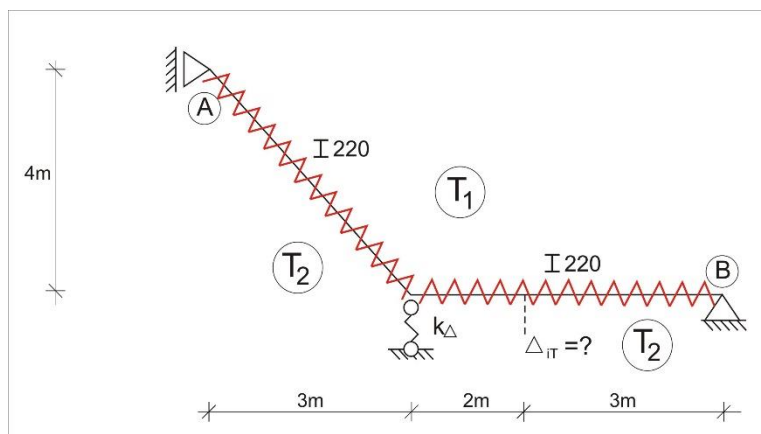


Układ jak na rysunku rozwiązać metodą sił. Obliczyć wartość zaznaczonego przemieszczenia wywołanego zmianami temperatury. Przeprowadzić kontrole obliczeń.



Dane do zadania:

$$T_1 = -10^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 12^\circ\text{C}$$

$$\alpha_T = 0.000012/^\circ\text{C}$$

$$I = 3060 \text{ cm}^4$$

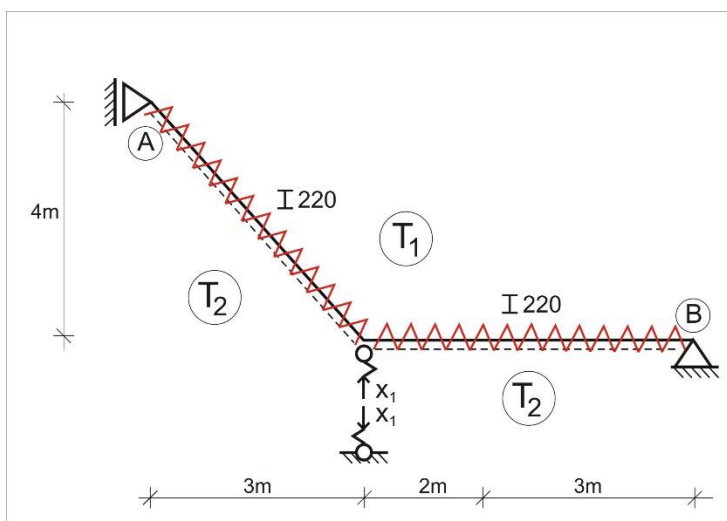
$$E = 205 \text{ GPa}$$

$$k_\Delta = 156825 \text{ kN/m}$$

$$h = 22 \text{ cm}$$

$$EI = 20500 \frac{\text{kN}}{\text{cm}^2} * 3060 \text{ cm}^4 = 6273 \text{ kNm}^2,$$

### 1. Układ podstawowy metody sił



### 2. Równanie kanoniczne metody sił

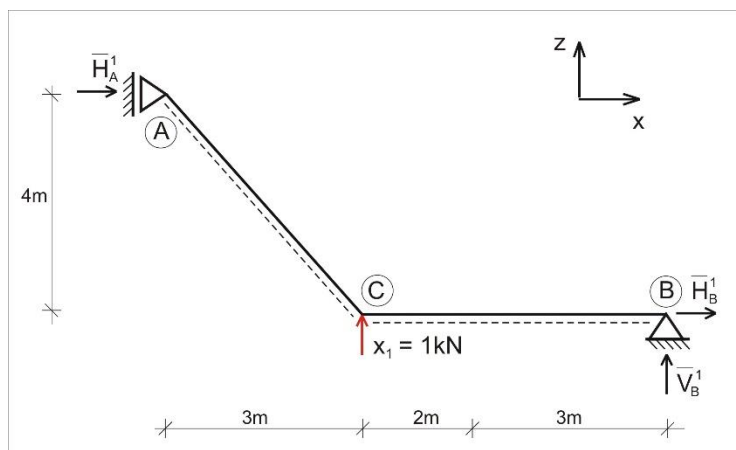
a. Postać ogólna równania

$$\delta_{11} X_1^T + \delta_{1T} = 0$$

b. Obliczenie współczynników równania

- rozwiązanie układu podstawowego od  $X_1^T = 1 \text{ kN}$

### Obliczenie reakcji



$$\sum M_B = 0$$

$$\bar{H}_A^1 * 4\text{m} + X_1 * 5\text{m} = 0 \quad \text{stąd}$$

$$\bar{H}_A^1 = -1.25 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0$$

$$\bar{V}_B^1 + X_1 = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{V}_B^1 = -1 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0$$

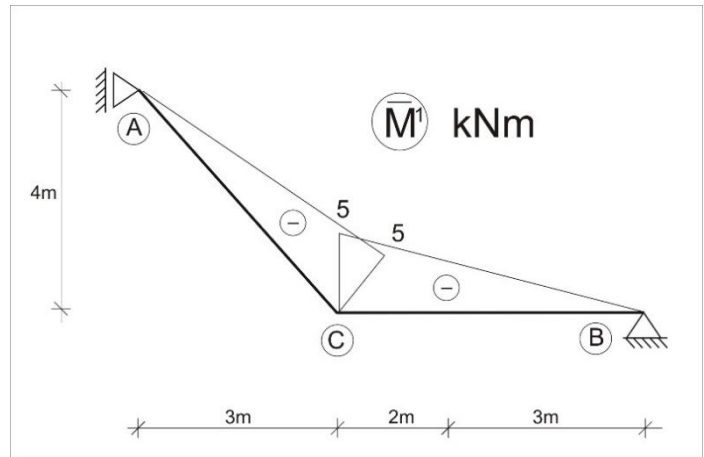
$$\bar{H}_A^1 + \bar{H}_B^1 = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{H}_B^1 = 1.25 \text{ kN}$$

**Obliczenie momentów zginających w poszczególnych przekrojach ramy**

$$\bar{M}_{AC}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{CA}^1 = \bar{H}_A^1 * 4m = -5 \text{ KNm} = \bar{M}_{CB}^1$$

$$\bar{M}_B^1 = 0$$



Wykres momentów zginających

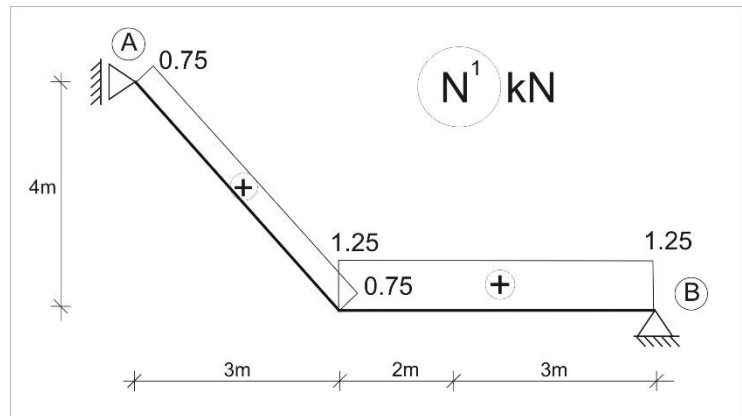
$$\Omega_{\bar{M}^1(AC)} = -0.5 * 5\text{kNm} * 5\text{m} = -12.5 \text{ kNm}^2, \quad \Omega_{\bar{M}^1(BC)} = -0.5 * 5\text{kNm} * 5\text{m} = -12.5 \text{ kNm}^2$$

**Obliczenie sił osiowych w poszczególnych przekrojach ramy**

$$\bar{N}_{AC}^1 = -H_A^1 \sin \alpha \quad \sin \alpha = 0.6$$

$$\bar{N}_{AC}^1 = 1.25 \text{ kN} * 0.6 = 0.75 \text{ kN}$$

$$\bar{N}_{BC}^1 = \bar{H}_B^1 = 1.25 \text{ kN}$$



Wykres sił osiowych

$$\Omega_{\bar{N}^1(AC)} = 0.75\text{kN} * 5\text{m} = 3.75 \text{ kNm}, \quad \Omega_{\bar{N}^1(BC)} = 1.25 \text{ kNm} * 5\text{m} = 6.25 \text{ kNm}$$

**Obliczenie współczynników**

$$T_o = \frac{T_1 + T_2}{2} = \frac{-10^\circ\text{C} + 12^\circ\text{C}}{2} = 1^\circ\text{C}$$

$$\Delta T = T_2 - T_1 = 12^\circ\text{C} - (-10^\circ\text{C}) = 22^\circ\text{C}$$

$$1\text{KN} * \delta_{11} = \sum_p \int_s \frac{\bar{M}^1 \bar{M}^1}{EI} ds + \frac{\bar{R}_S^1 \bar{R}_S^1}{k_\Delta}$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{6273\text{kNm}^2} \left\{ \left( \frac{1}{2} * 5\text{m} * 5\text{kNm} * \frac{2}{3} * 5\text{kNm} \right) + \left( \frac{1}{2} * 5\text{m} * 5\text{kNm} * \frac{2}{3} * 5\text{kNm} \right) \right\} + \frac{1\text{ kN} * 1\text{kN} * \text{m}^3}{6273\text{kNm}^2} = \mathbf{0.0133 \text{ m}}$$

$$1\text{ kN} * \delta_{1T} = \sum_p \int_s \frac{\bar{M}^1 \Delta T \alpha_T}{h} ds + \sum_p \int_s \bar{N}^1 T_o \alpha_T ds$$

$$\delta_{1T} = \frac{\Delta T \alpha_T}{EI} \int_s \bar{M}^1 ds + T_o \alpha_T \int_s \bar{N}^1 ds = \frac{\Delta T \alpha_T}{EI} \Omega_{\bar{M}^1} + T_o \alpha_T \Omega_{\bar{N}^1} =$$

$$= - \frac{22^\circ\text{C} * \frac{0.000012}{^\circ\text{C}}}{0.22 \text{ m}} (2 * 12.5\text{kNm}^2) + 1^\circ\text{C} * \frac{0.000012}{^\circ\text{C}} * 10\text{kNm} = -0.03 \text{ m} + 0.00014 \text{ m} = \mathbf{-0.02986 \text{ m}}$$

c. Postać szczegółowa równania kanonicznego

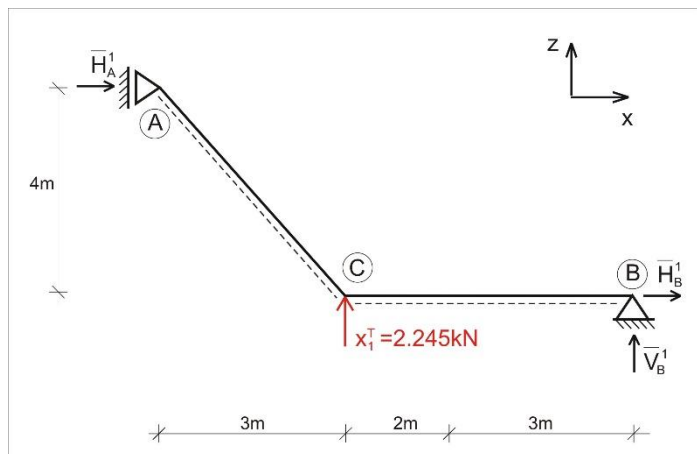
$$0.0133 \text{ m} * X_1^T - 0.02986 \text{ m} = 0$$

d. Rozwiązanie równania

$$X_1^T = 2.245$$

3. Obliczenie rzeczywistych wartości sił wewnętrznych

**Obliczenie reakcji**



$$\sum M_B = 0$$

$$H_A^T * 4\text{m} + 2.245 \text{ kN} * 5\text{m} = 0 \text{ stąd } H_A^T = -2.805 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0$$

$$\bar{V}_B^T + 2.245 \text{ kN} = 0 \text{ stąd } V_B^T = -2.245 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0$$

$$H_A^T + H_B^T = 0 \text{ stąd } H_B^T = 2.805 \text{ kN}$$

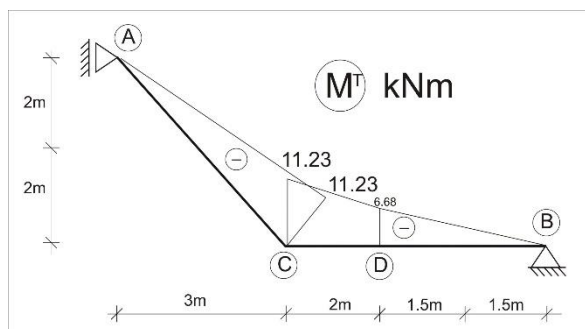
**Obliczenie momentów zginających**

$$M_{AC}^T = 0$$

$$M_{CA}^T = H_A^T * 4\text{m} = -11.23 \text{ kNm} = M_{CB}^T$$

$$M_{DA}^T = -6.68 \text{ kNm}$$

$$M_{BC}^T = 0$$

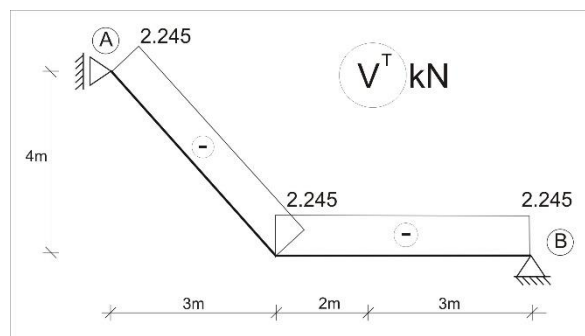


**Obliczenie sił tnących**

$$\bar{V}_{AC}^T = H_A^T \cos \alpha \quad \cos \alpha = 0.8$$

$$\bar{V}_{AC}^T = -2.245 \text{ kN}$$

$$\bar{V}_{BC}^T = \bar{V}_B^T = -2.245 \text{ kN}$$

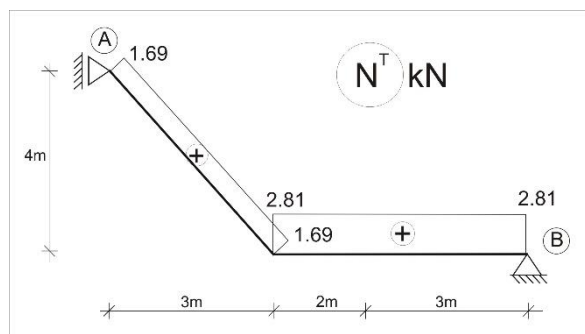


**Obliczenie sił osiowych**

$$\bar{N}_{AC}^T = -H_A^T \sin \alpha \quad \sin \alpha = 0.6$$

$$\bar{N}_{AC}^T = 2.81 \text{ kN} * 0.6 = 1.69 \text{ kN}$$

$$\bar{N}_{BC}^T = \bar{H}_B^T = 2.81 \text{ kN}$$



4. Obliczenie zadanego przemieszczenia od temperatury

- a. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego przyłożonego w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia

**Obliczenie reakcji**

$$\sum M_B = 0$$

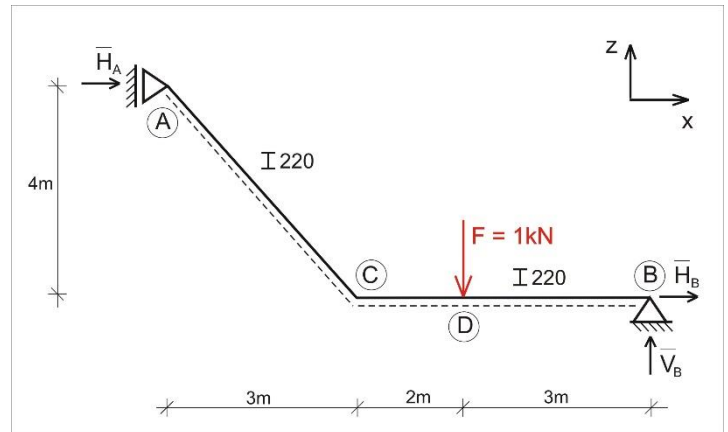
$$\bar{H}_A * 4m - F * 3m = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{H}_A = 0.75 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0$$

$$\bar{V}_B - F = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{V}_B = 1 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0$$

$$\bar{H}_A + \bar{H}_B = 0 \quad \text{stąd} \quad \bar{H}_B = -0.75 \text{ kN}$$



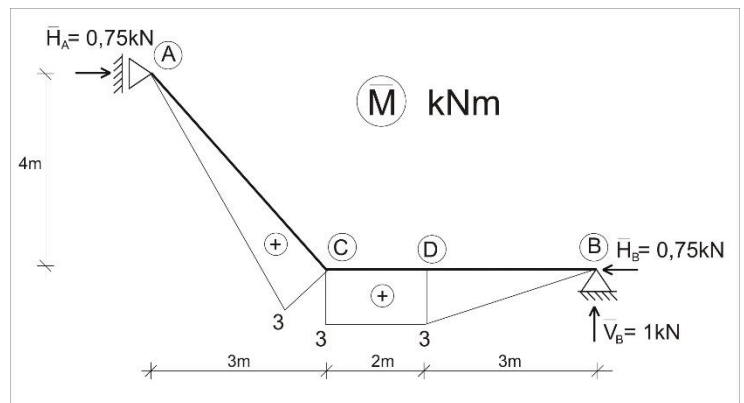
**Obliczenie momentów zginających**

$$\bar{M}_{AC} = 0$$

$$\bar{M}_{CA} = \bar{H}_A * 4m = 3 \text{ kNm} = \bar{M}_{CB}$$

$$\bar{M}_{DC} = \bar{V}_B * 3m = 3 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{BC} = 0$$



$$\Omega_{\bar{M}} (AC) = 0.5 * 3 \text{ kNm} * 5m = 7.5 \text{ kNm}^2,$$

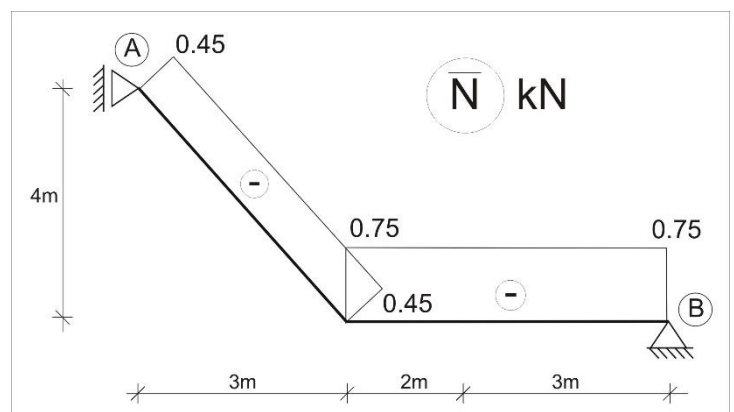
$$\Omega_{\bar{M}} (BC) = 3 \text{ kNm} * 2m + 0.5 * 3 \text{ kNm} * 3m = 10.5 \text{ kNm}^2$$

**Obliczenie sił osiowych**

$$\bar{N}_{AC} = -\bar{H}_A * \sin \alpha \quad \sin \alpha = 0.6$$

$$\bar{N}_{AC} = -0.75 \text{ kN} * 0.6 = -0.45 \text{ kN}$$

$$\bar{N}_{BC} = \bar{H}_B = -0.75 \text{ kN}$$



$$\Omega_{\bar{N}} (AC) = -0.45 \text{ kN} * 5m = -2.25 \text{ kNm} \quad , \quad \Omega_{\bar{N}} (BC) = -0.75 \text{ kN} * 5m = -3.75 \text{ kNm}$$

b. obliczenie przemieszczenia

$$1\text{kN} * \Delta_{DT} = \sum_p \int_s \frac{M^T \bar{M}}{EI} ds + \frac{\bar{R}_S^T \bar{R}_S}{k_\Delta} + \sum_p \int_s \frac{\bar{M}}{h} \frac{\Delta T \alpha_T}{h} ds + \sum_p \int_s \bar{N} T_o \alpha_T ds$$

$$\begin{aligned} \Delta_{DT} = & - \frac{1}{6273\text{kNm}^2} \left( \frac{1}{2} * 5\text{m} * 11.23\text{ kNm} * \frac{2}{3} * 3\text{kNm} + 3\text{ kNm} * 2\text{m} * \frac{11.23\text{ kNm} + 6.68\text{kNm}}{2} \right) - \\ & + \frac{1}{6273\text{kNm}^2} \left( \frac{1}{2} * 3\text{ m} * 6.68\text{ kNm} * \frac{2}{3} * 3\text{kNm} \right) + \\ & + \frac{22^\circ\text{C} * \frac{0.000012}{^\circ\text{C}}}{0.22\text{ m}} (7.5\text{ kNm}^2 + 10.5\text{kNm}^2) - 1^\circ\text{C} * \frac{0.000012}{^\circ\text{C}} * (2.25 + 3.75)\text{kNm} = 0.0008\text{ m} \end{aligned}$$