

Wykład nr 11

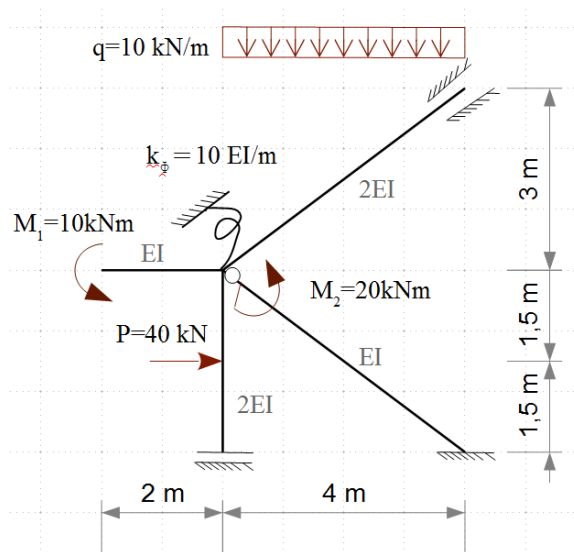
ROZWIĄZYWANIE PŁASKICH UKŁADÓW PRĘTOWYCH STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH METODĄ PRZEMIESZCZEŃ cz.4.

Przykład 1.

Ramę statycznie niewyznaczalną (SN) o schemacie statycznym jak na rys.1 należy rozwiązać w zakresie M, T, N, stosując metodę przemieszczeń.

Założenie $EA = \infty$

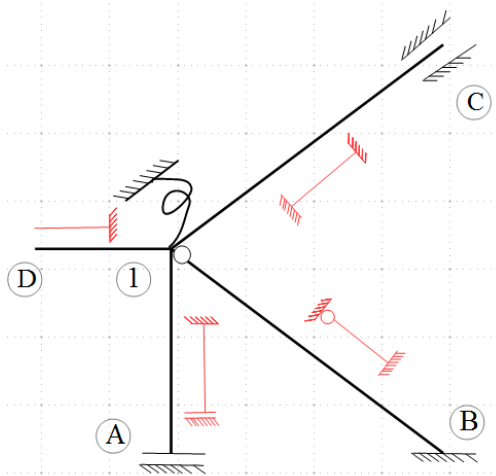
Układ zadany



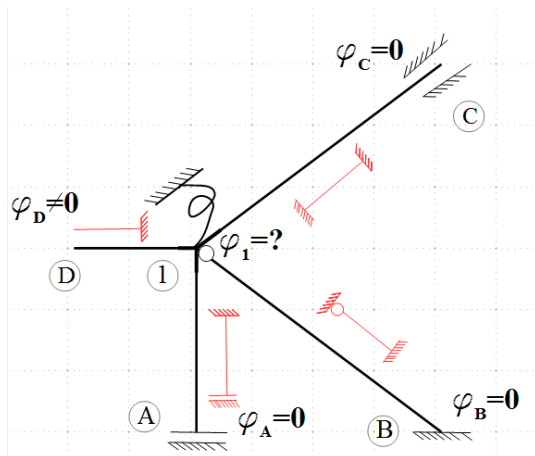
Rys.1.

Sposób I – podejście pośrednie

1. Podział układu na zbiór prętów dla których znane są wzory transformacyjne



2. Wyznaczenia stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu n_g

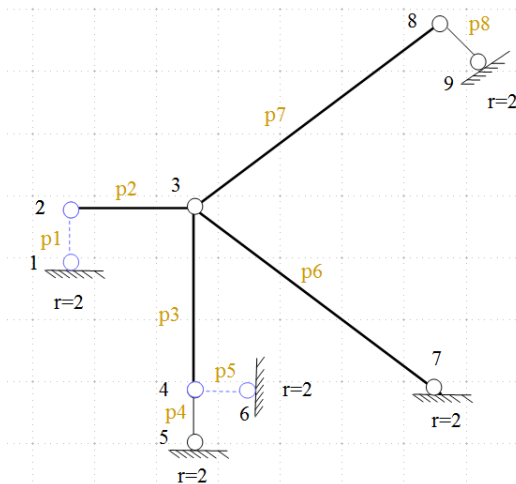


Określenie n_φ

- obroty węzłów: $\varphi_D \neq 0$, $\varphi_{1B} \neq 0$ uwzględnione są we wzorach transformacyjnych przyjętych typów prętów (nie są traktowane jako niewiadome)
- niewiadome geometryczną jest obrót węzła: $\varphi_1 = ?$,

$$n_\varphi = 1$$

Schemat przegubowy



Określenie n_δ

- Oszacowanie n_δ :
 $n_\delta \geq 2w - p - r$
 $p = 8, w = 9, r = 10$

$$n_\delta \geq 0$$

Układ może być nieprzesuwny.

- Analiza kinematyczna:

Po analizie kinematycznej udowodniono na mocy twierdzenia o 3 tarczach, że schemat przegubowy jest GN.

Stąd układ dla przyjętych typów prętów jest nieprzesuwny.

$$n_\delta = 0$$

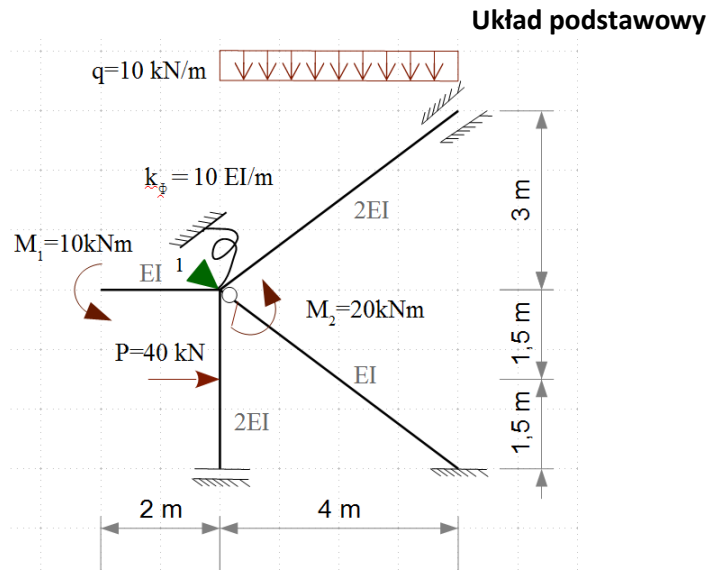
WNIOSEK

Stopień geometrycznej niewyznaczalności wynosi: $n_g = n_\varphi + n_\delta = 1 + 0 = 1$

Analizowana rama przy wybranych typach prętów jest jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalna, niewiadomą jest obrót węzła.

Niewiadome geometryczne: $\varphi_1 = ?$,

3. Układ podstawowy metody przemieszczeń

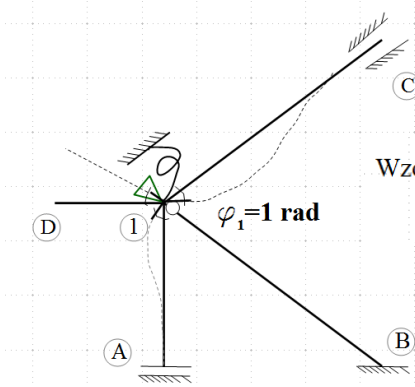


4. Układ równań metody przemieszczeń – postać ogólna

$$K_1 = k_{11}\varphi_1 + K_{1F} = 0$$

5. Wyznaczenie współczynników układu równań metody przemieszczeń

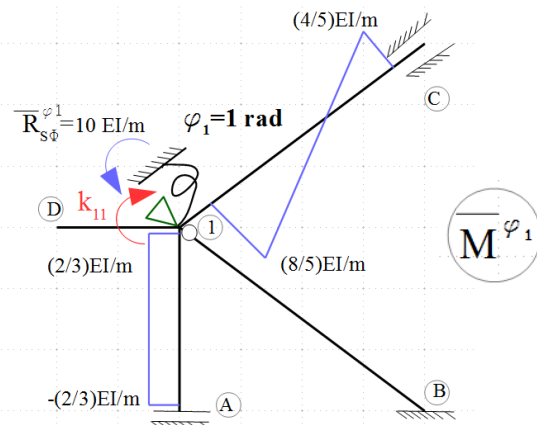
➤ stan rotacyjny $\varphi_1 = 1 \text{ rad}$



Wzory transformacyjne



Wykres momentów brzegowych \bar{M}^{φ_1}



Momenty brzegowe:

$$\bar{M}_{1A}^{\varphi_1} = \frac{2EI}{3m} 1 * 1 \text{ rad} = \frac{2EI}{3m}$$

$$\bar{M}_{1C}^{\varphi_1} = \frac{2EI}{5m} 4 * 1 \text{ rad} = \frac{8EI}{5m}$$

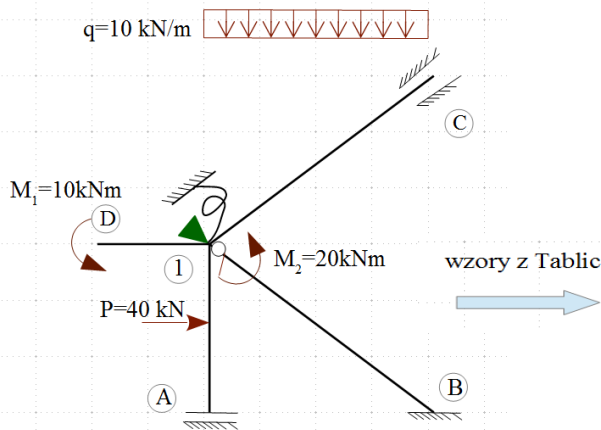
$$\bar{M}_{1D}^{\varphi_1} = \frac{EI}{2m} 0 * 1 \text{ rad} = 0$$

$$\bar{M}_{A1}^{\varphi_1} = \frac{2EI}{3m} (-1) * 1 \text{ rad} = -\frac{2EI}{3m}$$

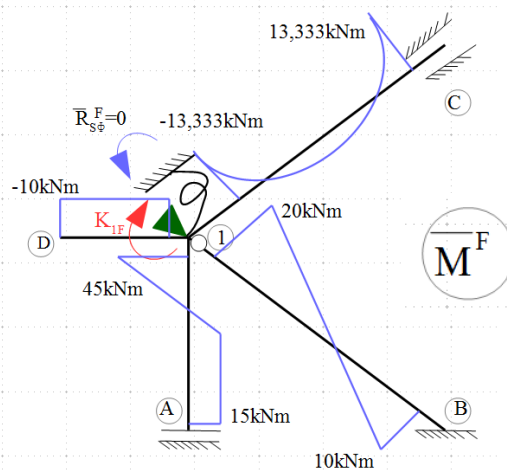
$$\bar{M}_{C1}^{\varphi_1} = \frac{2EI}{5m} 2 * 1 \text{ rad} = \frac{4EI}{5m}$$

$$\bar{M}_{D1}^{\varphi_1} = \frac{EI}{2m} 0 * 1 \text{ rad} = 0$$

➤ Stan wyjściowy F



Momenty brzegowe \bar{M}^F



Momenty brzegowe

$$\bar{M}_{1A}^F = \frac{-3PL}{8} = \frac{-3(-40\text{kN})3\text{m}}{8} = 45\text{kNm}$$

$$\bar{M}_{1C}^F = \frac{-qL^2}{12} = \frac{-\frac{10\text{kN}}{\text{m}}4\text{m}^2}{12} = -13,333\text{kNm}$$

$$\bar{M}_{1D}^F = 10\text{kNm}$$

$$\bar{M}_{A1}^F = \frac{-PL}{8} = \frac{-(-40\text{kN})3\text{m}}{8} = 15\text{kNm}$$

$$\bar{M}_{C1}^F = \frac{qL^2}{12} = \frac{\frac{10\text{kN}}{\text{m}}4\text{m}^2}{12} = 13,333\text{kNm}$$

$$\bar{M}_{D1}^F = -10\text{kNm}$$

$$\bar{M}_{1B}^F = -20\text{kNm} \text{ (moment przywęzłowy)}$$

$$\bar{M}_{B1}^F = -10\text{kNm}$$

➤ Wartości współczynników równania metody przemieszczeń

obciążenie: stan rotacyjny $\varphi_1 = 1 \text{ rad}$

Z równowagi momentów brzegowych w węźle „1”, który ulega obrotowi otrzymujemy

$$\sum M_1 = 0$$

$$k_{11} = \sum_m \bar{M}_{1m}^{\varphi_1} + R_{S\varphi}^{\varphi_1} = \bar{M}_{1A}^{\varphi_1} + \bar{M}_{1C}^{\varphi_1} + k_\varphi = \frac{2EI}{3m} + \frac{8EI}{5m} + 10\frac{EI}{m} = 12,2666\frac{EI}{m}$$

obciążenie: stan wyjściowy F

Z równowagi momentów w węźle „1”, który nie ulega obrotowi otrzymujemy

$$\sum M_i = 0$$

$$K_{1F} = \sum_m \bar{M}_{1m}^F - M_1 = \bar{M}_{1A}^F + \bar{M}_{1C}^F + \bar{M}_{1D}^F - M_1$$

$$= 45\text{kNm} - 13,333\text{kNm} + 10\text{kNm} - 0\text{kNm} = 41,666\text{kNm}$$

6. Rozwiązanie układu równań metody przemieszczeń

$$12,2666 \frac{EI}{m} \varphi_1 + 41,6666 kNm = 0$$

$$\varphi_1 = -3,396 \frac{kNm^2}{EI}$$

7. Wyznaczenie sił przekrojowych w układzie zadany

• **Momenty zginające**

wyznaczono stosując zasadę superpozycji rozwiązań

$$M_{ij} = \bar{M}_{ij}^{\varphi_1=1} \varphi_1 + \bar{M}_{ij}^F$$

$$M_{1A} = \frac{2EI}{3m} \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) + 45kNm = 42,726kNm$$

$$M_{A1} = -\frac{2EI}{3m} \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) + 15kNm = 17,264kNm$$

$$M_{1C} = \frac{8EI}{5m} \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) - 13,333kNm = -18,766kNm$$

$$M_{C1} = \frac{4EI}{5m} \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) + 13,333kNm = 10,616kNm$$

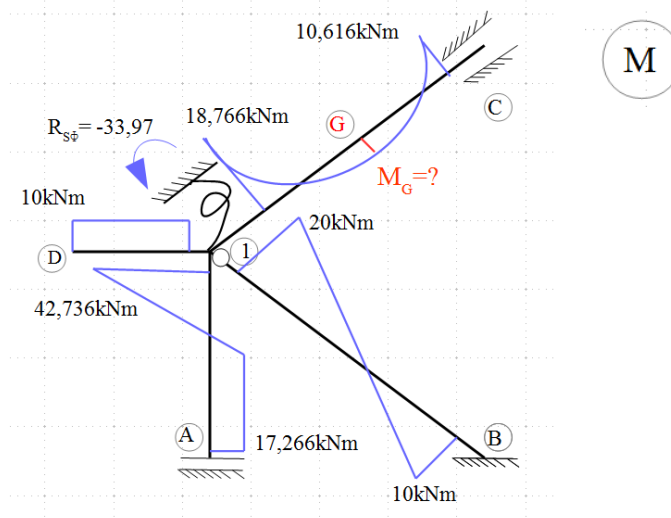
$$M_{1D} = 10kNm$$

$$M_{D1} = -10kNm$$

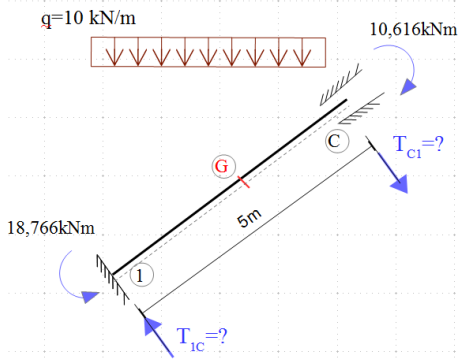
$$M_{1B} = -20kNm$$

$$M_{B1} = -10kNm$$

Wykres momentów zginających M :



Momentu zginającego w przekroju „G” należy wyznaczyć z warunku z równowagi sił w elemencie prętowym „1-C”:



$$\sum M_C = 0$$

$$18,766kNm + T_{1C} * 5m - q * 4m * 2m + 10,616kNm = 0$$

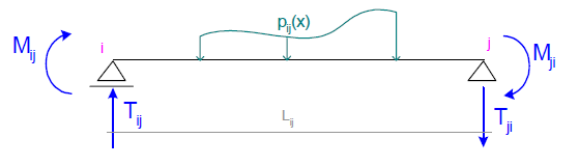
$$T_{1C} = 17,63kN$$

$$M_G = T_{1C} * 2,5m - 18,766kNm - q * 2m * 1m = 5,309kNm$$

Siły tnące

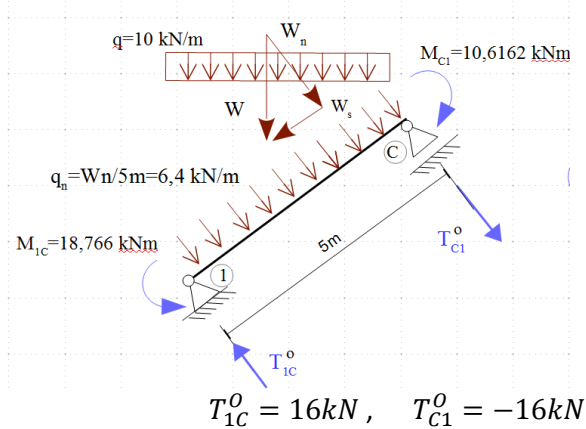
III sposób wyznaczania sił tnących:

Dla wszystkich typów prętów poza sztywno łyżwowym przyjmuje się schemat belki swobodnie podpartej obciążonej zadaniem obciążeniem jakie występuje na pręcie (F). Kolejno od obciążenia F wyznacza się w belce swobodnie podpartej siły tnące T_{ij}^o, T_{ji}^o , a następnie uwzględniając wyliczone wcześniej brzegowe momenty zginające wartości sił tnących wylicza się zgodnie z podanymi wzorami, które wynikają z warunków równowagi.



Rys. 1.21

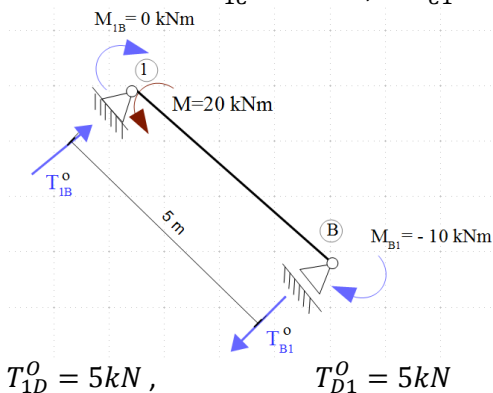
$$T_{ij} = T_{ij}^o - \frac{(M_{ij} + M_{ji})}{L_{ij}} \quad T_{ji} = T_{ji}^o - \frac{(M_{ij} + M_{ji})}{L_{ij}}$$



$$T_{1C}^o = 16kN, \quad T_{C1}^o = -16kN$$

$$T_{1C} = 16kN - \frac{(-18,766kNm) + 10,6162kNm}{5m} = 17,636kN$$

$$T_{C1} = -16kN - \frac{(-18,766kNm) + 10,6162kNm}{5m} = -14,37kN$$



$$T_{1D}^o = 5kN, \quad T_{D1}^o = 5kN$$

Pręt wspornikowy

(Siły tnące wyznaczone z warunków równowagi sił)
 $T_{1D} = 0kN, \quad T_{D1} = 0kN$

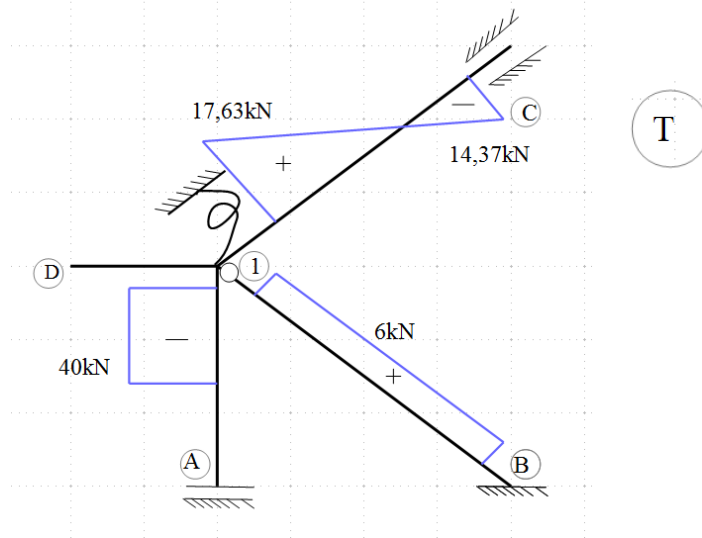
$$T_{1D} = 5kN - \frac{(-10kNm) + 0kNm}{5m} = 6kN$$

$$T_{D1} = 5kN - \frac{(-10kNm) + 0kNm}{5m} = 6kN$$

Pręt sztywno łyżwowy

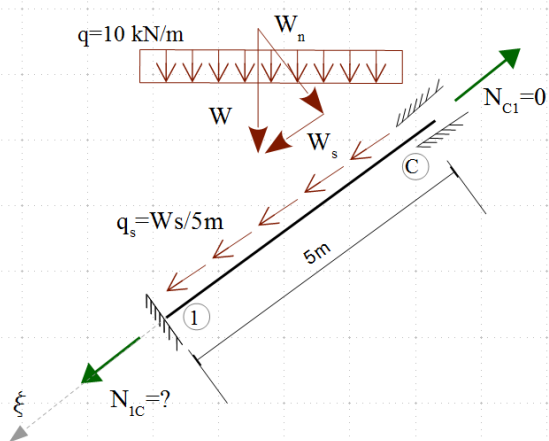
(Siły tnące wyznaczone z warunków równowagi sił)
 $T_{1A} = -40kN, \quad T_{A1} = 0kN$

Wykres sił tnących T



Siły osiowe

- Wyznaczenie siły osiowej w przekroju 1 w kierunku C ($N_{1C}=?$)

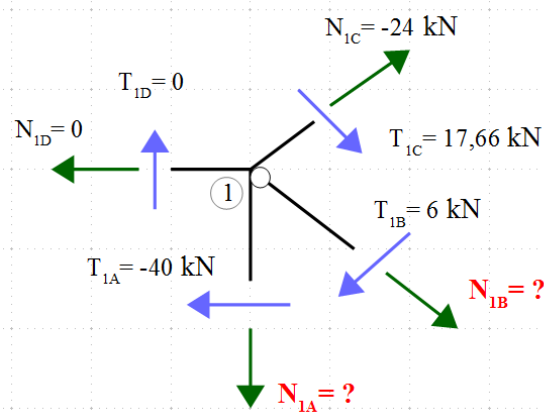


$$\sum \xi = 0$$

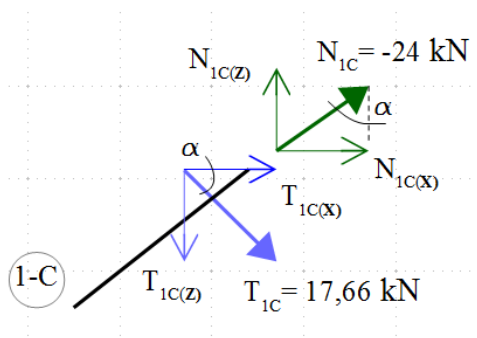
$$N_{1C} + q_s * 5m = 0$$

$$N_{1C} = -W_s = -W \cos \alpha = -q * 4m * \frac{3}{5} = -24kN$$

Siły w węźle „1”



Rozkład sił przywęzłowych pręta 1-C na składowe na kierunku osi X i osi Z



$$T_{1Cx} = 17,66kN * \frac{4}{5} = 10,596kN$$

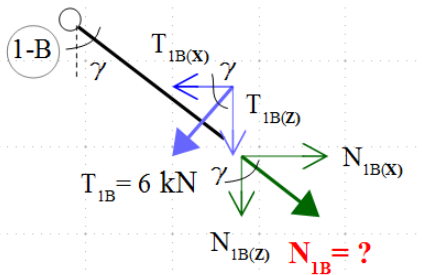
$$T_{1Cz} = 17,66kN * \frac{3}{5} = 14,1328kN$$

$$N_{1Cx} = -24kN * \frac{4}{5} = -19,2kN$$

$$N_{1Cz} = -24kN * \frac{3}{5} = -14,4kN$$

$$\sin(\alpha) = \frac{4}{5}; \quad \cos(\alpha) = \frac{3}{5}$$

Rozkład sił przywęzłowych pręta 1-B na składowe na kierunku osi X i osi Z



$$T_{1Bx} = 6kN * \frac{3}{5}$$

$$T_{1Bz} = 6kN * \frac{4}{5}$$

$$N_{1Bx} = N_{1B} * \frac{4}{5}$$

$$N_{1Bz} = N_{1B} * \frac{3}{5}$$

$$\sin(\gamma) = \frac{3}{5}; \quad \cos(\gamma) = \frac{4}{5}$$

Równowaga sił węzle „1”

$$\sum X = 0$$

$$40kN + 10,596kN - 19,2kN - 6kN * \frac{3}{5} + N_{1B} * \frac{4}{5} = 0$$

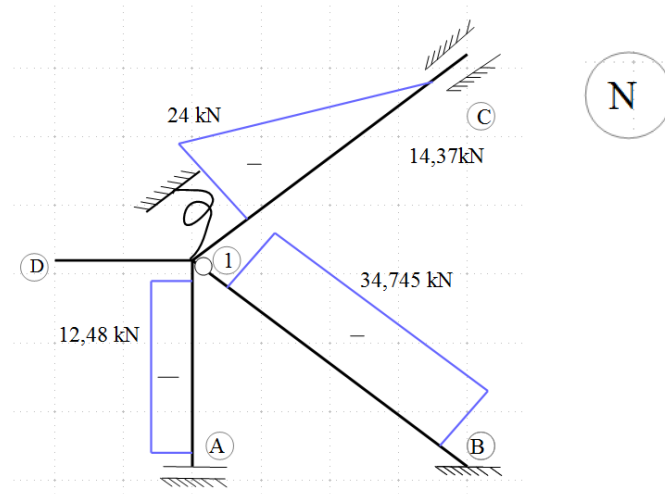
$$N_{1B} = -34,745 kN$$

$$\sum Z = 0$$

$$N_{1A} + 14,1328kN + 14,4kN + 6kN * \frac{4}{5} + N_{1B} * \frac{3}{5} = 0$$

$$N_{1A} = -12,4858 kN$$

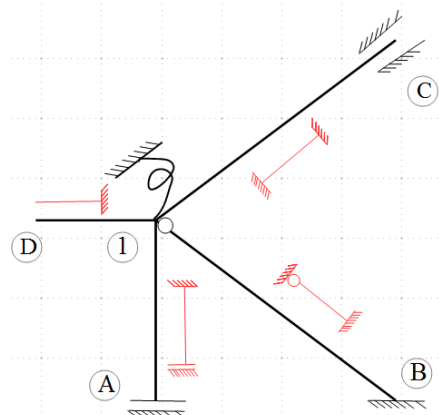
Wykres sił osiowych N :



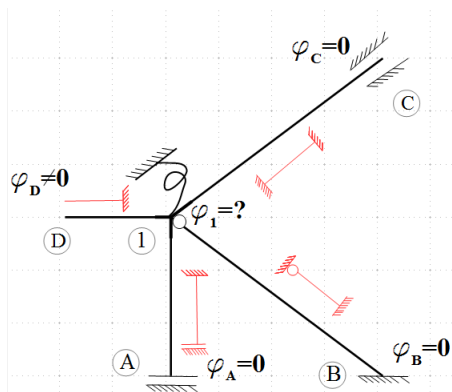
Przykład 1. (układ zadany rys.1.)

Sposób II – podejście bezpośrednie

1. Podział układu na zbiór prętów dla których znane są wzory transformacyjne



2. Wyznaczenia stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu n_g

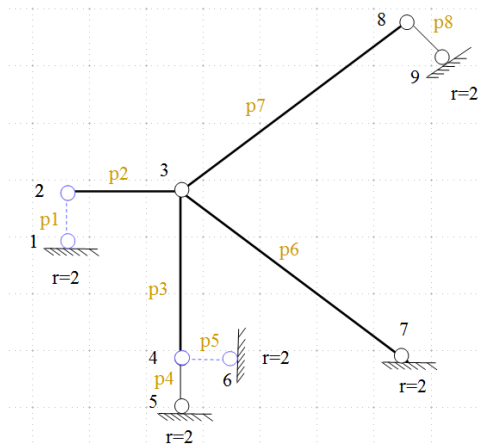


Określenie n_g

- obroty węzłów: $\varphi_3 \neq 0$, $\varphi_4 \neq 0$ uwzględnione są we wzorach transformacyjnych przyjętych typów prętów (nie są traktowane jako niewiadome)
- niewiadome geometryczną jest obrót węzła: $\varphi_1 = ?$,

$$n_g = 1$$

Schemat przegubowy



Określenie $n\delta$

- Oszacowanie $n\delta$:
 $n\delta \geq 2w - p - r$

$$p = 8, w = 9, r = 10$$

$$n\delta \geq 0$$

Układ może być nieprzesuwany

- Analiza kinematyczna:

Po analizie kinematycznej udowodniono na mocy twierdzenia o 3 tarczach, że schemat przegubowy jest GN.

WNIOSEK

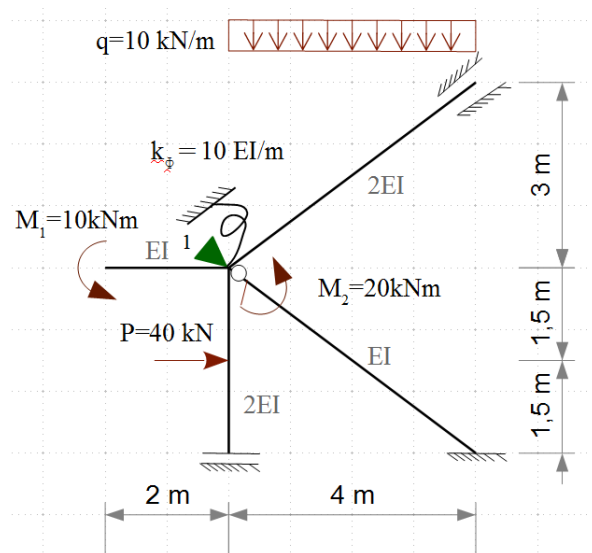
Stopień geometrycznej niewyznaczalności wynosi: $n_g = n_\varphi + n_\delta = 1 + 0 = 1$

Analizowana rama przy wybranych typach prętów jest jednokrotnie geometrycznie niewyznaczalna, niewiadomą jest obrót węzła

Niewiadome geometryczne: $\varphi_1 = ?$,

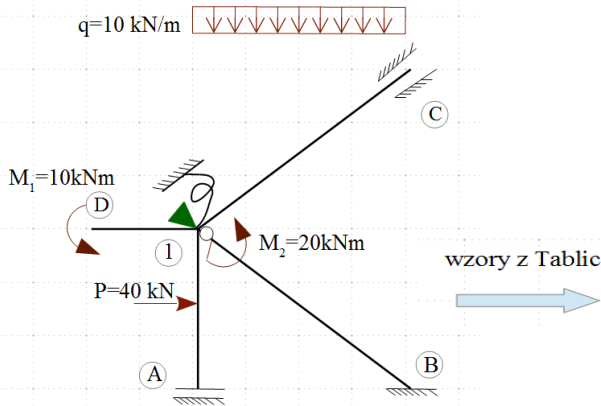
3. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Układ podstawowy

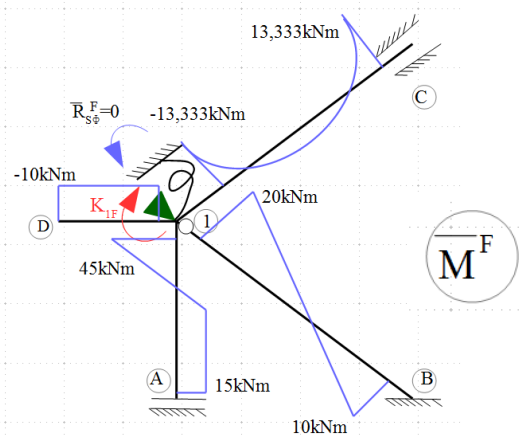


4. Rozwiązanie układu podstawowego od stanu F

➤ Stan wyjściowy F



Momenty brzegowe \bar{M}^F



Momenty brzegowe

$$\bar{M}_{1A}^F = \frac{-3PL}{8} = \frac{-3(-40\text{kN})3\text{m}}{8} = 45\text{kNm}$$

$$\bar{M}_{1C}^F = \frac{-qL^2}{12} = \frac{-\frac{10\text{kN}}{\text{m}}4\text{m}^2}{12} = -13,333\text{kNm}$$

$$\bar{M}_{1D}^F = 10\text{kNm}$$

$$\bar{M}_{1B}^F = -20\text{kNm} \text{ (moment przywęzłowy)}$$

$$\bar{M}_{A1}^F = \frac{-PL}{8} = \frac{-(-40\text{kN})3\text{m}}{8} = 15\text{kNm}$$

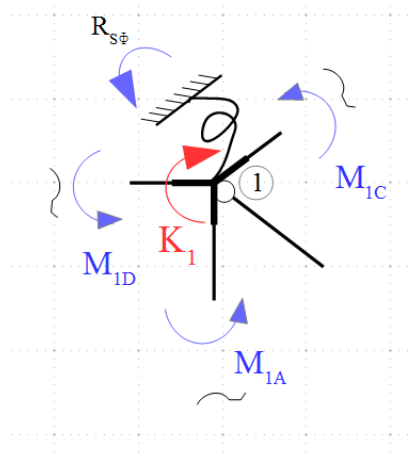
$$\bar{M}_{C1}^F = \frac{qL^2}{12} = \frac{\frac{10\text{kN}}{\text{m}}4\text{m}^2}{12} = 13,333\text{kNm}$$

$$\bar{M}_{D1}^F = -10\text{kNm}$$

$$\bar{M}_{B1}^F = -10\text{kNm}$$

5. Równanie metody przemieszczeń na określenie niewiadomej geometrycznej:

Wyznacza się reakcję K_1 jako funkcję zmiennej φ_1 i przyrównuje się ją do zera, gdyż podpora przenosząca reakcję K_1 nie istnieje.



$$K_1 = 0$$

$$\sum M_1 = 0$$

$$K_1 - M_{1C} - M_{1A} - M_{1D} - R_{S\varphi} = 0$$

$$K_1 = M_{1C} + M_{1A} + M_{1D} + R_{S\varphi} = 0$$

Momenty zginające wyznacza się ze wzorów transformacyjnych:

$$\begin{aligned}M_{1c} &= \frac{2EI}{5m} (4 * \varphi_1 + 2 * \varphi_c) - 13,333kNm = \frac{2EI}{5m} (4 * \varphi_1 + 2 * 0) - 13,333kNm \\ &= \frac{8EI}{5m} * \varphi_1 - 13,333kNm\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{1A} &= \frac{2EI}{3m} (1 * \varphi_1 + (-1) * \varphi_A) + 45kNm = \frac{2EI}{3m} (1 * \varphi_1 + (-1) * 0) + 45kNm \\ &= \frac{2EI}{3m} * \varphi_1 + 45kNm\end{aligned}$$

$$M_{1D} = \frac{EI}{2m} (0 * \varphi_1 + 0 * \varphi_D) + 10kNm = 10kNm$$

$$R_{S\varphi} = 10 \frac{EI}{m} * \varphi_1$$

$$K_1 = M_{1c} + M_{1A} + M_{1D} + R_{S\varphi} = 0$$

$$\begin{aligned}K_1 &= \frac{8EI}{5m} * \varphi_1 - 13,333kNm + \frac{2EI}{3m} * \varphi_1 + 45kNm + 10kNm + 10 \frac{EI}{m} * \varphi_1 = 0 \\ 12,2666 \frac{EI}{m} \varphi_1 + 41,666kNm &= 0\end{aligned}$$

6. Rozwiązanie powyższego równania:

$$\varphi_1 = -3,396 \frac{kNm^2}{EI}$$

7. Wykresy sił wewnętrznych:

Momenty zginające wyznaczone ze wzorów transformacyjnych:

$$\begin{aligned}M_{1c} &= \frac{2EI}{5m} (4 * \varphi_1 + 2 * \varphi_c) - 13,333kNm = \frac{2EI}{5m} (4 * \varphi_1 + 2 * 0) - 13,333kNm \\ &= \frac{8EI}{5m} * \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) - 13,333kNm = -18,766kNm\end{aligned}$$

$$M_{C1} = \frac{2EI}{5m} (4 * \varphi_c + 2 * \varphi_1) + 13,333kNm$$

$$= \frac{2EI}{5m} \left(4 * 0 + 2 * \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) \right) + 13,333kNm = 10,616kNm$$

$$M_{1A} = \frac{2EI}{3m} (1 * \varphi_1 + (-1) * \varphi_A) + 45kNm = \frac{2EI}{5m} \left(1 * \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) + (-1) * 0 \right) + 45kNm$$

$$= \frac{2EI}{3m} * \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) + 45kNm = 42,726kNm$$

$$M_{A1} = \frac{2EI}{3m} (1 * \varphi_A + (-1) * \varphi_1) + 15kNm = \frac{2EI}{5m} \left(1 * 0 + (-1) * \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) \right) + 15kNm$$

$$= -\frac{2EI}{3m} \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) + 15kNm = 17,264kNm$$

$$M_{1D} = \frac{EI}{2m} (0 * \varphi_1 + 0 * \varphi_D) + 10kNm = 10kNm$$

$$M_{D1} = \frac{EI}{2m} (0 * \varphi_D + 0 * \varphi_1) - 10kNm = -10kNm$$

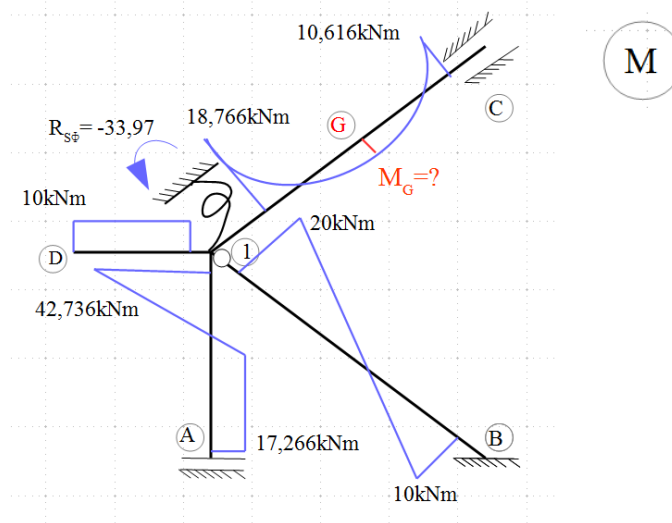
$$M_{1B} = \frac{EI}{5m} (0 * \varphi_1 + 3 * \varphi_B) - 20kNm = \frac{EI}{5m} \left(0 * \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) + 3 * 0 \right) - 20kNm$$

$$= -20kNm$$

$$M_{B1} = \frac{EI}{5m} (3 * \varphi_B + 0 * \varphi_1) - 10kNm = \frac{EI}{5m} \left(3 * 0 + 0 * \left(-3,396 \frac{kNm^2}{EI} \right) \right) - 10kNm$$

$$= -10kNm$$

Wykres momentów zginających M :



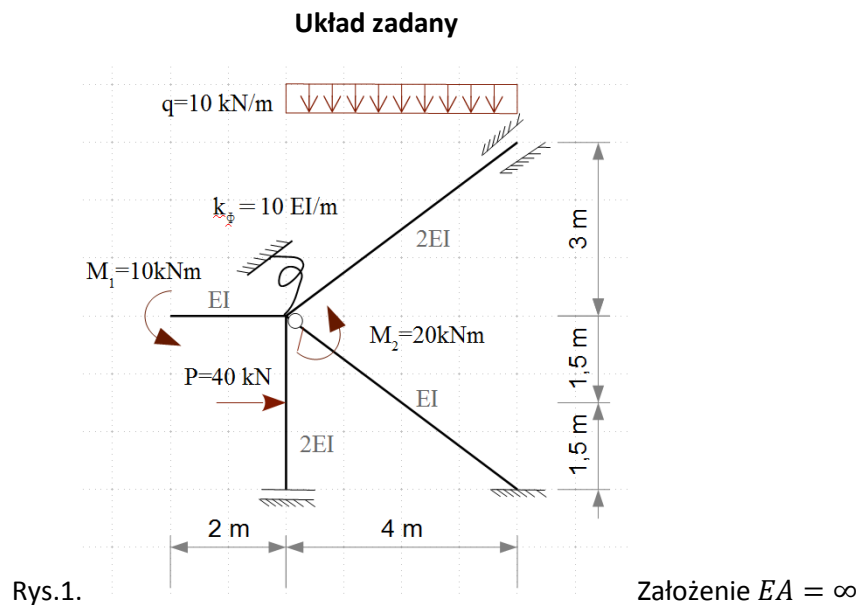
Momentu zginającego w przekroju „G” należy wyznaczyć z równowagi sił w elemencie prętowym „1-C” tak jak pokazano wcześniej:

$$M_G = 5,309 kNm$$

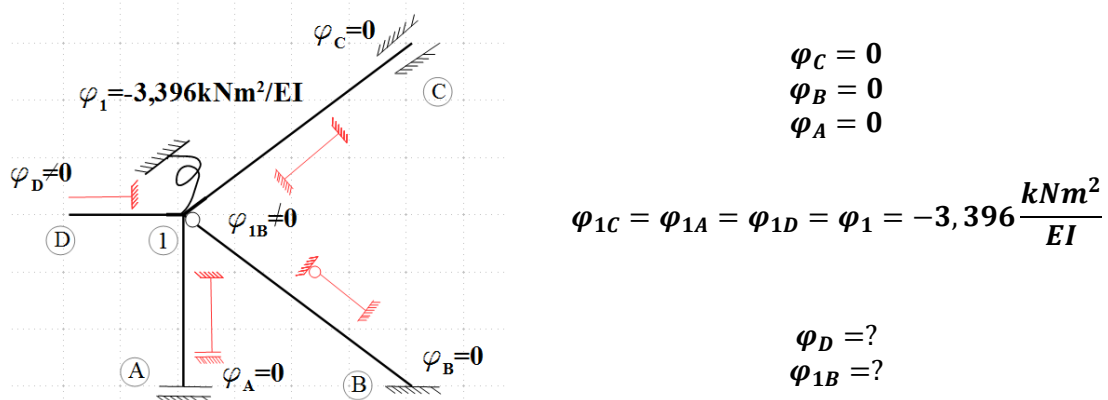
*Uwaga: Siły tnące i siły osiowe wyznacza się analogicznie jak w sposobie pośrednim.

Przykład 2.

Dla ramy o schemacie statycznym z rysunku 1. należy wyznaczyć wartości obrotów wszystkich końców prętów.



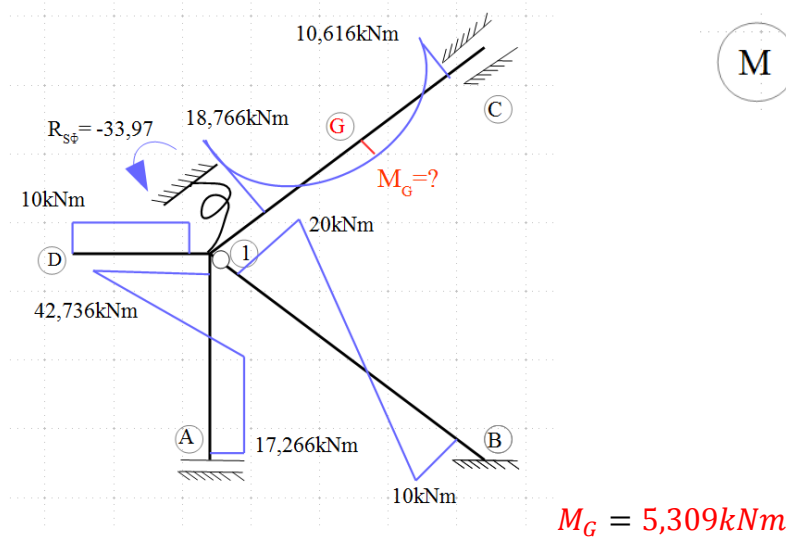
Ramę z rys.1 rozwiązano metodą przemieszczeń wyznaczając kąt obrotu $\varphi_1 = -3,396 \frac{kNm^2}{EI}$



Należy wyznaczyć wartości obrotów węzłów: $\varphi_{1B} = ?$ oraz $\varphi_D = ?$

• Wyznaczenia obrotu węzła $\varphi_{1B} = ?$

- 1 Rozwiązanie układu zadanego do obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia (przyczyną przemieszczenia jest zadane obciążenie F)



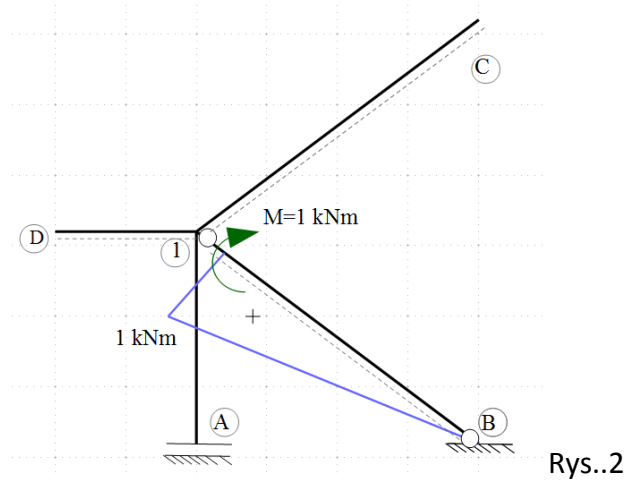
*Rozwiązanie uzyskane metodą przemieszczeń (patrz przykład 1.)

- 2 Rozwiązanie układu statycznie wyznaczalnego (SW) od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.

Stożek statycznej niewyznaczalności ramy z rys.1. wynosi:

$$n_h = 4$$

Na rysunku 2 przedstawiono układ podstawowy statycznie wyznaczalny uzyskany poprzez przecięcie $n_h = 4$ więzi nadliczbowych. Przyjęto zerowe wartości sił hiperstatycznych i obciążono układ SW siłą jednostkową stojącą w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.



- 3 Zastosowanie ZPP do wyznaczenia przemieszczenia

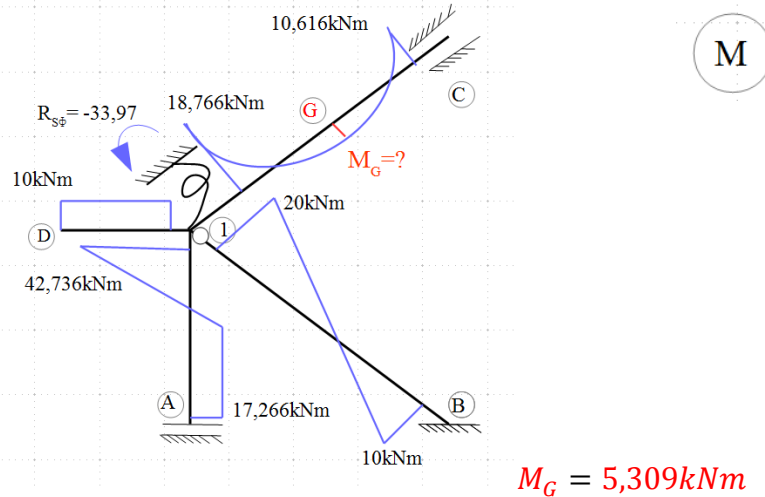
$$1kNm \cdot \varphi_{1B} = \sum_p \left(\int \bar{M}^1 \frac{M}{EI} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^1 \cdot S_m}{k_m}$$

$$1kNm \cdot \varphi_{1B} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{5m}{6} [-20kNm \cdot 1kNm + 4 \cdot (-5)kNm \cdot 0,5kNm + 10kNm \cdot 0kNm] = -25 \frac{kNm^2 m^3}{EI}$$

Odp.: $\varphi_{1B} = -25 \frac{kNm^2}{EI}$

• Wyznaczenia obrotu węzła $\varphi_D = ?$

1 Rozwiązanie układu zadanego do obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia (przyczyną przemieszczenia jest zadane obciążenie F)



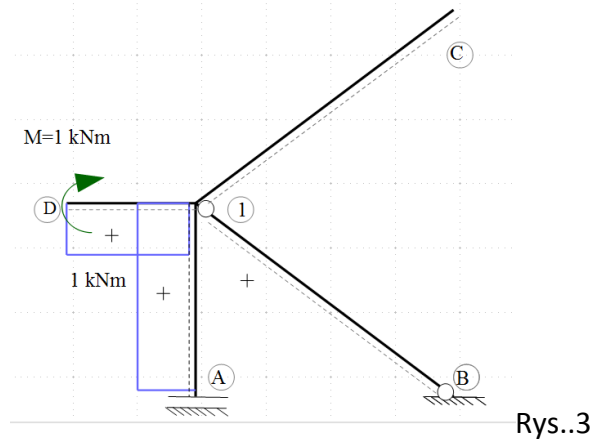
*Rozwiązanie uzyskane metodą przemieszczeń (co przedstawiono w powyższych przykładach)

2 Rozwiązanie układu statycznie wyznaczalnego (SW) od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.

Stopień statycznej niewyznaczalności ramy z rys.1. wynosi:

$$n_h = 4$$

Na rysunku 3 przedstawiono układ podstawowy statycznie wyznaczalny uzyskany poprzez przecięcie $n_h = 4$ więzi nadliczbowych. Przyjęto zerowe wartości sił hiperstatycznych i obciążono układ SW siłą jednostkową stojącą w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.



3 Zastosowanie ZPP do wyznaczenia przemieszczenia

$$1kNm \cdot \varphi_D = \sum_p \left(\int \bar{M}^1 \frac{M}{EI} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^1 \cdot S_m}{k_m}$$

$$\begin{aligned} 1kNm \cdot \varphi_D &= 1kNm \cdot 2m \cdot (-10kNm) + 1kNm \cdot 1.5m \cdot (-17,266kNm) + \frac{1}{2EI} \\ &\cdot \frac{1,5m}{6} [42,736kNm \cdot 1kNm + 4 \cdot 12,735kNm \cdot 1kNm + (-17,266kNm) \cdot 1kNm] \\ &= -36,347 \frac{kN^2m^3}{EI} \end{aligned}$$

Odp.: $\varphi_{1B} = -36,347 \frac{kNm^2}{EI}$

Przykład 3.

Przykład 3 przedstawia ramę dwukrotnie geometrycznie niewyznaczalną ($n_g = n_\varphi + n_\delta = 2 + 0 = 2$), której rozwiązanie w zakresie sił **M, T, N** oraz wszystkie kontrole uzyskanych rozwiązań przedstawiono w pliku o nazwie „**Rama-metoda przemieszczeń**” w wizytówce **K. Jarczeńska** w zakładce dydaktyka