

Zadanie 6

Dany jest hiperstatyczny układ przestrzenny o schemacie statycznym i obciążeniu niemechanicznym jak na rysunku. Obliczyć wskazane przemieszczenie φ :

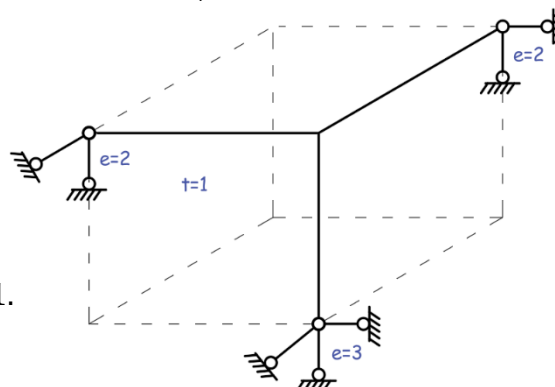
Dane:

$$\begin{aligned} T_z^+ &= 10^\circ\text{C}, \\ T_z^- &= -10^\circ\text{C}, \\ T_y^+ &= 15^\circ\text{C}, \\ T_y^- &= -15^\circ\text{C}, \\ \Delta r_1 &= 4 \text{ cm}, \\ \Delta r_2 &= 3 \text{ cm}, \end{aligned}$$

(RP 200x100x10, Stal S235):

$$\begin{aligned} GI_x &= 1691,80 \text{ kN} \cdot \text{m}^2; EI_y = 5594,4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2; EI_z = 1824,9 \text{ kN} \cdot \text{m}^2; \\ h_y &= 0,1 \text{ m}; h_z = 0,2 \text{ m}. \end{aligned}$$

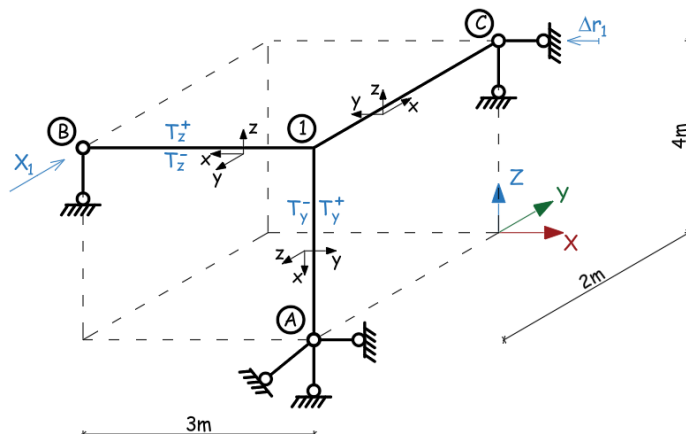
1. Obliczenie stopnia statycznej niewyznaczalności i sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu



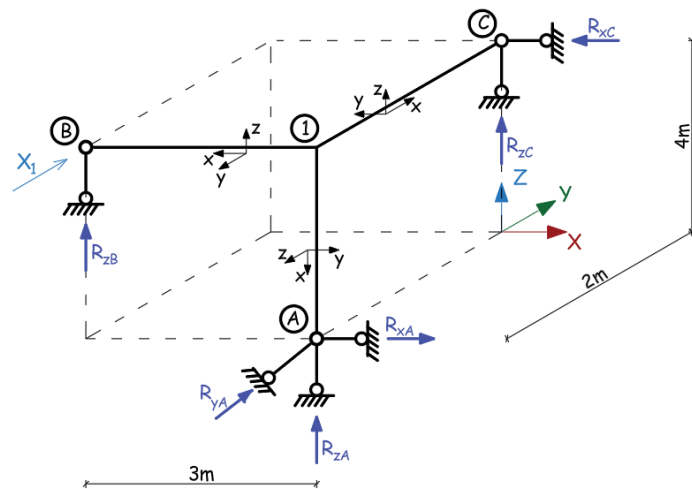
$$n_h = e - 6 \cdot t = 7 - 6 \cdot 1 = 1.$$

2. Dobranie układu podstawowego metody sił i postać ogólna układu równań metody sił

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1F} = \Delta_{1R} = \Delta r_2.$$



3. Rozwiązanie układu podstawowego metody sił od $X_1=1\text{kN}$



Obliczenie reakcji:

$$\sum M_x^A = 0 \Rightarrow \bar{R}_{zC}^1 \cdot 2\text{ m} - 1\text{ kN} \cdot 4\text{ m} = 0 \Rightarrow \bar{R}_{zC}^1 = 2\text{ kN},$$

$$\sum M_z^A = 0 \Rightarrow \bar{R}_{xC}^1 \cdot 2\text{ m} - 1\text{ kN} \cdot 3\text{ m} = 0 \Rightarrow \bar{R}_{xC}^1 = 1,5\text{ kN},$$

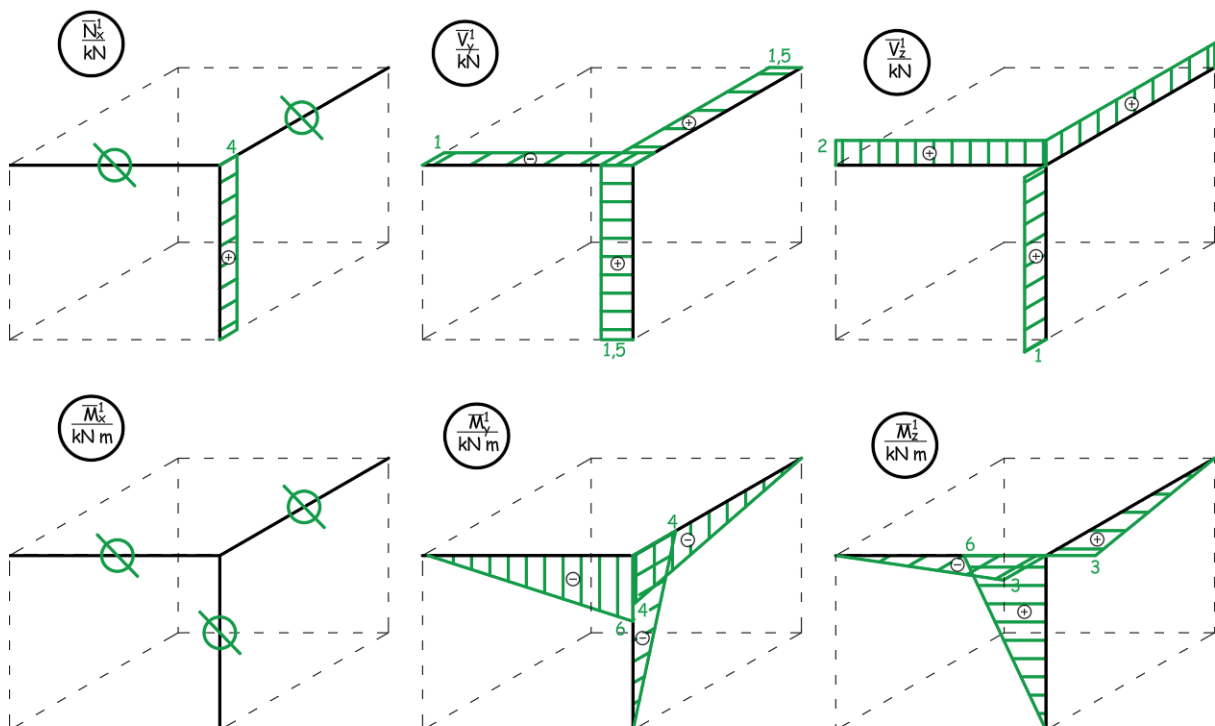
$$\sum M_y^A = 0 \Rightarrow \bar{R}_{zB}^1 \cdot 3\text{ m} - \bar{R}_{xC}^1 \cdot 4\text{ m} = 0 \Rightarrow \bar{R}_{zB}^1 = 2\text{ kN},$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{R}_{xA}^1 - \bar{R}_{xC}^1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{xA}^1 = 1,5\text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -\bar{R}_{yA}^F + 1\text{ kN} = 0 \Rightarrow \bar{R}_{yA}^F = 1\text{ kN},$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow \bar{R}_{zA}^1 + \bar{R}_{zB}^1 + \bar{R}_{zC}^1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{zA}^1 = -4\text{ kN}.$$

Wykresy sił wewnętrznych



4. Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych układu równań metody sił

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1T} + \delta_{1\Delta} = \Delta_{1R} = \Delta r_1,$$

$$1 \text{ kN} \cdot \delta_{11} = \sum_p \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^1}{EI_x} dx + \sum_p \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^1}{EI_y} dx + \sum_p \int \frac{\bar{M}_z^1 \bar{M}_z^1}{EI_z} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_\delta^1 \bar{S}_\delta^1}{k_\delta},$$

$$1 \text{ kN} \cdot \delta_{1T} = \sum_p \alpha \frac{\Delta T_z^+ - \Delta T_z^-}{h_z} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_y^- - \Delta T_y^+}{h_y} \Omega_{\bar{M}_z^i},$$

$$1 \text{ kN} \cdot \delta_{1\Delta} = - \sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n.$$

Ustalenie jednostek współczynników:

$$[\delta_{11}] = [\delta_{1F}] = \frac{1}{\text{kN}} \frac{\text{kNm} \cdot \text{kNm} \cdot \text{m}}{EI_y} = \frac{1}{\text{kN}} \frac{\text{kNm} \cdot \text{kNm} \cdot \text{m}}{\frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^4} = \text{m},$$

$$[\delta_{1T}] = \frac{1}{\text{kN}} \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{^\circ\text{C}}{\text{m}} \cdot \text{kNm} \cdot \text{m} = \text{m},$$

$$[\delta_{1\Delta}] = \frac{1}{\text{kN}} \cdot \text{kN} \cdot \text{m} = \text{m}.$$

Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych układu równań metody sił:

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-6) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (-4) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-4) + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot (-4) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-4) \right] \text{kNm}^3 \\ &\quad + \frac{1}{EI_z} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-3) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-3) + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 \right] \text{kNm}^3 \\ &= \frac{1}{5594,4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} [68] \text{kNm}^3 + \frac{1}{1824,9 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} [63] \text{kNm}^3 = 0,0467 \text{ m}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1T} &= \sum_p \alpha \frac{\Delta T_z^+ - \Delta T_z^-}{h_z} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_y^- - \Delta T_y^+}{h_y} \Omega_{\bar{M}_z^i} \\ &= \left[\frac{0,000012}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{10^\circ\text{C} - (-10^\circ\text{C})}{0,2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-6) \right] \text{m} \\ &\quad + \left[\frac{0,000012}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-15^\circ\text{C} - 15^\circ\text{C}}{0,1 \text{ m}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 \right] \text{m} = -0,054 \text{ m}, \end{aligned}$$

$$\delta_{1\Delta} = -\bar{R}_{xc}^1 \cdot \Delta r_1 = [-1,5 \cdot 0,04] \text{ m} = -0,06 \text{ m}.$$

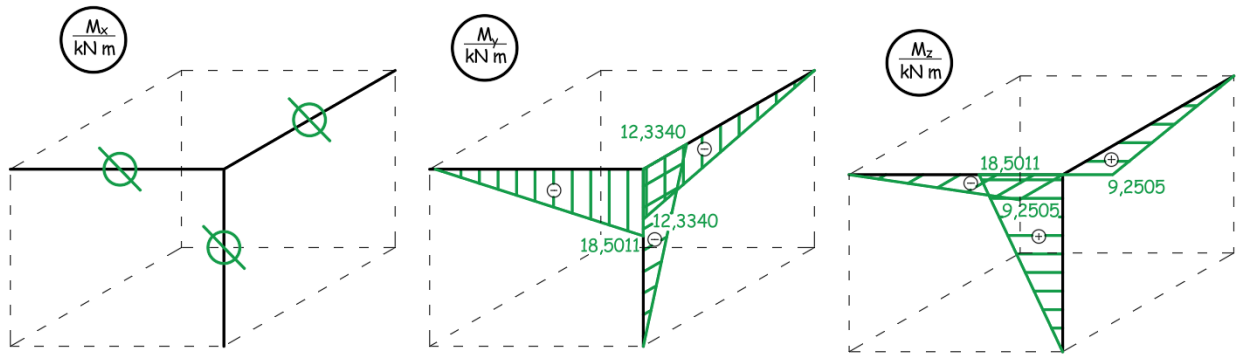
5. Postać szczegółowa układu równań metody sił i jego rozwiązanie

$$0,0467 \text{ m} \cdot X_1 - 0,054 \text{ m} - 0,06 \text{ m} = 0,03 \text{ m} \Rightarrow X_1 = 3,0835$$

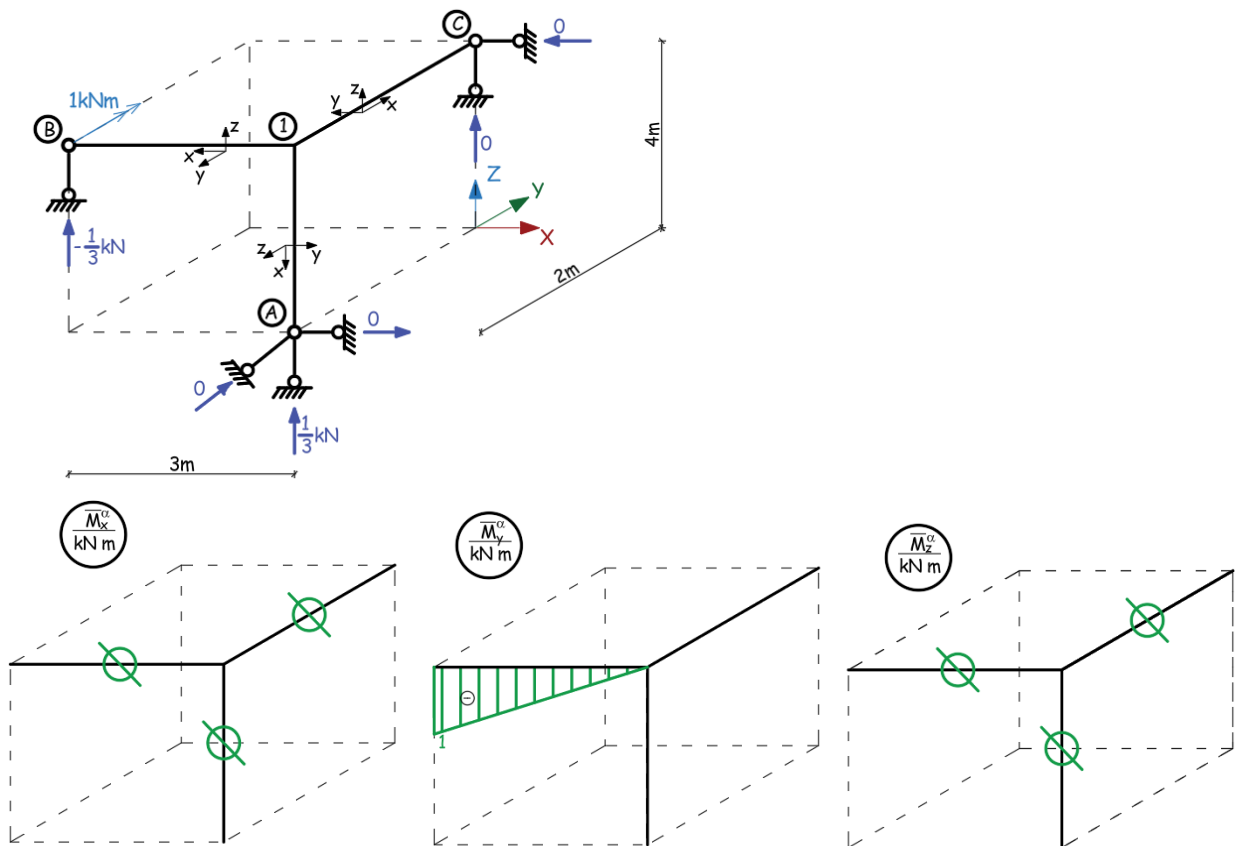
6. Obliczenie sił wewnętrznych i sporządzenie wykresów

$$R_{xij} = \bar{R}_{xij}^1 \cdot X_1; \quad M_{xij} = \bar{M}_{xij}^1 \cdot X_1; \quad M_{yij} = \bar{M}_{yij}^1 \cdot X_1; \quad M_{zij}^F = \bar{M}_{zij}^1 \cdot X_1$$

Sporządzenie wykresów:



7. Obliczenie szukanego przemieszczenia:



$$\begin{aligned}
 1 \text{ kNm} \cdot \delta_{\alpha F} &= \sum_p \int \frac{\bar{M}_x^\alpha M_x}{GI_x} dx + \sum_p \int \frac{\bar{M}_y^\alpha M_y}{EI_y} dx + \sum_p \int \frac{\bar{M}_z^\alpha M_z}{EI_z} dx \\
 &+ \sum_s \frac{\bar{S}_\delta^\alpha S_\delta}{k_\delta} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_z^+ - \Delta T_z^-}{h_z} \Omega_{\bar{M}_y^\alpha} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_y^- - \Delta T_y^+}{h_y} \Omega_{\bar{M}_z^\alpha} - \sum_n \bar{R}_n^\alpha \Delta r_n \\
 &= \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (-1 \text{ kNm}) \cdot \frac{1}{3} \cdot (-18,5011 \text{ kNm}) \right] + \frac{0,000012}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{10^\circ\text{C} - (-10^\circ\text{C})}{0,2\text{m}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3\text{m} \\
 &\cdot (-1 \text{ kNm}) \\
 \delta_{\alpha F} &= \frac{1}{5594,4 \text{ kN} \cdot \text{m}^2} [9,2505] \text{ kNm}^3 + \frac{0,000012}{^\circ\text{C}} \cdot (-150^\circ\text{C}) = 0,00165 - 0,0018 = -0,00015 \text{ rad}
 \end{aligned}$$