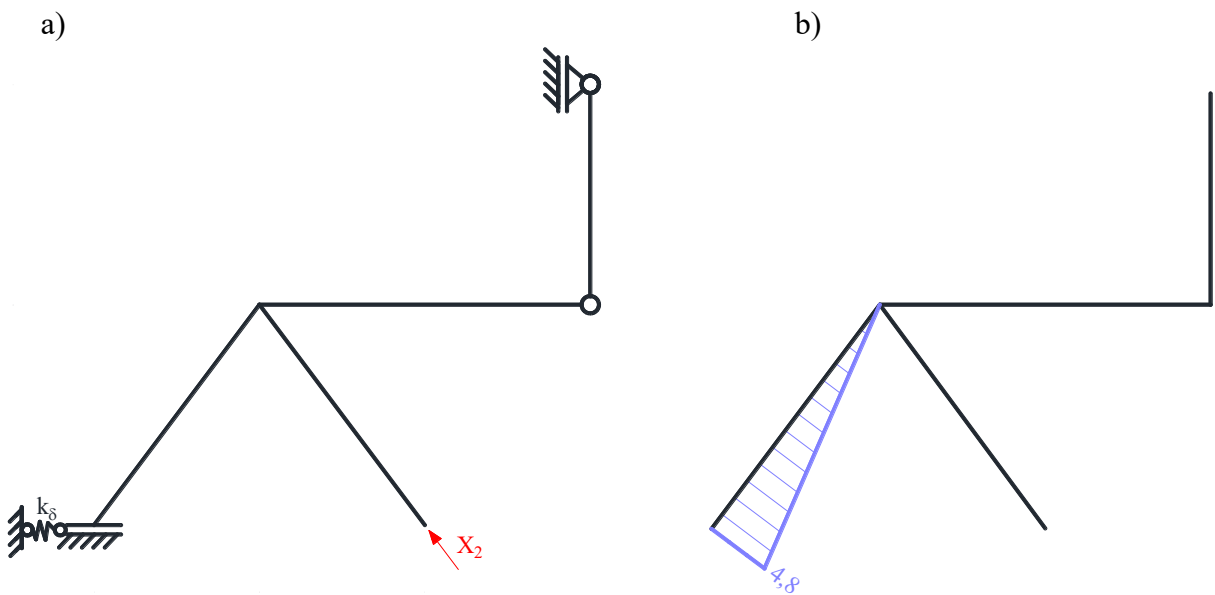


Rys. 8.2. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_1 = 1$, b) wykres momentów zginających $\bar{M}^1$

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^1 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} = & \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^F}{k_n} \\ & = \frac{5m}{6 \cdot 2EI} [1 \cdot (-1,6745)kN \cdot m + 4 \cdot 1 \cdot (0,6608)kN \cdot m + 1 \cdot (-6,0040)kN \cdot m] \\ & + \frac{2,5m}{6 \cdot EI} [1 \cdot (-14,5804)kN \cdot m + 4 \cdot 1 \cdot (-4,5004)kN \cdot m + 1 \cdot 5,4186kN \cdot m] + \\ & + \frac{2,5m}{6 \cdot EI} [1 \cdot 5,4186kN \cdot m + 4 \cdot 1 \cdot 5,4186kN \cdot m + 1 \cdot 5,4186kN \cdot m] + \frac{0 \cdot (-9,4112)kN}{8 \frac{EI}{m^3}} \Bigg\} = 0 \end{aligned}$$

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej ($X_2 = 1$)kN·m



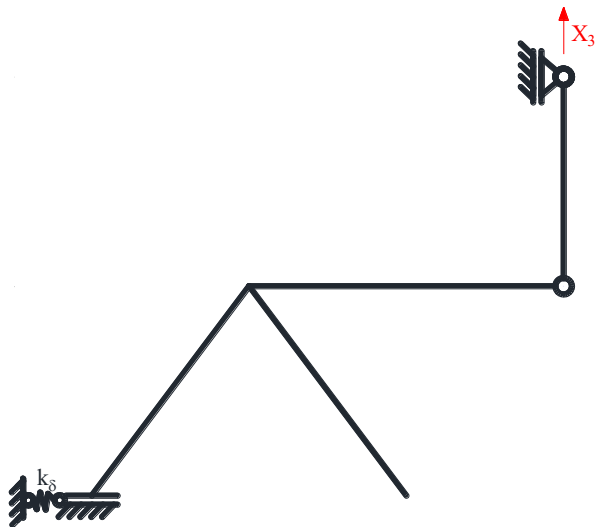
Rys. 8.3. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_2 = 1$, b) wykres momentów zginających $\bar{M}^2$ w m

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^2 = -0,6$

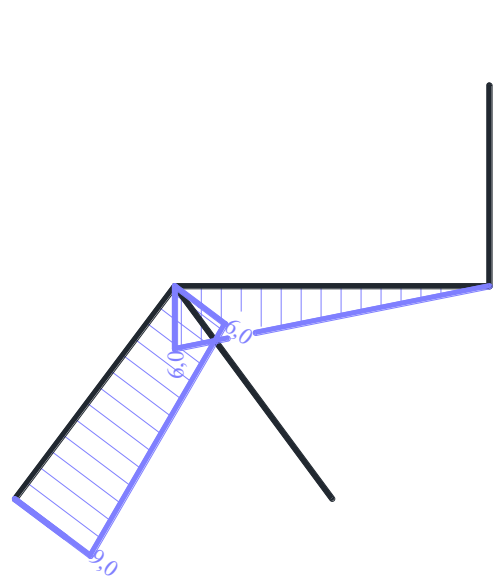
$$\begin{aligned} \Delta_{2F} = & \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^F}{k_n} \\ & = \frac{5m}{6 \cdot 2EI} [4,8m \cdot (-1,6745)kN \cdot m + 4 \cdot 0,6608kN \cdot m + (-6,0040)kN \cdot m] \\ & + \frac{(-0,6) \cdot (-9,4112)kN}{8 \frac{EI}{m^3}} = 0 \end{aligned}$$

- Przeszyczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_3 = 1$

a)



b)



Rys. 8.4. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_3 = 1$, b) wykres momentów zginających $\bar{M}^3$ w m

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^3 = 0$

$$\begin{aligned} \Delta_{3F} &= \int \frac{\bar{M}^3 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^3 \cdot S_n^F}{k_n} \\ &= \frac{5m}{6 \cdot 2EI} [9m \cdot (-1,6745)kN \cdot m + 4 \cdot 7,5m \cdot 0,6608kN \cdot m + 6m \cdot (-6,0040)kN \cdot m] \\ &\quad + \frac{3m}{6 \cdot EI} [6m \cdot (-1,9142)kN \cdot m + 4 \cdot 4,5m \cdot 4,5644kN \cdot m + 3m \cdot 11,0429kN \cdot m] \\ &\quad + \frac{3m}{6 \cdot EI} [6m \cdot (-12,9564)kN \cdot m + 4 \cdot 4,5m \cdot (-6,4785)kN \cdot m + 3m \cdot 0kN \cdot m] \\ &\quad + \frac{0 \cdot (-9,4112)kN}{8 \frac{EI}{m^3}} = 0 \end{aligned}$$