



Politechnika Wrocławska

MECHANIKA BUDOWLI

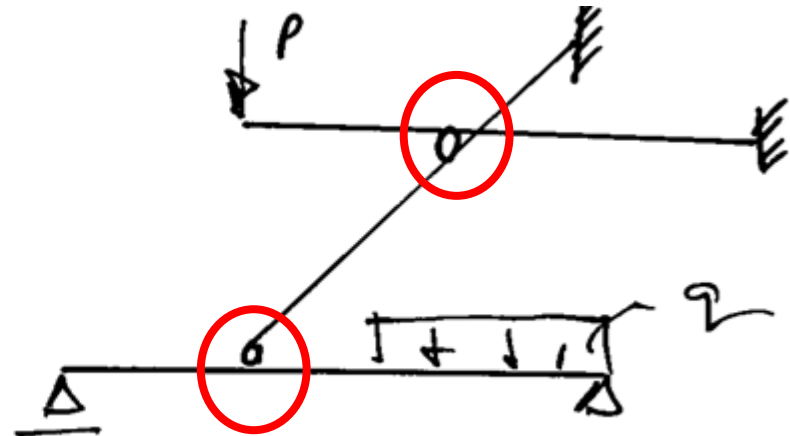
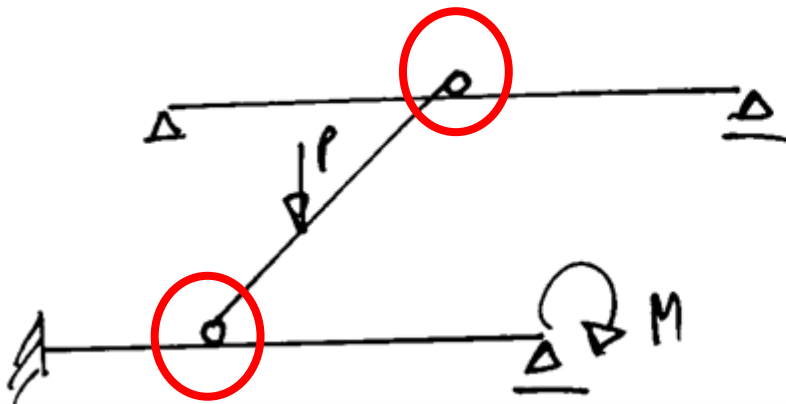
Wykład 5: PRZESTRZENNE UKŁADY PRĘTOWE SW i SN. METODA SIŁ

Prowadzący: dr inż. Olga Szyłko-Bigus

Przestrzenne układy prętowe. Metoda sił

5. Ruszty belkowe

- ❑ **RUSZTY BELKOWE** są układami, w których można przyjąć, że momenty skręcające są równe zero, a występują tylko momenty zginające i siły poprzeczne.



- ❑ Ruszty belkowe to belki usytuowane zazwyczaj ortogonalnie w stosunku do siebie i połączone między sobą przegubami, przez które przekazywana jest tylko siła pionowa i obciążone tylko obciążeniami działającymi prostopadle do płaszczyzny układu.
- ❑ Belki tworzące konstrukcję rusztu połączone są ze sobą w sposób hierarchiczny za pomocą więzi przegubowych, a obciążenie przekazywane jest z górnych belek na dolne.



5. Ruszty belkowe

□ Stopień statycznej niewyznaczalności (SSN) rusztu belkowego:

$$n_h = e - 2b$$

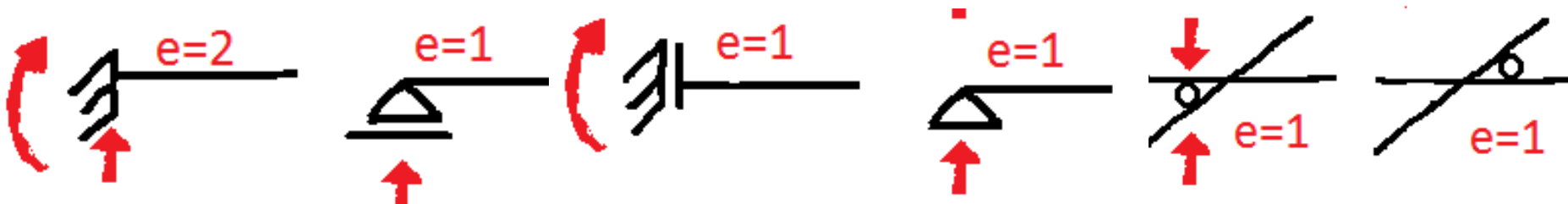
gdzie: e - liczb stopni swobody, b - liczba belek.

□ Gdy mamy:

- $n_h = 0$ to ruszt belkowy jest SW,
- $n_h > 0$ to ruszt belkowy jest SN.

W rusztach belkowych do liczby e zalicza się tylko więzi translacyjne prostopadłe do płaszczyzny dźwigara i więzi rotacyjne, których reakcje powodują zginanie belek w płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny dźwigara.

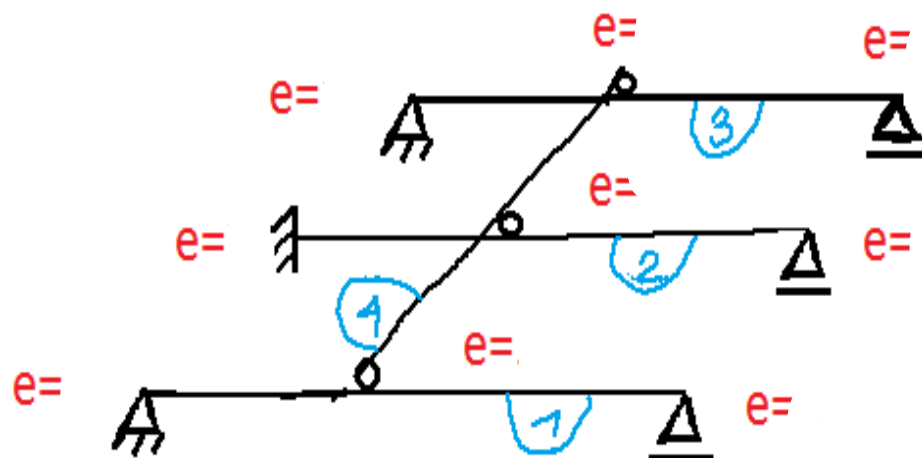
Liczba stopni swobody dla poszczególnych podparć:





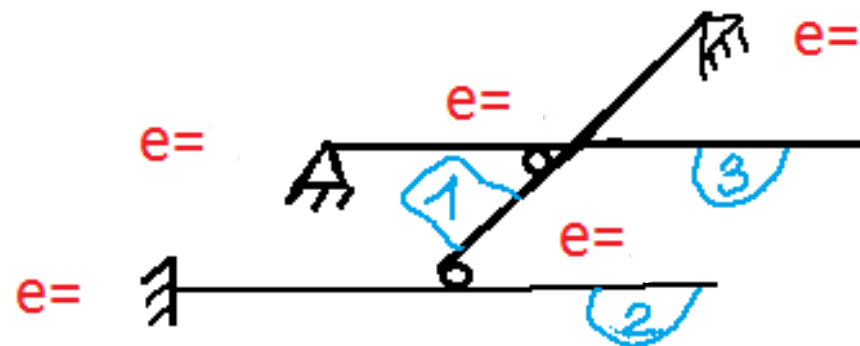
5. Ruszty belkowe

- Wyznaczenie stopnia statycznej niewyznaczalności rusztu:



$$e = \quad ; b = \quad ; nh = e - 2xb =$$

Ruszt belkowy 2-krotnie SN



$$e = \quad ; b = \quad ; nh = e - 2xb =$$

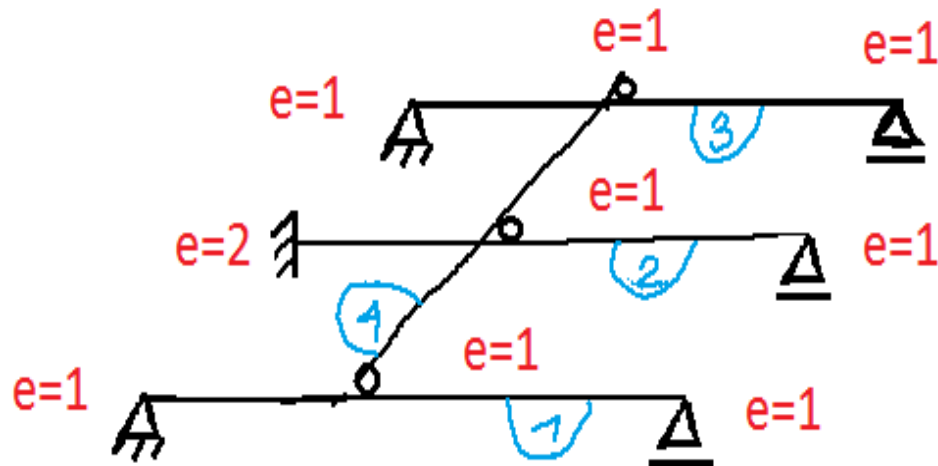
Ruszt belkowy SW

- e jest liczbą więzi elementarnych łączących belki między sobą i z podłożem, w których reakcje nie są równe zero z założenia (nie uwzględniamy więzi, w których reakcje są równe zero z założenia, to jest więzi w płaszczyźnie układu i więzi odpowiadających momentom skręcającym).



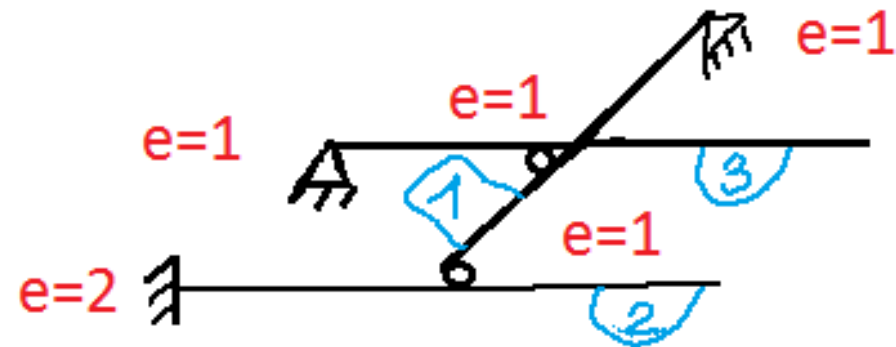
5. Ruszty belkowe

- Wyznaczenie stopnia statycznej niewyznaczalności rusztu:



$$e=10; b=4; nh=e-2xb=10-8=2!$$

Ruszt belkowy 2-krotnie SN



$$e=6; b=3; nh=e-2xb=6-6=0!$$

Ruszt belkowy SW

- e jest liczbą więzi elementarnych łączących belki między sobą i z podłożem, w których reakcje nie są równe zero z założenia (nie uwzględniamy więzi, w których reakcje są równe zero z założenia, to jest więzi w płaszczyźnie układu i więzi odpowiadających momentom skręcającym).



5. Ruszty belkowe

□ Typy obciążeń :

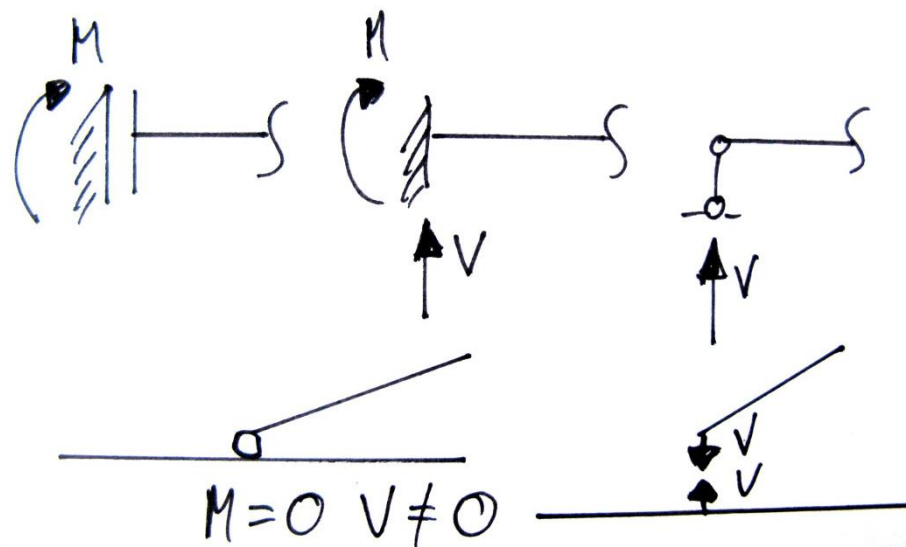
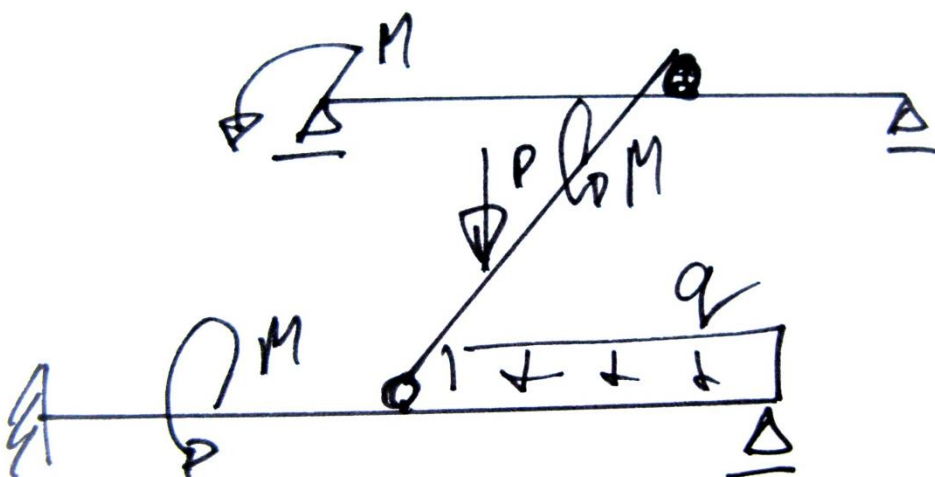
- Siły pionowe skupione P [kN] i rozłożone q [kN/m],
- Momenty zginające M_y [kNm].

□ Siły przekrojowe - w rusztach belkowych występują tylko momenty zginające i siły tnące

- Siły tnące V_z [kN],
- Momenty zginające M_y [kNm].

□ Obciążenie zadane tylko prostopadłe do płaszczyzny konstrukcji

□ Reakcje w więziach podporowych





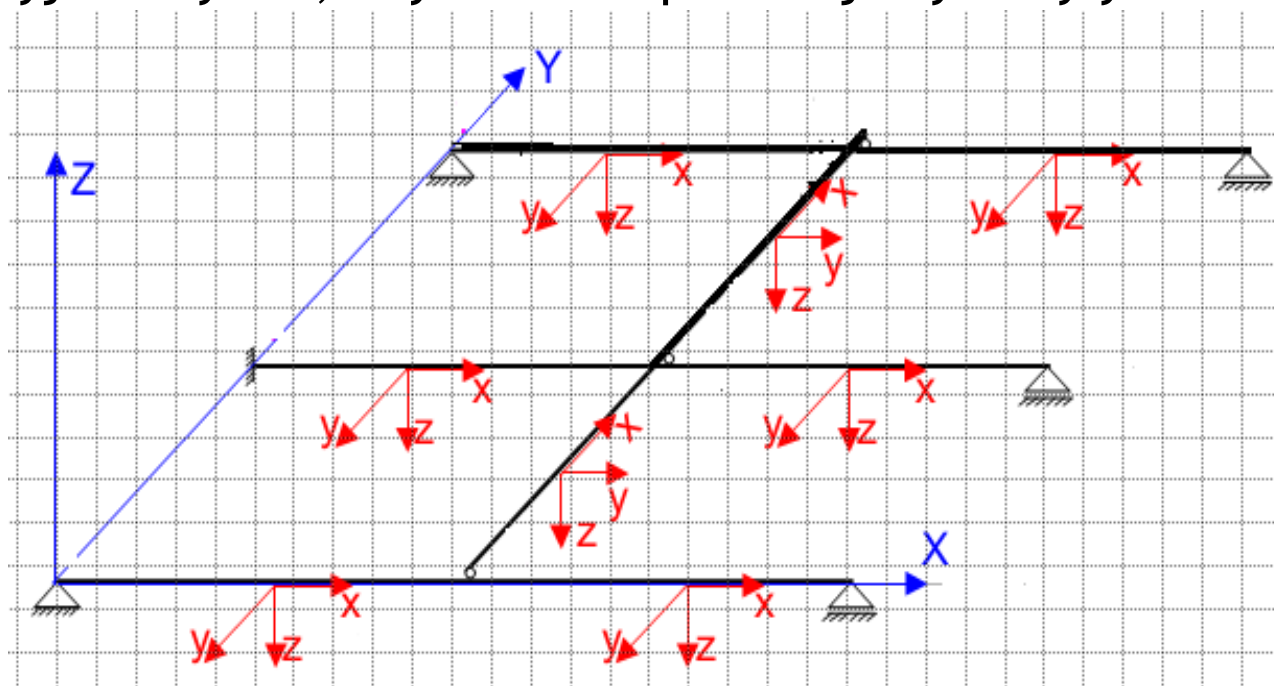
5. Ruszty belkowe

□ Układy współrzędnych

Dla rusztów belkowych niezbędne jest przyjęcie globalnego układu współrzędnych UG dla całego układu oraz lokalnych układów współrzędnych UL dla poszczególnych elementów (prętów).

Przyjmujemy prawoskrętne układy współrzędnych, lokalne układy współrzędnych przyjmujemy tak, aby znaki sił przekrojowych były takie jak w układach płaskich

(dodatnie momenty zginające odpowiadają rozciąganiu włókien dolnych).





5. Ruszty belkowe

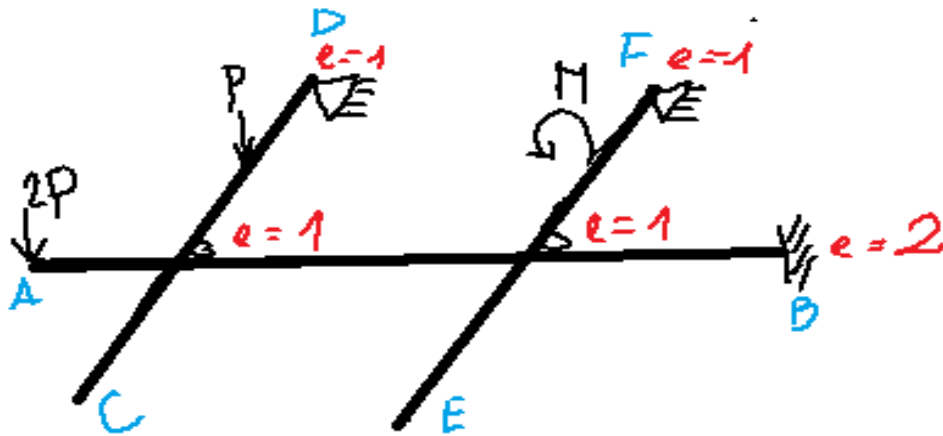
- ❑ Metody rozwiązania rusztów belkowych SW i SN:
 - Podział na belki I rzędu np. A-B, które mogą stać same lub opierać się na fundamencie, II rzędu etc. np. C-D i E-G.
 - Rozwiązujemy poszczególne belki zaczynając od belek wyższych rzędów (podrzędnych) np. II przenosząc obliczone reakcje na belki niższych rzędów np. I (nadrzędna).
- ❑ Algorytm postępowania rozwiązania rusztów belkowych SW - obliczania sił przekrojowych V i M .



5. Ruszty belkowe

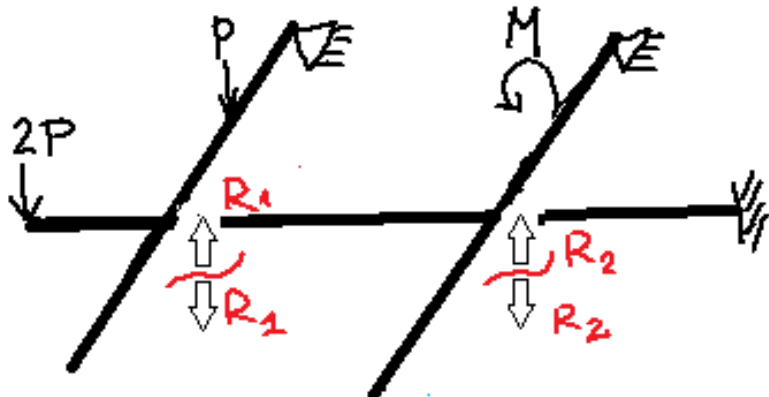
□ Algorytm postępowania w rozwiązywaniu rusztów belkowych SW:

1. Wyznaczenie SSN



$e=6$, $b=3$, $n_h=e-2 \times b=0!$ Ruszt SW!

2. Separujemy ruszt na pojedyncze belki



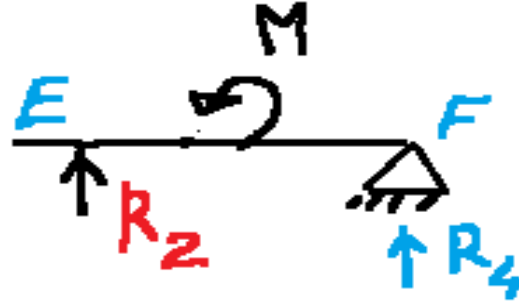
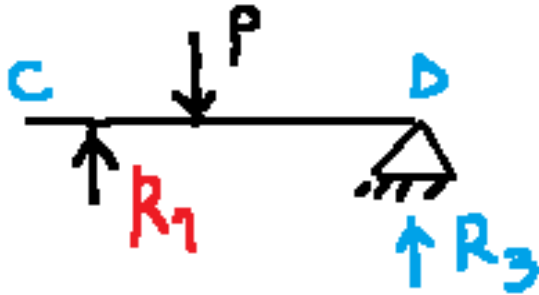


5. Ruszty belkowe

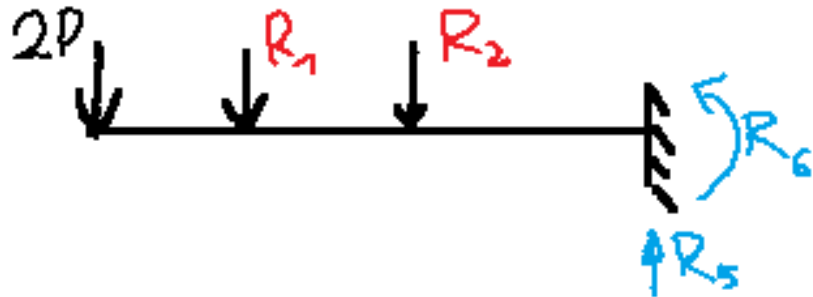
□ Algorytm postępowania w rozwiązywaniu rusztów belkowych SW:

3. Rozwiązujemy pojedyncze belki II rzędu

Belka C-D (wyznaczamy R_1 i R_3) Belka E-F (wyznaczamy R_2 i R_4)



4. Rozwiązujemy pojedyncze belki I rzędu (wyznaczamy R_5 i R_6)



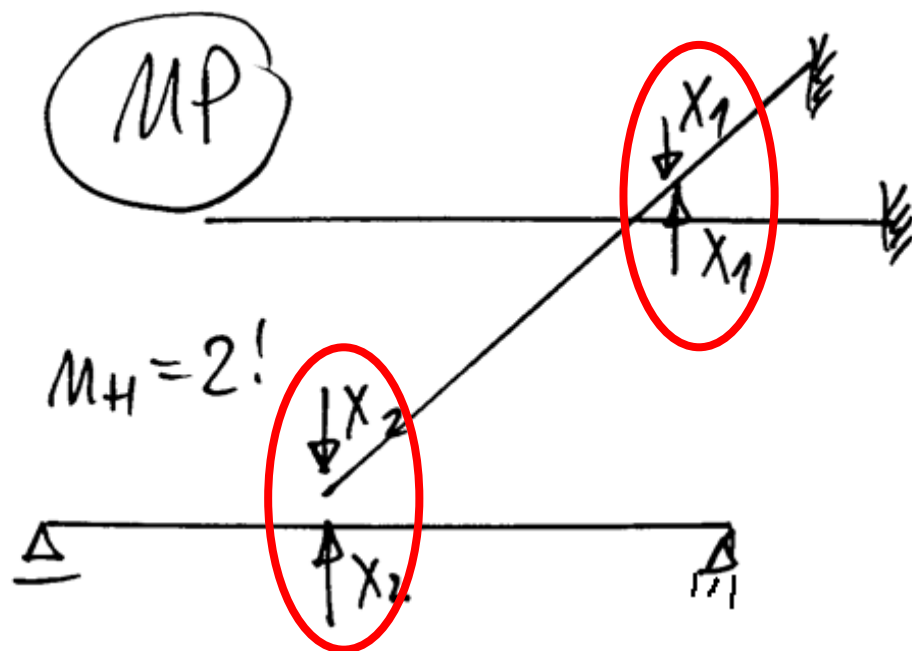
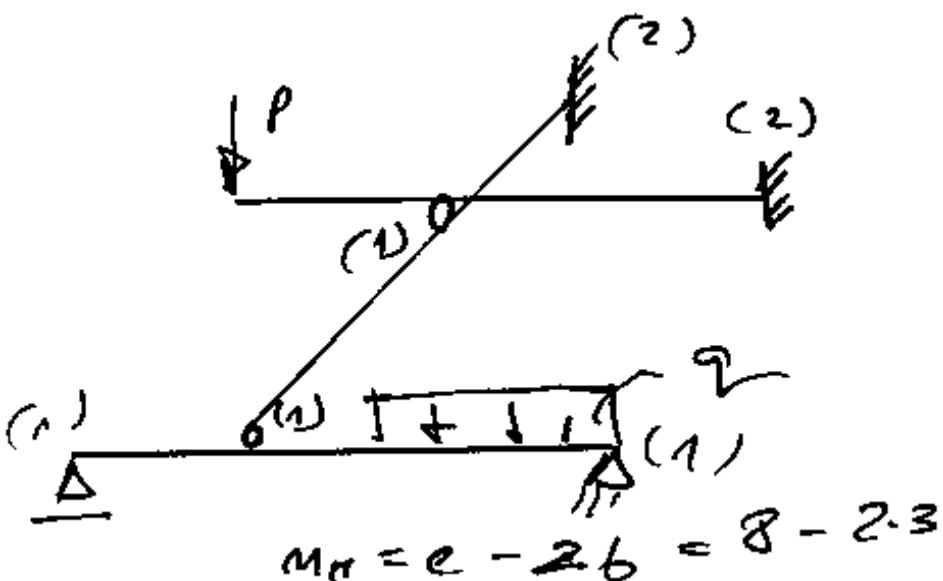
5. Wykonujemy wykresy M i V dla wszystkich belek



5. Ruszty belkowe

□ Wyznaczenie sił przekrojowych w ruszcie belkowym SN za pomocą Metody Sił:

1. Ustalenie SSN (czy układ jest SW czy SN),
2. Przyjęcie UP MS (SW i GN) i zaznaczenie niewiadomych sił hiperstatycznych,



W układach SN (np. dla $n_H=2$) rozcinamy więź przegubową ($M=0$; tylko V) i zastępujemy ją niewiadomymi siłami hiperstatycznymi X_1, X_2 .



5. Ruszty belkowe

3. Zapisanie układu równań kanonicznych Metody Sił dla rusztu

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_1^F = 0$$

$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_2^F = 0$$

Współczynniki przy niewiadomych układu równań obliczymy ze wzoru (z uwzględnieniem więzi sprężystych - drugi człon, których w rozwiązywanym przykładzie brak)

$$\delta_{ij} = \int_s \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^j}{EI_y} ds + \sum_n \frac{\bar{R}_n^i \bar{R}_n^j}{k_n}$$

wyrazy wolne od obciążeń siłami ze wzoru

$$\Delta_i^F = \int_s \frac{\bar{M}_y^i M_y^F}{EI_y} ds + \sum_n \frac{\bar{R}_n^i R_n^F}{k_n}$$

gdzie $\bar{M}_y^i$, M_y^F są momentami zginającymi w układzie podstawowym wywołanymi odpowiednio siłami hiperstatycznymi $X_i = 1$ oraz obciążeniem danym, $\bar{R}_n^i$, R_n^F są siłami w n -tej więzi sprężystej wywołanymi odpowiednio siłami hiperstatycznymi $X_i = 1$ oraz obciążeniem danym, k_n jest sztywnością n -tej więzi sprężystej.



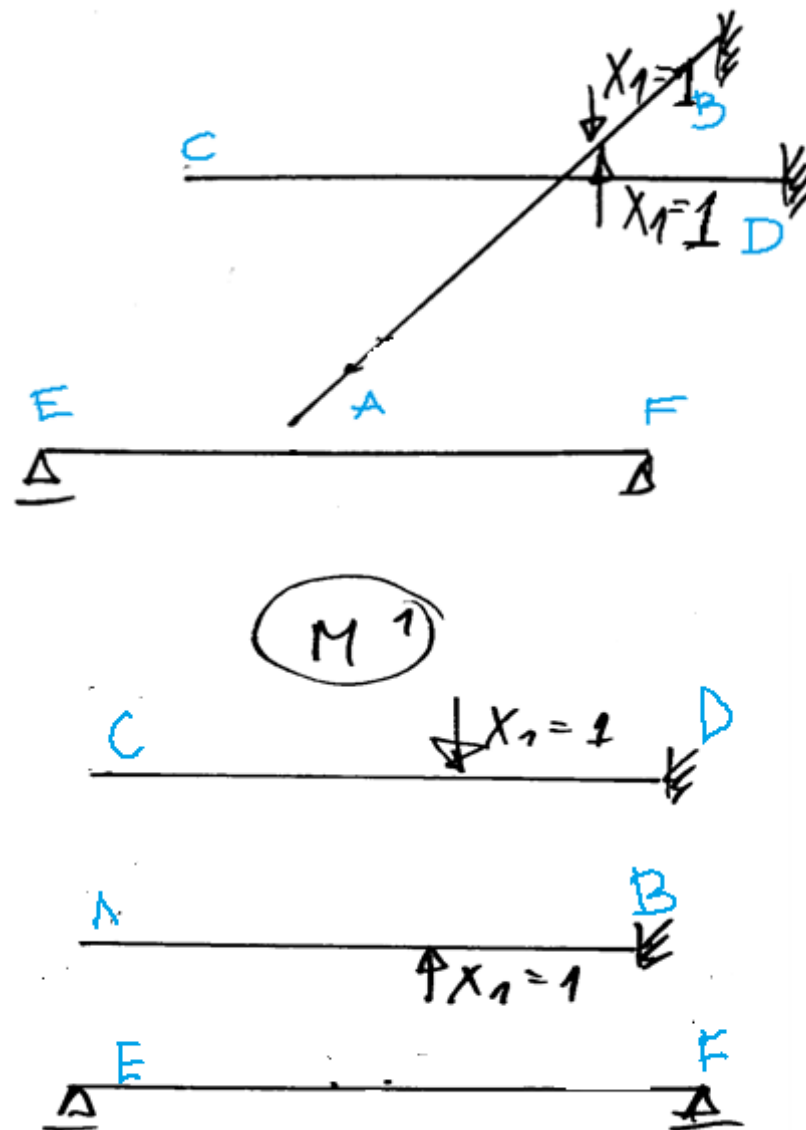
5. Ruszty belkowe

4. Rozwiązanie układu podstawowego od wpływu sił hiperstatycznych $X_1=1[.]$ (obciążenie jednostkowe $X_1=1[.]$)

Wnioski: Mamy trzy rozdzielone belki które rozwiązujemy osobno:

- ❖ Belka I rzędu EF,
- ❖ Belka II rzędu AB,
- ❖ Belka III rzędu CD.

Rozwiązujemy je niezależnie od siebie.





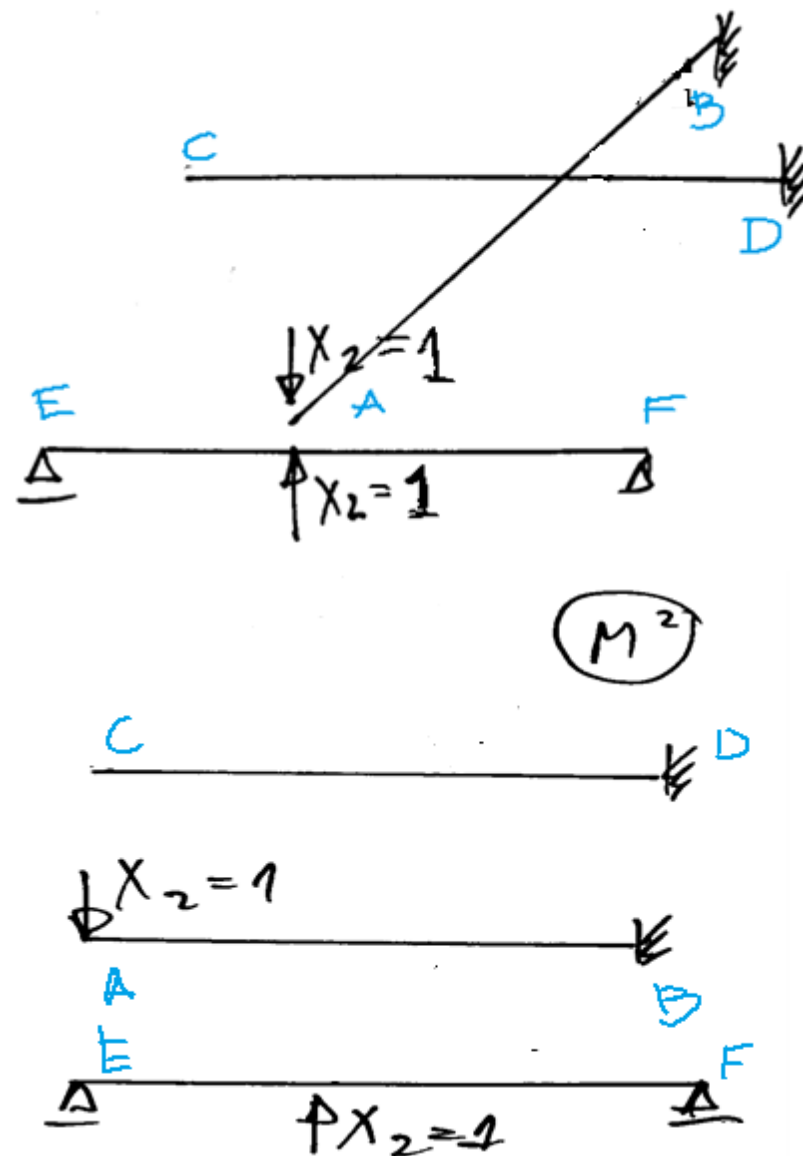
5. Ruszty belkowe

5. Rozwiązanie układu podstawowego od wpływu sił hiperstatycznych $X_2=1[.]$ (obciążenie jednostkowe $X_2=1$)

Wnioski: Mamy trzy rozdzielone belki które rozwiązujemy osobno:

- ❖ Belka I rzędu EF,
- ❖ Belka II rzędu AB,
- ❖ Belka III rzędu CD.

Rozwiązujemy je niezależnie od siebie.





Przestrzenne układy prętowe. Metoda sił

5. Ruszty belkowe

6. Rozwiązanie układu podstawowego od wpływu obciążeń danych (obciążenie zadane)

Wnioski: Mamy trzy rozdzielone belki które rozwiązujemy osobno:

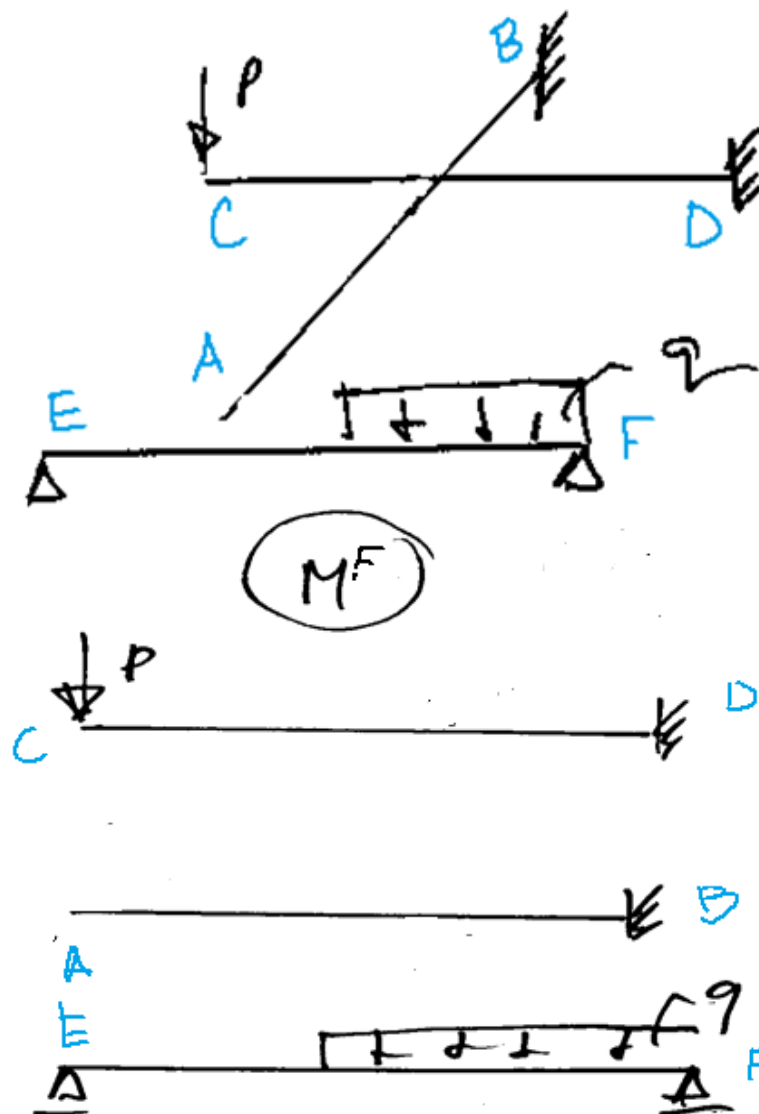
- ❖ Belka I rzędu EF,
- ❖ Belka II rzędu AB,
- ❖ Belka III rzędu CD.

Rozwiązujemy je niezależnie od siebie.

7. Rozw. ukł. rów. MS i wyzn. sił hiperst. X_1 i X_2 ,

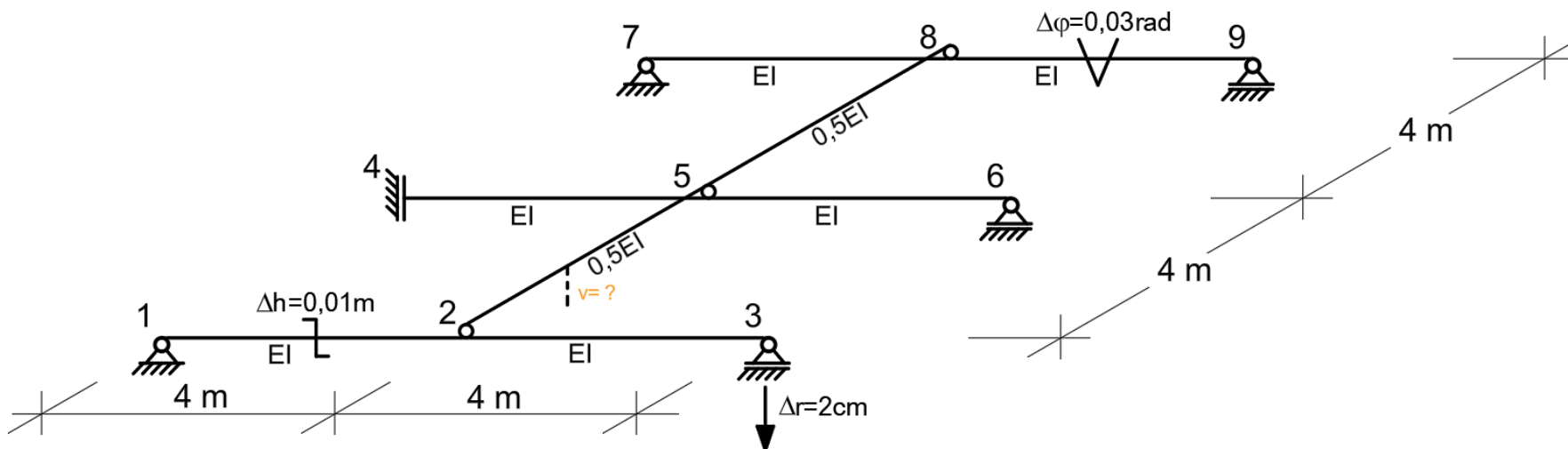
8. Wyznaczenie sił przekrojowych M i V ,

9. Sprawdzenie poprawności rozwiązania.



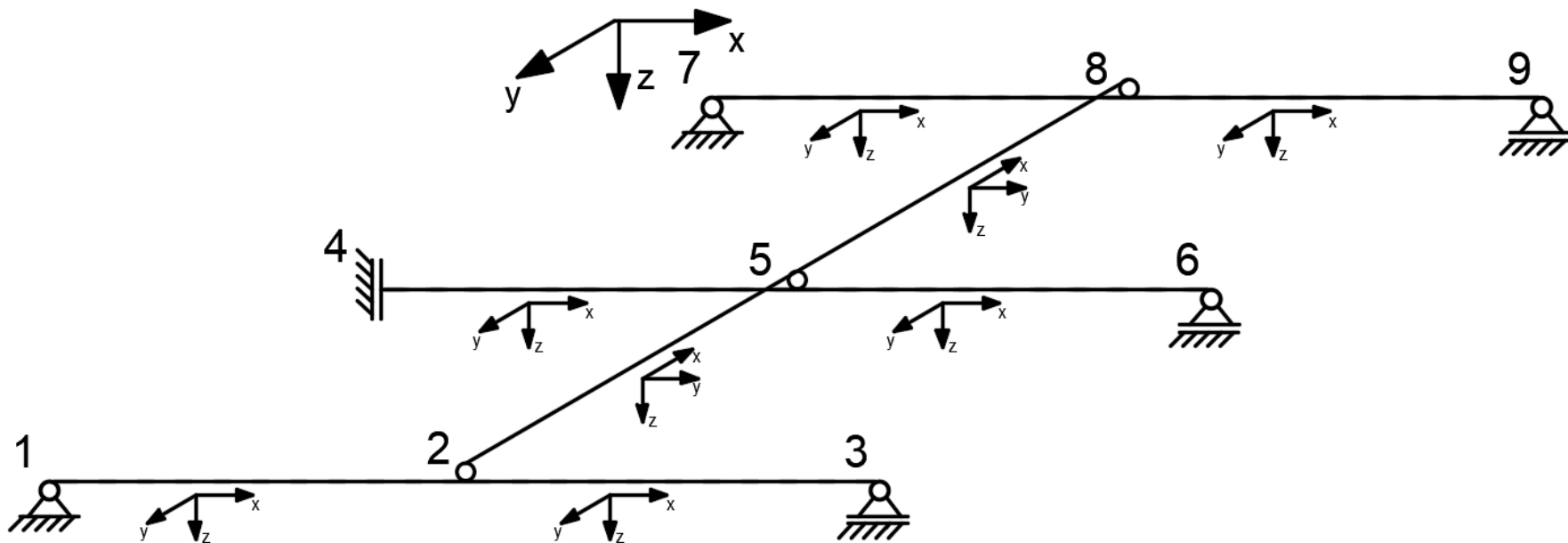
Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

Stosując metodę sił rozwiązać ruszt belkowy od obciążenia jak na rysunku



Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

1. Przyjęcie układu współrzędnych



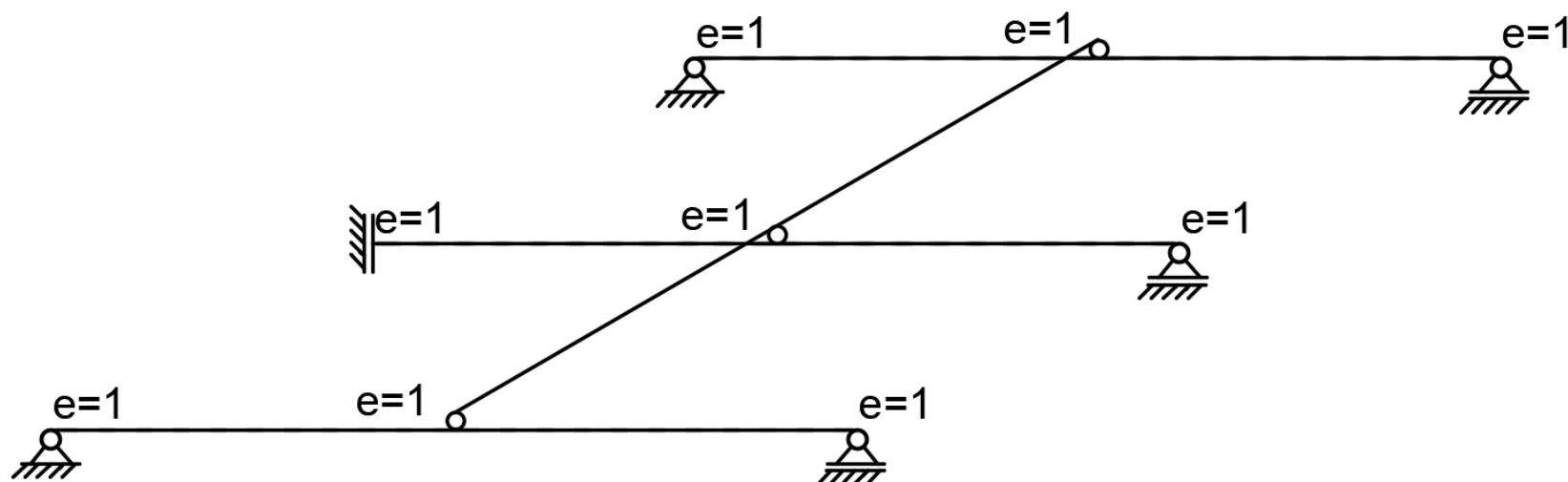
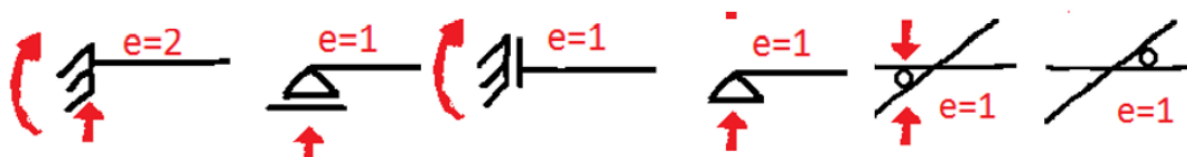
Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

2. Obliczenie stopnia statycznej niewyznaczalności i dobranie układu podstawowego metody sił

W rusztach belkowych do liczby e zalicza się tylko więzi translacyjne prostopadłe do płaszczyzny dźwigara i więzi rotacyjne, których reakcje powodują zginanie belek w płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny dźwigara.

$$n_h = e - 2 \cdot l_b$$

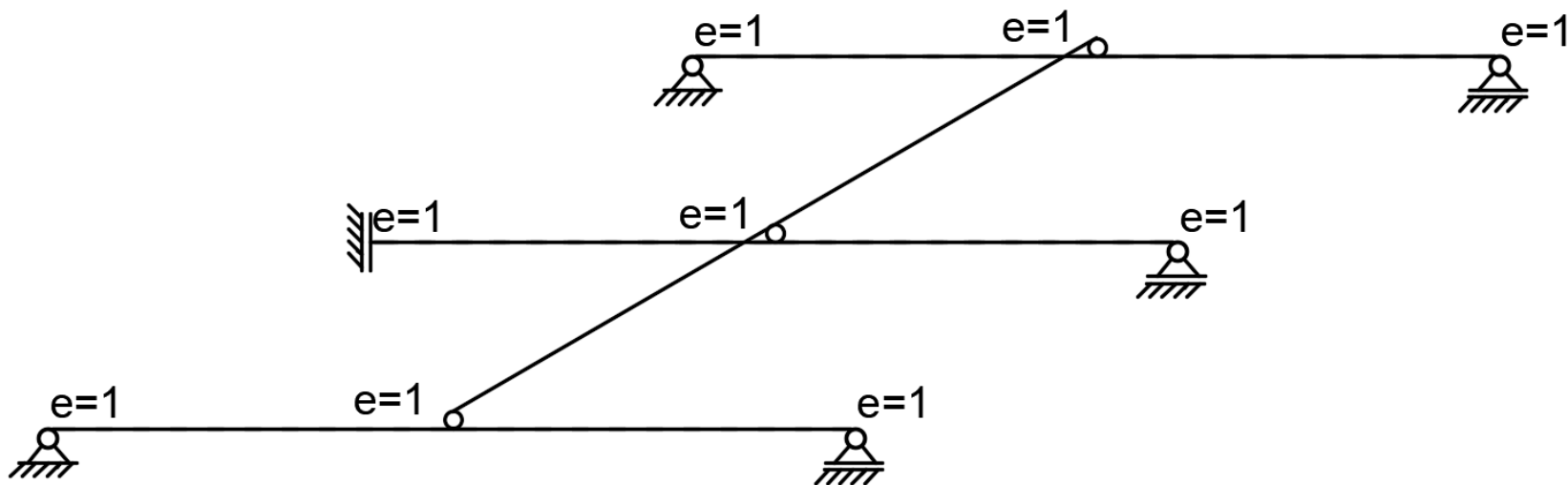
Liczba stopni swobody dla poszczególnych podparć:



Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

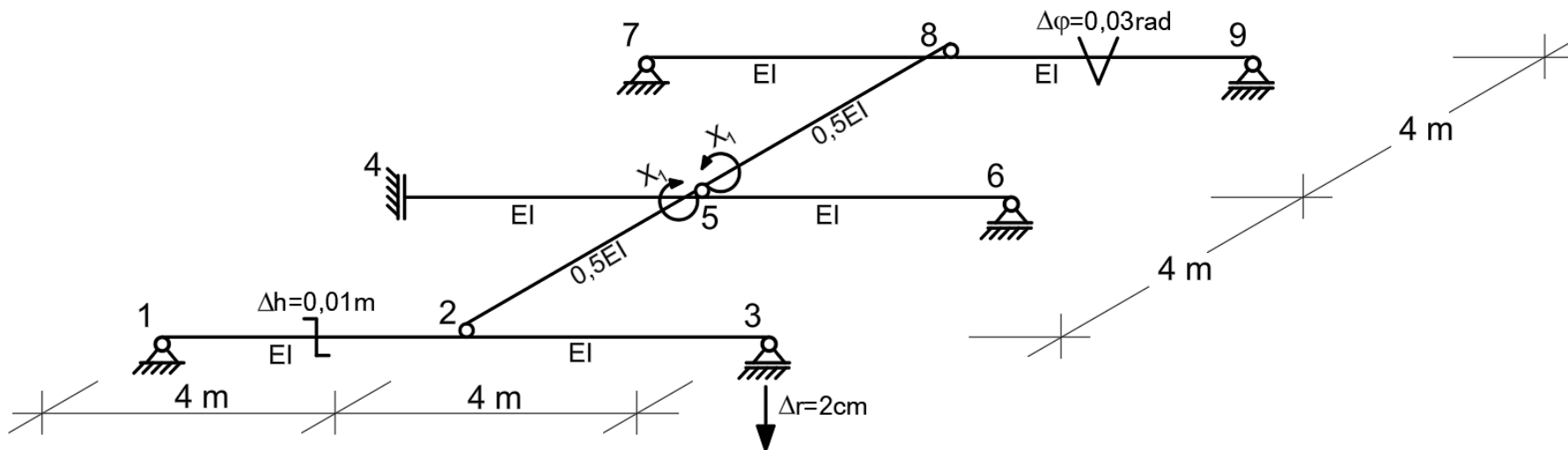
2. Obliczenie stopnia statycznej niewyznaczalności i dobranie układu podstawowego metody sił

$$n_h = e - 2 \cdot l_b$$



Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

3. Układ podstawowy i postać ogólna układu równań metody sił



Postać ogólna układu równań metody sił:

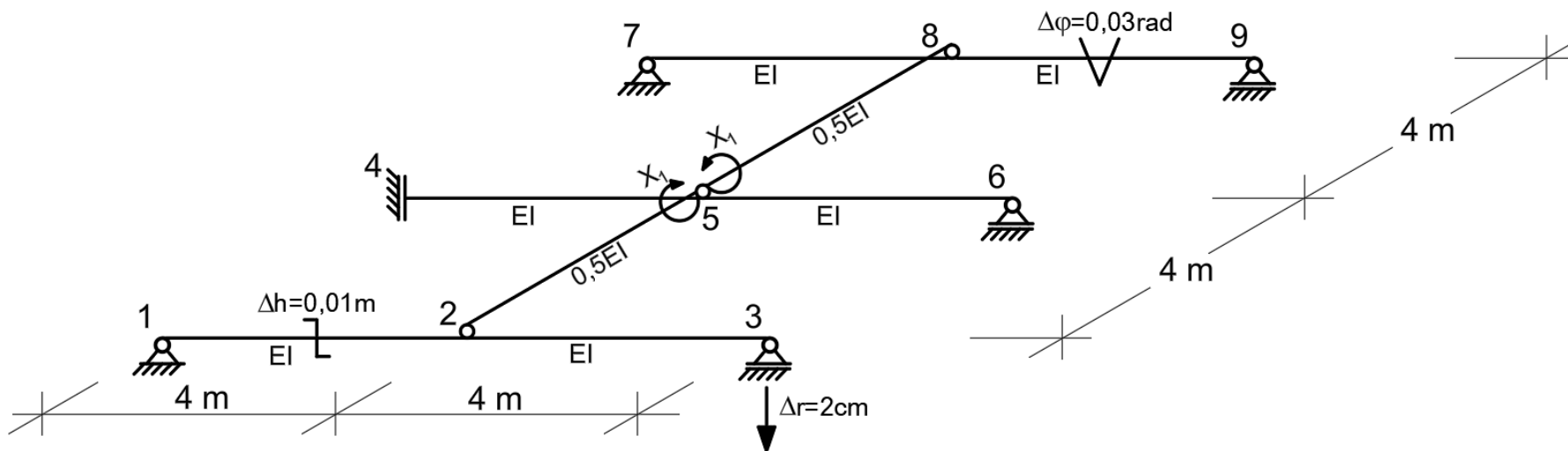
$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1\Delta} = \Delta_{1rz}$$

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot \bar{M}^j}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot \bar{S}_n^j}{k_n}$$

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi
nadliczbowej od jednostkowej j-tej niewiadomej
w układzie podstawowym,

Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

3. Układ podstawowy i postać ogólna układu równań metody sił



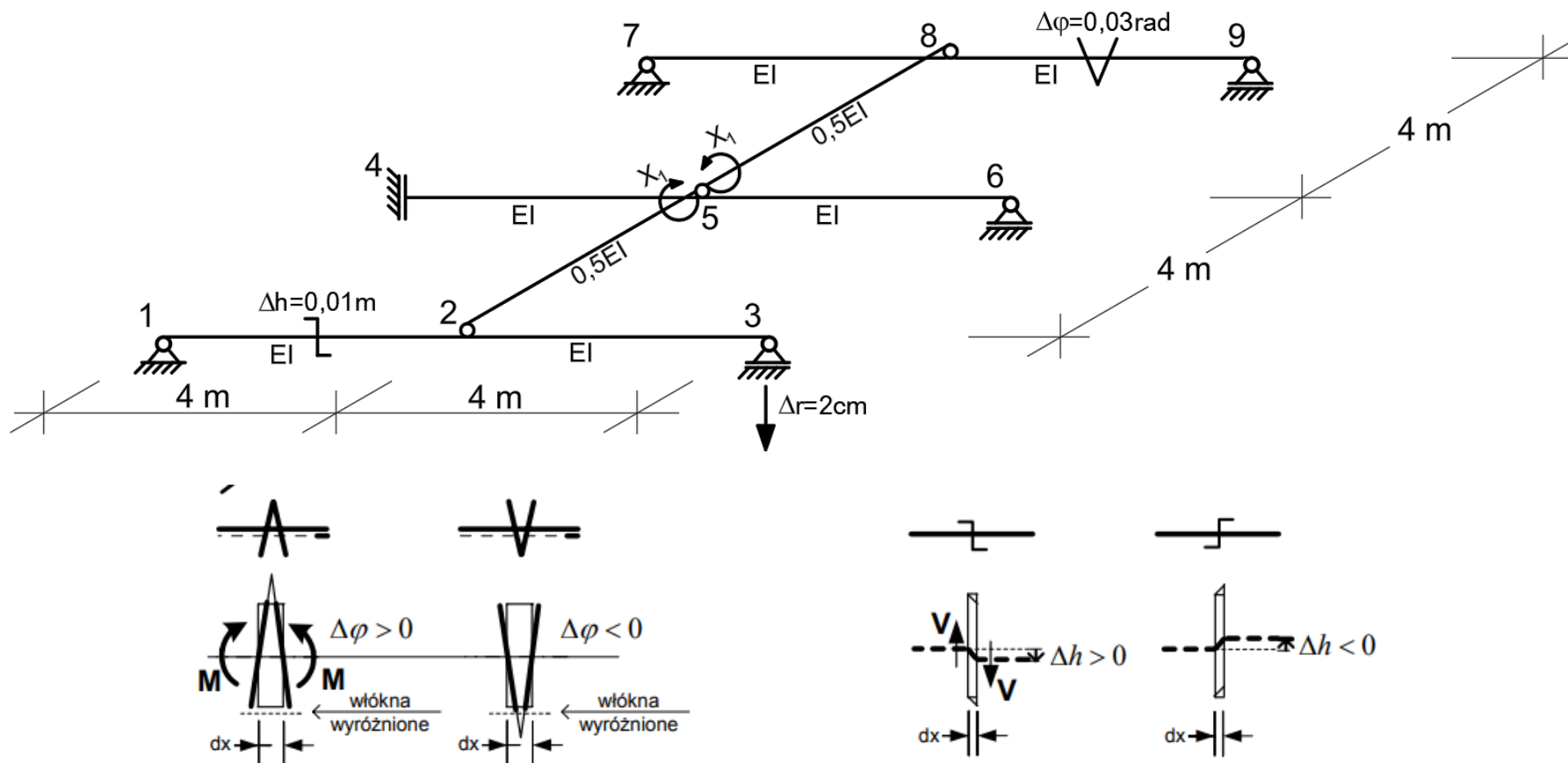
Postać ogólna układu równań metody sił: $\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1\Delta} = \Delta_{1rz}$

Przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od błędów montażu oraz wpływu osiadania podpór w układzie podstawowym

$$\delta_{i\Delta} = \sum_m M_m^i \cdot \Delta \varphi_m^\Delta + \sum_n N_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_v V_v^i \cdot \Delta h_v^\Delta - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r.$$

Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

3. Układ podstawowy i postać ogólna układu równań metody sił



$$\delta_{i\Delta} = \sum_m M_m^i \cdot \Delta \varphi_m^\Delta + \sum_n N_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_v V_v^i \cdot \Delta h_v^\Delta - \sum_r R_r^i \cdot \Delta r_r.$$

Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

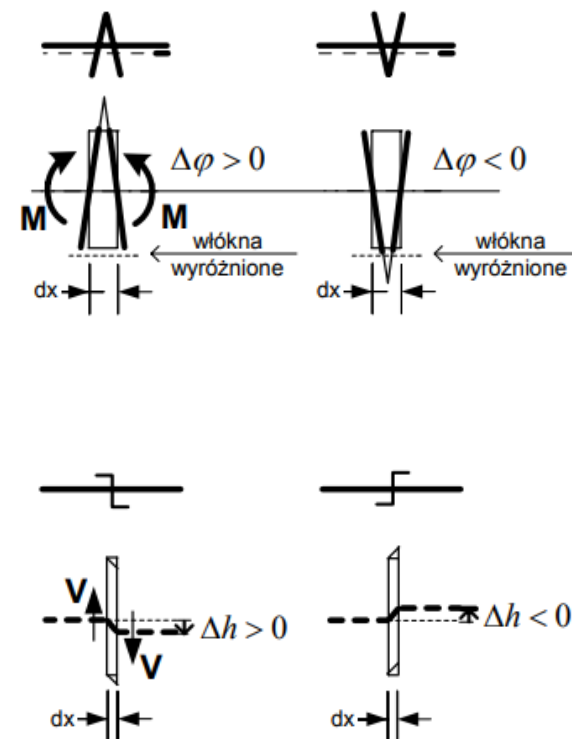
3. Układ podstawowy i postać ogólna układu równań metody sił

Symbole odkształceń kątowych ilustrują zmiany kąta między przekrojami równoległymi, co symbolicznie na osi pręta i dla elementu odkształconego przedstawiono na rysunku obok. Jeśli tej zmianie towarzyszy wydłużenie włókien wyróżnionych (symbol lewy) to takiej zmianie kąta przypisujemy znak „+” w przeciwnym przypadku (symbol prawy) znak „-”.

Symbole odkształceń postaciowych ilustrują poprzeczne przesunięcie osi pręta, co symbolicznie na osi pręta i dla elementu odkształconego przedstawiono na rysunku obok.

Symbol lewy oznacza deformację Δh o zwrocie zgodnym z dodatnimi zwrotami siły poprzecznej (znak „+”) a symbol prawy oznacza deformację Δh o zwrocie przeciwnym z dodatnimi zwrotami siły poprzecznej (znak „-”).

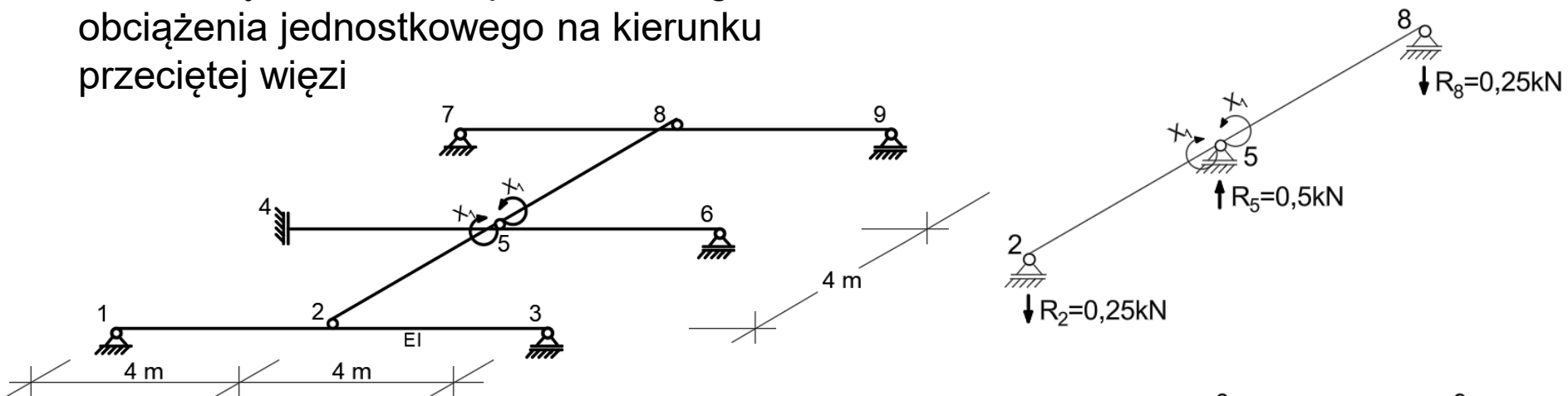
Wynika stąd, że odkształceniu postaciowemu w przekroju „1” należy przypisać znak „-”, a odkształceniu postaciowemu w przekroju „2” znak „+”.



$$\delta_{i\Delta} = \sum_m M_m^i \cdot \Delta\varphi_m^\Delta + \sum_n N_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_v V_v^i \cdot \Delta h_v^\Delta - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r.$$

Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

3. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego na kierunku przeciętej więzi



Belka 2-8

$$\Sigma M_5^P = 0 \Rightarrow R_8 \cdot 4m - X_1 = 0 \Rightarrow R_8 = 0,25 \text{ kN}$$

$$\Sigma M_5^L = 0 \Rightarrow R_2 \cdot 4m - X_1 = 0 \Rightarrow R_2 = 0,25 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow R_2 + R_8 - R_5 = 0 \Rightarrow R_5 = 0,5 \text{ kN}$$

Belka 1-3 i 7-9

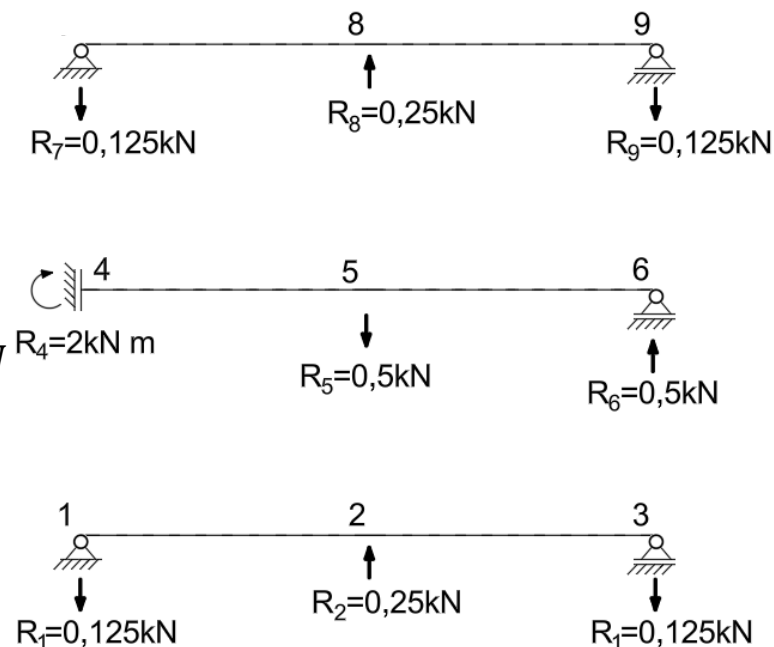
$$\Sigma M_1 = 0 \Rightarrow R_2 \cdot 4m - R_3 \cdot 8m = 0 \Rightarrow R_3 = 0,125 \text{ kN}$$

$$\sum Z = 0 \Rightarrow R_1 + R_3 - R_2 = 0 \Rightarrow R_1 = 0,125 \text{ kN}$$

Belka 4-5

$$\sum Z = 0 \Rightarrow R_5 - R_6 = 0 \Rightarrow R_6 = 0,5 \text{ kN}$$

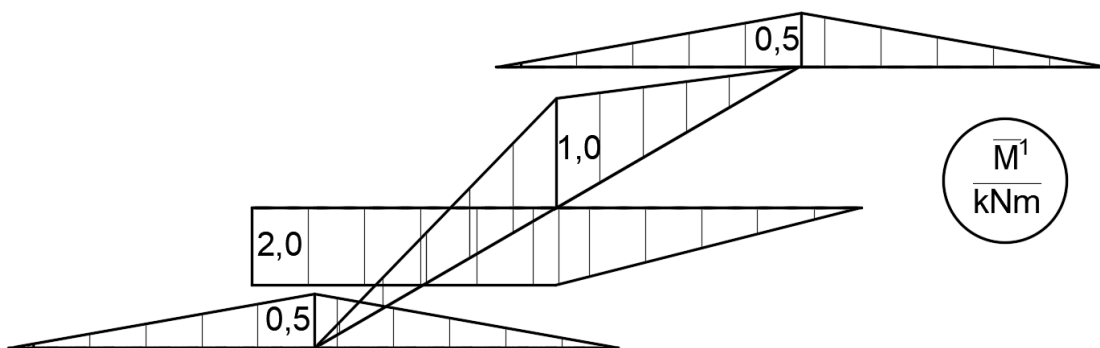
$$\Sigma M_4 = 0 \Rightarrow R_4 + R_5 \cdot 4m - R_6 \cdot 8m \Rightarrow R_4 = 2$$



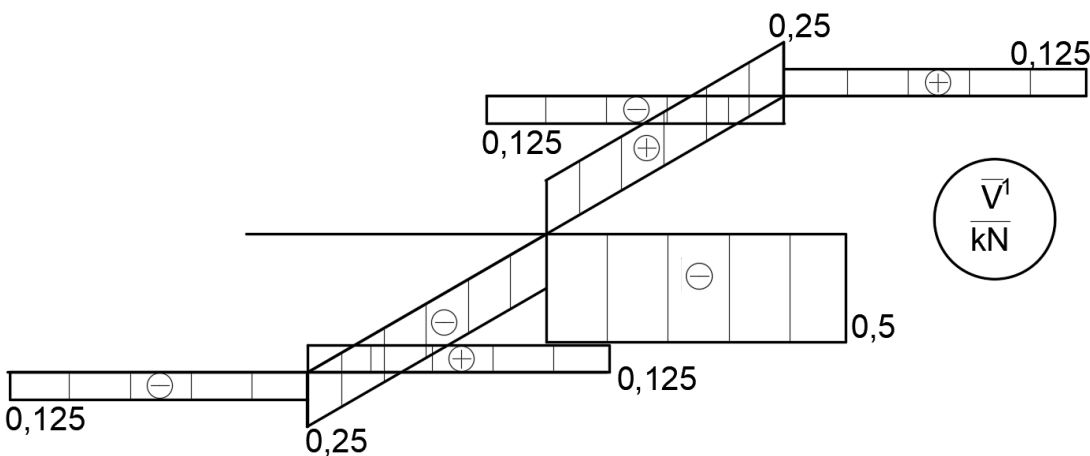


Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

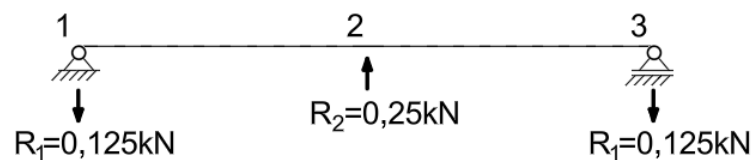
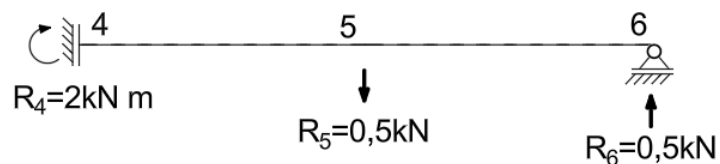
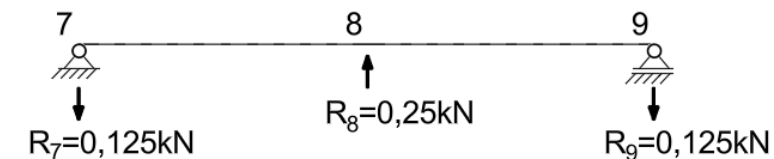
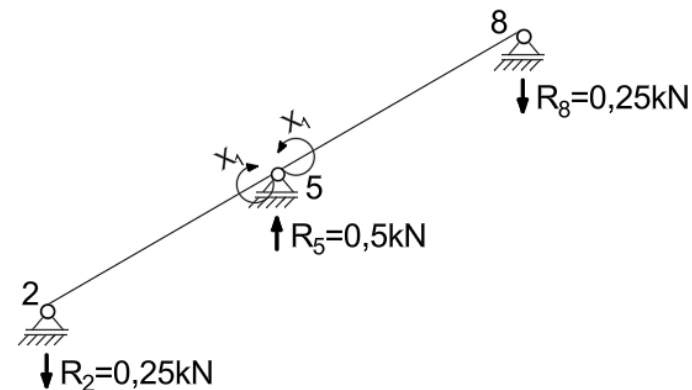
3. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego na kierunku przeciętej więzi



$\frac{M^1}{\text{kNm}}$

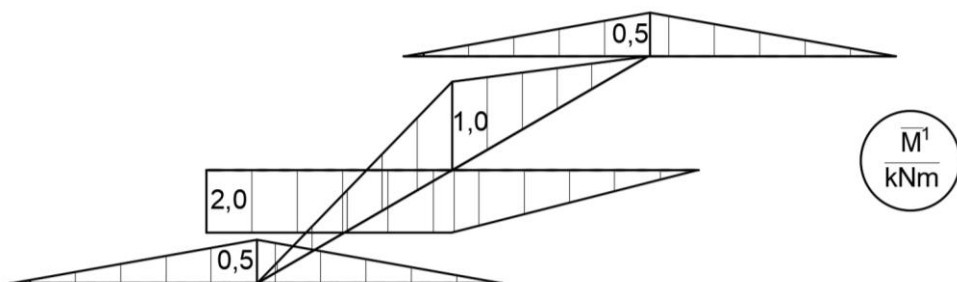


$\frac{V^1}{\text{kN}}$



Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

4. Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych układu równań metody sił

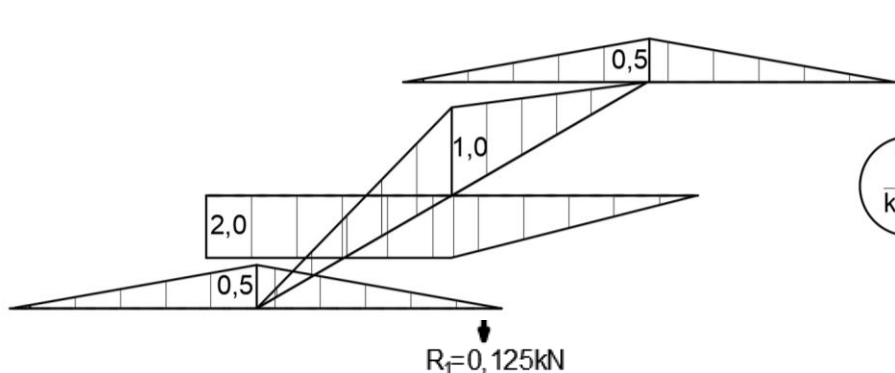


$$\begin{aligned}
 & \bar{1} \text{kN} \cdot \delta_{11} \\
 &= \sum_p \int \frac{\bar{M}^1 \bar{M}^1}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \bar{S}_n^1}{k_n} \frac{1}{0,5EI_y} \left[\frac{1}{2} \cdot 4m \cdot (-1 \text{kNm}) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-1 \text{kNm}) \right] \cdot 2 \\
 &+ \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} \cdot 4m \cdot (-0,5 \text{kNm}) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-0,5 \text{kNm}) \right] \cdot 4 + \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} \cdot 4m \cdot 2 \text{kNm} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \text{kNm} \right] \\
 &+ \frac{1}{EI_y} [4m \cdot 2 \text{kNm} \cdot 2 \text{kNm}]
 \end{aligned}$$

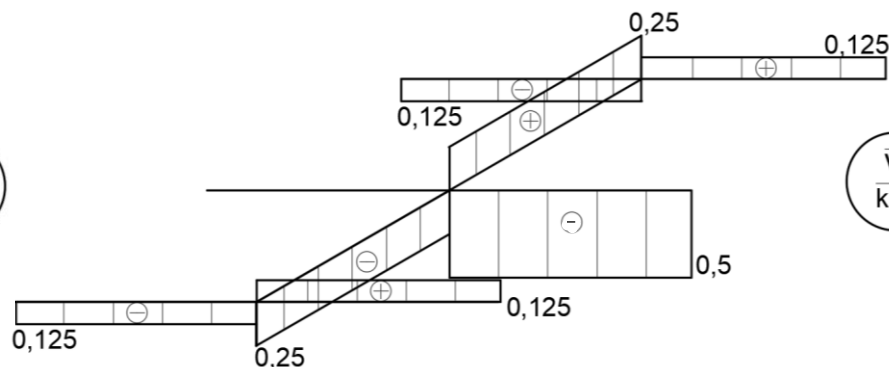
$$\delta_{11} = 28 \frac{\text{kNm}^3}{EI_y}$$

Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

4. Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych układu równań metody sił



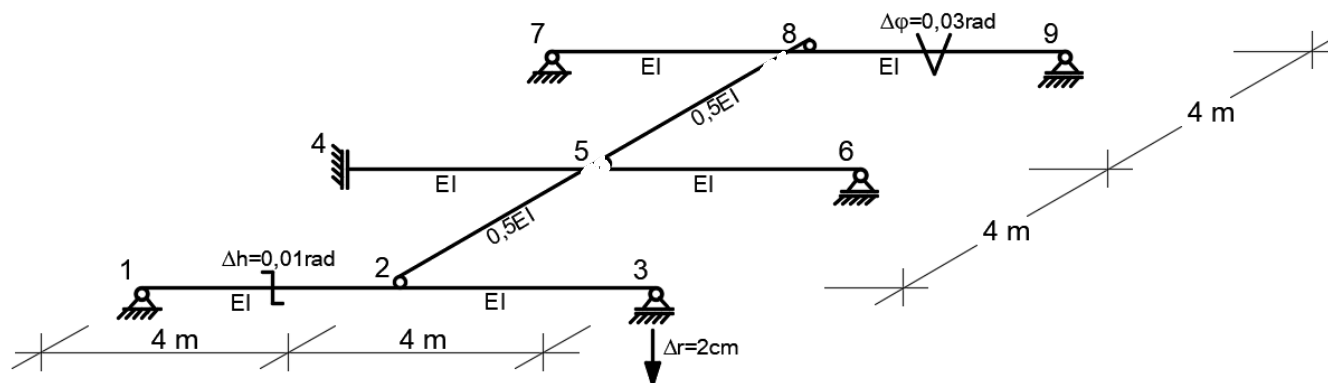
$\bar{M}^1$
kNm



$\bar{V}^1$
kN

$$\bar{1} \text{ kN} \cdot \delta_{1\Delta} = \sum_n \bar{M}_n^i \cdot \Delta\varphi_n^\Delta + \sum_n \bar{N}_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_v \bar{V}_v^i \cdot \Delta h^\Delta - \sum_r \bar{R}_r \Delta r = -0,25 \text{ kNm} \cdot (-0,03) + (-0,125 \text{ kN}) \cdot 0,01 \text{ m} - 0,125 \text{ kN} \cdot 0,02 \text{ m}$$

$$\delta_{1\Delta} = 0,00375 \text{ m}$$



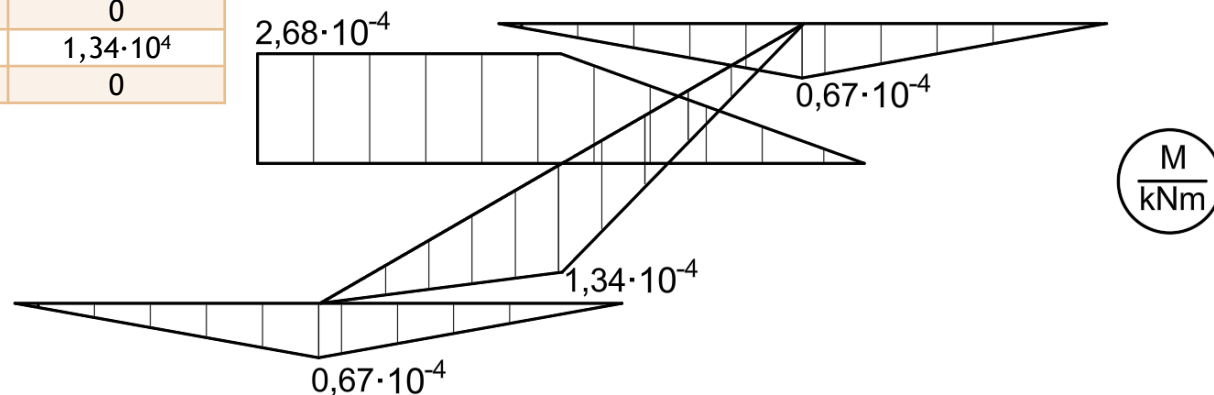
5. Postać szczegółowa układu równań metody sił i jej rozwiązanie

$$28 \frac{kNm^3}{EI_y} \cdot X_1 + 0,00375m = 0$$

$$X_1 = 1,34 \cdot 10^4 \frac{EI_y}{kNm^2}$$

6. Wykresy sił przekrojowych

Momenty zginające				
Pręt	Punkt	$M^1[kNm]$	$X_1[\frac{EI_y}{kNm^2}]$	$M[\frac{EI_y}{m}]$
13	1	0,0		0
	2	-0,5	$-1,34 \cdot 10^4$	$0,67 \cdot 10^4$
	3	0,0		0
46	4	2,0		$2,68 \cdot 10^4$
	5	2,0	$-1,34 \cdot 10^4$	$2,68 \cdot 10^4$
	6	0,0		0
79	7	0,0		0
	8	-0,5	$-1,34 \cdot 10^4$	$0,67 \cdot 10^4$
	9	0,0		0
28	2	0,0		0
	5	-1,0	$-1,34 \cdot 10^4$	$1,34 \cdot 10^4$
	8	0,0		0



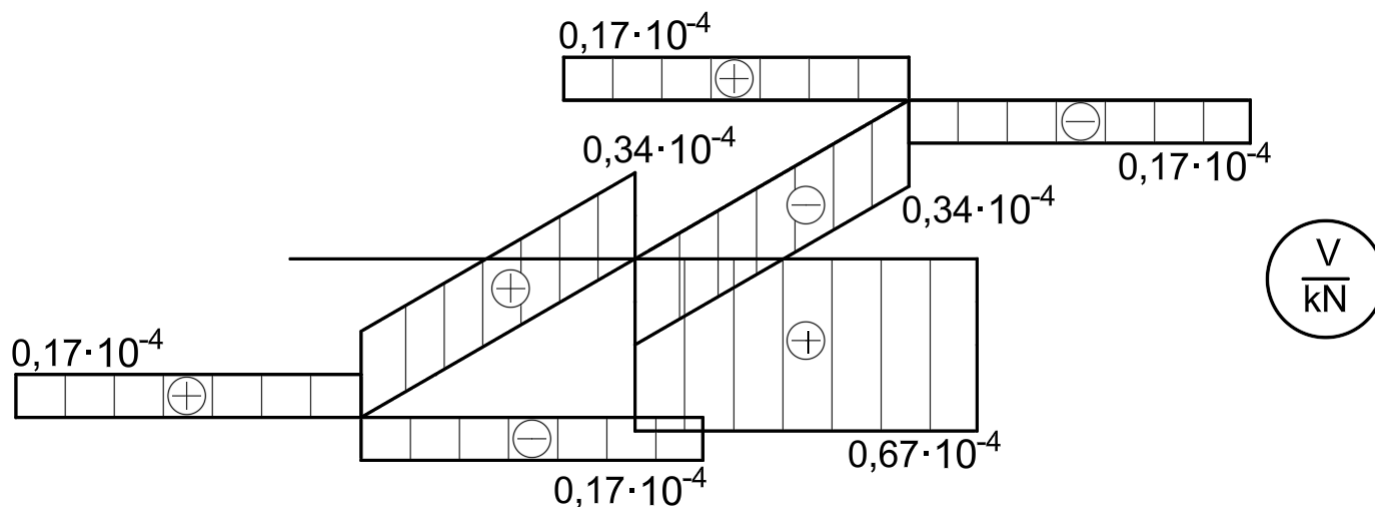


Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

6. Wykresy sił przekrojowych

Siły tnące

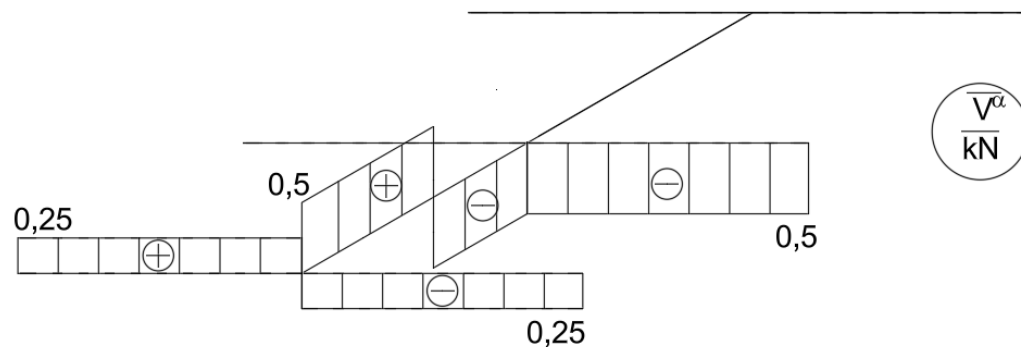
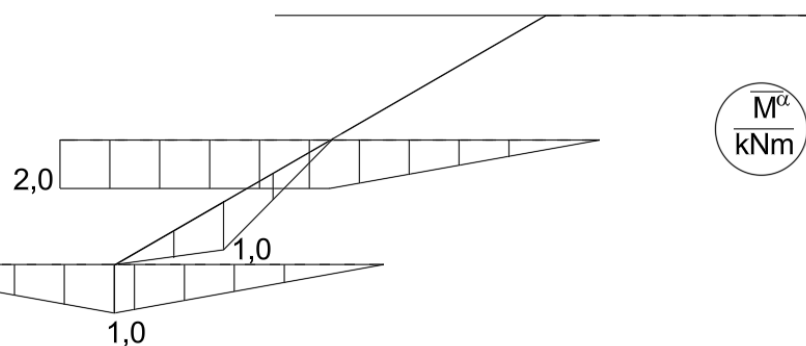
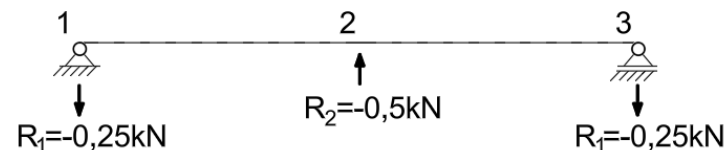
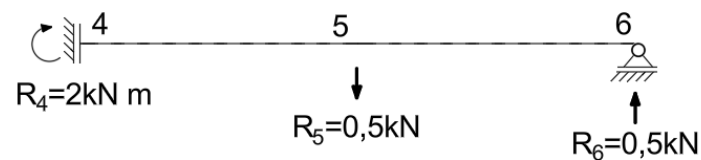
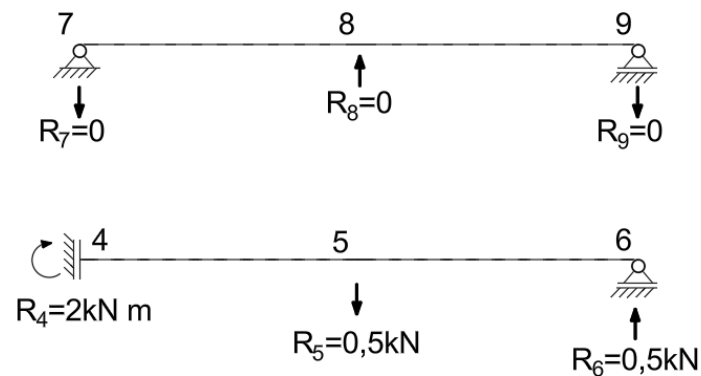
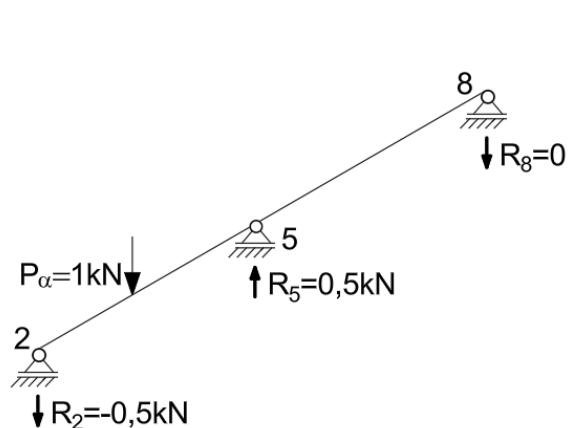
Pręt	$V^1[\text{kNm}]$	$\chi_1[\frac{EI_y}{\text{kNm}^2}]$	$V[\frac{EI_y}{\text{m}^2}]$
12	0,125	$-1,34 \cdot 10^4$	$-1,675 \cdot 10^3$
23	-0,125	$-1,34 \cdot 10^4$	$1,675 \cdot 10^3$
45	0	$-1,34 \cdot 10^4$	0
56	-0,5	$-1,34 \cdot 10^4$	$0,67 \cdot 10^4$
78	0,125	$-1,34 \cdot 10^4$	$-1,675 \cdot 10^3$
89	-0,125	$-1,34 \cdot 10^4$	$1,675 \cdot 10^3$
25	-0,25	$-1,34 \cdot 10^4$	$3,35 \cdot 10^3$
58	0,25	$-1,34 \cdot 10^4$	$-3,35 \cdot 10^3$





Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

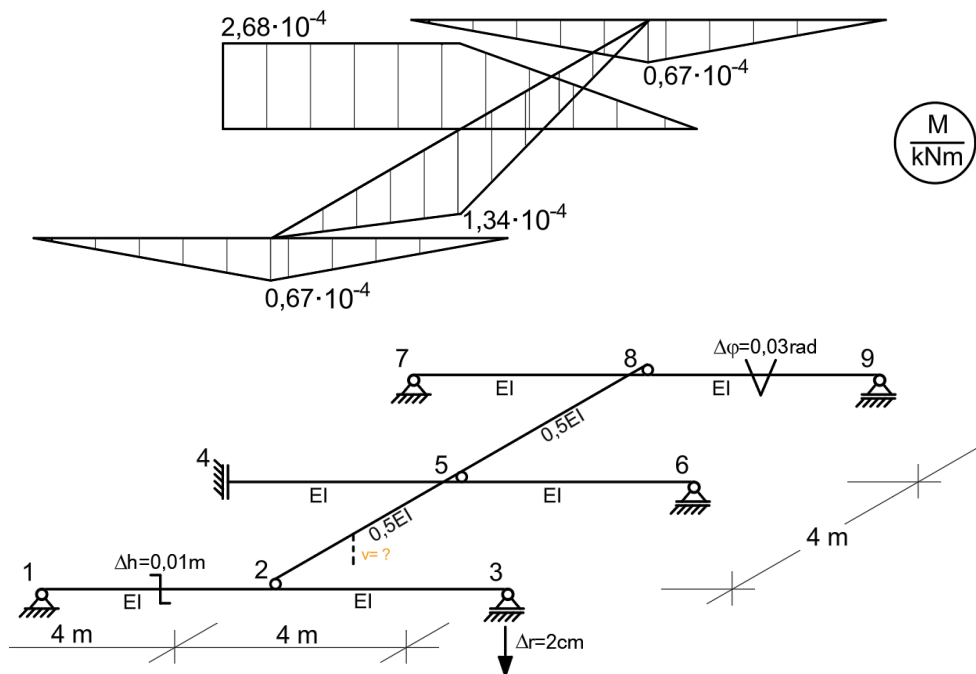
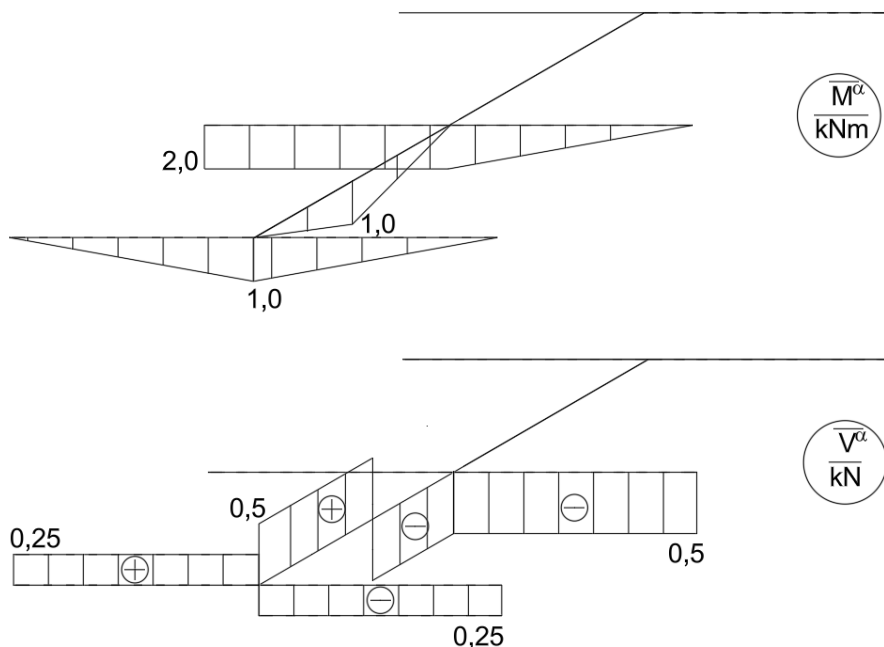
7. Rozwiązanie układu podstawowego od siły jednostkowej na kierunku szukanego przemieszczenia





Zad. 1 Ruszt belkowy - rozwiązanie od wpływów niemechanicznych

8. Obliczenie szukanego przemieszczenia



$$\begin{aligned}
 1kN \cdot v &= \sum_p \int \frac{M_y \bar{M}_y^\alpha}{EI_y} dx \\
 &= \frac{1}{0,5EI_y} \left[\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 1kNm \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,67 \cdot 10^{-4} \frac{EI_y}{m} \right] + \frac{1}{0,5EI_y} \frac{2m}{6} \left[1kNm \cdot 0,67 \cdot 10^{-4} \frac{EI_y}{m} + 4 \cdot 0,5kNm \cdot 1,005 \cdot 10^{-4} \frac{EI_y}{m} \right] + \\
 &\quad \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} \cdot 4m \cdot 1kNm \cdot \frac{2}{3} \cdot 0,67 \cdot 10^{-4} \frac{EI_y}{m} \right] \cdot 2 + \frac{1}{EI_y} \left[4m \cdot 2kNm \cdot (-2,68 \cdot 10^{-4}) \frac{EI_y}{m} \right] + \frac{1}{EI_y} \left[\frac{1}{2} \cdot 4m \cdot 2kNm \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2,68 \cdot 10^{-4}) \frac{EI_y}{m} \right] + \\
 &\quad + 0,25kN \cdot 0,01m - 0,02m \cdot (-0,25kN)
 \end{aligned}$$

$$v = 0,893 \cdot 10^{-4}m + 1,787 \cdot 10^{-4}m + 1,787 \cdot 10^{-4}m - 21,44 \cdot 10^{-4}m - 7,147 \cdot 10^{-4}m + 0,0025m + 0,005m = 0,00509m$$