

Mechanika Budowli

Laboratorium nr 3

Opracowała: dr inż. Olga Szyłko-Bigus

olga.szylko@pwr.edu.pl



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



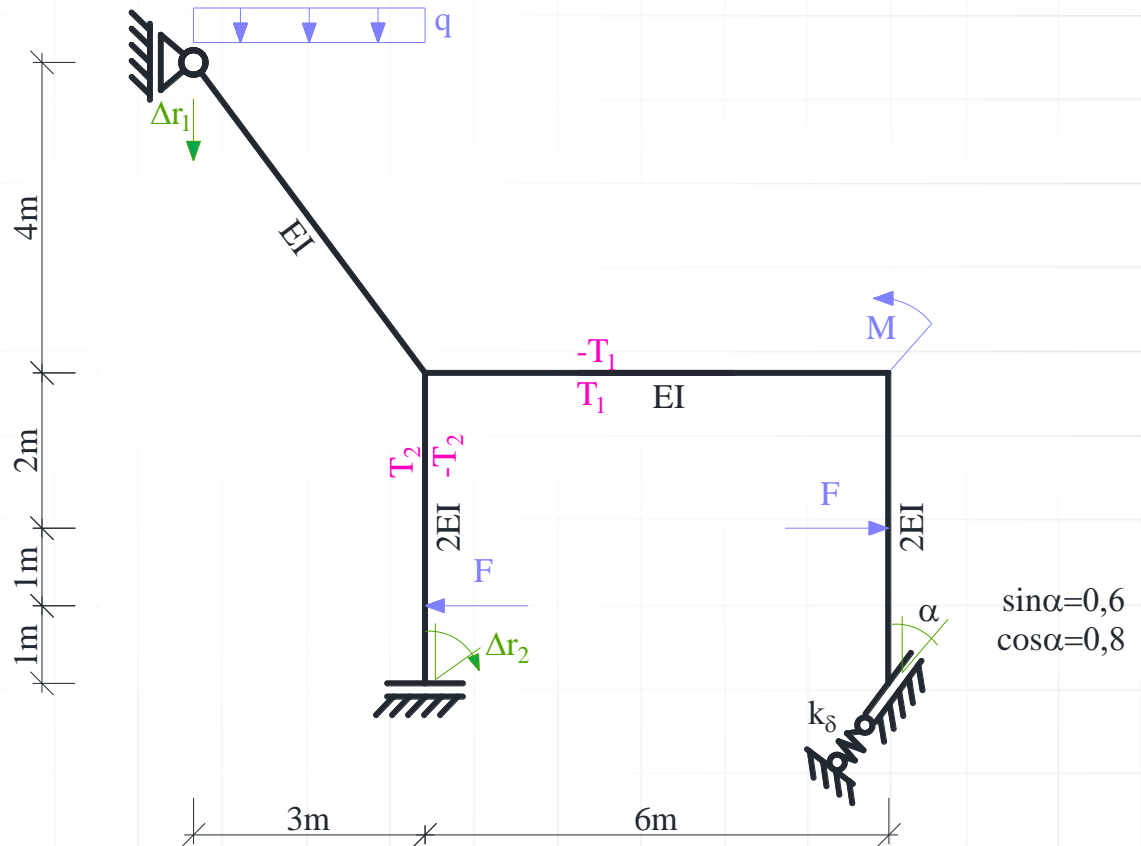
Politechnika Wroclawska

METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia mechanicznego (obliczyć siły) przekrojowe i sporządzić ich wykresy.
- Zaprojektować wstępnie przekroje na zginanie.
- Rozwiązać ramę od zadanego obciążenia niemechanicznego.
- Przeprowadzić stosowne kontrole rozwiązania w obu przypadkach..

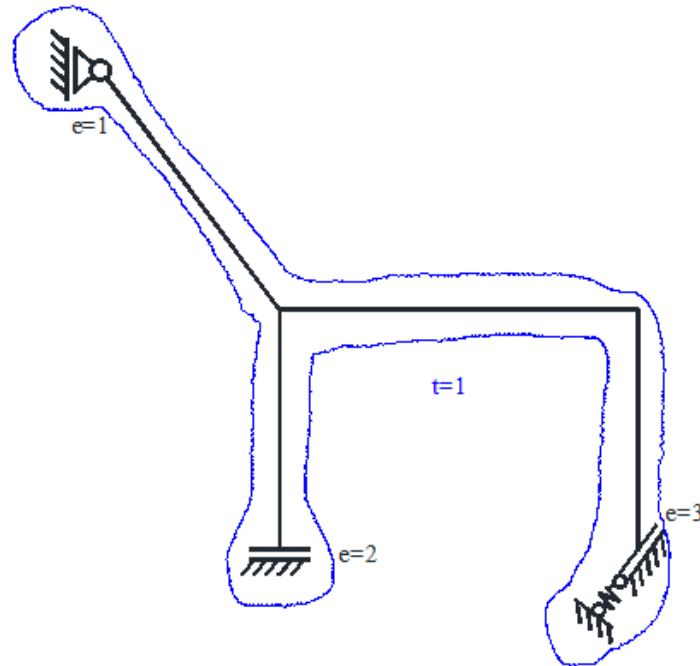
Dane do obliczeń: $F = 8 \text{ kN}$;
 $q = 4 \text{ kN/m}$; $M = 20 \text{ kN m}$;
 $k_{\delta} = 8 \text{ EI/m}^3$, $T_1 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $T_2 = 25 \text{ }^{\circ}\text{C}$;
 $\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}$; $\Delta r_2 = 0,03 \text{ rad}$.



Rys. 1. Schemat statyczny

SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

- Stopień statycznej niewyznaczalności



Rys. 2. Tarcze i więzi

$$t = 1, \quad e = 2 + 3 + 1 = 6, \quad n_h = e - 3 \cdot t = 6 - 3 \cdot 1 = 3$$

- Układ składa się z jednej tarczy połączonej z ostoją siedmioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 3 niezbieżne. Cała rama wraz z ostoją tworzy układ geometrycznie niezmienny

PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE






WZORY TRANSFORMACYJNE DLA PRĘTA PROSTEGO – teoria rzędu 1-go

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o, \quad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o, \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o$$

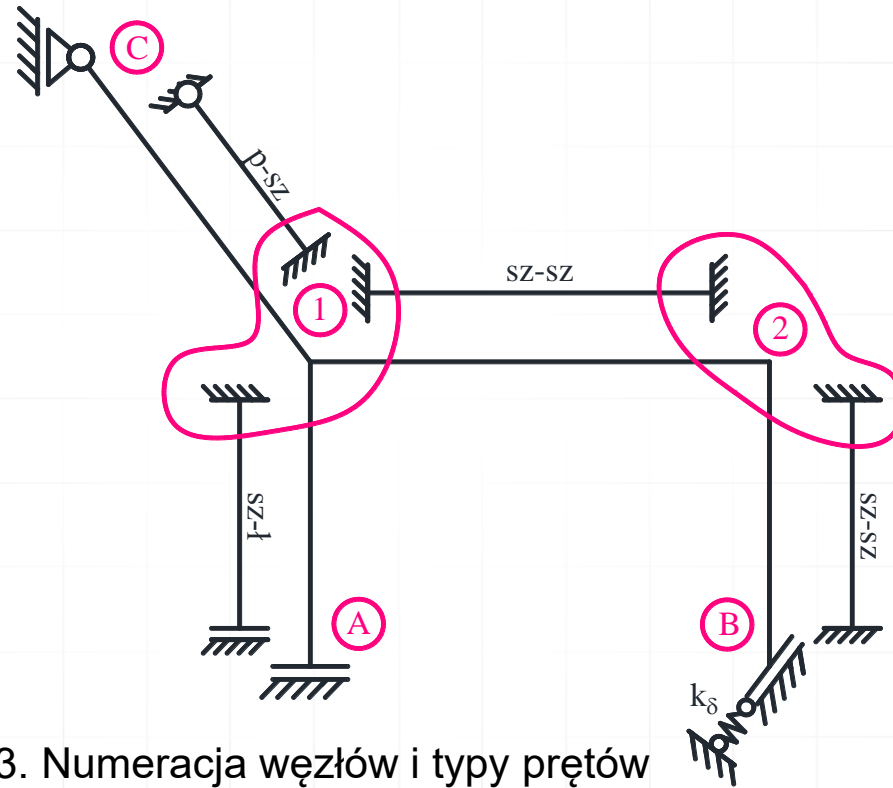
gdzie a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ są współczynnikami zależnymi od typu pręta.

Współczynniki te dla wybranych typów prętów o stałej sztywności zestawiono w tabeli poniżej

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	$c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$	$d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$
		4	4	2	6	6	12
		3	0	0	3	0	3
		1	1	-1	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0

PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW

i	j



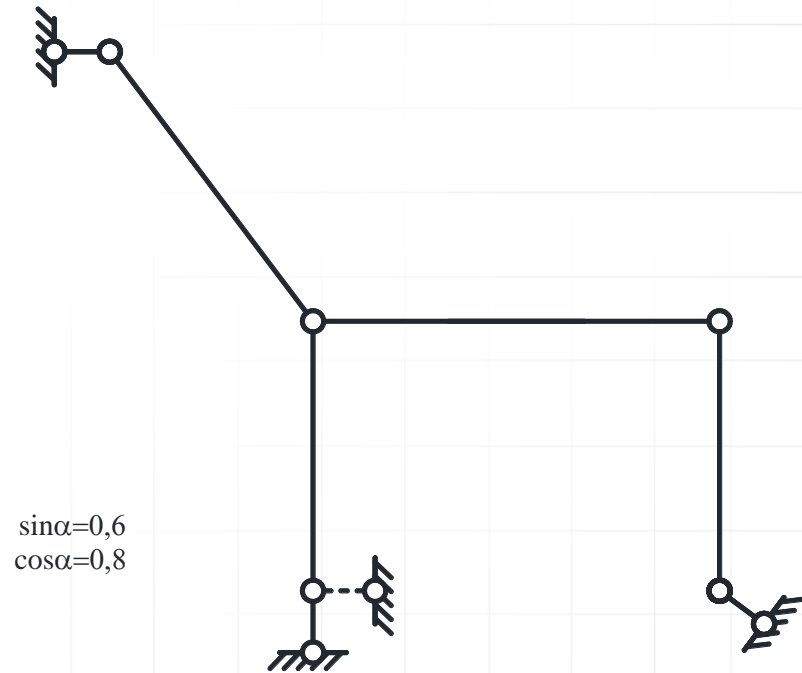
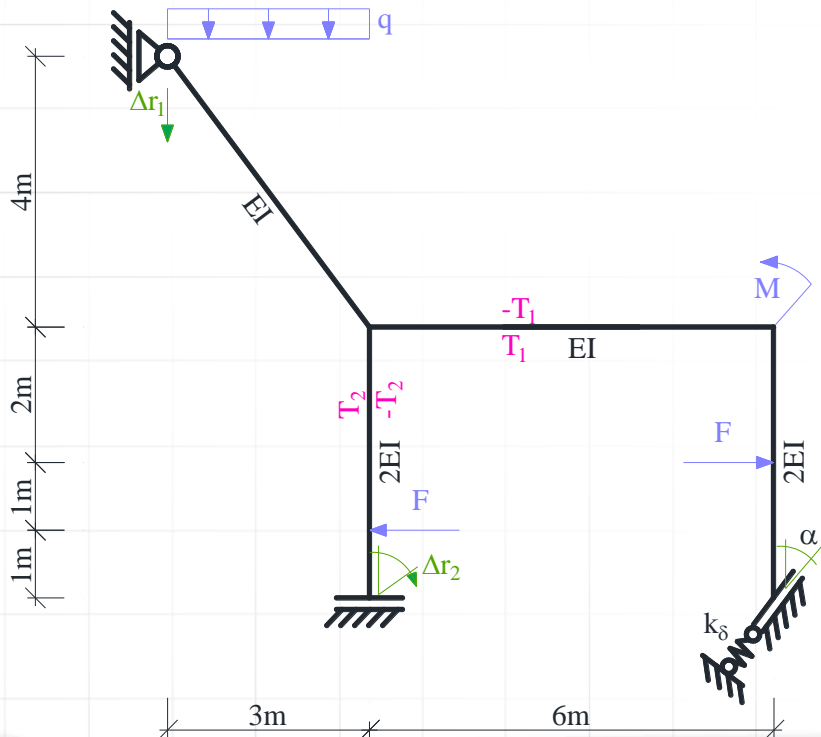
Rys. 3. Numeracja węzłów i typy prętów

Uwzględniając, że $\varphi_{1A} = \varphi_{1C} = \varphi_{12} = \varphi_1$, $\varphi_{2B} = \varphi_{21} = \varphi_2$, stwierdzono, że liczba stopni swobody obrotu węzłów $n_\varphi = 2$.

WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Do wyznaczenia liczby stopni swobody przesuwu węzłów budowany jest model przegubowy. Należy:

- zwolnić więzi przenoszące momenty
- pominąć więzi sprężyste
- należy odebrać stopnie swobody przesuwu prętom typu wspornik, oraz prętom o lewym końcu utwierdzonym, a prawym utwierdzonym z przesuwnem poprzecznym (należy dodać więź oznaczoną linią przerywaną)



Rys. 4. Model przegubowy

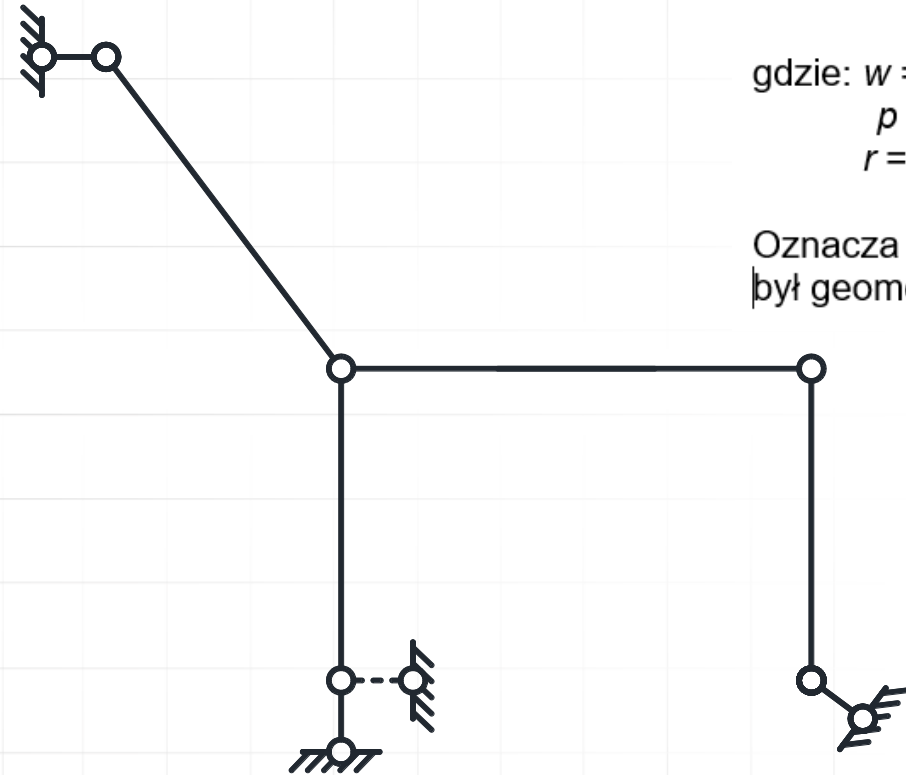
WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Oszacowanie liczby stopni swobody przesuwności węzłów

$$n_s \geq 2 \cdot w - p - r = 2 \cdot 9 - 8 - 8 = 2,$$

gdzie: $w = 9$ - liczba węzłów modelu,
 $p = 8$ - liczba prętów w modelu,
 $r = 8$ - liczba więzi podporowych modelu.

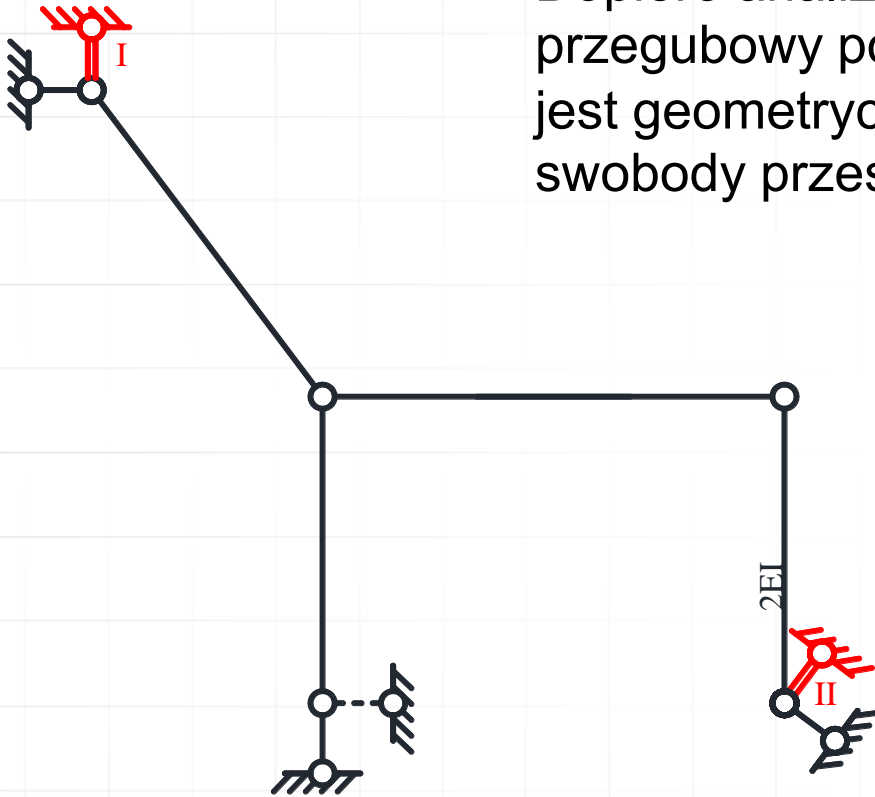
Oznacza to, że aby układ o węzłach przegubowych był geometrycznie niezmienny należy dodać co najmniej dwie więzi.



Rys. 4. Model przegubowy

WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Dopiero analiza kinematyczna potwierdza, że model przegubowy po dodaniu 2 więzi jest geometrycznie niezmienny, tak więc stopień swobody przesuwności węzłów $n_{\delta}=2$



Rys. 5. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu wynosi:

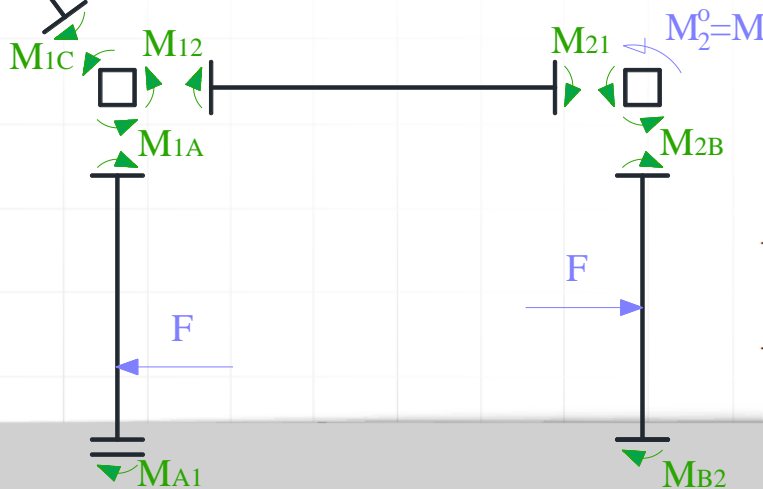
$$n_g = n_\varphi + n_\delta = 2 + 2 = 4.$$

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych, wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



M_{ij} V_{ij}		M_{ji}
$M_{ij} = -FL\xi(1-\xi/2)$		$M_{ji} = -FL\xi^2/2$
$V_{ij} = F$		

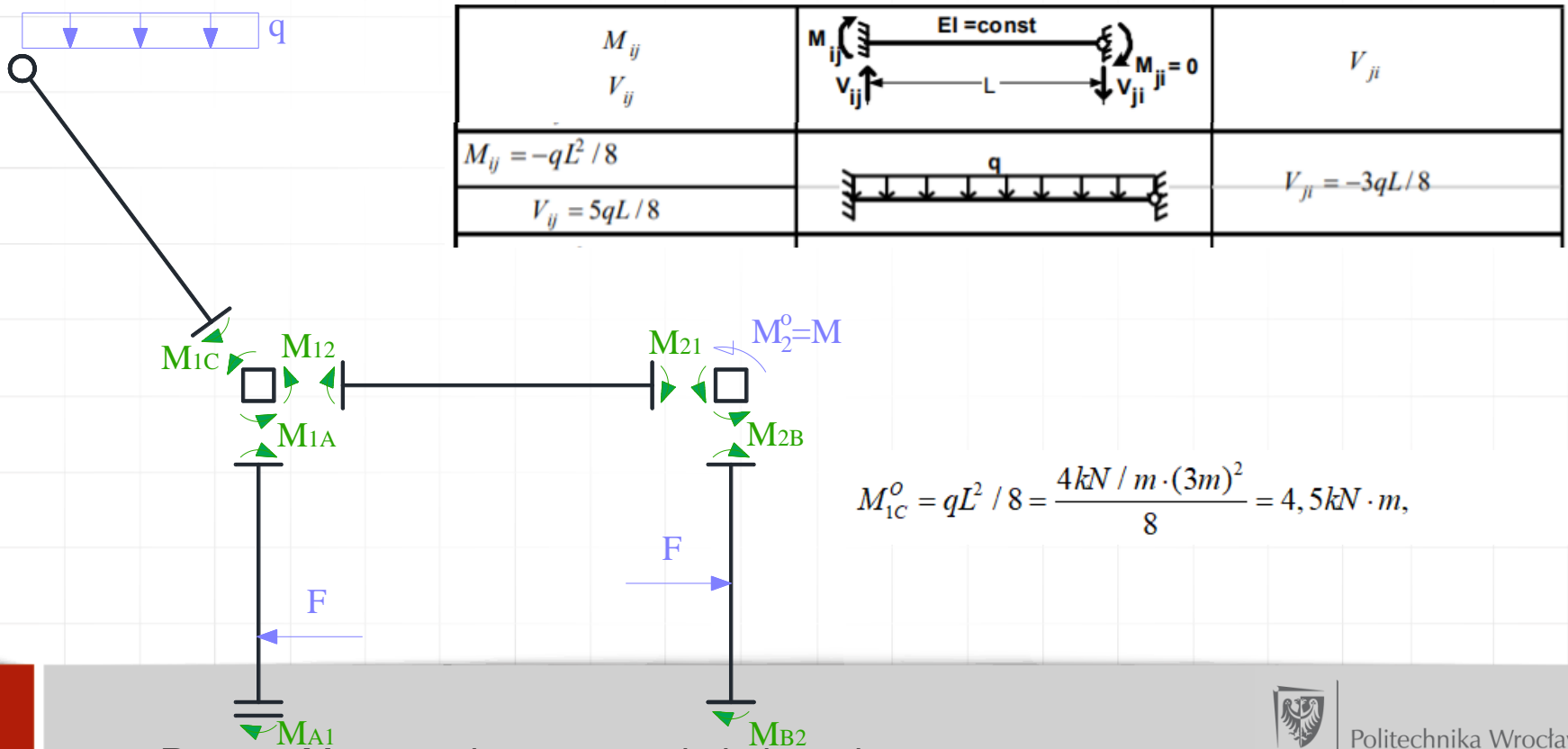


$$M_{1A}^0 = -FL\xi(1-\xi/2) = -8kN \cdot 4m \cdot \frac{3}{4} \cdot (1 - \frac{3}{4 \cdot 2}) = -15kN \cdot m,$$

$$M_{A1}^0 = -FL\xi^2/2 - 8kN \cdot 4m \cdot (\frac{3}{4})^2 \cdot \frac{1}{2} = -9kN \cdot m,$$

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



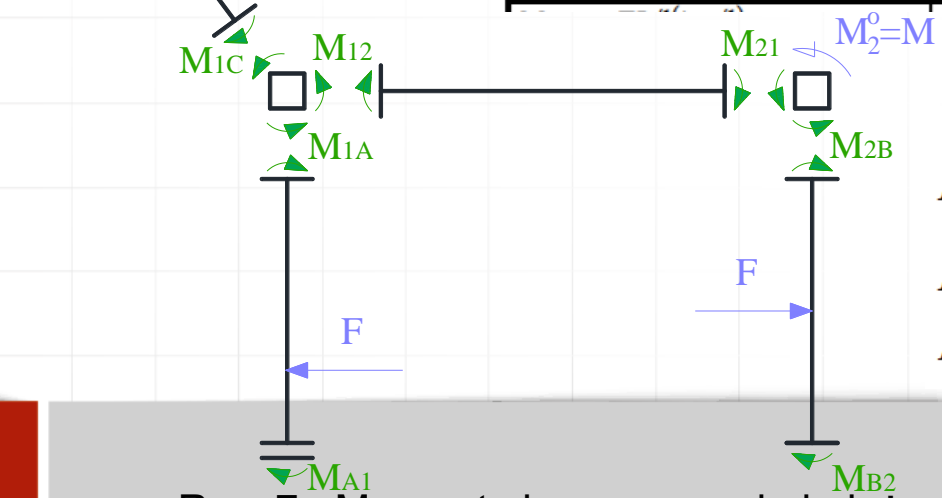
Rys. 7. Momenty brzegowe od obciążenia zewnętrznego

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych, wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



M_{ij} V_{ij}		M_{ji} V_{ji}
$M_{ij} = -FL\xi(1-\xi)^2$		$M_{ji} = FL\xi^2(1-\xi)$
$V_{ij} = F(1+2\xi)(1-\xi)^2$		$V_{ji} = -F\xi^2(3-2\xi)$
$M_{ij} = -FL/8$		$M_{ji} = FL/8$
$V_{ij} = F/2$		$V_{ji} = -F/2$



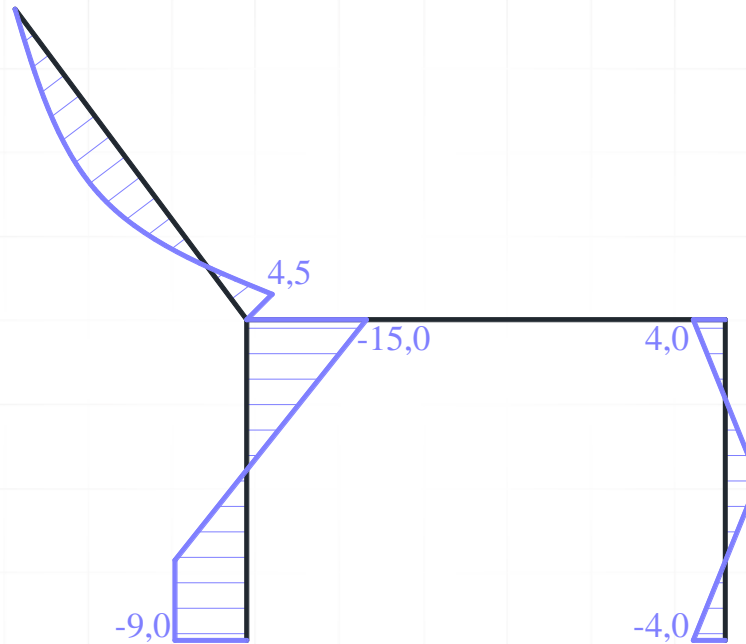
$$M_{2B}^0 = FL/8 = \frac{8kN \cdot 4m}{8} = 4kN \cdot m,$$

$$M_{B2}^0 = -FL/8 = \frac{-8kN \cdot 4m}{8} = -4kN \cdot m,$$

$$M_{C1}^0 = M_{12}^0 = M_{21}^0 = 0.$$

Rys. 7. Momenty brzegowe od obciążenia zewnętrznego

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA MECHANICZNEGO



Rys. 8. Wykres momentów M^0 w $kN \cdot m$.

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW ROTACYJNYCH - PIERWSZY STAN ROTACYJNY

5.2. PIERWSZY STAN ROTACYJNY

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_I = \varphi_{Ij} = 1$, $\varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{1j}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{1j} \cdot \varphi_{1j} + b_{1j} \cdot \varphi_{j1}),$$

$$M_{j1}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{j1} \cdot \varphi_{j1} + b_{j1} \cdot \varphi_{1j}).$$

Momenty węzłowe wynoszą:

$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{2}{3} \frac{EI}{m}$$

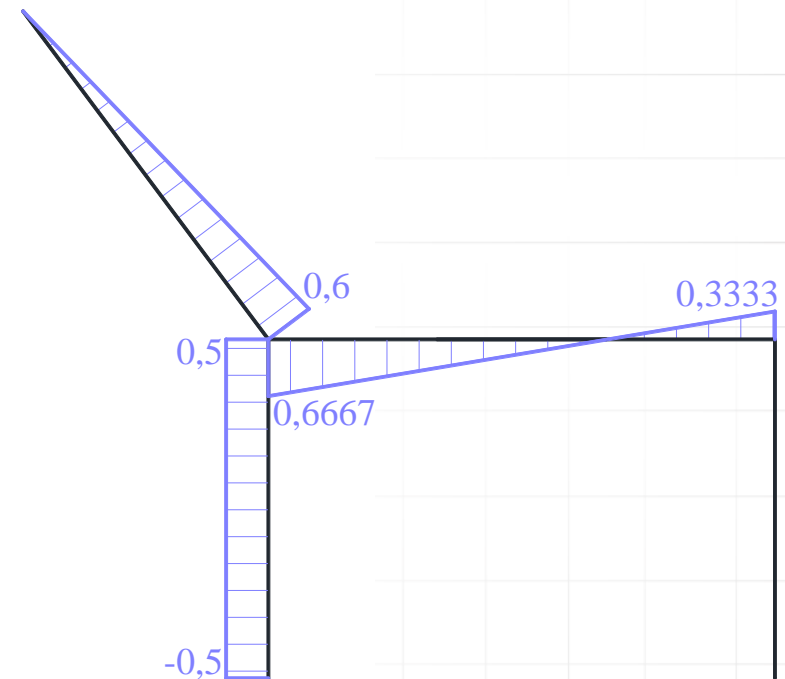
$$M_{21}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{1}{3} \frac{EI}{m}$$

$$M_{1A}^1 = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}} (a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \varphi_{A1}) = \frac{2EI}{4m} (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = \frac{1}{2} \frac{EI}{m},$$

$$M_{A1}^1 = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}} (a_{A1} \cdot \varphi_{A1} + b_{A1} \cdot \varphi_{1A}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -\frac{1}{2} \frac{EI}{m}$$

$$M_{1C}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{C1}) = \frac{EI}{5m} (3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = \frac{3}{5} \frac{EI}{m}$$

$$M_{C1}^1 = 0, M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$



Rys. 9. Wykres momentów M^1 w EI/m .

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW ROTACYJNYCH - DRUGI STAN ROTACYJNY

5.3. DRUGI STAN ROTACYJNY

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_2 = \varphi_{2j} = 1$, $\varphi_1 = \delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{2j}^2 = \frac{EI_{2j}}{L_{2j}} (a_{2j} \cdot \varphi_{2j} + b_{2j} \cdot \varphi_{j2}),$$

$$M_{j2}^2 = \frac{EI_{2j}}{L_{2j}} (a_{j2} \cdot \varphi_{j2} + b_{j2} \cdot \varphi_{2j}).$$

Momenty brzegowe wynoszą:

$$M_{21}^2 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{2}{3} \frac{EI}{m}$$

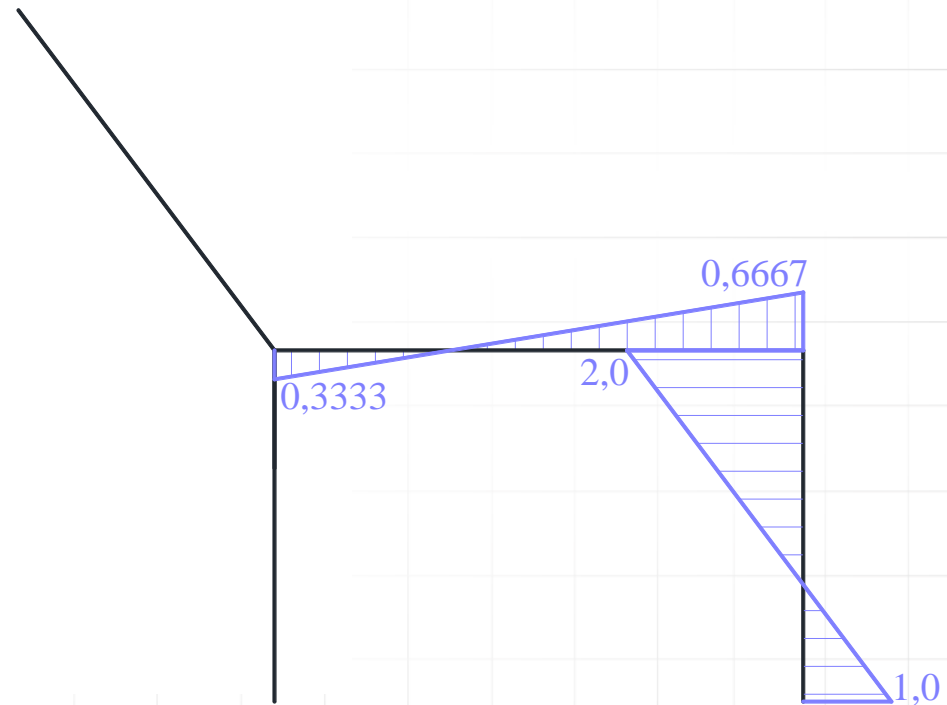
$$M_{12}^2 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{1}{3} \frac{EI}{m}$$

$$M_{2B}^2 = \frac{EI_{1B}}{L_{1B}} (a_{2B} \cdot \varphi_{2B} + b_{2B} \cdot \varphi_{B2}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 2 \frac{EI}{m},$$

$$M_{B2}^2 = \frac{EI_{B2}}{L_{B2}} (a_{B2} \cdot \varphi_{B2} + b_{B2} \cdot \varphi_{2B}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 1 \frac{EI}{m},$$

$$M_{C1}^2 = M_{1C}^2 = M_{12}^2 = M_{21}^2 = 0, \quad M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$

$$S_{\varphi_1}^2 = k_1^{\varphi} \cdot \varphi_1 = 10 \frac{EI}{m} \cdot 0 = 0,$$



Rys. 10. Wykres momentów M^2 w EI/m .

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY

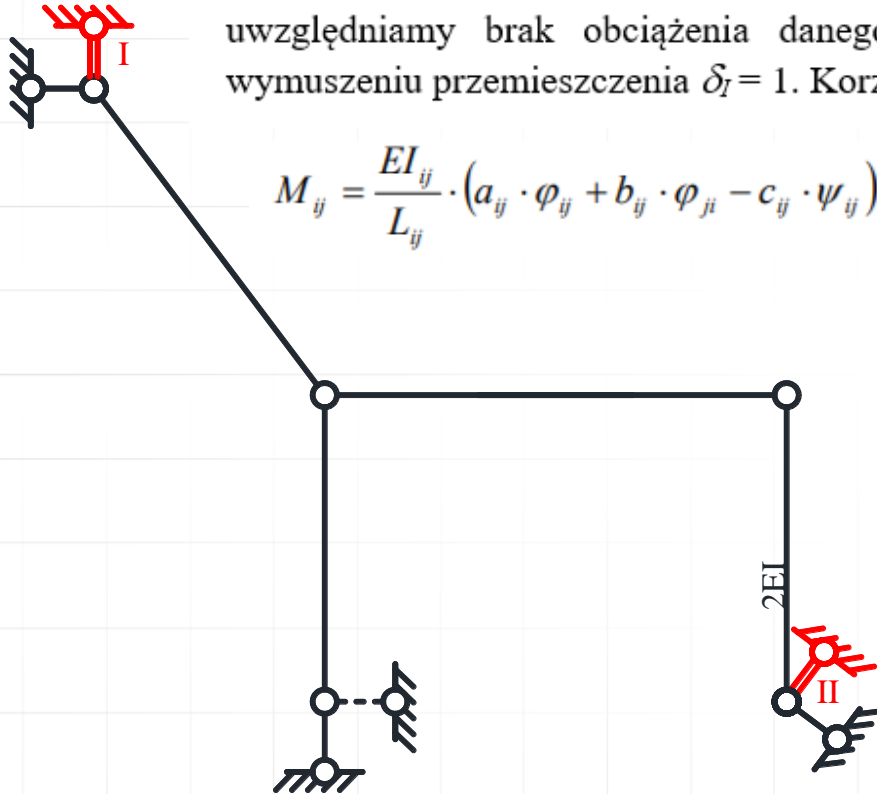
W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_I = \varphi_2 = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_I = 1$. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o,$$

$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

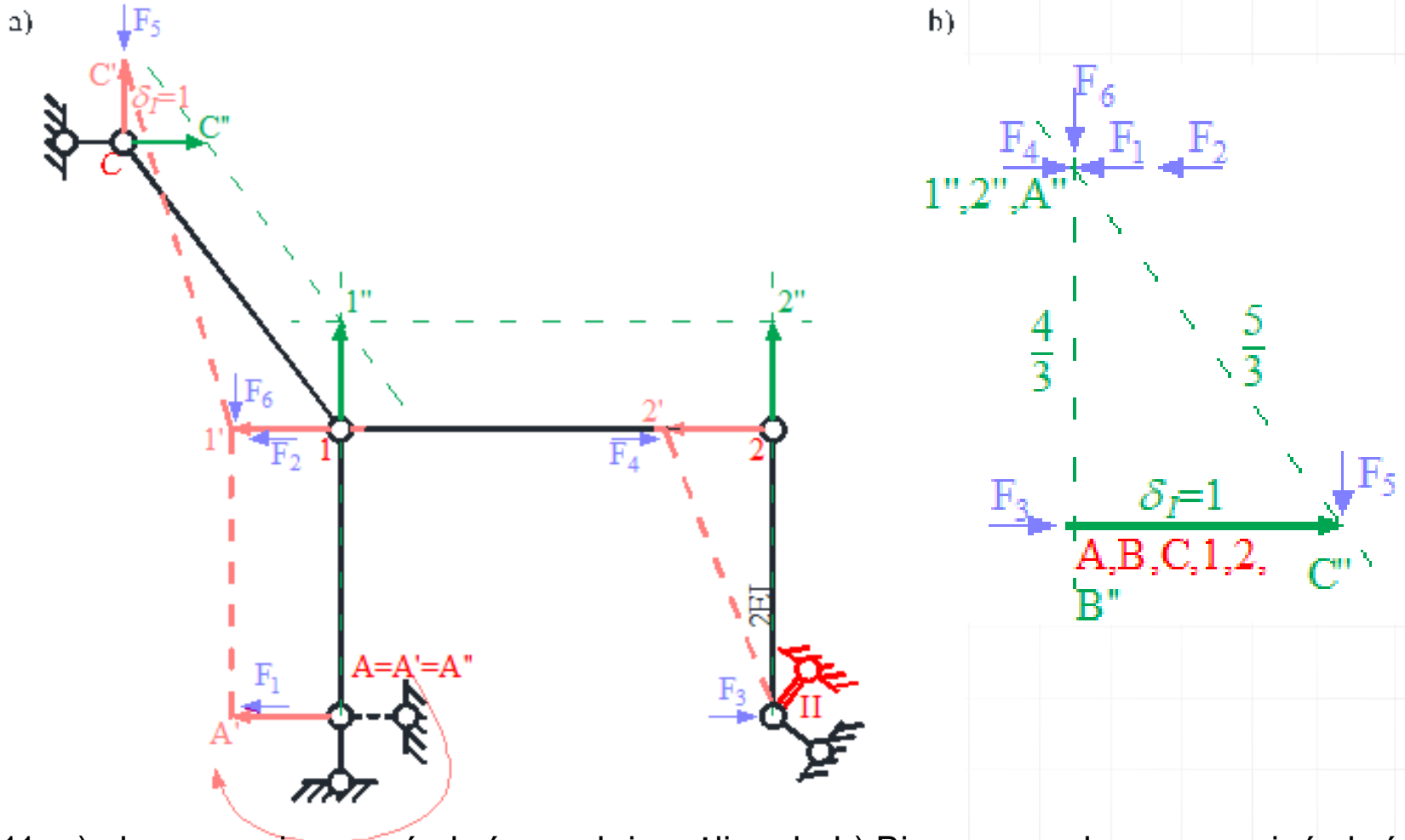
$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I,$$

$$M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I.$$



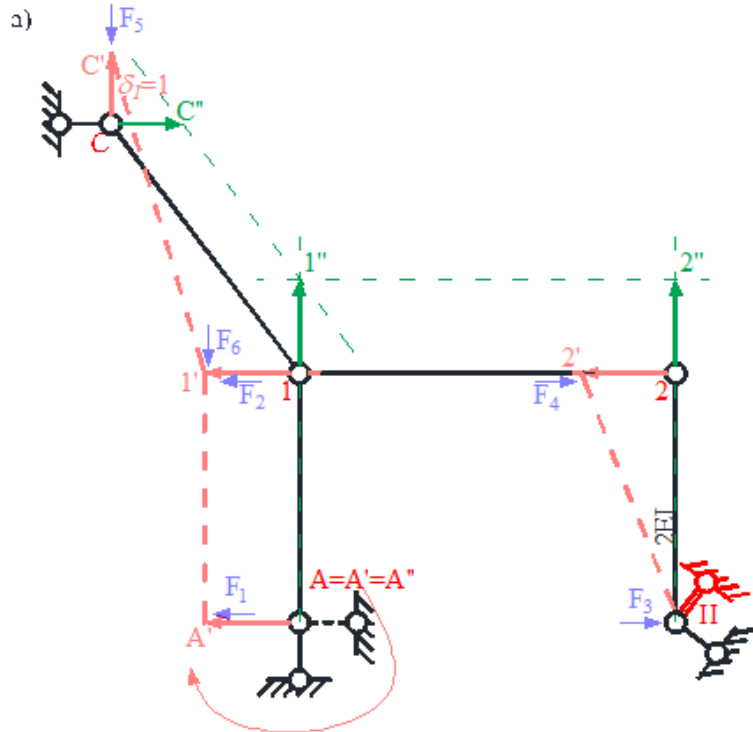
Rys. 5. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY



Rys. 11. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) Biegunowy plan przesunięć obróconych

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY



Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{2B}^I = -|2''B''| = -\frac{4}{3} \quad (,,-" \text{ ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo})$$

$$\Delta_{1C}^I = +|1''C''| = +\frac{5}{3} \quad (,,+" \text{ ponieważ obrót pręta nastąpił w prawo})$$

$$\Delta_{12}^I = |1''2''| = 0$$

$$\Delta_{1A}^I = |1''A''| = 0$$

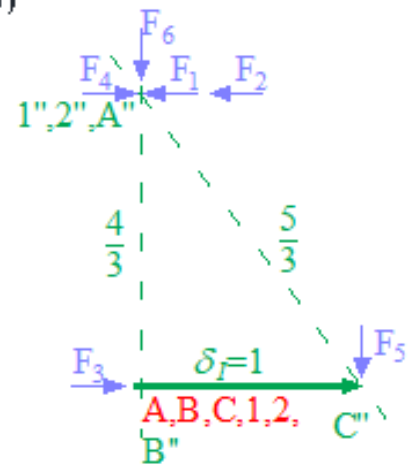
Kąty obrotów cięwi wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1C}^I = \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m}$$

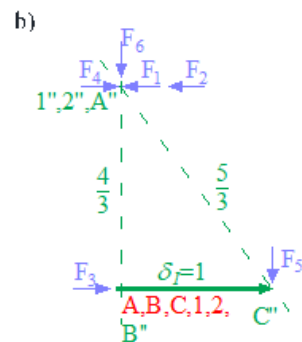
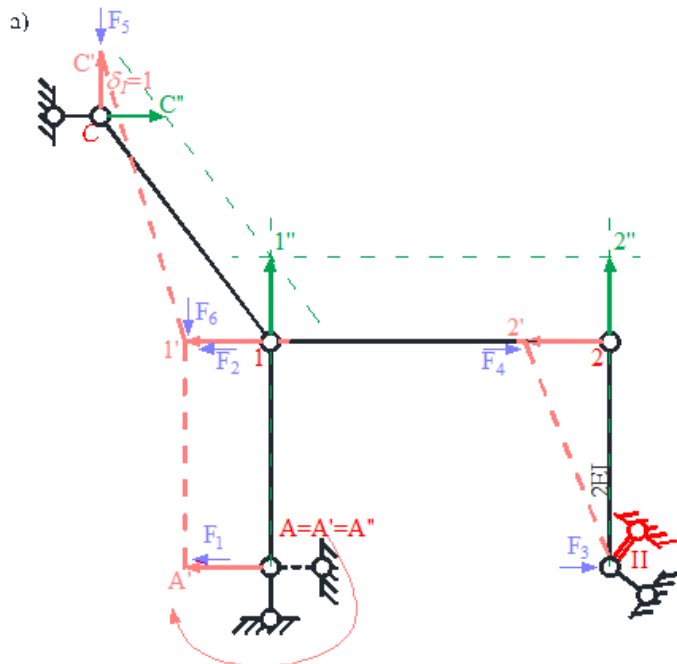
$$\psi_{1A}^I = \psi_{12}^I = 0$$

b)



Rys. 11. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) Biegunowy plan przesunięć obróconych

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY



Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_I

$$M_{2B}^I = M_{B2}^I = -\frac{EI_{2B}}{L_{2B}} \cdot c_{2B} \cdot \psi_{2B}^I = -\frac{2EI}{4m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = 1 \frac{EI}{m^2}$$

$$M_{1C}^I = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{1C} \cdot \psi_{1C}^I = -\frac{EI}{5m} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3m} = -\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2}$$

$$M_{C1}^I = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{C1} \cdot \psi_{1C}^I = -\frac{EI}{5m} \cdot 0 \cdot \frac{1}{3m} = 0,$$

$$M_{1A}^I = M_{A1}^I = M_{12}^I = M_{21}^I = 0$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

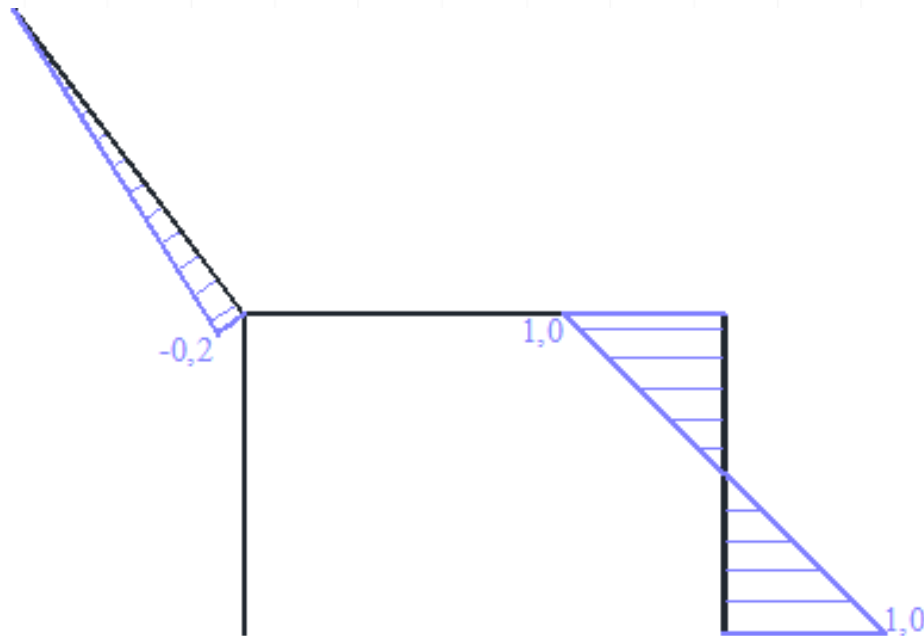
$$\delta_1^I = \frac{4}{3}, \quad \delta_2^I = \frac{4}{3}, \quad \delta_3^I = 0, \quad \delta_4^I = -\frac{4}{3}, \quad \delta_5^I = -1, \quad \delta_6^I = 0.$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L_{k_8}^I = 0$

Siła w więzi sprężystej: $S_1^{\delta_I} = k_8 \cdot \Delta L_{k_8}^I = 8 \frac{EI}{3} \cdot 0 = 0$

Rys. 11. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) Biegunowy plan przesunięć obróconych

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY



Rys. 12. Wykres momentów M' w EI/m^2 .

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - DRUGI STAN TRANSLACYJNY

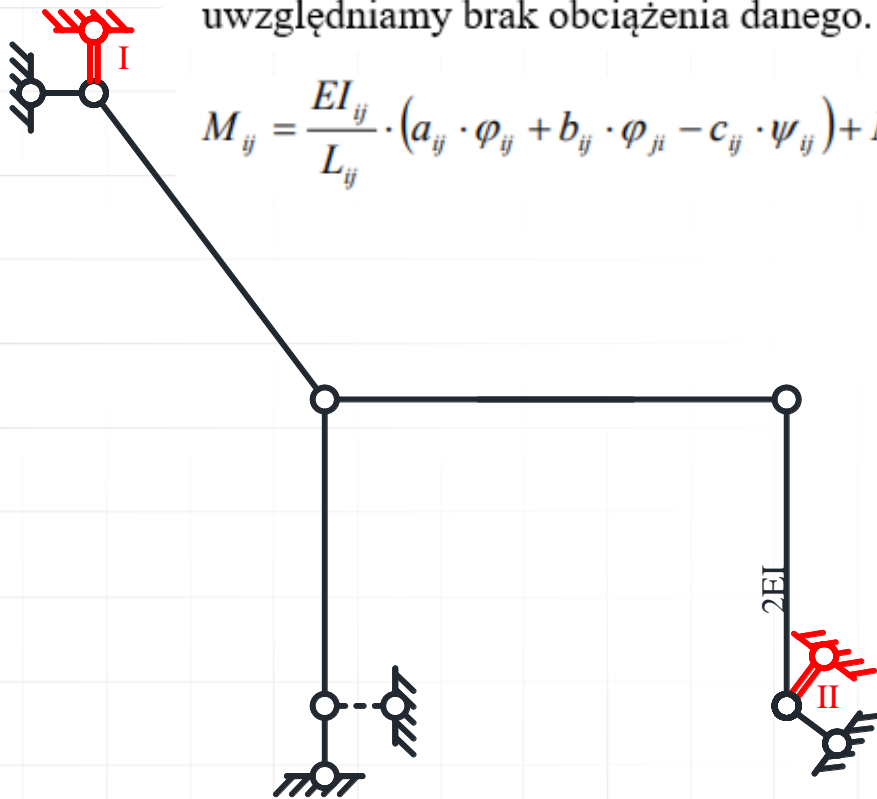
W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_I = \varphi_2 = \delta_I = 0$, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_{II} = 1$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o,$$

$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

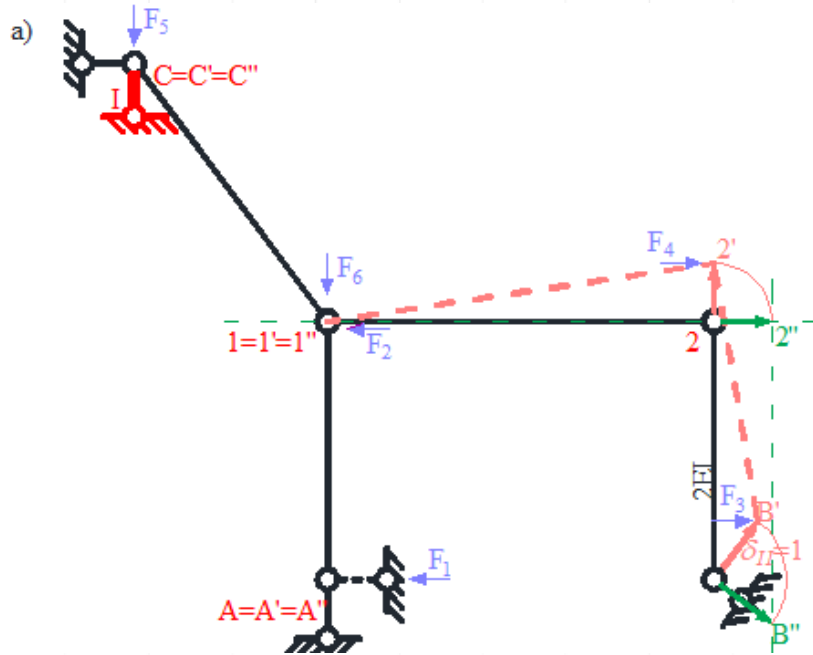
$$M_{ij}^{II} = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^{II},$$

$$M_{ji}^{II} = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ji}^{II}.$$

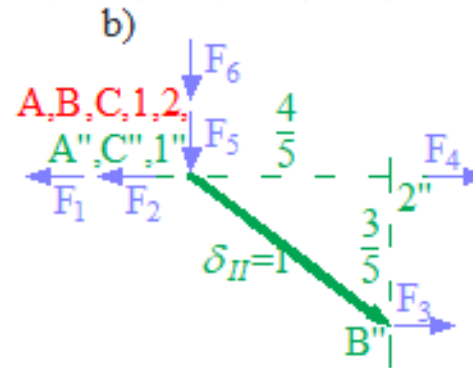


Rys. 5. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - DRUGI STAN TRANSLACYJNY



Rys. 13. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) biegunowy plan przesunięć obróconych



Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{12}^{II} = -|1 \cdot 2| = -\frac{4}{5} \quad (,,-" \text{ ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo})$$

$$\Delta_{23}^{II} = -|2 \cdot B| = -\frac{3}{5} \quad (,,-" \text{ ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo})$$

$$\Delta_{1A}^{II} = |1 \cdot A| = 0$$

$$\Delta_{1C}^{II} = |1 \cdot C| = 0$$

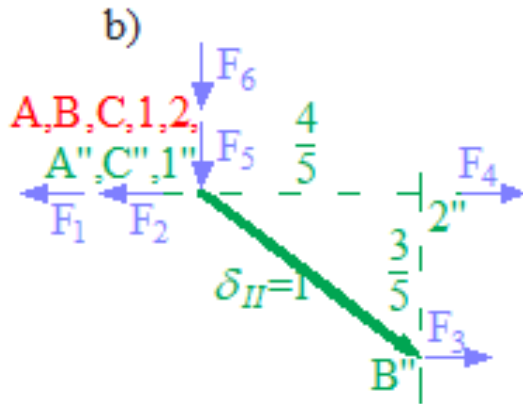
Kąty obrotów cięwiw wynoszą ($\psi_{ij}^{II} = \frac{\Delta_{ij}^{II}}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^{II} = \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m}$$

$$\psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m}$$

$$\psi_{1A}^{II} = \psi_{1C}^{II} = 0$$

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - DRUGI STAN TRANSLACYJNY



Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_I wynoszą:

$$M_{12}^{II} = M_{21}^{II} = -\frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot c_{12} \cdot \psi_{12}^{II} = -\frac{EI}{6m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{2}{15m}\right) = \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2}$$

$$M_{2B}^{II} = M_{B2}^{II} = -\frac{EI_{2B}}{L_{2B}} \cdot c_{2B} \cdot \psi_{2B}^{II} = -\frac{2EI}{4m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2}$$

$$M_{1A}^{II} = M_{A1}^{II} = M_{1C}^{II} = M_{C1}^{II} = 0$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

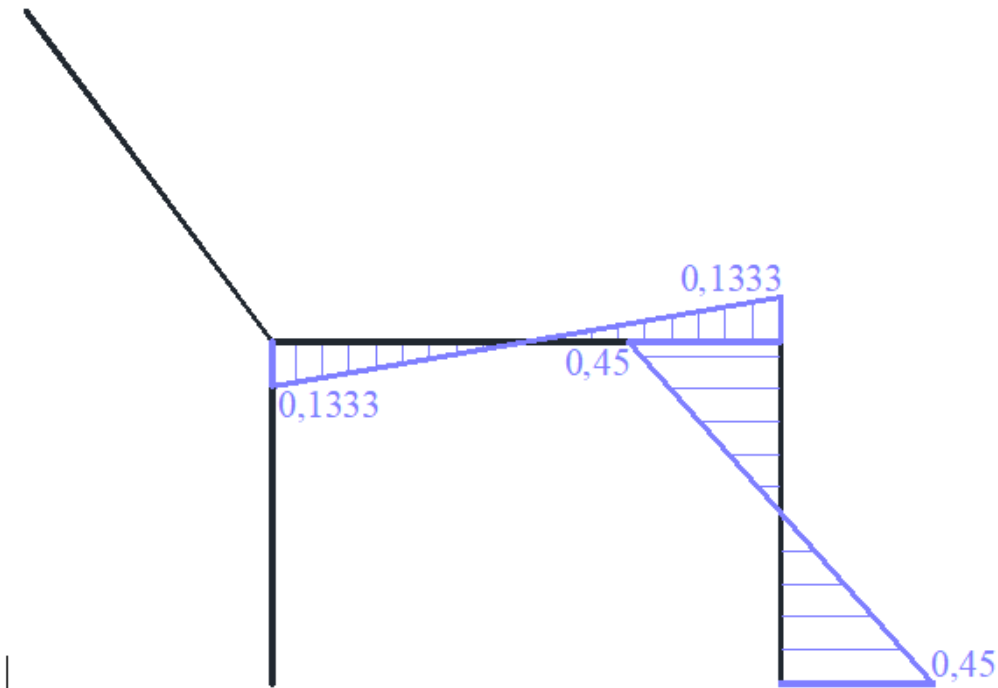
$$\delta_1^{II} = 0, \quad \delta_2^{II} = 0, \quad \delta_3^{II} = \frac{3}{5}, \quad \delta_4^{II} = 0, \quad \delta_5^{II} = 0, \quad \delta_6^{II} = 0$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L_{k_3}^{II} = 1$

Siła w więzi sprężystej: $S_1^{\delta_I} = k_3 \cdot \Delta L_{k_3}^2 = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 = 8 \frac{EI}{m^3}$

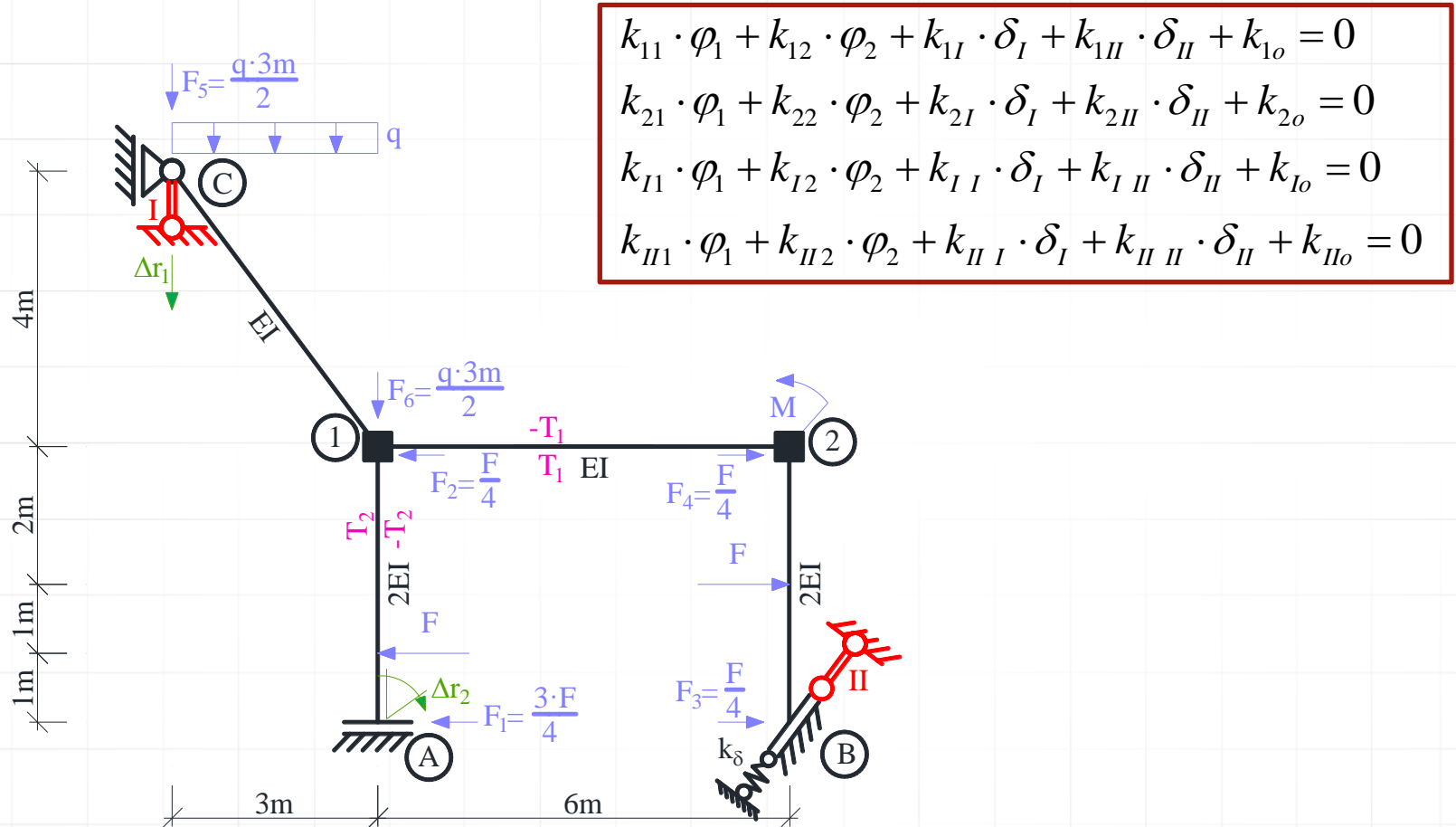
Rys. 13. b) B.B.P.O.

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - DRUGI STAN TRANSLACYJNY



Rys. 14. Wykres momentów M'' w EI/m^2 .

POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

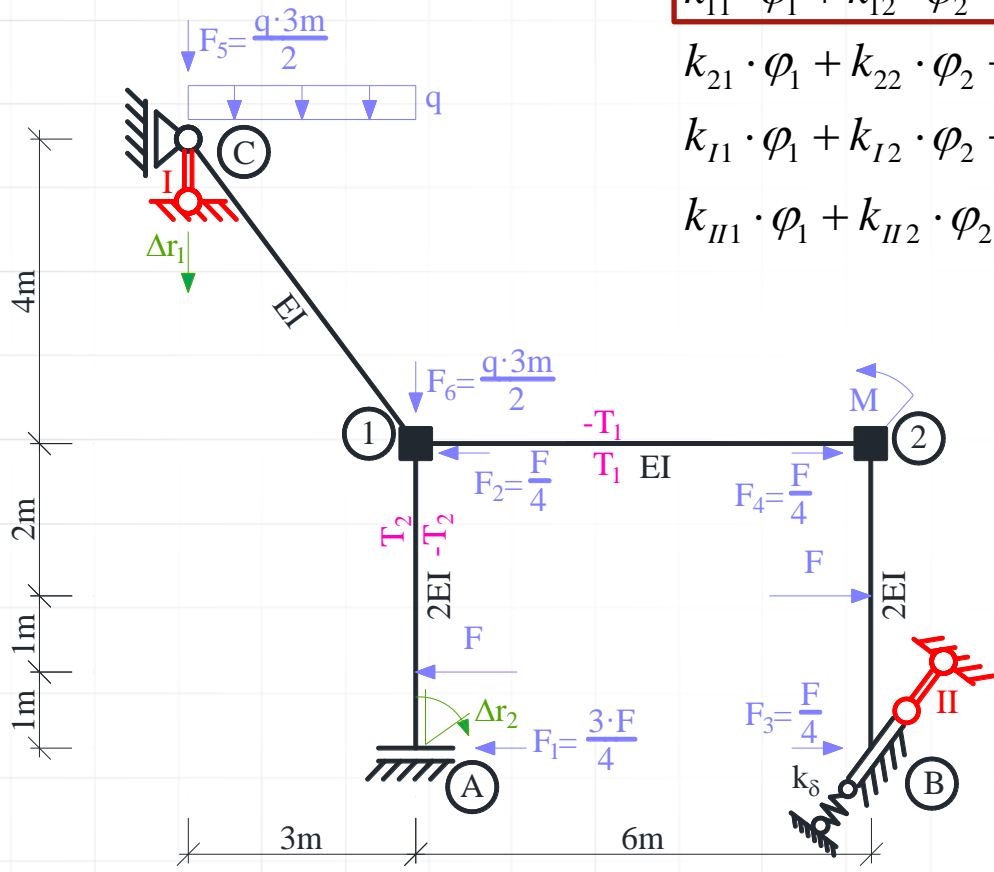
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II1} \cdot \delta_I + k_{II2} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{III1} \cdot \delta_I + k_{III2} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

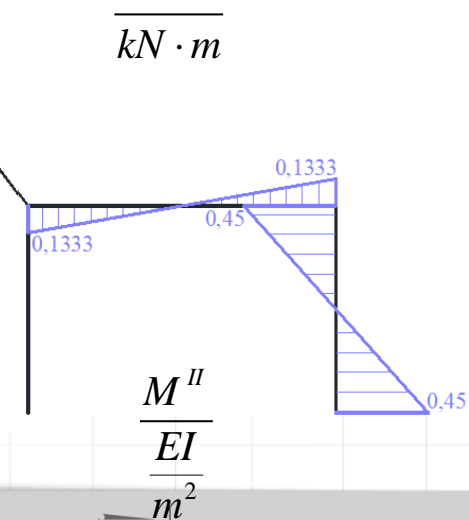
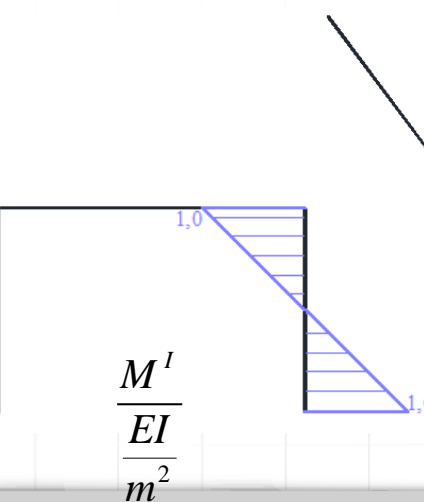
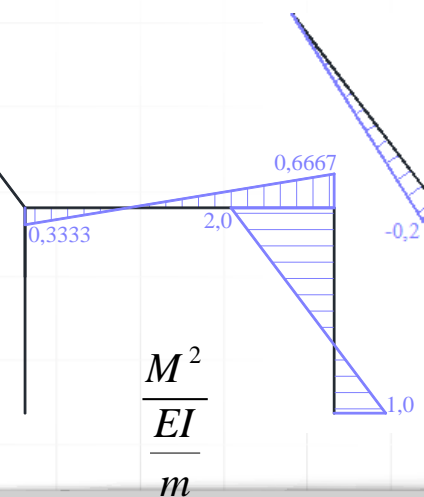
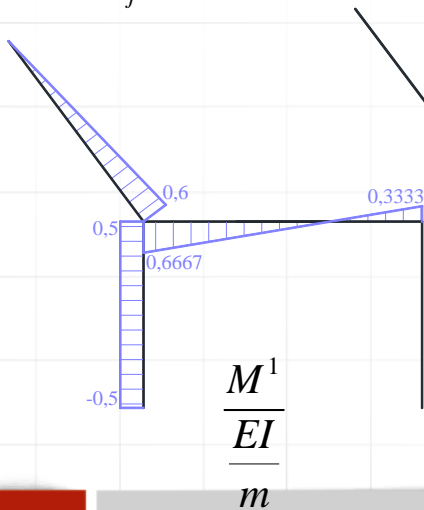
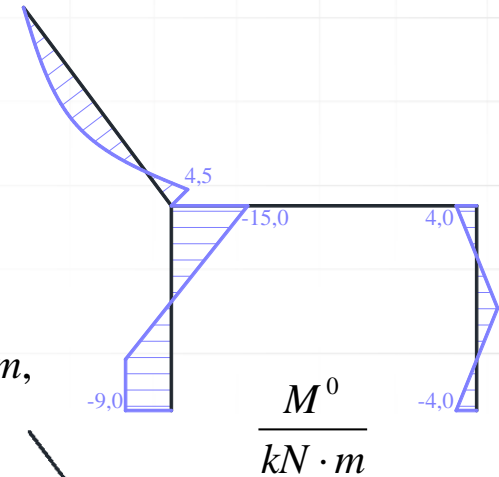
$$k_{11} = \sum_j M_{1j}^1 + k_1^o = M_{12}^1 + M_{1A}^1 + M_{1C}^1 + k_1^o = (0,6667 + 0,5 + 0,6 + 0) \frac{EI}{m} = \frac{53}{30} \frac{EI}{m} = 1,7667 \frac{EI}{m},$$

$$k_{12} = \sum_j M_{1j}^2 = M_{12}^2 + M_{1A}^2 + M_{1C}^2 = (0,3333 + 0 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m},$$

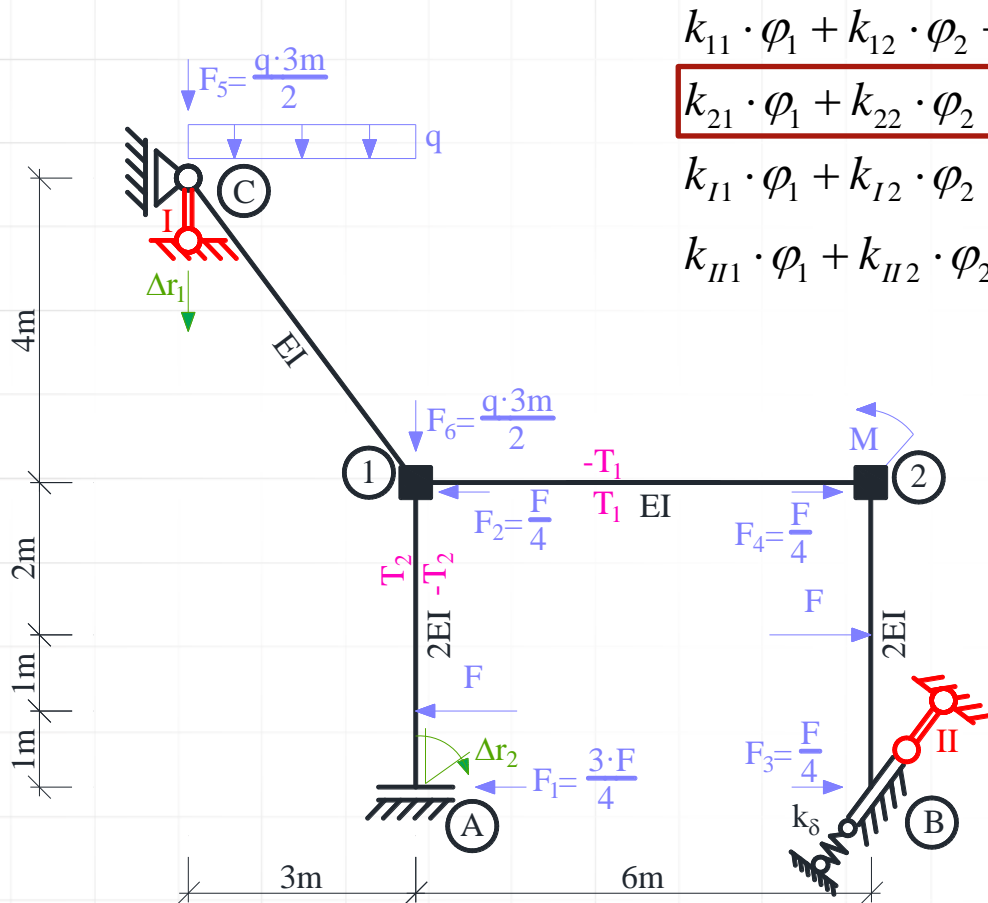
$$k_{1I} = \sum_j M_{1j}^I = M_{12}^I + M_{1A}^I + M_{1C}^I = 0 + 0 + \left(-\frac{1}{5}\right) \frac{EI}{m^2} = -0,2 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1II} = \sum_j M_{1j}^{II} = M_{12}^{II} + M_{1A}^{II} + M_{1C}^{II} = \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + 0 + 0 = 0,1333 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1o} = \sum_j M_{1j}^o = M_{12}^o + M_{1A}^o + M_{1C}^o = 0 - 15 \text{ kN} \cdot \text{m} + 4,5 \text{ kN} \cdot \text{m} = -10,5 \text{ kN} \cdot \text{m},$$



WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ



$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

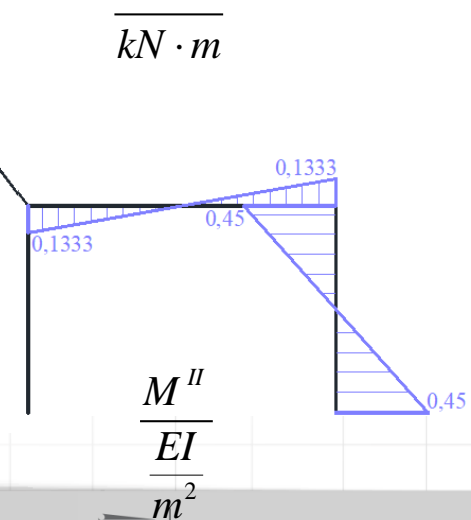
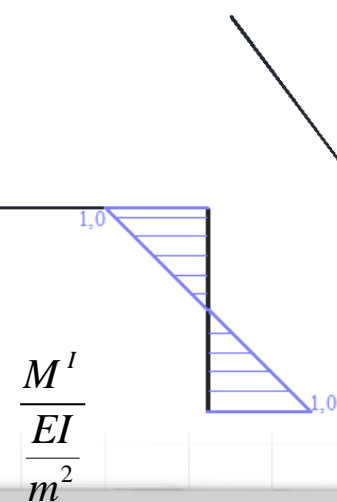
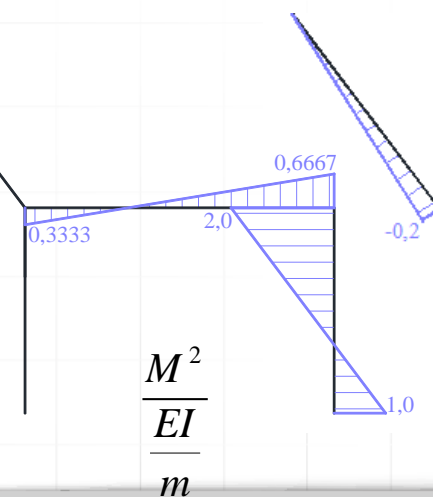
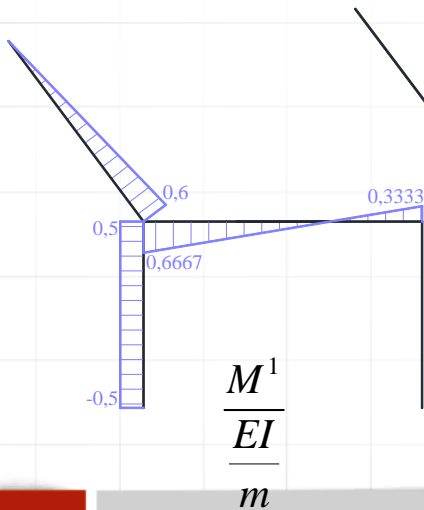
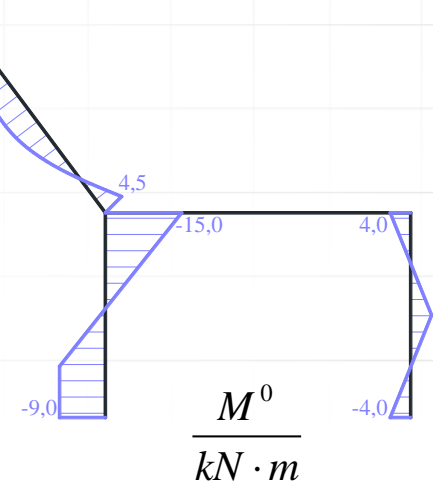
$$k_{21} = \sum_j M_{2j}^1 = M_{21}^1 + M_{2B}^1 = (0,3333 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m},$$

$$k_{22} = \sum_j M_{2j}^2 + k_2^\varphi = M_{21}^2 + M_{2B}^2 + k_2^\varphi = \left(\frac{2}{3} + 2 + 0 \right) \frac{EI}{m} = \frac{8}{3} \frac{EI}{m} = 2,6667 \frac{EI}{m},$$

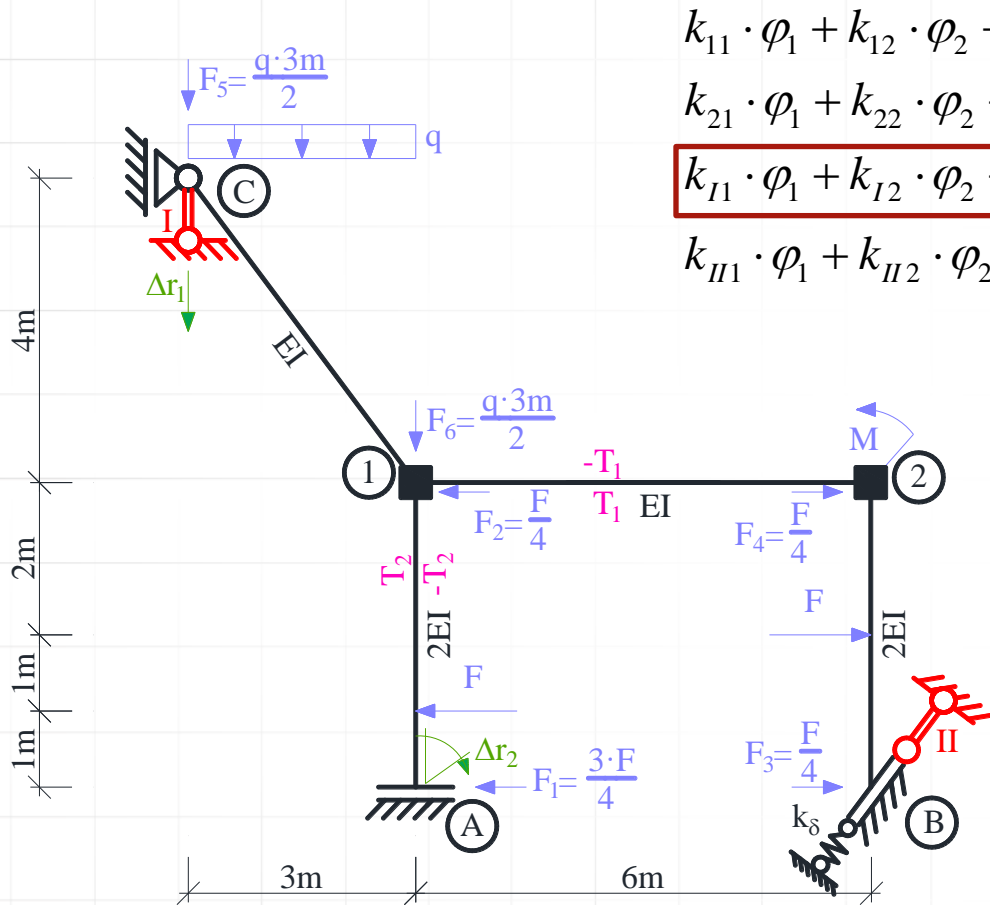
$$k_{2I} = \sum_j M_{2j}^I = M_{21}^I + M_{2B}^I = 0 + 1 \frac{EI}{m^2} = 1 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{2II} = \sum_j M_{2j}^{II} = M_{21}^{II} + M_{2B}^{II} = \left(\frac{2}{15} \right) \frac{EI}{m^2} + \left(\frac{9}{20} \right) \frac{EI}{m^2} = \frac{7}{12} \frac{EI}{m^2} = 0,5833 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{2o} = \sum_j M_{2j}^o - M_2^o = M_{21}^o + M_{2B}^o - (-M) = [0 + 4 - (-20)] \text{ kN} \cdot \text{m} = 24 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$



WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ



$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

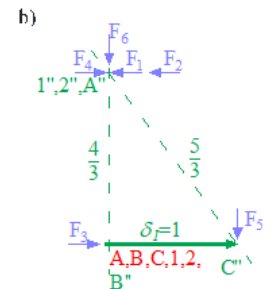
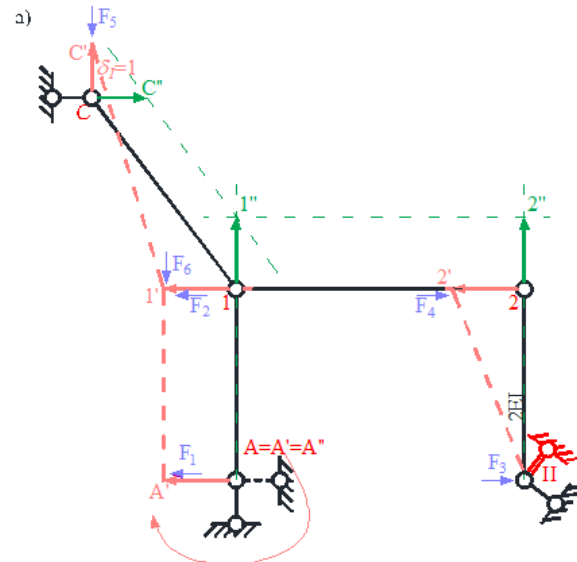
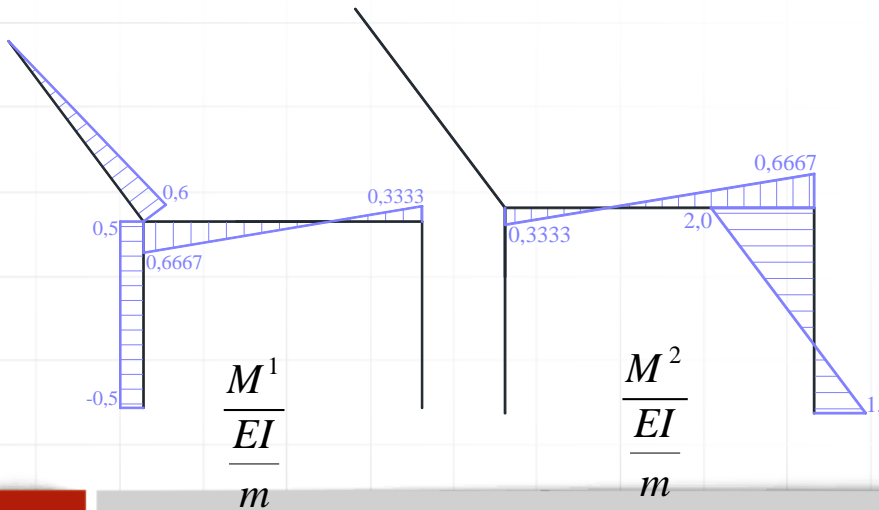
$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II1} \cdot \delta_I + k_{II2} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{III1} \cdot \delta_I + k_{III2} \cdot \delta_{II} + k_{IIIo} = 0$$

Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi_{ij}^I = -(M_{12}^1 + M_{21}^1) \psi_{12}^I - (M_{1A}^1 + M_{A1}^1) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^1 + M_{C1}^1) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^1 + M_{B2}^1) \psi_{2B}^I = \\
 &= -\left(0,6667 \frac{EI}{m} + 0,3333 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - \left(0,5 \frac{EI}{m} - 0,5 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - \left(0,6 \frac{EI}{m} + 0\right) \cdot \frac{1}{3m} - (0+0) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = -0,2 \frac{EI}{m^2}, \\
 k_{12} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^2 + M_{ji}^2) \psi_{ij}^I = -(M_{12}^2 + M_{21}^2) \psi_{12}^I - (M_{1A}^2 + M_{A1}^2) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^2 + M_{C1}^2) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^2 + M_{B2}^2) \psi_{2B}^I = \\
 &= -\left(0,3333 \frac{EI}{m} + 0,6667 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - (0-0) \cdot 0 - (0+0) \cdot \frac{1}{3m} - \left(1 \frac{EI}{m} + 2 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = 1 \frac{EI}{m^2},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \psi_{2B}^I &= \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m} \\
 \psi_{1C}^I &= \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m} \\
 \psi_{1A}^I &= \psi_{12}^I = 0
 \end{aligned}$$



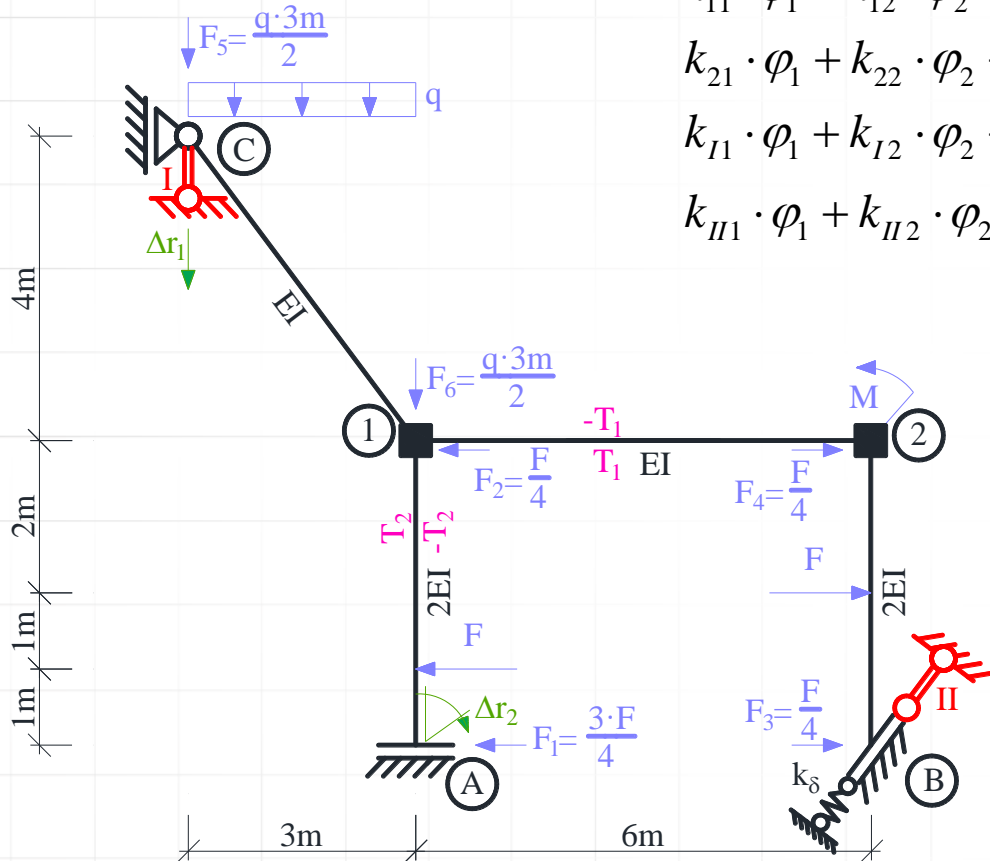
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II1} \cdot \delta_I + k_{II2} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II I} \cdot \delta_I + k_{II II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{I,I} = -\sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^I = -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^I - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi_{1C}^I -$$

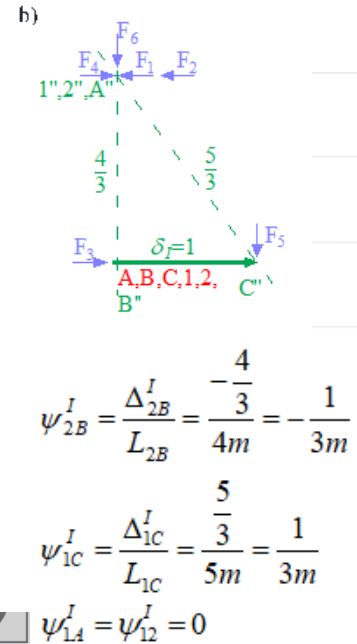
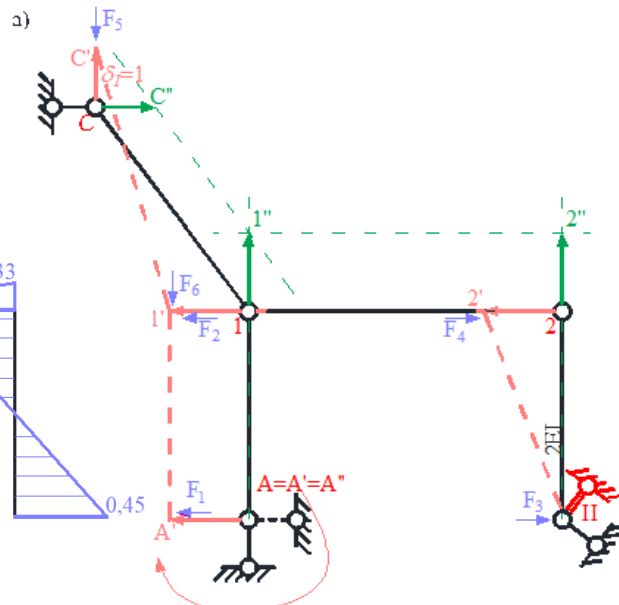
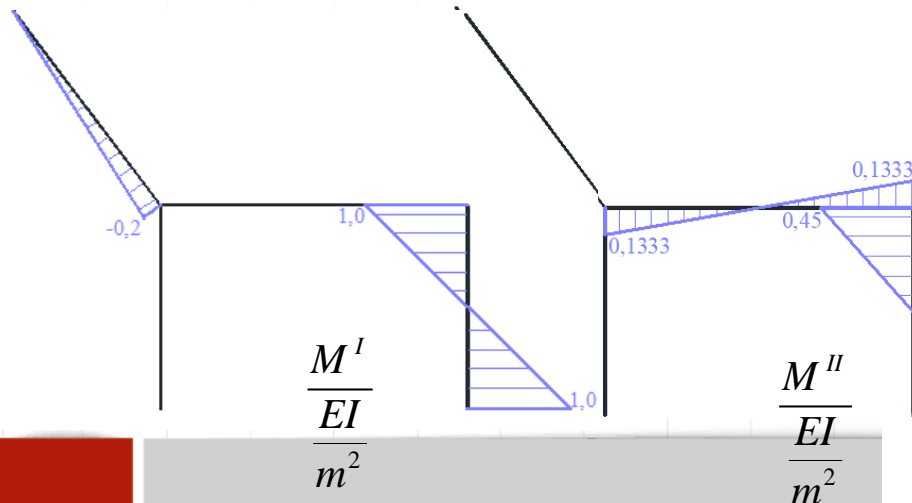
$$-(M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi_{2B}^I + k^\delta \cdot \delta^I \cdot \delta^I = -(0+0) \cdot 0 - (0-0) \cdot 0 - \left(-\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2} + 0\right) \cdot \frac{1}{3m} - \left(1 \frac{EI}{m^2} + 1 \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) +$$

$$+ 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0 \cdot 0 = 0,7333 \frac{EI}{m^3},$$

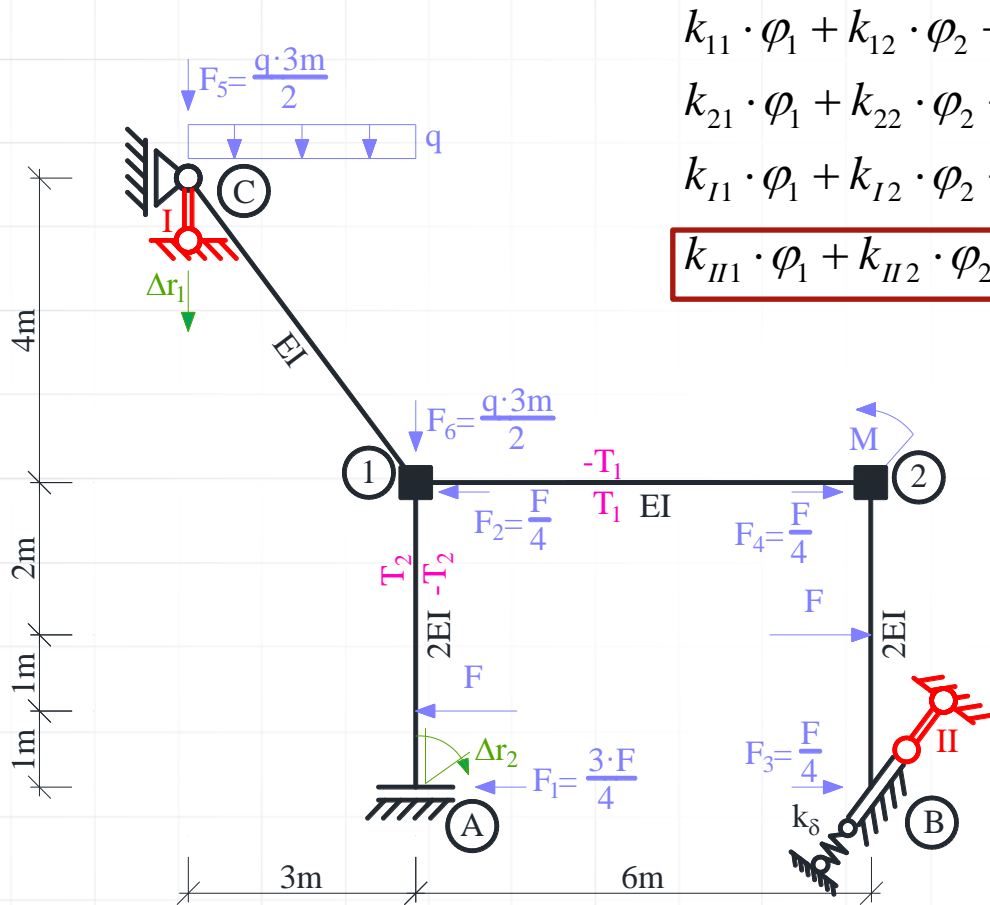
$$k_{I,II} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II}) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^{II} = -(M_{12}^{II} + M_{21}^{II}) \psi_{12}^I - (M_{1A}^{II} + M_{A1}^{II}) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^{II} + M_{C1}^{II}) \psi_{1C}^I -$$

$$-(M_{2B}^{II} + M_{B2}^{II}) \psi_{2B}^I + k^\delta \cdot \delta^I \cdot \delta^{II} = -\left(\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot 0 - (0-0) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 - \left(\frac{9}{20} \frac{EI}{m^2} + \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) +$$

$$+ 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0 \cdot 1 = 0,3 \frac{EI}{m^3},$$



WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ



$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II1} \cdot \delta_I + k_{II2} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II I} \cdot \delta_I + k_{II II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

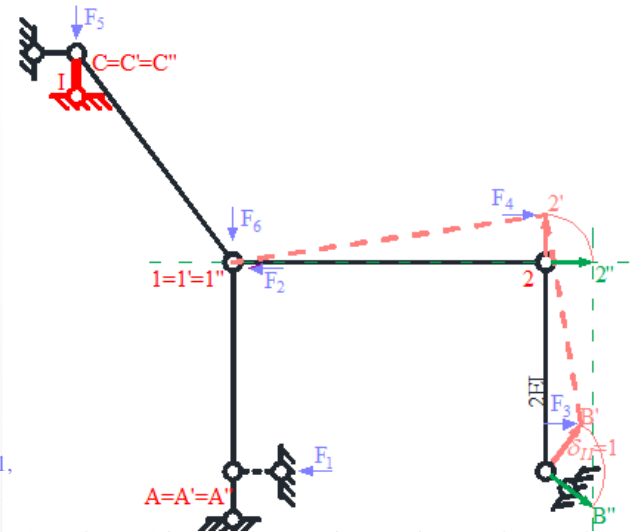
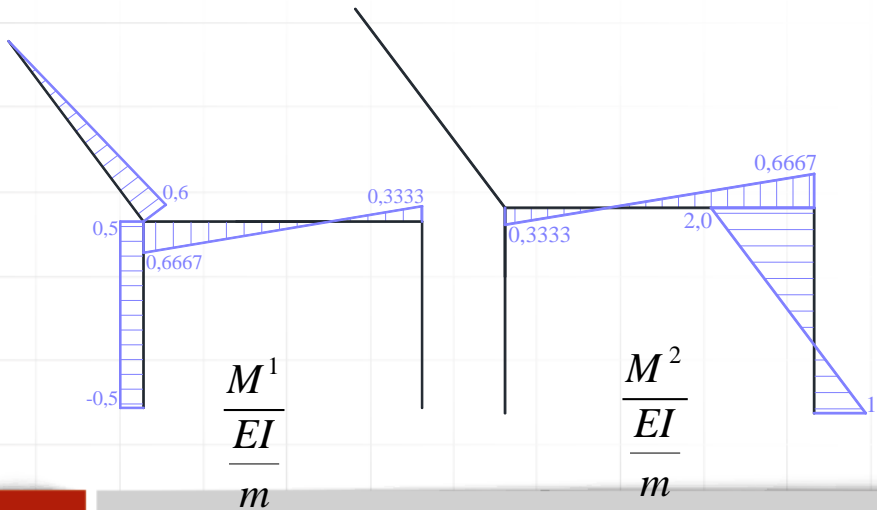
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{II1} = -\sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi_{ij}^{II} = -(M_{12}^1 + M_{21}^1) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^1 + M_{A1}^1) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^1 + M_{C1}^1) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^1 + M_{B2}^1) \psi_{2B}^{II} =$$

$$= -\left(0,6667 \frac{EI}{m} + 0,3333 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - \left(0,5 \frac{EI}{m} - 0,5 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - \left(0,6 \frac{EI}{m} + 0\right) \cdot 0 - (0+0) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{II2} = -\sum_{ij} (M_{ij}^2 + M_{ji}^2) \psi_{ij}^{II} = -(M_{12}^2 + M_{21}^2) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^2 + M_{A1}^2) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^2 + M_{C1}^2) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^2 + M_{B2}^2) \psi_{2B}^{II} =$$

$$= -\left(0,3333 \frac{EI}{m} + 0,6667 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - (0-0) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 - \left(1 \frac{EI}{m} + 2 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = 0,5833 \frac{EI}{m^2},$$



b)

$$\psi_{12}^{II} = \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m}$$

$$\psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m}$$

$$\psi_{1A}^{II} = \psi_{1C}^{II} = 0$$

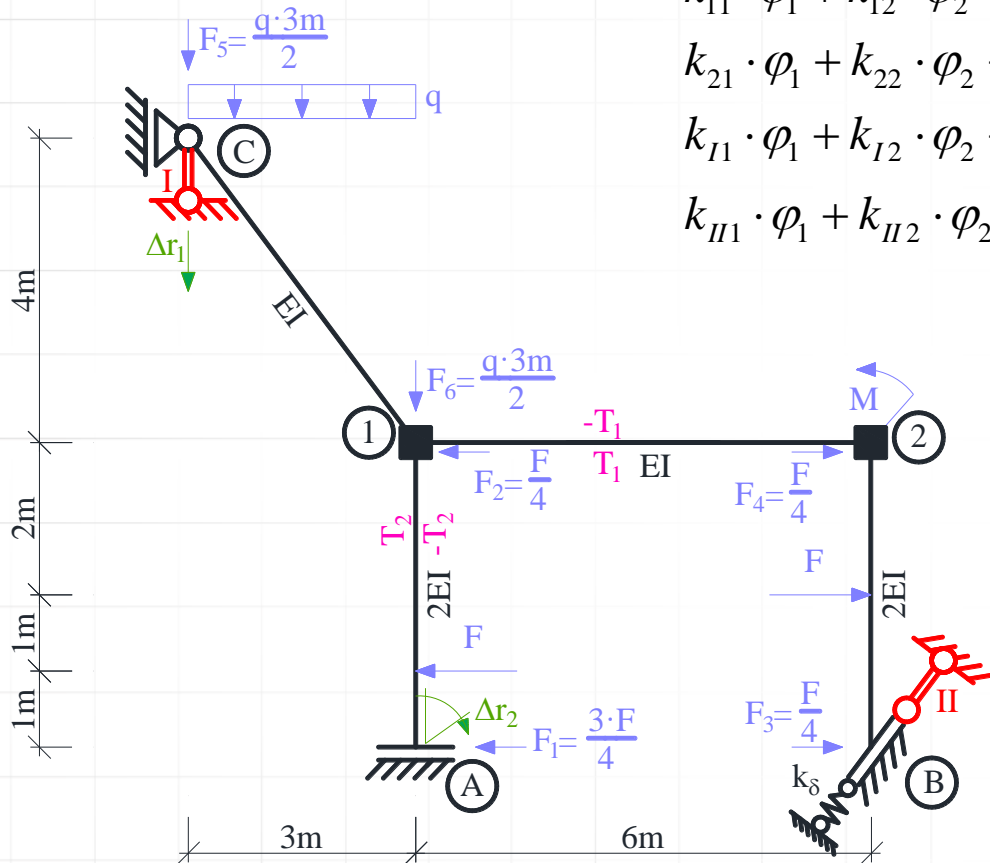
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II1} \cdot \delta_I + k_{II2} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + \boxed{k_{II I} \cdot \delta_I + k_{II II} \cdot \delta_{II}} + k_{IIo} = 0$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{II,I} = -\sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^{II} + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^{II} \cdot \delta_s^I = -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi_{1C}^{II} -$$

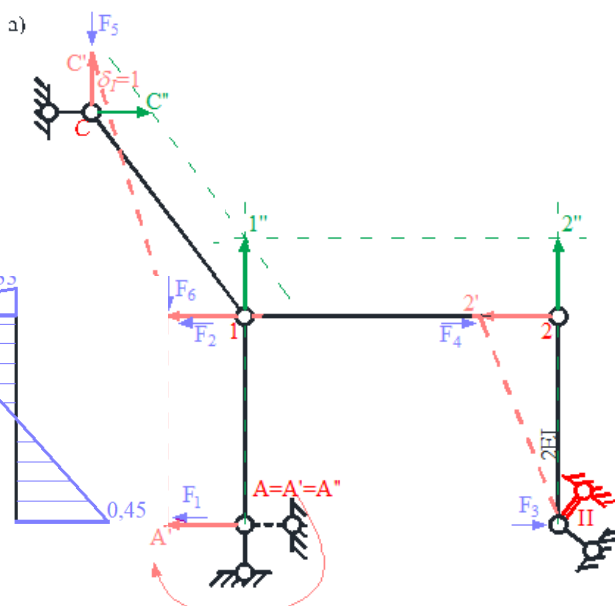
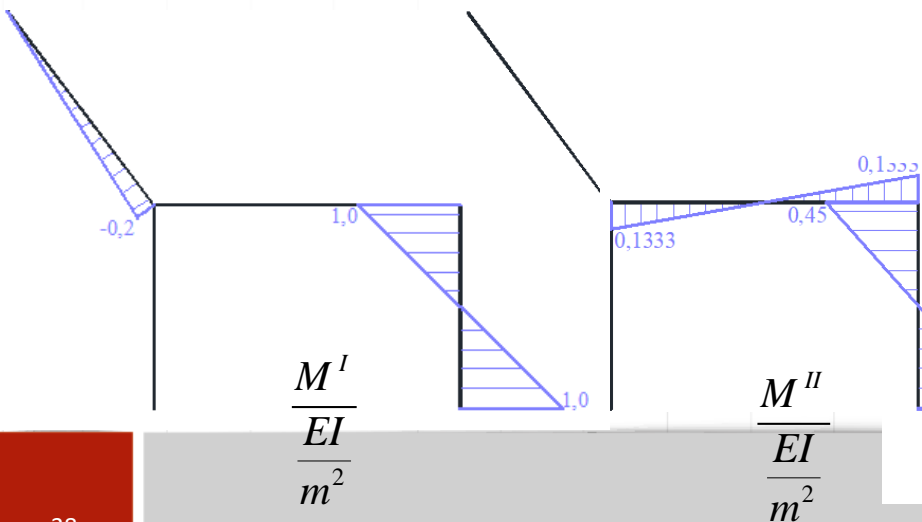
$$-(M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi_{2B}^{II} + k^\delta \cdot \delta^{II} \cdot \delta^I = -(0+0) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - (0+0) \cdot 0 - \left(-\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2} + 0\right) \cdot 0 - \left(1 \frac{EI}{m^2} + 1 \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) +$$

$$+ 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 0 = 0,3 \frac{EI}{m^3},$$

$$k_{II,II} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II}) \psi_{ij}^{II} + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^{II} \cdot \delta_s^{II} = -(M_{12}^{II} + M_{21}^{II}) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^{II} + M_{A1}^{II}) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^{II} + M_{C1}^{II}) \psi_{1C}^{II} -$$

$$-(M_{2B}^{II} + M_{B2}^{II}) \psi_{2B}^{II} + k^\delta \cdot \delta^{II} \cdot \delta^{II} = -\left(\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - (0-0) \cdot 0 - (0+0) \cdot 0 -$$

$$-\left(\frac{9}{20} \frac{EI}{m^2} + \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 1 = 8,1705.$$



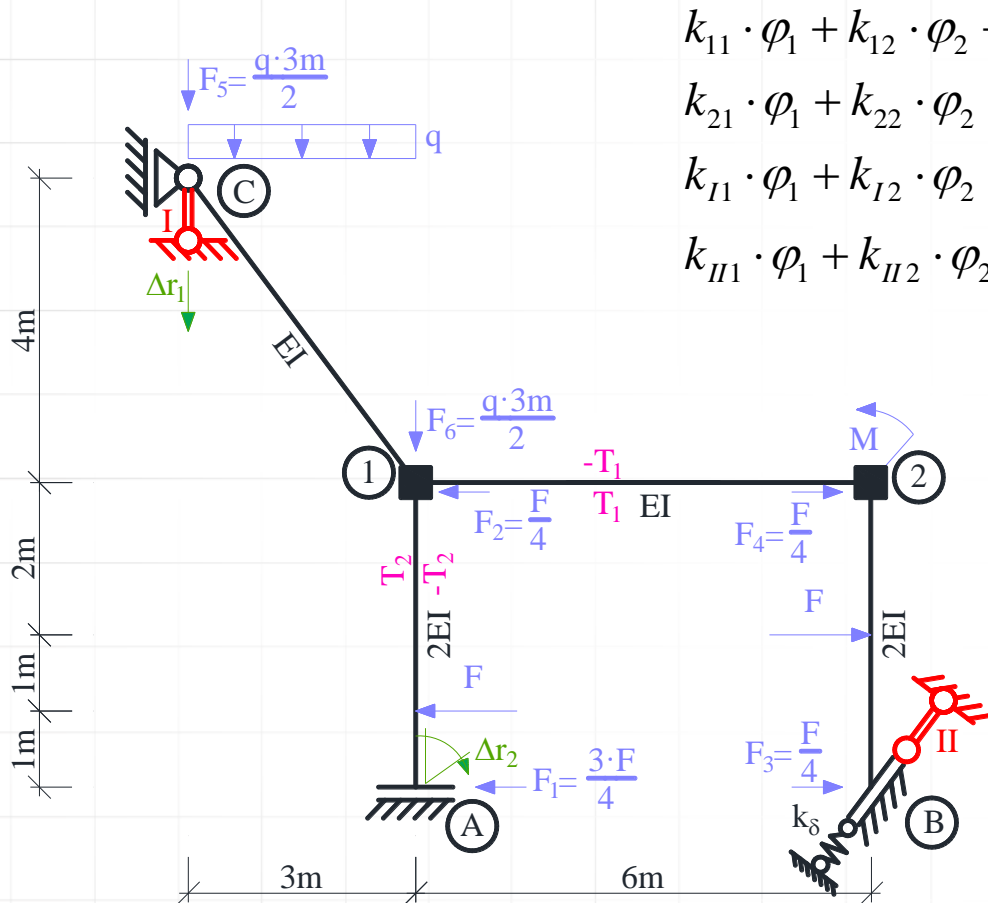
b)

$$\psi_{12}^{II} = \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m}$$

$$\psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m}$$

$$\psi_{1A}^{II} = \psi_{1C}^{II} = 0$$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ



$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

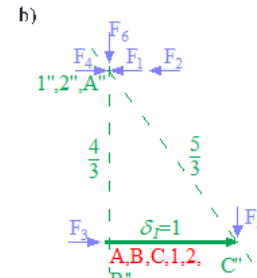
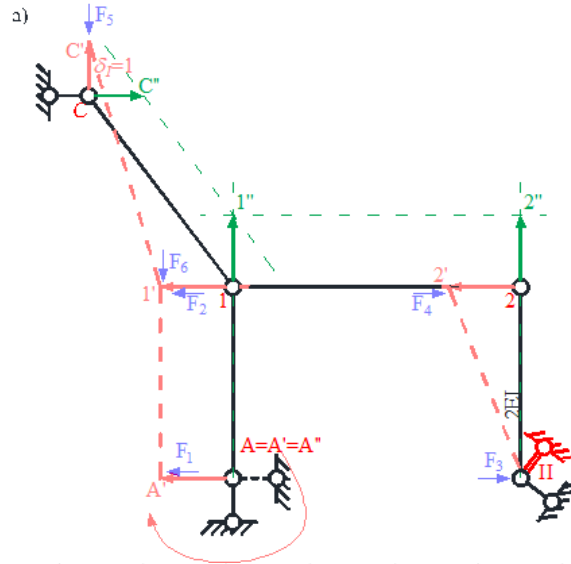
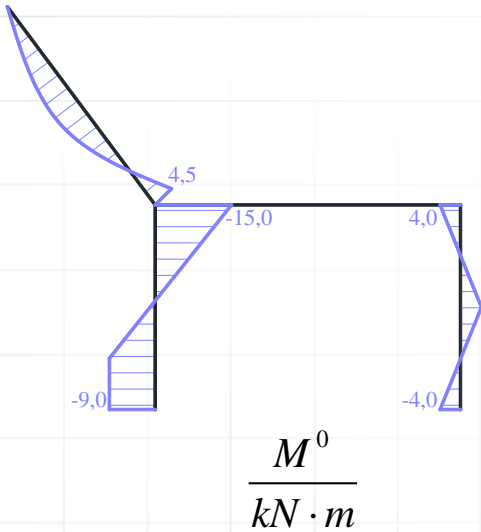
$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II1} \cdot \delta_I + k_{II2} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{III1} \cdot \delta_I + k_{III2} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$\begin{aligned}
 k_{I_0} = & -\sum_{ij} (M_{ij}^o + M_{ji}^o) \psi_{ij}^I - \sum_P P_P \cdot \delta_P^I = -(M_{12}^o + M_{21}^o) \psi_{12}^I - (M_{1A}^o + M_{A1}^o) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^o + M_{C1}^o) \psi_{1C}^I - \\
 & -(M_{2B}^o + M_{B2}^o) \psi_{2B}^I - P_1 \cdot \delta_1^I - P_2 \cdot \delta_2^I - P_3 \cdot \delta_3^I - P_4 \cdot \delta_4^I - P_5 \cdot \delta_5^I - P_6 \cdot \delta_6^I = -(0+0) \cdot 0 - \\
 & -(-15kN \cdot m - 9kN \cdot m) \cdot 0 - (0 + 4,5kN \cdot m) \cdot \frac{1}{3m} - (4kN \cdot m - 4kN \cdot m) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) - 6kN \cdot \frac{4}{3} - 2kN \cdot \frac{4}{3} - \\
 & -4kN \cdot 0 - 4kN \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 6kN \cdot (-1) - 6kN \cdot 0 = -0,8333kN,
 \end{aligned}$$



$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1C}^I = \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m}$$

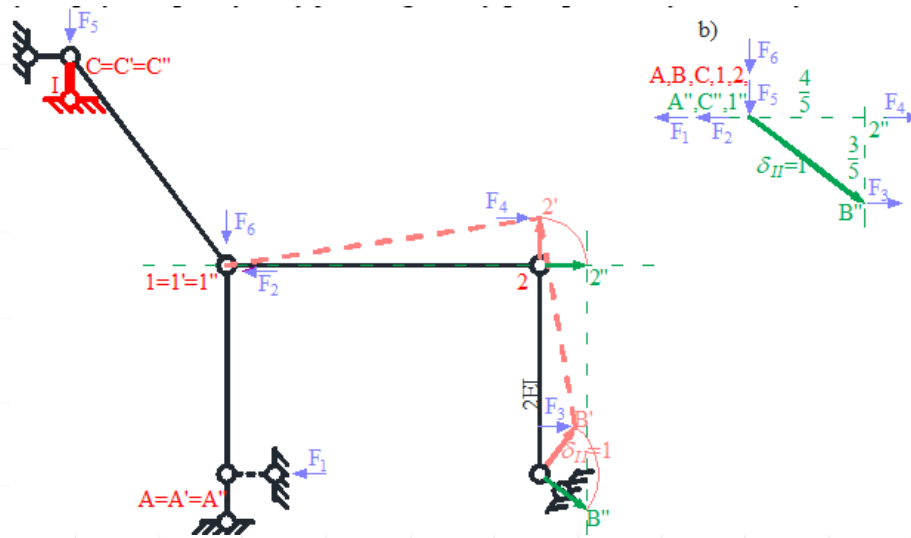
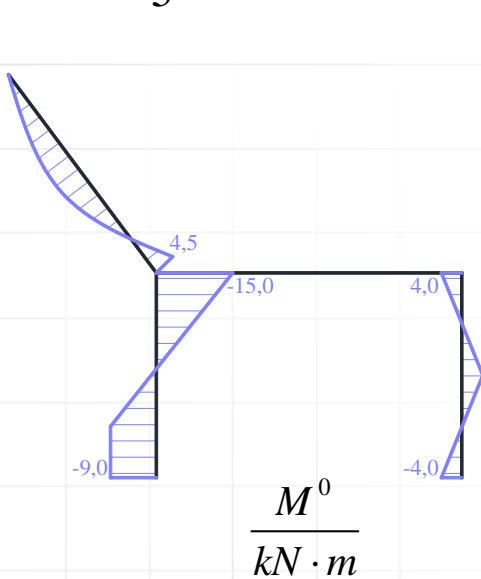
$$\psi_{1A}^I = \psi_{12}^I = 0$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1^I = \frac{4}{3}, \quad \delta_2^I = \frac{4}{3}, \quad \delta_3^I = 0, \quad \delta_4^I = -\frac{4}{3}, \quad \delta_5^I = -1, \quad \delta_6^I = 0.$$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$\begin{aligned}
 k_{IIo} = & -\sum_{ij} (M_{ij}^o + M_{ji}^o) \psi_{ij}^{II} - \sum_P P_P \cdot \delta_P^{II} = -(M_{12}^o + M_{21}^o) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^o + M_{A1}^o) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^o + M_{C1}^o) \psi_{1C}^{II} - \\
 & -(M_{2B}^o + M_{B2}^o) \psi_{2B}^{II} - P_1 \cdot \delta_1^{II} - P_2 \cdot \delta_2^{II} - P_3 \cdot \delta_3^{II} - P_4 \cdot \delta_4^{II} - P_5 \cdot \delta_5^{II} - P_6 \cdot \delta_6^{II} = -(0+0) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - \\
 & -(-15kN \cdot m - 9kN \cdot m) \cdot 0 - (0 + 4,5kN \cdot m) \cdot 0 - (4kN \cdot m - 4kN \cdot m) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) - 6kN \cdot 0 - 2kN \cdot 0 - \\
 & -4kN \cdot \frac{3}{5} - 4kN \cdot 0 - 6kN \cdot 0 - 6kN \cdot 0 = -2,4kN.
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \psi_{12}^{II} &= \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m} \\
 \psi_{2B}^{II} &= \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m} \\
 \psi_{1A}^{II} &= \psi_{1C}^{II} = 0
 \end{aligned}$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1^{II} = 0, \quad \delta_2^{II} = 0, \quad \delta_3^{II} = \frac{3}{5}, \quad \delta_4^{II} = 0, \quad \delta_5^{II} = 0, \quad \delta_6^{II} = 0$$

SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$1,7667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 - 0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} - 10,5 kN \cdot m = 0$$

$$0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 2,6667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} + 24 kN \cdot m = 0$$

$$-0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,7333 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0,8333 kN = 0$$

$$\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 8,1705 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 2,4 kN = 0$$

$$\varphi_1 = 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI},$$

$$\varphi_2 = -26,6186 \frac{kN \cdot m^2}{EI},$$

$$\delta_I = 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI},$$

$$\delta_{II} = 0,4142 \frac{kN \cdot m^3}{EI}.$$

Zadanie domowe (projekt nr 2)

1. Sprawdzenie SW i GN układu
2. Dobranie układu podstawowego metody przemieszczeń
3. Rozwiązanie układu podstawowego metody przemieszczeń od składowych stanów obciążeń
4. Obliczenie współczynników układu równań metody przemieszczeń.