



Politechnika Wrocławska

MECHANIKA BUDOWLI

Wykład 07-08
STATECZNOŚĆ USTROJÓW PRĘTOWYCH

Prowadzący: dr inż. Olga Szyłko-Bigus



Stateczność ustrojów prętowych

Plan wykładu

1. Wprowadzenie
2. Równanie różniczkowe
3. Wzory transformacyjne
4. Założenia MP w analizie stateczności
5. Równania kanoniczne w analizie stateczności
6. Wyznaczenie długości wyboczeniowej
7. Przykład obliczeniowy



Stateczność ustrojów prętowych.

Wprowadzenie

- Zazwyczaj przy rozwiązywaniu układów prętowych rozpatrujemy układ w stanie nieodkształconym, czyli stosujemy zasadę zeszywnienia, która zakłada, że obciążenie nie powoduje przemieszczeń (odkształceń) ustroju.

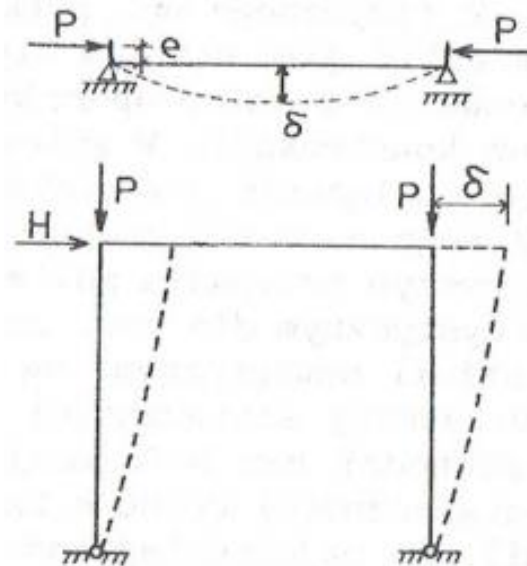
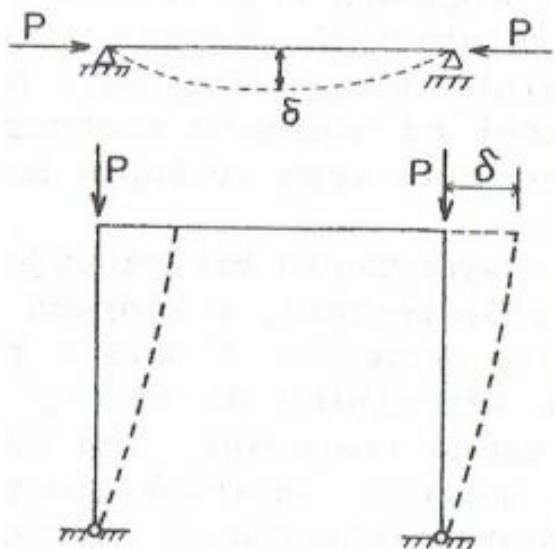
Zasada zeszywnienia: linie działania sił przyłożonych do ciała nieodkształconego nie zmieniają położenia w ciele odkształconym.

- Brak stateczności można określić jako stan, w którym niewielki przyrost obciążenia prowadzi do nieproporcjonalnie dużego przyrostu przemieszczeń konstrukcji

Stateczność ustrojów prętowych.

Wprowadzenie

- W zależności od schematu statycznego i rodzaju obciążenia przemieszczenia te mogą
- występować nagle - wyboczenie bifurkacyjne (jedyne siły wewnętrzne to siły osiowe)
 - mogą narastać stopniowo – bez bifurkacji stanu równowagi (ustroje z wadami)

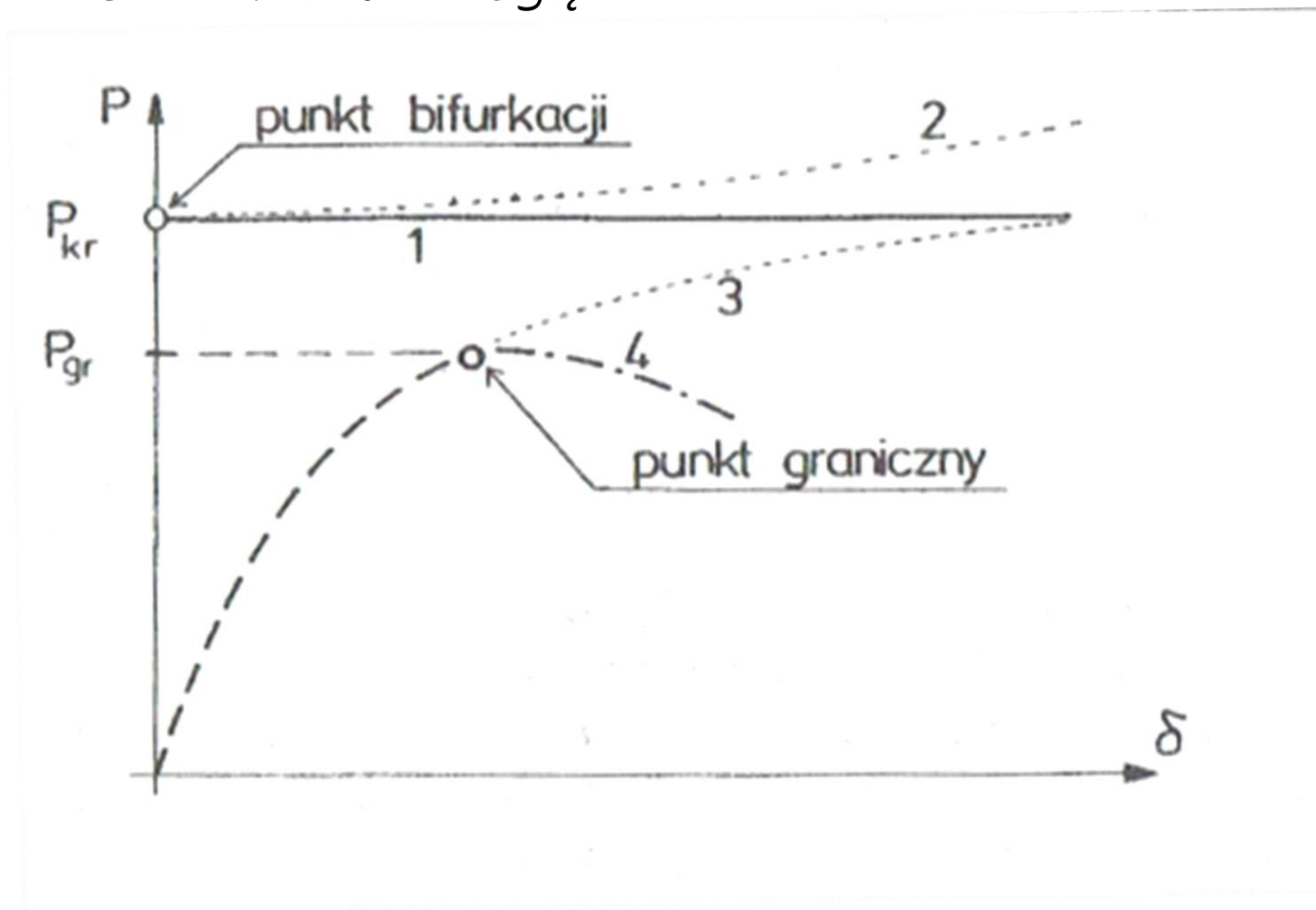




Stateczność ustrojów prętowych.

Wprowadzenie

- W zależności od schematu statycznego i rodzaju obciążenia przemieszczenia te mogą





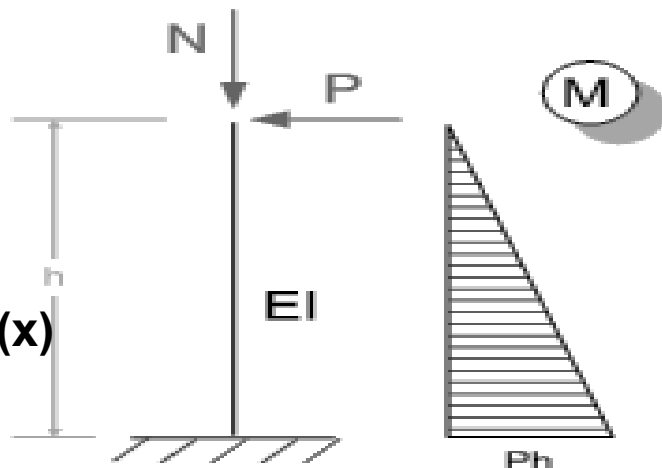
Stateczność ustrojów prętowych.

Wprowadzenie

- Zazwyczaj przy rozwiązywaniu układów prętowych rozpatrujemy układ w stanie niedokształconym, czyli stosujemy zasadę zeszywnienia, która zakłada, że obciążenie nie powoduje przemieszczeń (odkształceń) ustroju.
- W takim przypadku siły osiowe nie mają wpływu na momenty zginające – zachodzi to dla prętów sztywnych i relatywnie małych sił osiowych.
- Jeżeli siły osiowe są znaczne a pręt jest wiotki, to należy odrzucić zasadę zeszywnienia i uwzględnić wpływ sił osiowych na powstawanie momentów zginających.
- W takim przypadku rozwiązujemy układ prętowy według teorii II-go rzędu.

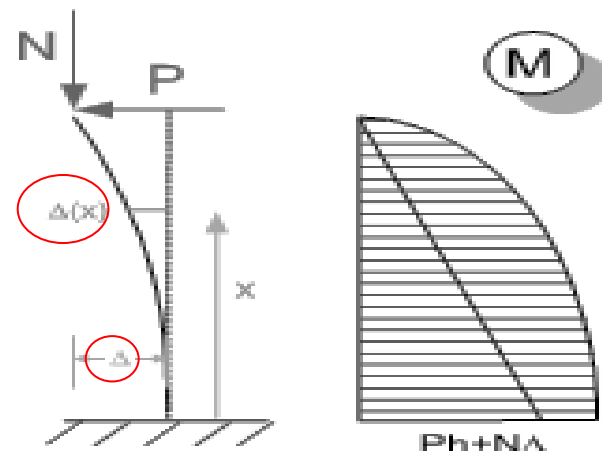
Według teorii I-go rzędu

I.
 $M(x) = P \cdot x$
 $M = P \cdot h$



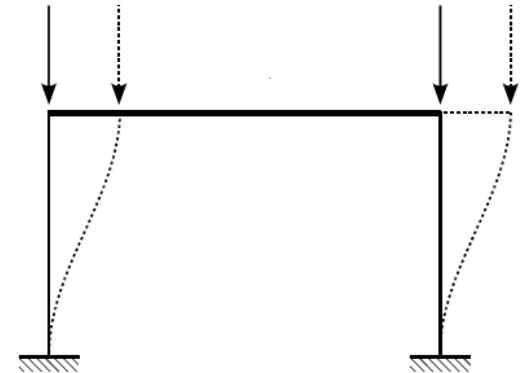
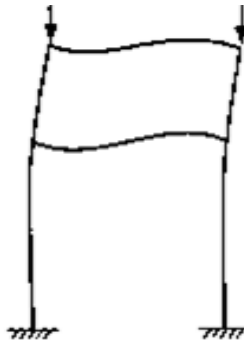
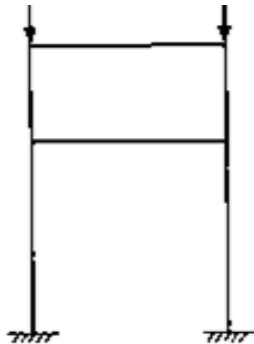
Według teorii II-go rzędu

II.
 $M(x) = P \cdot x + N \cdot \Delta(x)$
 $M = P \cdot h + N \cdot \Delta$



Stateczność ustrojów prętowych. Wprowadzenie

- ❑ Stan równowagi konstrukcji prętowych nazywamy statecznym, gdy konstrukcja powraca do pierwotnego stanu po usunięciu przyczyny, która spowodowała małe wychylenia ze stanu wyjściowego.
- ❑ Jeśli układ nie powraca po usunięciu przyczyny do stanu 0, to taki stan nazywamy niestatecznym stanem równowagi.

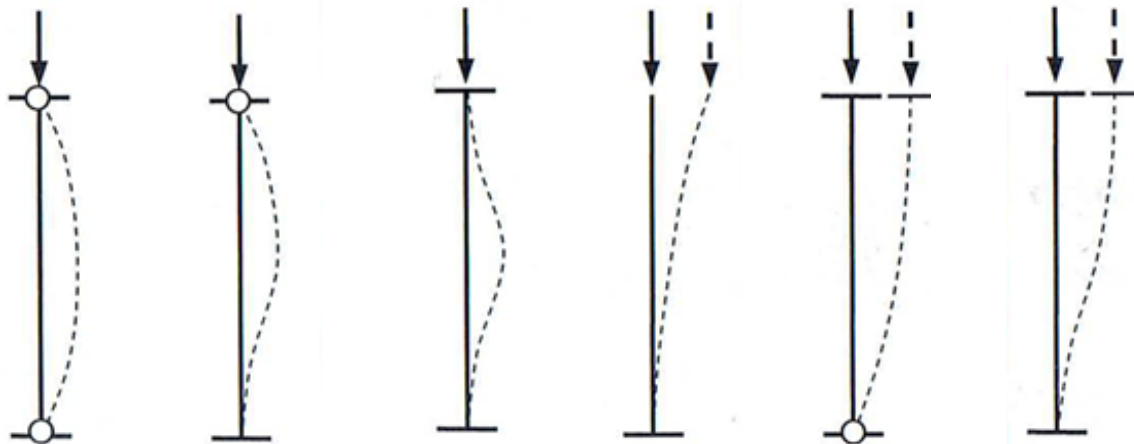


- ❑ Pręt ściskany przy pewnej wartości siły może się wyboczyć, a więc przyjąć postać zakrzywioną i wówczas w tym pręcie obok ściskania wystąpi również zginanie.
- ❑ Ponieważ dla wyboczonej konstrukcji oprócz naprężeń ściskających siła osiowa będzie powodować również zginanie, a więc naprężenia zginające, nastąpi szybciej zniszczenie konstrukcji ze względu na wyczerpanie nośności ze względu nie tylko na ściskanie ale i zginanie.

Stateczność ustrojów prętowych. Wprowadzenie

Założenia w analizie stateczności dla konstrukcji liniowo - sprężystych:

- ❖ małe przemieszczenia w stosunku do rozmiarów pręta tj. jego długości,
 - ❖ liniowa zależność pomiędzy obciążeniem a przemieszczeniami,
 - ❖ odrzucenie zasady zeszytnienia.
- ❑ Utrata stateczności ustroju prętowego następuje wtedy, kiedy siła ściskająca osiągnie taką wartość, że przemieszczenia konstrukcji będą narastały w sposób nieograniczony przy praktycznie niezmieniającej się wartości obciążenia.
- ❑ W analizie stateczności poszukujemy minimalnej wartości siły osiowej, przy której nastąpi utrata stateczności ustroju prętowego – jest ona nazywana siłą krytyczną P_{kr} (lub N_{kr}).

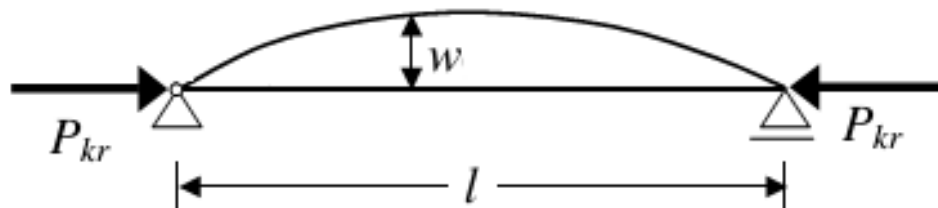




Stateczność ustrojów prętowych.

Wprowadzenie

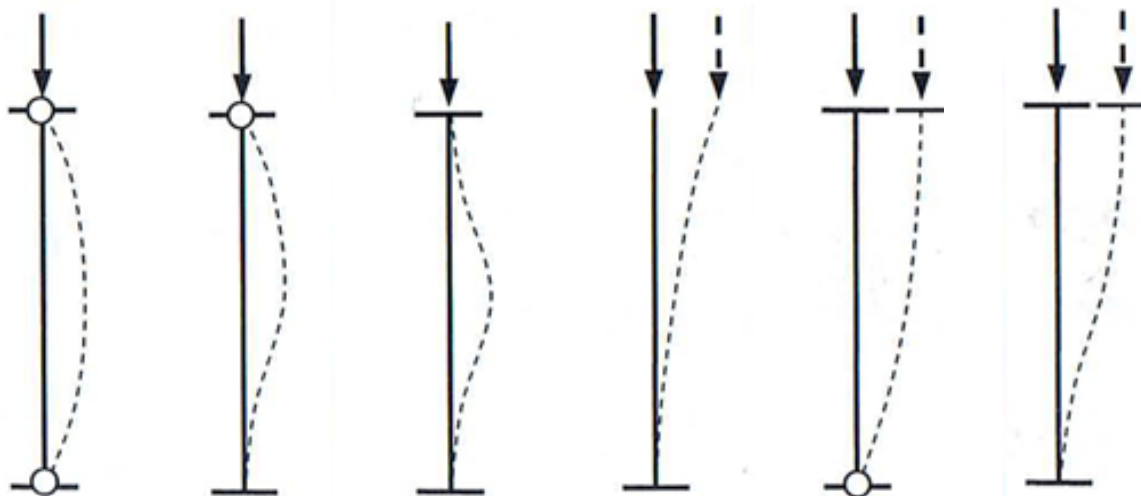
- Siła krytyczna P_{kr} to siła, przy której osiowo ściskany pręt znajduje się w **stanie równowagi obojętnej**, czyli po usunięciu siły ściskającej pręt pozostanie krzywoliniowy.
- Jeżeli siła ściskająca jest mniejsza niż siła krytyczna dla danego pręta, to pręt powraca do swojej pierwotnej postaci tj. do **stanu równowagi statycznej**.



- Siła krytyczna

$$N_{kr} = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{(L^w)^2}$$

gdzie EJ
(sztywność)
i L^w (długość
wyboczeniowa)



$$\frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

$$\frac{20.14 E I}{l^2}$$

$$\frac{4 \pi^2 E I}{l^2}$$

$$\frac{\pi^2 E I}{4 l^2}$$

$$\frac{\pi^2 E I}{4 l^2}$$

$$\frac{\pi^2 E I}{l^2}$$

Stateczność ustrojów prętowych.

Wprowadzenie

- ❑ W projektowaniu konstrukcji nieodzowna jest znajomość wielkości siły krytycznej, przy której nastąpi wyboczenie konstrukcji jak i długości wyboczeniowych prętów L_w , z których zbudowana jest konstrukcja.
- ❑ Schematy prętów o różnych warunkach brzegowych, dla których wyznaczono długości wyboczeniowe prętów L_w pokazano poniżej:

$$L^w = \mu \cdot L$$



1



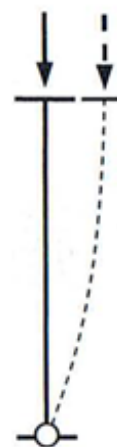
0,7



0,5



2



2



1

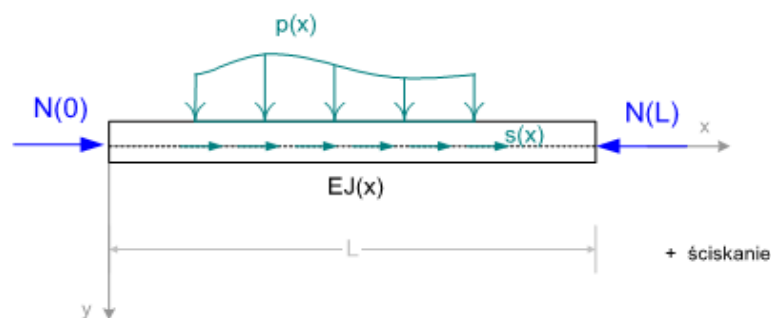
 μ



Stateczność ustrojów prętowych. Równanie różniczkowe pręta

Jak wyznacza się siłę krytyczną w pręcie podanemu obciążeniu osiowemu?

- ❑ Rozpatrujemy pręt prosty o sztywności EJ ściskany siłą N i obciążony obciążeniem $p(x)$ jak poniżej. Jego równanie różniczkowe jest postaci:



$$EJ \frac{d^4 W(x)}{dx^4} + N \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = p(x)$$

- ❑ Dalej będziemy zajmować się problemem stateczności tj. gdy $p(x)=0$ jak poniżej. Jego równanie różniczkowe jest postaci:



$$EJ \frac{d^4 W(x)}{dx^4} + N \frac{d^2 W(x)}{dx^2} = 0$$

- ❑ Rozwiązanie równania pręta w postaci równania różniczkowego:

$$w(\xi) = C_0 + C_1 \xi + C_2 \sin \lambda \xi + C_3 \cos \lambda \xi$$



Stateczność ustrojów prętowych.

Równanie różniczkowe pręta

□ Rozwiązanie równania pręta w postaci równania różniczkowego:

$$w(\xi) = C_0 + C_1 \xi + C_2 \sin \lambda \xi + C_3 \cos \lambda \xi$$

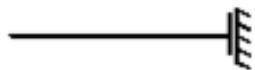
gdzie stałe C_0 , C_1 , C_2 i C_3 są wyliczane dla różnych warunków brzegowych



$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0 \quad (M = 0),$$



$$w = 0, \quad \frac{dw}{d\xi} = 0 \quad (\varphi = 0),$$



$$\frac{dw}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^3 w}{d\xi^3} = 0 \quad (\varphi = 0, T = 0),$$

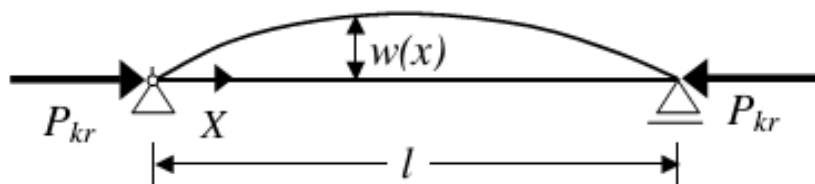


$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{d\xi^3} + \lambda^2 \frac{dw}{d\xi} = 0 \quad (M = 0, T = 0)$$



Stateczność ustrojów prętowych. Równanie różniczkowe pręta

□ Dla belki swobodnie podpartej mamy:



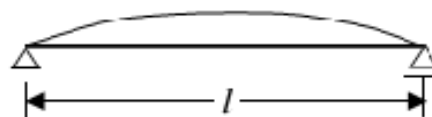
$$k^2 = \frac{P_{kr}}{EJ_{min}} \quad w(x) = A \sin kx + B \cos kx$$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{P_{kr}}{EJ_{min}} w(x) = 0$$

$$w(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad w(l) = 0$$

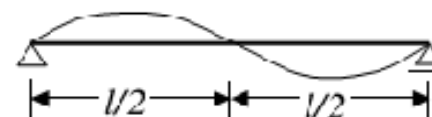
$$n = 1 \quad P_{kr,1} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2}$$

$$w(x) = A \sin \frac{\pi}{l} x$$



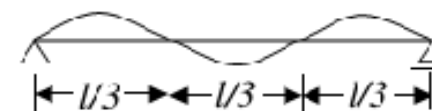
$$n = 2 \quad P_{kr,2} = \frac{4 \pi^2 EJ_{min}}{l^2}$$

$$w(x) = A \sin \frac{2\pi}{l} x$$



$$n = 3 \quad P_{kr,3} = \frac{9 \pi^2 EJ_{min}}{l^2}$$

$$w(x) = A \sin \frac{3\pi}{l} x$$

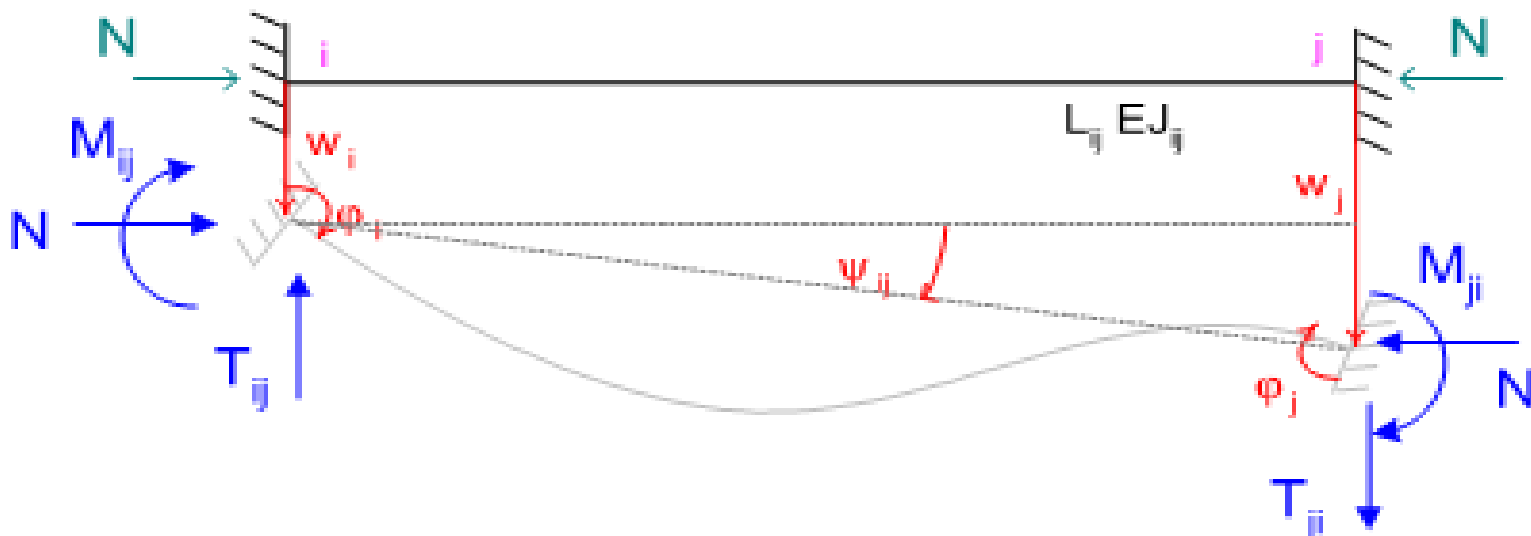


Każdej wartości siły krytycznej odpowiada inna forma deformacji pręta, inna postać wyboczonego pręta.

Za siłę krytyczną P_{kr} uznamy tę najmniejszą, odpowiadającą $n=1$.

Stateczność ustrojów prętowych. Wzory transformacyjne

- ❑ Problem stateczności złożonych układów prętowych może być rozpatrywany tylko przy zastosowaniu odpowiednich metod obliczeniowych jak np. **metoda przemieszczeń**.
- ❑ Aby zastosować metodę przemieszczeń w zakresie stateczności zachodzi potrzeba wyprowadzenia wzorów transformacyjnych podobnie jak dla zadania statycznego z uwzględnieniem tylko siły osiowej.
- ❑ Rozpatrzmy przemieszczenie końców pręta ij o sztywności EJ_{ij} oraz długości L_{ij} . Rozpatrujemy przemieszczenia końca pręta ściskanego.





Stateczność ustrojów prętowych. Wzory transformacyjne

□ Wzory transformacyjne dla pręta prostego wg teorii rzędu 2-go

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o, \quad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o, \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o$$

gdzie a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji} - \lambda_{ij}^2$ (lub $+\bar{\lambda}_{ij}^2$) są funkcjami parametrów $\lambda_{ij} = L_{ij} \cdot \sqrt{|N_{ij}| / EI_{ij}}$ (dla prętów ściskanych) lub $\bar{\lambda}_{ij} = L_{ij} \cdot \sqrt{N_{ij} / EI_{ij}}$ (dla prętów rozciąganych)

$$\bar{\lambda}_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{N_{ij} \cdot \alpha_{cr}}{EI_{ij}}}$$

$$\lambda_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{|N_{ij}| \alpha_{cr}}{EI_{ij}}}$$

Parametry

pręta ij zależą od siły osiowej N_{ij} w pręcie, sztywności na zginanie EI_{ij} pręta oraz długości pręta L_{ij} .

□ Powyższe parametry dla wybranych typów prętów o stałej sztywności EI i stałej wartości siły wewnętrznej w pręcie są zgrupowane ze względu na:

- efekt wywołany siłą osiową tj. ściskanie, rozciąganie (lub siła zerowa),
- typ podparcia pręta (warunki brzegowe).

**Stateczność ustrojów prętowych.****Wzory transformacyjne**

- Współczynniki do wzorów transformacyjnych dla pręta prostego wg teorii rzędu 1-go (pręty zerowe) i 2-go (ściskane i rozciągane)

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	c_{ij}	c_{ji}	$d_{ij} = d_{ji}$
		$\alpha(\lambda)$	$\alpha(\lambda)$	$\beta(\lambda)$	$\vartheta(\lambda)$	$\vartheta(\lambda)$	$\delta(\lambda)$
		4	4	2	6	6	12
		$\alpha(\bar{\lambda})$	$\alpha(\bar{\lambda})$	$\beta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\delta(\bar{\lambda})$
		$\alpha'(\lambda)$	0	0	$\alpha'(\lambda)$	0	$\delta'(\lambda)$
		3	0	0	3	0	3
		$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	0	$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	$\delta'(\bar{\lambda})$
		$\alpha''(\lambda)$	$\alpha''(\lambda)$	$\beta''(\lambda)$	0	0	0
		1	1	-1	0	0	0
		$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\beta''(\bar{\lambda})$	0	0	0
		$\alpha'''(\lambda)$	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		$\alpha'''(\bar{\lambda})$	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	$-\lambda^2$
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	λ^2



Stateczność ustrojów prętowych.

Wzory transformacyjne

□ Wzory transformacyjne w szczegółowej postaci dla prętów ściskanych:



$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\alpha(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} + \beta(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ji} - v(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o(\lambda_{ij}),$$

$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\alpha(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ji} + \beta(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} - v(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o(\lambda_{ij}),$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-v(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} - v(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ji} + \delta(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o(\lambda_{ij}),$$

$$V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-v(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} - v(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ji} + \delta(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o(\lambda_{ij}),$$



$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\alpha'(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} - \alpha'(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o(\lambda_{ij}), \quad M_{ji} = 0,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-\alpha'(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} + \delta'(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o(\lambda_{ij}), \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-\alpha'(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} + \delta'(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o(\lambda_{ij})$$



$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\alpha''(\lambda_{ij}) \varphi_{ij} - \beta''(\lambda_{ij}) \varphi_{ji}) + M_{ij}^o(\lambda_{ij}),$$

$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\alpha''(\lambda_{ij}) \varphi_{ji} - \beta''(\lambda_{ij}) \varphi_{ij}) + M_{ji}^o(\lambda_{ij}), \quad V_{ij} = V_{ij}^o, \quad V_{ji} = 0,$$



$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \alpha'''(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} + M_{ij}^o(\lambda_{ij}), \quad M_{ji} = 0, \quad V_{ij} = V_{ij}^o(\lambda_{ij}), \quad V_{ji} = 0$$



$$M_{ij} = 0, \quad M_{ji} = 0, \quad V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-\lambda_{ij}^2 \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o(\lambda_{ij}), \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-\lambda_{ij}^2 \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o(\lambda_{ij}).$$



Stateczność ustrojów prętowych.

Wzory transformacyjne

□ Funkcje określające parametry we wzorach transformacyjnych:

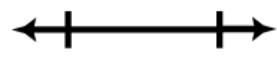
- dla pręta "sztywno-sztywnego"

- ściskanego 

$$\alpha(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda}, \quad \beta(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\lambda - \sin \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

$$\vartheta(\lambda) = \alpha(\lambda) + \beta(\lambda) = \lambda^2 \cdot \frac{1 - \cos \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

$$\delta(\lambda) = 2 \cdot \vartheta(\lambda) - \lambda^2 = \lambda^3 \cdot \frac{\sin \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

- rozciąganego 

$$\alpha(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \frac{sh \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \cdot ch \bar{\lambda}}{2 \cdot (ch \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot sh \bar{\lambda}}, \quad \beta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \frac{\bar{\lambda} - sh \bar{\lambda}}{2 \cdot (ch \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot sh \bar{\lambda}},$$

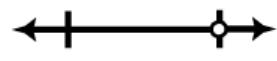
$$\vartheta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{1 - ch \bar{\lambda}}{2 \cdot (ch \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot sh \bar{\lambda}}, \quad \delta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{-sh \bar{\lambda}}{2 \cdot (ch \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot sh \bar{\lambda}},$$

- dla pręta "sztywno-przegubowego"

- ściskanego 

$$\alpha'(\lambda) = \alpha(\lambda) - \frac{\beta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \lambda^2 \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},$$

$$\delta'(\lambda) = \delta(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \alpha'(\lambda) - \lambda^2 = \lambda^3 \cdot \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},$$

- rozciąganego 

$$\alpha'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{sh \bar{\lambda}}{\bar{\lambda} \cdot ch \bar{\lambda} - sh \bar{\lambda}}, \quad \delta'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{ch \bar{\lambda}}{\bar{\lambda} \cdot ch \bar{\lambda} - sh \bar{\lambda}},$$



Stateczność ustrojów prętowych.

Wzory transformacyjne

□ Funkcje określające parametry we wzorach transformacyjnych:

- dla pręta "sztywno-łyżwowego"

- ściskanego 

$$\alpha''(\lambda) = \alpha(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\delta(\lambda)} = \alpha(\lambda) \cdot \frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} = \lambda \cdot \operatorname{ctg} \lambda,$$

$$\beta''(\lambda) = \beta(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\delta(\lambda)} = -\frac{\lambda}{\sin \lambda},$$

- rozciąganego 

$$\alpha''(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \operatorname{cth} \bar{\lambda},$$

$$\beta''(\bar{\lambda}) = -\frac{\bar{\lambda}}{\operatorname{sh} \bar{\lambda}},$$

- dla wspornika

- ściskanego 

$$\alpha'''(\lambda) = -\lambda \cdot \operatorname{tg} \lambda,$$

- rozciąganego 

$$\alpha'''(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \operatorname{th} \bar{\lambda}.$$



Stateczność ustrojów prętowych.

Wzory transformacyjne

□ Podsumowanie

Wzory transformacyjne dla dowolnego pręta prostego można przedstawić w postaci :

$$M_{ij} = \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o$$

$$M_{ji} = \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o$$

$$T_{ij} = \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ij} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + T_{ij}^o$$

$$T_{ji} = \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ij} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + T_{ji}^o$$

gdzie $a_{ij}, a_{ji}, b_{ij} = b_{ji}, c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}, c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}, d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji} - \lambda_{ij}^2$ (lub $\bar{\lambda}_{ij}^2$)

są funkcjami parametrów λ_{ij} lub $\bar{\lambda}_{ij}$ zależnymi od typu pręta. W teorii I-go rzędu są to liczby.

Oznaczenia tych funkcji dla wybranych typów prętów o stałej sztywności

ściskanych - teoria II-go rzędu

nie obciążonych - teoria I-go rzędu

rozciąganych - teoria II-go rzędu

zestawiono w tabeli , a określenie tych funkcji stanowią związki .



Stateczność ustrojów prętowych.

Wzory transformacyjne

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	c_{ij}	c_{ji}	$d_{ij} = d_{ji}$
		$\alpha(\lambda)$	$\alpha(\bar{\lambda})$	$\beta(\lambda)$	$\vartheta(\lambda)$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\delta(\lambda)$
		4	4	2	6	6	12
		$\alpha(\bar{\lambda})$	$\alpha(\bar{\lambda})$	$\beta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\delta(\bar{\lambda})$
		$\alpha'(\lambda)$	0	0	$\alpha'(\lambda)$	0	$\delta'(\lambda)$
		3	0	0	3	0	3
		$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	0	$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	$\delta'(\bar{\lambda})$
		$\alpha''(\lambda)$	$\alpha''(\lambda)$	$\beta''(\lambda)$	0	0	0
		1	1	-1	0	0	0
		$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\beta''(\bar{\lambda})$	0	0	0
		$\alpha'''(\lambda)$	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		$\alpha'''(\bar{\lambda})$	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	$-\lambda^2$
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	$\bar{\lambda}^2$

Z przedstawionych związków wpływ rzędu 2-go może być wyeliminowany przez przyjęcie $N_{ij} = \lambda_{ij} = \bar{\lambda}_{ij} = 0$ co sprowadza parametry a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ do współczynników liczbowych. Wartości tych współczynników dla wybranych typów prętów zestawiono także w tabeli.

- dla pręta "sztywno-sztywnego"

- ściskanego

$$\alpha(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda}, \quad \beta(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\lambda - \sin \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

$$\vartheta(\lambda) = \alpha(\lambda) + \beta(\lambda) = \lambda^2 \cdot \frac{1 - \cos \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

$$\delta(\lambda) = 2 \cdot \vartheta(\lambda) - \lambda^2 = \lambda^3 \cdot \frac{\sin \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda}$$

- rozciąganego

$$\alpha(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \frac{\text{sh} \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \cdot \text{ch} \bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh} \bar{\lambda}}, \quad \beta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \frac{\bar{\lambda} - \text{sh} \bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh} \bar{\lambda}},$$

$$\vartheta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{1 - \text{ch} \bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh} \bar{\lambda}}, \quad \delta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{\sin \bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh} \bar{\lambda}},$$

- dla pręta "sztywno-przegubowego"

- ściskanego

$$\alpha'(\lambda) = \alpha(\lambda) - \frac{\beta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \lambda^2 \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},$$

$$\delta'(\lambda) = \delta(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \alpha'(\lambda) - \lambda^2 = \lambda^3 \cdot \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},$$

- rozciąganego

$$\alpha'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{\text{sh} \bar{\lambda}}{\bar{\lambda} \cdot \text{ch} \bar{\lambda} - \text{sh} \bar{\lambda}}, \quad \delta'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{\text{ch} \bar{\lambda}}{\bar{\lambda} \cdot \text{ch} \bar{\lambda} - \text{sh} \bar{\lambda}}$$

- dla pręta "sztywno-łyżwowego"

- ściskanego

$$\alpha''(\lambda) = \alpha(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\delta(\lambda)} = \alpha(\lambda) \cdot \frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} = \lambda \cdot \text{ctg} \lambda,$$

$$\beta''(\lambda) = \beta(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\delta(\lambda)} = -\frac{\lambda}{\sin \lambda},$$

- rozciąganego

$$\alpha''(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \text{cth} \bar{\lambda}, \quad \beta''(\bar{\lambda}) = -\frac{\bar{\lambda}}{\text{sh} \bar{\lambda}},$$

- dla wspornika

- ściskanego

$$\alpha'''(\lambda) = -\lambda \cdot \text{tg} \lambda,$$

- rozciąganego

$$\alpha'''(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \text{th} \bar{\lambda}.$$



Stateczność ustrojów prętowych.

Założenia MP w analizie stateczności

- ❑ W analizie stateczności obciążenie konstrukcji, jakie rozpatruje się ze względu na stateczność, stanowią tylko siły osiowe.
- ❑ Aby przeprowadzić analizę stateczności dowolnie obciążonego układu konstrukcyjnego musimy wyznaczyć siły osiowe np. Metodą Elementów Skończonych albo Metodą Przemieszczeń.
- ❑ Pręty w układzie konstrukcyjnym obciążamy siłami osiowymi, a każdemu prętowi w układzie przyporządkowujemy typ obliczeniowy pręta, dla którego dysponujemy wzorami transformacyjnymi wg teorii II-go rzędu.



pręt sztywno – sztywny



pręt sztywno – przegubowy



pręt sztywno – tyżwa



pręt swobodny – swobodny



pręt przegubowo – przegubowy



Stateczność ustrojów prętowych.

Założenia MP w analizie stateczności

- ❑ Założenia w analizie stateczności przy wykorzystaniu metody przemieszczeń MP:
- ❖ Dysponujemy wzorami transformacyjnymi dla prętów prostych, pryzmatycznych o stałej sztywności na całej długości pręta i stałej sile osiowej. Przynajmniej jeden pręt musi być ściskany.
- ❖ Pręty o zmiennej sztywności będziemy dzielić na odcinki o stałej sztywności (można wyprowadzić wzory transformacyjne i dla niektórych przypadków istnieją takie wzory).
- ❖ Jeżeli siła osiowa jest zmienna na długości pręta, to dzielimy pręt na odcinki, gdzie siła osiowa jest stała na długości.
- ❖ Dla siły osiowej równej zero ($N=0$) obowiązują wzory transformacyjne klasycznej metody przemieszczeń w zadaniach statycznych (podane na wykładzie nt. metody przemieszczeń).
- ❖ Dla prętów rozciąganych można przyjmować, że siła osiowa jest równa zero ($N=0$), co prowadzi do rozwiązań przybliżonych, ale daje bezpieczniejsze oszacowanie rozwiązania.



Stateczność ustrojów prętowych.

Założenia MP w analizie stateczności

- ❑ Zadanie analizy stateczności:
 - określenie siły krytycznej, przy której następuje utrata stateczności tj. wyboczenie układu prętowego
 - określenie długości wyboczeniowych wszystkich prętów.
- ❑ Przyjmuje się założenie o nieodkształcalności osiowej prętów, ale należy pamiętać, że układ podstawowy metody przemieszczeń w przypadku badania stateczności może się różnić od układu podstawowego metody przemieszczeń w zagadnieniu statycznym.
- ❑ Ocena stateczności konstrukcji:
 - Lokalna utrata stateczności dla pojedynczego pręta,
 - Globalna utrata stateczności dla całego ustroju konstrukcyjnego.
- ❑ Parametr stateczności dla każdego pręta

$$\lambda^2 = \frac{N * L^2 \alpha_{cr}}{EJ}$$

gdzie N jest siłą osiową w pręcie, L jest długością pręta, a EJ - sztywnością, α_{cr} jest globalnym krytycznym mnożnikiem obciążenia



❖ Algorytm przeprowadzenia analizy stateczności konstrukcji
Metodą Przemieszczeń

1. Określenie sił osiowych w prętach oraz wyznaczenie mnożnika krytycznego obciążenia i parametru λ zależnego od α_{cr} ,
2. Wyznaczenie SGN układu i przyjęcie układu podstawowego z uwzględnieniem rozkładu sił osiowych na prętach i sztywności prętów,
3. Ułożenie równania kanonicznego MP dla analizy stateczności,
4. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążeń w postaci wymuszeń kinematycznych obrotów i przesuwów na kierunkach zadanych więzi w zależności od wyznaczonego SGN i przyjętego układu podstawowego,
5. Wyznaczenie współczynników macierzy sztywności,
6. Rozwiązanie równania stateczności i wyznaczenie krytycznej wartości α_{cr} ,
7. Obliczenie współczynników λ_{ij} , sił krytycznych, współczynników długości wyboczeniowych i długości wyboczeniowych dla wszystkich prętów,



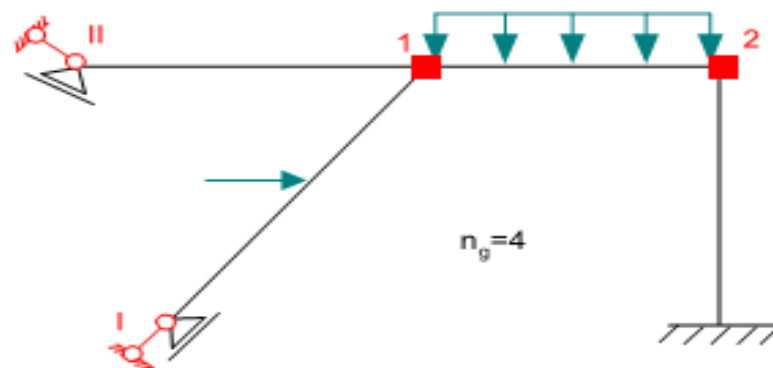
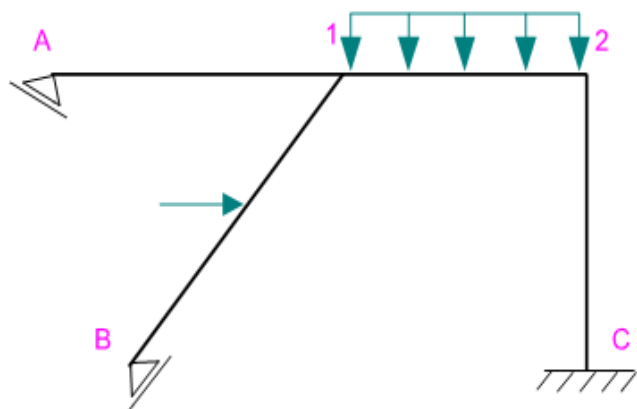
Stateczność ustrojów prętowych.

Założenia MP w analizie stateczności

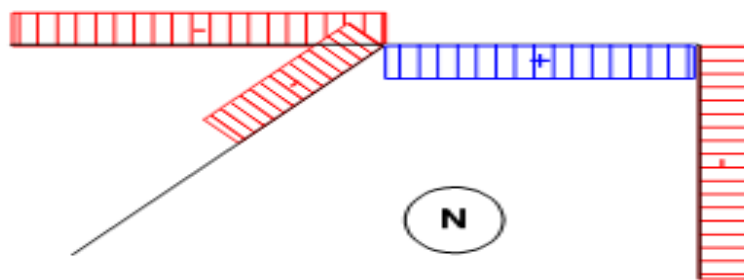
Analiza stateczności w ujęciu metody przemieszczeń

1. Układ rzeczywisty i podstawowy metody przemieszczeń konstrukcji obciążonej zadanymi siłami, dla której chcemy przeprowadzić analizę stateczności. Sztywność prętów EI .

$$n_g = 2 + 2 = 4!$$



2. Wykres sił osiowych w układzie rzeczywistym uzyskany z rozwiązania statycznego układu rzeczywistego np. metodą przemieszczeń lub za pomocą MES



- w kolorze czerwonym
siły ściskające

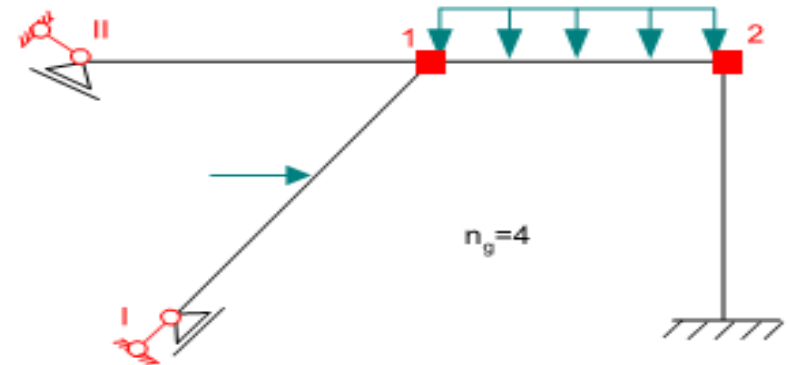
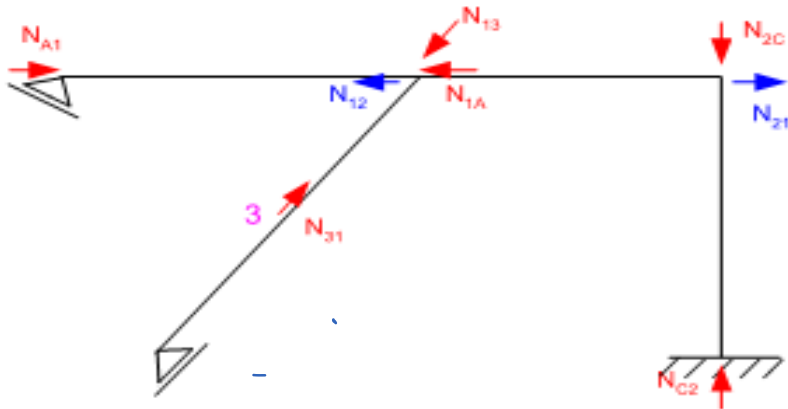
+ w kolorze niebieskim
siły rozciągające



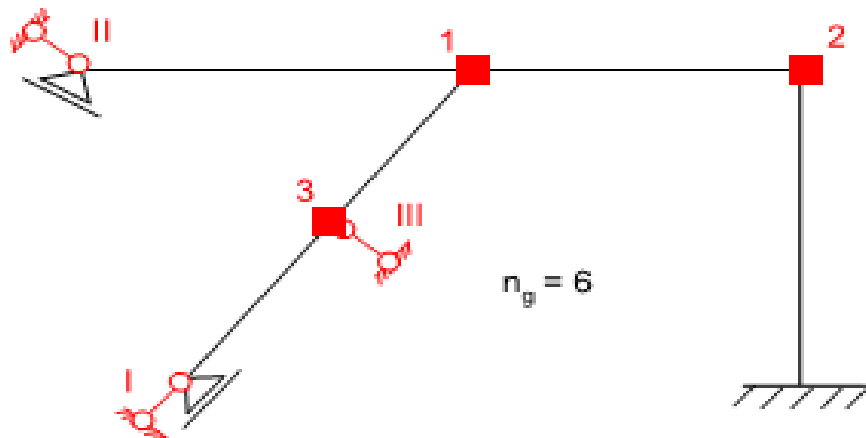
Stateczność ustrojów prętowych.

Założenia MP w analizie stateczności

3. Układ obliczeniowy rzeczywisty dla analizy stateczności z oznaczeniem sił osiowych



4. Zaktualizowany układ podstawowy z uwzględnieniem sił osiowych



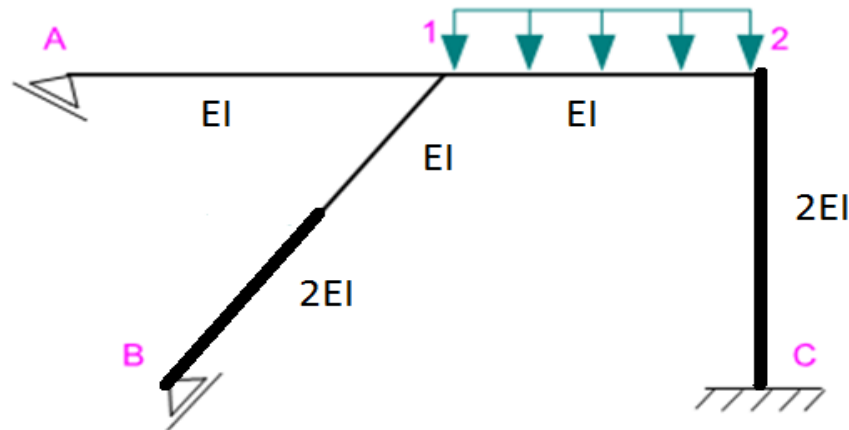
$$n_g = 3 + 3 = 6!$$

Stateczność ustrojów prętowych.

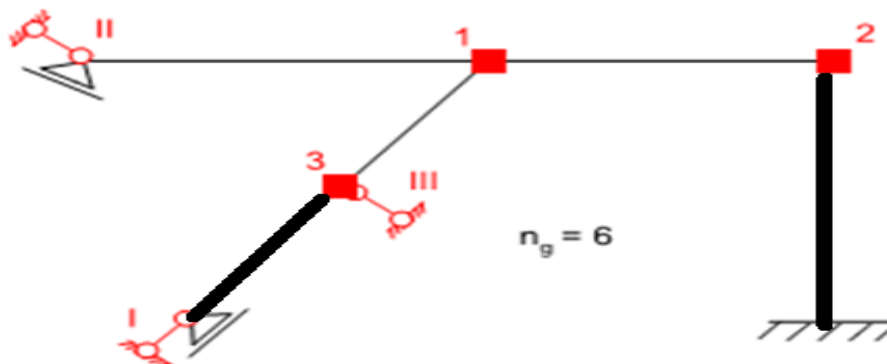
Założenia MP w analizie stateczności

□ Analiza stateczności w ujęciu metody przemieszczeń

1. Układ rzeczywisty konstrukcji obciążonej zadanymi siłami, dla której chcemy przeprowadzić analizę stateczności. Sztywność prętów zmienna.



2. Układ podstawowy z uwzględnieniem sił osiowych



$$n_g = 3 + 3 = 6!$$

$$n_g = 6$$

**Stateczność ustrojów prętowych.****Równania kanoniczne w analizie stateczności**

- Budowanie równań kanonicznych metody przemieszczeń w zagadnieniu stateczności wygląda jak w zagadnieniu statycznym. Budujemy układ równań (w formie macierzowej):

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \cdots & k_{1I} & \cdots \\ k_{21} & k_{22} & \cdots & k_{2I} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ k_{I1} & k_{I2} & \cdots & k_{II} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \Delta_I \\ \vdots \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{0}}$$

W skróconej formie zapisu mamy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\Delta} \\ \mathbf{K}_{\Delta\varphi} & \mathbf{K}_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Phi} \\ \bar{\Delta} \end{bmatrix} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{q}} = 0$$

- Po lewej stronie mamy współczynniki sztywności układu konstrukcyjnego i wektor przemieszczeń, a po prawej stronie zerowy wektor obciążeń.



Stateczność ustrojów prętowych.

Równania kanoniczne w analizie stateczności

❑ Współczynniki układu równań (macierzy) mają postać:

$$k_{ii} = \sum_j \left(a(\lambda) \frac{EJ}{L} \right)_{ij} + k_{\varphi_i}$$

Sumowanie po wszystkich prętach schodzących się w węźle „ i ”.
 k_{φ} - jest sztywnością sprężyny w węźle „ i ”.

$$k_{ij} = k_{ji} = \left(b(\lambda) \frac{EJ}{L} \right)_{ij}$$

k_{ij} - jest momentem w węźle „ i ”, który powstał od obrotu węzła „ j ” o kąt $\varphi_j=1$ w układzie podstawowym. Gdy węzły „ i ” i „ j ” nie są połączone prętem wówczas $k_{ij} = k_{ji} = 0$.

$$k_{iI} = k_{Ii} = - \sum_j \left(c(\lambda) \frac{EJ}{L} \right)_{ij} \psi_{ij}^I$$

Sumowanie po wszystkich prętach schodzących się w węźle „ i ”.
 k_{iI} - jest momentem w węźle „ i ” wywołany przesunięciem $\Delta_I=1$ w układzie podstawowym

$$k_{IJ} = k_{JI} = \sum_{(ij)} [d(\lambda)] \psi_{ij}^I \psi_{ij}^J \left(\frac{EJ}{L} \right)_{ij} + \sum_s k_{\Delta s} \delta_s^I \delta_s^J$$

Sumowanie po wszystkich prętach ij i wszystkich sprężynach translacyjnych s .
 k_{IJ} - jest siłą w więzi I wywołaną przemieszczeniem $\Delta_J=1$ w układzie podstawowym.

gdzie: EI jest sztywnością danego pręta, L jest długością pręta, a k_s sztywnością więzi sprężystej. **Parametry a , b , c i d należy wyliczyć.**

**Stateczność ustrojów prętowych.****Równania kanoniczne w analizie stateczności****RÓWNANIE STATECZNOŚCI**

gdzie

$$\det \mathbf{K}(\lambda_{ij}(\lambda)) = 0$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}, & \cdots & k_{1n_\varphi}, & k_{1I}, & \cdots & k_{1n_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\varphi 1}, & \cdots & k_{n_\varphi n_\varphi}, & k_{n_\varphi I}, & \cdots & k_{n_\varphi n_\delta} \\ k_{I1}, & \cdots & k_{In_\varphi}, & k_{II}, & \cdots & k_{In_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\delta 1}, & \cdots & k_{n_\delta n_\varphi}, & k_{n_\delta I}, & \cdots & k_{n_\delta n_\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}, \mathbf{K}_{\varphi\delta} \\ \mathbf{K}_{\delta\varphi}, \mathbf{K}_{\delta\delta} \end{bmatrix} \text{ jest macierzą sztywności, któr}$$

współczynniki są funkcjami parametrów $\lambda_{ij} = L_{ij} \cdot \sqrt{|N_{ij}| / EI_{ij}}$ (dla prętów ściskanych) lub

$\bar{\lambda}_{ij} = L_{ij} \cdot \sqrt{N_{ij} / EI_{ij}}$ (dla prętów rozciąganych)

$k_{ij}, k_{i\beta}$ są momentami w rotacyjnej więzi "i" wywołanymi odpowiednio:

- obrotem rotacyjnej więzi "j" o kąt $\varphi_j = 1$,
- przesunięciem w miejscu i kierunku translacyjnej więzi " β " o $\delta_\beta = 1$,

$k_{\alpha j}, k_{\alpha\beta}$ są siłami w rotacyjnej więzi "i" wywołanymi odpowiednio:

- obrotem rotacyjnej więzi "j" o kąt $\varphi_j = 1$,



Stateczność ustrojów prętowych.

Równania kanoniczne w analizie stateczności

Z powyższych określeń wynika, że współczynniki macierzy sztywności mogą być podzielone na 4 grupy to jest:

- momenty w dodanych więziach rotacyjnych wywołane:

- obrotami

$$(\mathbf{K}_{\varphi\varphi} = [k_{ij}]),$$

- przesunięciami

$$(\mathbf{K}_{\varphi\delta} = [k_{i\beta}]),$$

- reakcje w dodanych więziach translacyjnych wywołane:

- obrotami

$$(\mathbf{K}_{\delta\varphi} = \mathbf{K}_{\varphi\delta}^T = [k_{\alpha j}]),$$

- przesunięciami

$$(\mathbf{K}_{\delta\delta} = [k_{\alpha\beta}]),$$

WZORY OKREŚLAJĄCE WSPÓŁCZYNNIKI MACIERZY SZTYWNOŚCI

$\mathbf{K}_{\varphi\varphi};$

$$k_{ii} = \sum_j M_{ij}^i + k_i^\varphi = \sum_j a_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} + k_i^\varphi, \quad k_{ij} = M_{ij}^j = b_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}}, \quad j \neq i,$$

$\mathbf{K}_{\varphi\delta};$

$$k_{i\beta} = \sum_j M_{ij}^\beta = -\sum_j c_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \psi_{ij}^\beta,$$

$\mathbf{K}_{\delta\varphi};$

$$k_{\alpha j} = -\sum_{ij} (M_{ij}^j + M_{ji}^j) \cdot \psi_{ij}^\alpha = \sum_{ij} V_{ij}^j \cdot \Delta_{ij}^\alpha = -\sum_{ij} c_{ji}^j \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \psi_{ij}^\alpha$$

$\mathbf{K}_{\delta\delta};$

$$k_{\alpha\beta} = -\sum_{ij} (M_{ij}^\beta + M_{ji}^\beta \left\{ \begin{array}{l} + \lambda_{ij}^2 \\ - \bar{\lambda}_{ij}^2 \end{array} \right\} \cdot \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \psi_{ij}^\beta) \cdot \psi_{ij}^\alpha + \sum_s k_i^\delta \cdot \Delta L_i^\alpha \cdot \Delta L_i^\beta =$$

$$= \sum_{ij} V_{ij}^\beta \cdot \Delta_{ij}^\alpha + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^\beta = \sum_{ij} d_{ij} \cdot \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \psi_{ij}^\alpha \cdot \psi_{ij}^\beta + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^\beta$$

Uwaga: Do wzoru powyższego wstawia się $+\lambda_{ij}^2$ dla prętów ściskanych

$-\bar{\lambda}_{ij}^2$ dla prętów rozciąganych.

Momenty M_{ij} i siły poprzeczne V_{ij} w powyższych wzorach określone są przez wzory transformacyjne według teorii rzędu 2-go.



Stateczność ustrojów prętowych.

Równania kanoniczne w analizie stateczności

- ❖ Układ równań (macierzowy) jest jednorodny i aby istniało jego niezerowe rozwiązanie

$$\bar{\mathbf{q}} = [\bar{\Phi} \quad \bar{\Delta}]^T \neq 0$$

warunkiem koniecznym jest **zerowanie się wyznacznika $\det K(\lambda) = 0$** układu równań (macierzy sztywności). Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, szukamy rozwiązania dla najmniejszego parametru λ_{cr} .

- ❖ Z warunku **$\det K(\lambda) = 0$** otrzymamy λ_{cr} lub α_{cr} , a dalej siłę krytyczną P_{cr}
- ❖ Przestępne równanie **$\det K(\lambda) = 0$** rozwiązujemy numerycznie - drogą kolejnych przybliżeń.
- ❖ Każdy pręt ma własny parametr λ_{ij} , natomiast w wyznaczniku musi występować tylko jeden parametr:

$$\lambda_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{N_{ij} \alpha_{cr}}{EI_{ij}}} = \lambda_{o,ij} \sqrt{\alpha_{cr}}$$

$\lambda_{o,ij}$ - to wartość liczbowa zależna od siły, długości i przekroju pręta



Stateczność ustrojów prętowych.

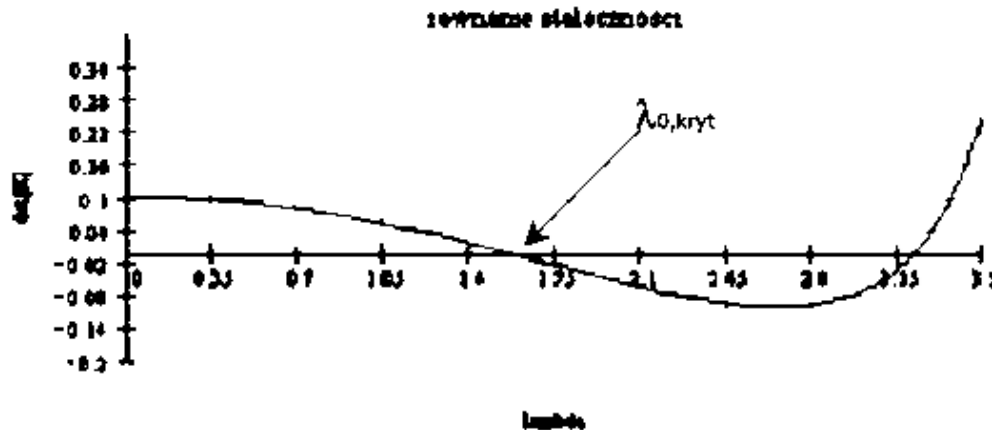
Równania kanoniczne w analizie stateczności

- ❖ Ustalając parametry porównawcze, każdy par λ_{ij} etr dla każdego pręta ij możemy wyr λ_0 ć przez jako:

$$\lambda_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{N_{ij} \alpha_{cr}}{EI_{ij}}} = \lambda_{0,ij} \sqrt{\alpha_{cr}}$$

- ❖ W równaniu $\det K(\lambda) = 0$ występuje tylko jeden nieznanany parametr α_{cr} i po rozwiązaniu (wyznaczeniu jego wartości) otrzymujemy globalny, krytyczny mnożnik obciążenia.
- ❑ Jak wspomniano wcześniej, równanie $\det K(\lambda(\alpha_{cr})) = 0$ rozwiązujemy numerycznie drogą prób przy wykorzystaniu programów komputerowych.

Graficzne badanie wartości
wyznacznika pokazano
na rysunku





Stateczność ustrojów prętowych.

Wyznaczenie długości wyboczeniowej

- ❖ Znając α_{cr} dla każdego pręta możemy wyliczyć parametr stateczności a następnie obliczyć współczynnik długości wyboczeniowej dla każdego z prętów

$$\mu_{ij} = \frac{\pi}{\lambda_{ij}}$$

- ❖ Dla każdego pręta ij wyznaczamy siłę krytyczną P_{cr} :

$$P_{ij,cr} = \left(\frac{\lambda_{ij}}{L_{ij}} \right)^2 EI_{ij} = \frac{\pi^2 EI_{ij}}{(\mu_{ij} L_{ij})^2} = \frac{\pi^2 EI_{ij}}{L_{w_{ij}}^2}$$

$$P_{ij,cr} = \alpha_{cr} \cdot P_{ij}$$

**Stateczność ustrojów prętowych.****Wyznaczenie długości wyboczeniowej**

- ❖ Przypomnijmy, że siła krytyczna Eulera (N_e) dla belki swobodnie podpartej wynosi

$$N_e = \left(\frac{\pi}{L_w} \right)^2 EJ$$

(L_w - długość wyboczeniowa pręta)

- ❖ Przyrównując siłę krytyczną (P_{kr}) do siły krytycznej Eulera (N_e) otrzymamy długość wyboczeniową pręta ij L_w

$$N_{ij,kr} = N_{e,ij} \rightarrow \left(\frac{\lambda_{ij,kr}}{L_{ij}} \right)^2 (EJ)_{ij} = \left(\frac{\pi}{L_{ij,w}} \right)^2 (EJ)_{ij}$$

otrzymuje się wzór na długość wyboczeniową:

$$L_{ijw} = \frac{\pi}{\lambda_{ijkr}} \cdot L_{ij} = \mu_{ij} \cdot L_{ij}$$

$$L_{ij,w} = \frac{\pi}{\lambda_{ij,kr}} L_{ij}$$



Stateczność ustrojów prętowych.

Wyznaczenie długości wyboczeniowej

- ❖ Współczynnik długości wyboczeniowej prętów wynosi:

$$\mu_{ij} = \frac{\pi}{\lambda_{ij\ kr}}$$

$$L_{ij\ w} = \frac{\pi}{\lambda_{ij\ kr}} \cdot L_{ij} = \mu_{ij} \cdot L_{ij}$$

- ❖ Tabela z długościami i współczynnikami długości wyboczeniowej prętów

Policzona wartość parametru λ^{kr} dla układu nie może być mniejsza od podanych w tabeli wartości λ_{ij}^{lok} dla prętów, oraz policzone wartości współczynników długości wyboczeniowej μ_{ij} dla prętów nie mogą być mniejsze od podanych w zestawieniu wartości lokalnych współczynników długości wyboczeniowej μ_{ij}^{lok} .

typ pręta	μ_{ij}^{lok} $(\mu_{ij}^{lok} < \mu_{ij})$	$\lambda_{ij}^{lok} = \frac{\pi}{\mu_{ij}^{lok}}$ $(\lambda_{ij} < \lambda_{ij}^{lok})$ $(\lambda_{ij}^{lok} < \lambda^{kr})$
	0.5	6.2832
	0.7	4.4880
	1	3.1416
	2	1.5708
	1	3.1416



Stateczność ustrojów prętowych.

Wyznaczenie długości wyboczeniowej

❖ Interpretacja wyników, stateczność globalna i lokalna.

Uzyskane wyniki powinny spełniać warunki $\lambda_{ij} \leq \lambda_{ij}^{lok}$, $\mu_{ij} \geq \mu_{ij}^{lok}$. Jeśli okazałoby się, że dla któregoś pręta warunki te nie są spełnione, to zależnie od typu tego pręta może to oznaczać, że rozwiązanie jest błędne lub o nośności decyduje możliwość lokalnej utraty stateczności pręta.

Jeśli w wyniku poprawnego rozwiązania „globalnego” otrzyma się dla któregoś pręta wartość krytyczną λ_{ij}^{lok} większą od podanej w zestawieniu, to jako krytyczną należy przyjąć podaną w zestawieniu i na tej podstawie określić pozostałe parametry.

Nadmienić tu trzeba, że jest to mało prawdopodobne, by możliwa postać globalnej utraty stateczności była taka, że któryś z pierwszych czterech typów prętów nie doznał odkształceń.

Otrzymanie dla któregoś z tych prętów wartości λ_{ij}^{lok} większej od podanej w zestawieniu na ogół świadczy o błędnym rozwiązaniu. Dla pręta typu piątego to, czy nastąpi globalna czy lokalna utrata stateczności, zależy od rozkładu sił osiowych w układzie.