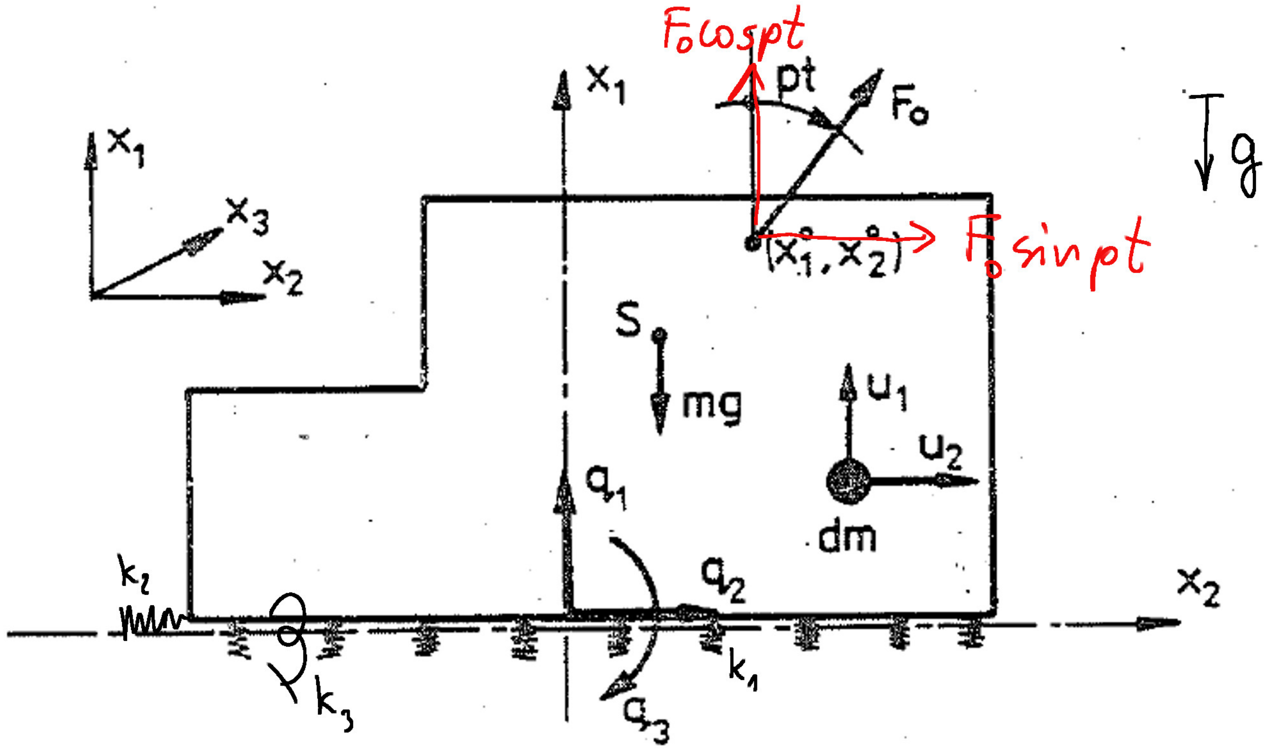
BRYŁA NA PODŁOŻU SPRĘŻYSTYM



Założenia:

a) podstawa bryły leży w poziomej płaszczyźnie x_2x_3, przy czym osie x_2, x_3 są głównymi centralnymi osiami podstawy,

b) układ jest symetryczny względem płaszczyzny x_1x_2 w zakresie rozkładu mas, sił wzbudzających i cech podłoża,

c) podłoże sprężyste jest nieinercyjne i charakteryzuje się modułami sztywności k_1, k_2 przy przesuwie w kierunku x_1, x_2 oraz modułem k_3 przy obrocie wokół osi x_3,

d) drgania są wymuszone harmonicznie siłą wirującą w płaszczyźnie x_1x_2.

* Energia kinetyczna

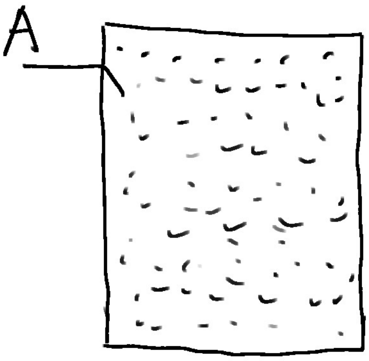
$$E_k = \frac{1}{2}\int dm\, \dot{\bar{u}}^2 , \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}}_{\bar{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \end{bmatrix}}_{A_m} \underbrace{\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}}_{\bar{q}}$$

$$E_k = \frac{1}{2}\int (\dot{u}_1^2 + \dot{u}_2^2)\, dm = \frac{1}{2}\int \dot{\bar{u}}^T \cdot \dot{\bar{u}}\, dm = \frac{1}{2}\, \dot{\bar{q}}^T \int A_m^T A_m\, dm\, \dot{\bar{q}}$$

$$\mathbb{B} = \int A_m^T A_m \, dm = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_2 \\ 0 & 1 & x_1 \\ -x_2 & x_1 & x_1^2 + x_2^2 \end{bmatrix} \cdot m$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} m & 0 & -S_{13} \\ 0 & m & S_{23} \\ -S_{13} & S_{23} & J_3^m \end{bmatrix}$$

* Energia potencjalna



$$[k_1] = \frac{N}{m^3}, \quad [k_2] = \frac{N}{m^3},$$

$$[k_3] = \frac{Nm}{m^4}$$

$$E_p = \frac{1}{2}\left(k_1 \cdot A \cdot q_1^2 + k_2 A \cdot q_2^2 + k_3 \cdot J_3 q_3^2\right)$$

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} k_1 A & 0 & 0 \\ 0 & k_2 A & 0 \\ 0 & 0 & k_3 J_3 \end{bmatrix}$$

* Wektor wzbudzania

$$L = \bar{u}^T \cdot \bar{P} = \bar{q}^T \cdot A_p^T \cdot \bar{P} = \bar{q}^T \cdot \bar{F}$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -x_2^0 \\ 0 & 1 & x_1^0 \end{bmatrix}}_{A_p} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} F_0 \cos pt \\ F_0 \sin pt \end{bmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -x_2^0 & x_1^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \cos pt \\ F_0 \sin pt \end{bmatrix}$$

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} F_0 \cos pt \\ F_0 \sin pt \\ -F_0 x_2^0 \cos pt + F_0 x_1^0 \sin pt \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \\ F_0 x_1^0 \end{bmatrix}}_{\bar{F}_s} \sin pt + \underbrace{\begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \\ -F_0 x_2^0 \end{bmatrix}}_{\bar{F}_c} \cos pt$$

Ponieważ ciężar bryły obracającej jest na ogół znaczny, wskazane jest zatem ująć w rachunku pewien efekt II-ego rzędu, polegający na uwzględnieniu dodatkowego momentu od siły ciężkości zaczepionej w ruchomym środku ciężkości

$$\Delta \bar{F}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ mg x_2^s \cdot q_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mg x_2^s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{B}\ddot{\bar{q}} + \mathbb{C}\dot{\bar{q}} + \mathbb{K}\bar{q} = \bar{F}(t) + \Delta\bar{F}(t)$$

$$\tilde{\mathbb{K}} = \mathbb{K} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{23}^g \end{bmatrix} \quad ; \quad S_{23}^g = mg x_2^s$$

$\mathbb{C} = \mathcal{H}\mathbb{K}$ – Przyjmuje się zazwyczaj hipotezę Voigta-Kelvina

* Obc. kinetyczne

$$\bar{Q} = \bar{F}(t) - \mathbb{B}\ddot{\bar{q}}$$

Gdy wym. jest harmoniczne

$$\bar{Q} = \bar{F} + p^2 \mathbb{B}\bar{q}$$

$$\bar{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}$$

- siła normalna do podstawy bryły.
- siła styczna — " — .
- moment względem osi x_3.

$$\text{am}\, \sigma = \sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_c^2}$$

Amplitudalne prem. lokalne

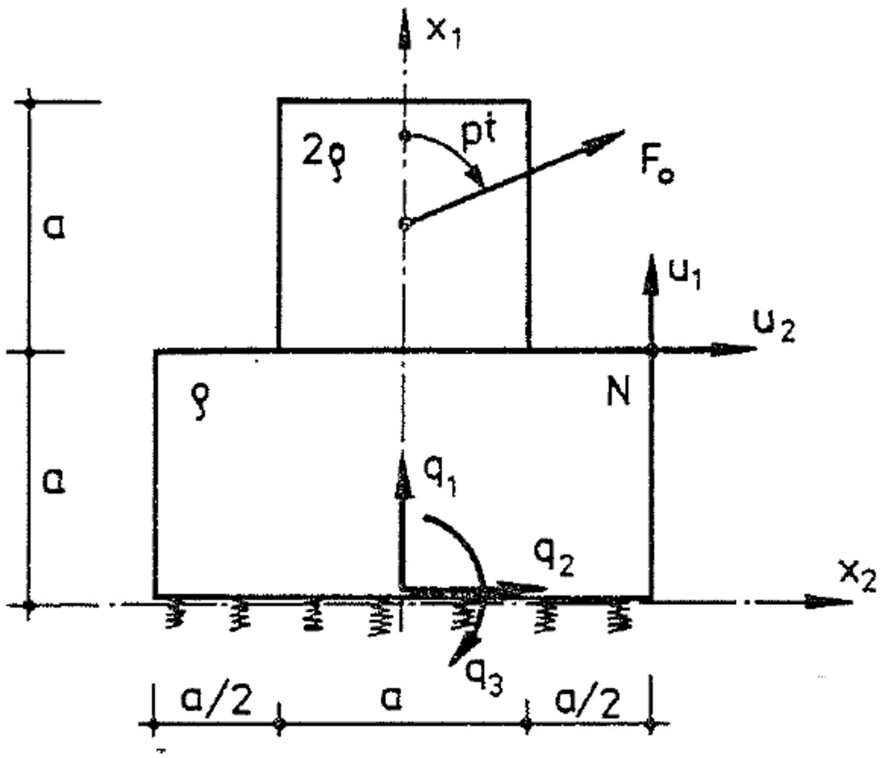
$$\text{am}\, u_1 = \sqrt{u_{1s}^2 + u_{1c}^2}\,, \quad \text{am}\, u_2 = \sqrt{u_{2s}^2 + u_{2c}^2}$$

PRZYKŁAD RACHUNKOWY – FUNDAMENT BLOKOWY

Dany jest fundament blokowy, jak na poniżej (wymiar w kierunku osi x_3 wynosi 1,5 a). Drgania bloku są wzbudzane siłą F_o wirującą z częstością kołową p. Układ jest symetryczny względem płaszczyzny x_1x_2. Należy zbadać ruch naroża N podczas stacjonarnych drgań wymuszonych z częstością $p = 0{,}9\,\omega_1$. Efekty drugiego rzędu pominąć. Wykorzystać zasady analizy wymiarowej przyjmując $k_1 = k$, $k_2 = 0{,}7\,k$, $k_3 = 2\,k$ oraz $\gamma = 0{,}10$ dla wszystkich głównych form drgań.

R o z w i ą z a n i e

Za wielkości porównawcze przyjmujemy a, ρ, k, F_o. Układ ma trzy dynamiczne stopnie swobody. Obieramy współrzędne uogólnione $\bar{q}$. Charakterystyki bryły:



$$m = a \cdot 2a \cdot 1{,}5a \cdot \rho + a \cdot a \cdot 1{,}5a\, 2\rho = 6\rho a^3$$

$$S_{13} = 0$$

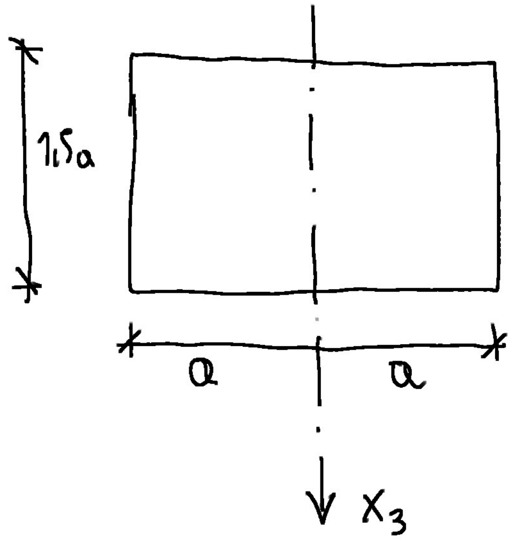
$$S_{23} = 3 \cdot 0{,}5 + 3 \cdot 1{,}5 = \ldots = 6\rho a^4$$

$$J_3^m = 3\left(\frac{2^2}{12} + \frac{1^2}{12} + 0{,}5^2\right) + 3\left(\frac{1^2}{12} + 1{,}5^2\right) = \ldots = 9{,}25\rho a^5$$

$$\mathbb{B} = \begin{bmatrix} 6\rho a^3 & 0 & 0 \\ 0 & 6\rho a^3 & 6\rho a^4 \\ 0 & 6\rho a^4 & 9{,}25\rho a^5 \end{bmatrix}$$

* charakterystyki pola podstawy

$$A = 2a \cdot 1{,}5a = 3a^2 \quad , \quad J_3 = \frac{1{,}5a \cdot (2a)^3}{12} = 1a^4$$



* Macierz sztywności

$$\mathbb{K} = \begin{bmatrix} k_1 \cdot A & 0 & 0 \\ 0 & k_2 A & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \cdot J_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3ka^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2{,}1ka^2 & 0 \\ 0 & 0 & 2ka^4 \end{bmatrix}$$

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA WŁASNEGO

$$\det(\mathbb{B} - \lambda \mathbb{K}) = 0 \quad , \quad \omega^{-2} = \lambda \quad , \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{\lambda}}$$

$$\mathbb{B}\ddot{\bar{q}} + \mathbb{K}\bar{q} = \bar{F}(t)$$

$d=2$

$$\begin{cases} b_{11}\ddot{q}_1 + b_{12}\ddot{q}_2 + k_{11}q_1 + k_{12}q_2 = F_1(t) \\ b_{21}\ddot{q}_1 + b_{22}\ddot{q}_2 + k_{21}q_1 + k_{22}q_2 = F_2(t) \end{cases}$$

brak sprzężeń

$$\begin{cases} b_{11}\ddot{q}_1 + \cancel{b_{12}\ddot{q}_2} + k_{11}q_1 + \cancel{k_{12}q_2} = F_1(t) \\ \cancel{b_{21}\ddot{q}_1} + b_{22}\ddot{q}_2 + \cancel{k_{21}q_1} + k_{22}q_2 = F_2(t) \end{cases}$$

$$\det \begin{bmatrix} 6-3\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6-2{,}1\lambda & 6 \\ 0 & 6 & 9{,}25-2\lambda \end{bmatrix} = 0$$

$$-12{,}6\lambda^3 + 119{,}475\lambda^2 - 247{,}05\lambda + 117 = 0$$

$$\lambda_3 = 0{,}6828\frac{\rho a}{k} \quad , \quad \lambda_2 = 2\frac{\rho a}{k} \quad , \quad \lambda_1 = 6{,}7993\frac{\rho a}{k}$$

$$\omega_1 = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{6{,}7993\frac{\rho a}{k}}} = 0{,}3835\sqrt{\frac{k}{\rho a}}$$

$$\omega_2 = \ldots = 0{,}7071\sqrt{\frac{k}{\rho a}} \quad , \quad \omega_3 = \ldots = 1{,}2101\sqrt{\frac{k}{\rho a}}$$

$$\overline{W}_1 \sim \operatorname{adj}(\mathbb{K} - \lambda_1 \mathbb{B})$$

$$\overline{W}_2 \sim \operatorname{adj}(\mathbb{K} - \lambda_2 \mathbb{B})$$

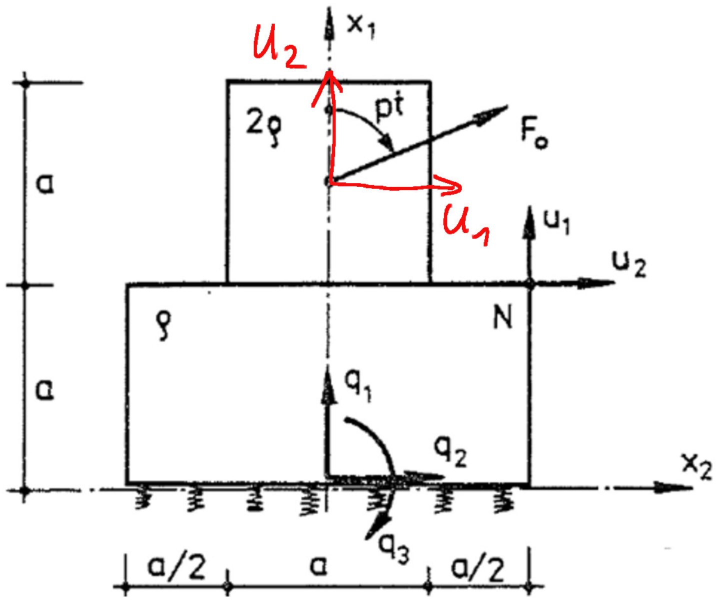
$$\overline{W}_3 \sim \operatorname{adj}(\mathbb{K} - \lambda_3 \mathbb{B})$$

$$\mathbb{W} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}7248 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -0{,}7610 \end{bmatrix}$$

DRGANIA WYMUSZONE HARMONICZNIE

$$p = 0{,}9\,\omega_1 = 0{,}9 \cdot 0{,}3835\sqrt{\frac{k}{\varrho a}} = 0{,}34515\sqrt{\frac{k}{\varrho a}}$$

$$\mathbb{B}\ddot{\overline{q}} + \mathbb{C}\dot{\overline{q}} + \mathbb{K}\,\overline{q} = \overline{F}(t)$$



$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1{,}5a \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{A_p} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} F_0 \sin pt \\ F_0 \cos pt \end{bmatrix}$$

$$\overline{F} = A_p^T \cdot \overline{P}$$

$$\overline{F} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1{,}5a & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_0 \sin pt \\ F_0 \cos pt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \cos pt \\ F_0 \sin pt \\ 1{,}5 F_0 a \sin pt \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ F_0 \\ 1{,}5 F_0 a \end{bmatrix} \sin pt + \begin{bmatrix} F_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos pt$$

$$\mathbb{B}\ddot{\bar{q}} + \mathbb{C}\dot{\bar{q}} + \mathbb{K}\bar{q} = \bar{F}(t)$$

$$\boxed{\bar{q} = \mathbb{W}\bar{y}}$$

$$\mathbb{B}\mathbb{W}\ddot{\bar{y}} + \mathbb{C}\mathbb{W}\dot{\bar{y}} + \mathbb{K}\mathbb{W}\bar{y} = \bar{F}(t) \quad / \mathbb{W}^T\cdot$$

$$\mathbb{W}^T\mathbb{B}\mathbb{W}\ddot{\bar{y}} + \mathbb{W}^T\mathbb{C}\mathbb{W}\dot{\bar{y}} + \mathbb{W}^T\mathbb{K}\mathbb{W}\bar{y} = \mathbb{W}^T\cdot\bar{F}$$

$$\{m_0\}\ddot{\bar{y}} + \{c_0\}\dot{\bar{y}} + \{k_0\}\bar{y} = \mathbb{W}^T\bar{F}$$

$$\{m_0\} = \begin{pmatrix} 21.0996 & 0 & 0 \\ 0 & 6. & 0 \\ 0 & 0 & 2.22487 \end{pmatrix}$$

$$\{k_0\} = \begin{bmatrix} 3,1032 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3,2582 \end{bmatrix}$$

$$\mathcal{H}\mathbb{K} = \mathbb{C}, \quad \mathcal{H} = \frac{\gamma}{p} = \frac{0,1}{0,34515} = 0,289729$$

$$\{c_0\} = \begin{pmatrix} 0.899088 & 0 & 0 \\ 0 & 0.869187 & 0 \\ 0 & 0 & 0.944008 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{W}^T\cdot\bar{F} = \begin{pmatrix} 0.7248\ F0\ \mathrm{Sin}[0.34515\ t] + 1.5\ a\ F0\ \mathrm{Sin}[0.34515\ t] \\ F0\ \mathrm{Cos}[0.34515\ t] \\ F0\ \mathrm{Sin}[0.34515\ t] - 1.1415\ a\ F0\ \mathrm{Sin}[0.34515\ t] \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} m_{01}\ddot{y}_1 + c_{01}\dot{y}_1 + k_{01}y_1 = Y_1 \\ m_{02}\ddot{y}_2 + c_{02}\dot{y}_2 + k_{02}y_2 = Y_2 \\ m_{03}\ddot{y}_3 + c_{03}\dot{y}_3 + k_{03}y_3 = Y_3 \end{cases}$$

$$\mathrm{am}\,\varphi_1 = \sqrt{q_{1s}^2 + q_{1c}^2} = \sqrt{0{,}0279^2 + 0{,}4358^2} =$$

Przemieszczenia wrzecziona

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a \\ 0 & 1 & a \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{q}_s = \begin{bmatrix} 0{,}0279 \\ 2{,}1666 \\ 3{,}1177 \end{bmatrix}, \quad \bar{q}_c = \begin{bmatrix} 0{,}4358 \\ -0{,}3979 \\ -0{,}5521 \end{bmatrix}$$

$$\bar{u}_s = A \cdot \bar{q}_s, \quad \bar{u}_c = A \cdot \bar{q}_c$$

$$\bar{u}_s = \begin{bmatrix} -3{,}0898 \\ 5{,}2843 \end{bmatrix}, \quad \bar{u}_c = \begin{bmatrix} 0{,}9879 \\ -0{,}95 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{am}\,u_1 = \sqrt{u_{1s}^2 + u_{1c}^2} = \sqrt{(-3{,}0898)^2 + (0{,}9879)^2} = 3{,}2439$$

$$\mathrm{am}\,u_2 = \sqrt{u_{2s}^2 + u_{2c}^2} = \sqrt{5{,}2843^2 + (-0{,}95)^2} = 5{,}369$$