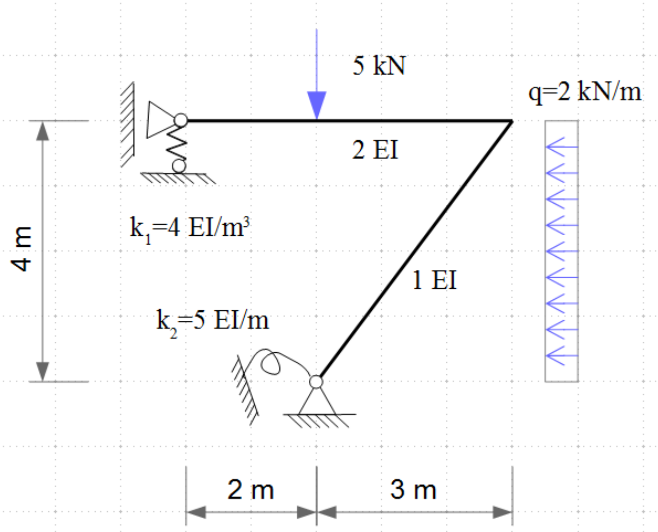
Opracowała: dr inż. Kamila Jarczewska
na podstawie wykładu prof. dr hab. inż. Wojciecha Glabisza

Wykład nr 6

ZASTOSOWANIE **METODY SIŁ** DO ROZWIĄZYWNIA PŁASKICH UKŁADÓW PRĘTOWYCH STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH (SN)

Przykład 1.

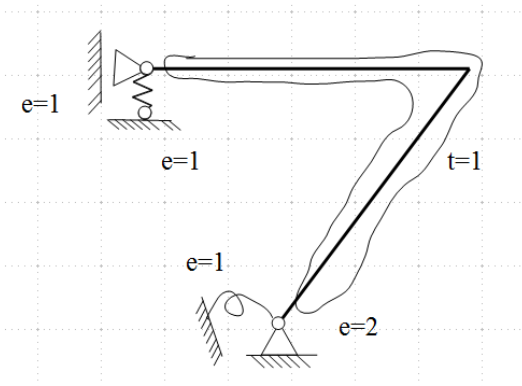
Należy wyznaczyć wykresy sił przekrojowych M, T, N w ramie statycznie niewyznaczalnej (SN) i geometrycznie niezmiennej (GN) o schemacie statycznym przedstawionym na rysunku 1.



Rys.1

1. Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności układu (n_h)

(określenie liczby niewiadomych sił w zadaniu metody sił)

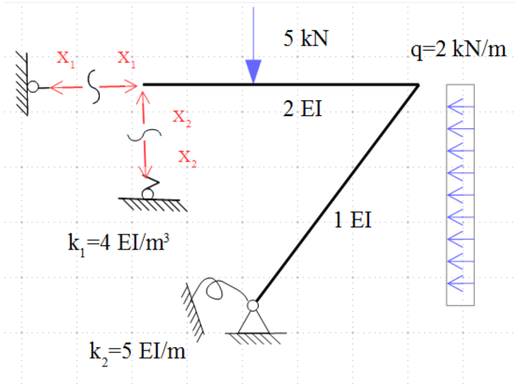


$$n_h = e - 3t = 5 - 3 * 1 = 2$$

2. Przyjęcie układu podstawowego metody sił

(ustalenie, które siły będą uznane za niewiadome w zadaniu metody sił)

Schemat podstawowy metody sił tworzy się poprzez przecięcie w układzie SN łącznie n_h więzi (zewnętrznych lub wewnętrznych) i wstawienie w miejscu i na kierunku przeciętych więzi n_h niewiadomych sił, zwanych siłami hiperstatycznymi, które oznaczane są symbolem X_j $(X_1, X_2 \ldots\ldots X_{n_h})$. Warunkiem wyboru więzi, które należy przeciąć jest zachowanie geometrycznej niezmienności układu jaki powstanie po przecięciu danych więzi, stąd przecina się więzi warunkowe, a nie więzi konieczne. **Układ podstawowy metody sił musi być układem GN.**



Niewiadome w zadaniu metody sił są wybrane siły X_1, X_2

$$X_1 = ?, \quad X_2 = ?$$

3. Układ równań metody sił

(wyznaczenie dodatkowych równań poza równaniami równowagi sił, z których wyliczy się wartości niewiadomych sił $\mathbf{X_j}$)

Równania z których wyznacza się wartości sił hiperstatycznych $(X_1, X_2 \ldots\ldots X_{n_h})$ wynikają z warunku ciągłości konstrukcji czyli z ograniczeń jakie nakłada się na przemieszczenia konstrukcji w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku przeciętych więzi warunkowych. Przemieszczenie względne każdej przeciętej więzi w schemacie podstawowym wywołane zadanym obciążeniem F i obciążeniem siłami hiperstatycznymi X_j wynosi zero, ponieważ w schemacie SN (w układzie zadanym) w tych miejscach i na tych kierunkach przemieszczenia są zerowe. Uzyskuję się w ten sposób zgodność przemieszczeń w układzie zadanym i układzie podstawowym.

Ogólna postać układu równań metody sił (liczba równań wynosi n_h):

$$\bar{\Delta}_i = \sum_{j=1}^{n_h} \delta_{ij} X_j + \bar{\Delta}_{i\,F} = 0, \quad i \in \{1,2 \ldots, n_h\}$$

Przemieszczenie w miejscu i na kierunku i-tej siły hiperstatycznej od wszystkich sił hiperstatycznych i od obciążenia danego równa się zero.

$$\boldsymbol{\delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \bar{\Delta}_{1\,F} = 0}$$
$$\boldsymbol{\delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \bar{\Delta}_{2\,F} = 0}$$

4. Współczynniki układu równań metody sił

Do wyliczenia współczynników układu równań metody sił, które określają wartości przemieszczeń w schemacie podstawowym w miejscu i na kierunku „i"-tych sił hiperstatycznych od poszczególnych obciążeń, wykorzystuje się zasadę prac przygotowanych.

* Zasada prac przygotowanych przy obciążeniu „i" jako stanie wirtualnego obciążenia ($i = 1kN$ lub $i = 1kNm$) oraz obciążeniu „j" jako stanie rzeczywistych obciążeń i przemieszczeń przyjmuje ogólną postać:

$$\bar{1}_i\, \delta_{ij} = \sum_p \int \overline{M}^i \frac{\overline{M}^j}{EI} dx + \sum_p \int \overline{T}^i \frac{\kappa \overline{T}^j}{GA} dx + \sum_p \int \overline{N}^i \frac{\overline{N}^j}{EA} dx + \sum_m \overline{S}_m^i \frac{\bar{S}_m^j}{k_m}$$

$$\bar{1}_i\, \overline{\Delta}_{iF} = \sum_p \int \overline{M}^i \frac{\overline{M}^F}{EI} dx + \sum_p \int \overline{T}^i \frac{\kappa \overline{T}^F}{GA} dx + \sum_p \int \overline{N}^i \frac{\overline{N}^F}{EA} dx + \sum_m \overline{S}_m^i \frac{\bar{S}_m^F}{k_m}$$

* W przypadku gdy EA=GA=∞ człony w równaniu prac określające pracę wirtualnych sił tnących i sił osiowych na rzeczistych odkształcenia podłużnych i postaciowych znikają ponieważ

$$\sum_p \Big(\lim_{EA\to\infty} \int \overline{N}^i \frac{\overline{N}^j}{EA} dx \Big)_p = 0,\ \sum_p \Big(\lim_{GA\to\infty} \int \overline{T}^i \kappa \frac{\overline{T}^j}{GA} dx \Big)_P = 0$$

* Do wyliczenia całek w ZPP wykorzystuje się odpowiednie wzory numerycznego całkowania (wzór Wereszczagina, wzór Simpsona) przedstawione na wykładzie 4.

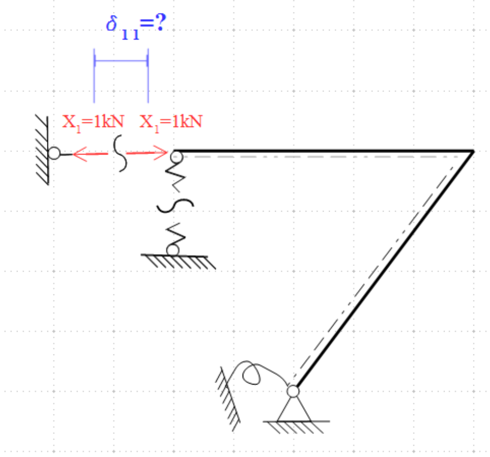
* Aby móc wyliczyć współczynnik układy równań metody sił należy rozwiązać układ podstawowy od:
 - obciążenia jednostkowego stającego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszenia
 - obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia

δ_{ij} –przemieszczenie w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku „i"-tej siły hiperstatycznej wywołane obciążeniem jednostkowym stojącym w miejscu i na kierunku „j"-tej siły hiperstatycznej.

$\overline{\Delta}_{iF}$ –przemieszczenie w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku „i"-tej siły hiperstatycznej wywołane obciążeniem zadanym (F)

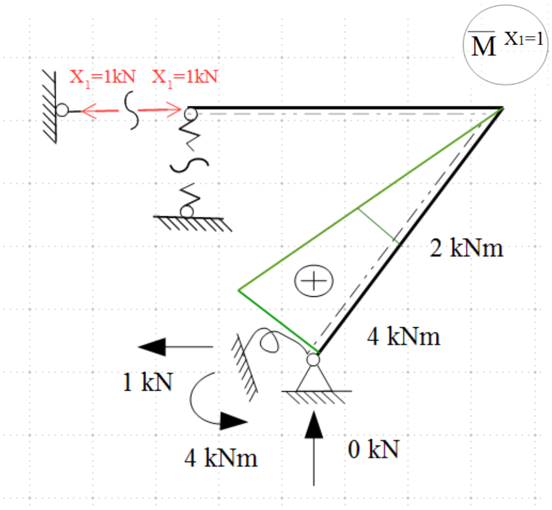
(*Wszystkie współczynniki układu równań metody sił są odpowiednimi przemieszczeniami w układzie SW, a na wykładzie 4 zostało omówione jak wylicza się przemieszczenia od dowolnego obciążenia w układzie SW, więc umiejętność wyznaczania tych współczynników już posiadamy.*)

$$\delta_{11} = ?$$



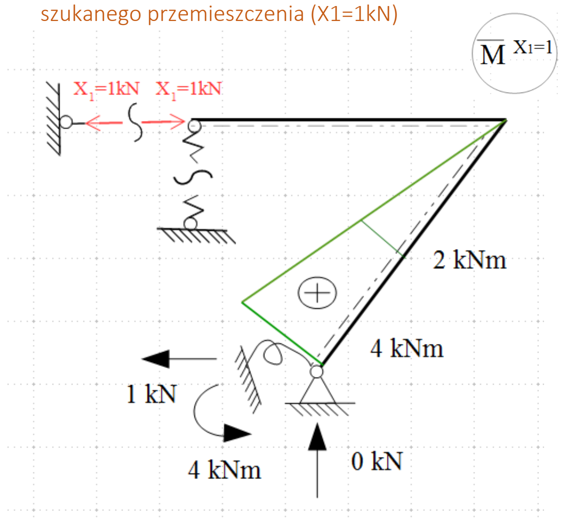
$$1kN \cdot \delta_{11} = \sum_p \left(\int \bar{M}^{X1=1} \frac{\bar{M}^{X1=1}}{EI} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{X1=1} \cdot \bar{S}_m^{X1=1}}{k_m}$$

1) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia (X1=1kN)



$$\bar{S}_1^{X1=1} = 0kN, \quad \bar{S}_2^{X1=1} = -4kNm$$

2) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia (X1=1kN)

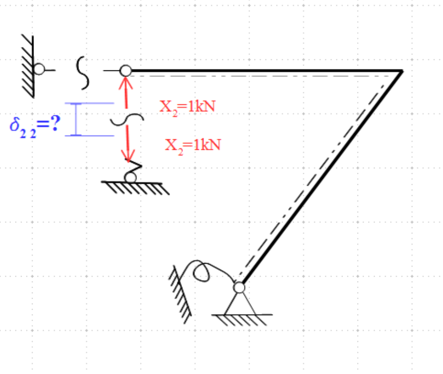


$$\bar{S}_1^{X1=1} = 0kN, \quad \bar{S}_2^{X1=1} = -4kNm$$

3) Wyznaczenie przemieszczenia z zasady prac przygotowanych

$$1kN \cdot \delta_{11} = \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \frac{1}{2} 5m \cdot 4\mathrm{kNm} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4\mathrm{kNm} + \frac{0 \cdot 0}{4\mathrm{EI}/m^3} + \frac{-4\mathrm{kNm} \cdot (-4\mathrm{kNm})}{5\,\mathrm{EI}/m}$$
$$= 29.866 \frac{kN^2 m^3}{EI} /: 1\mathrm{kN}$$

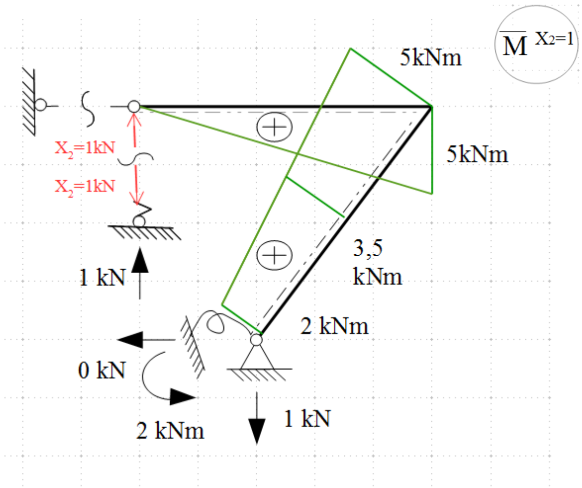
$$\boldsymbol{\delta_{11} = 29.866 \frac{kNm^3}{EI}}$$



δ_{22} =?

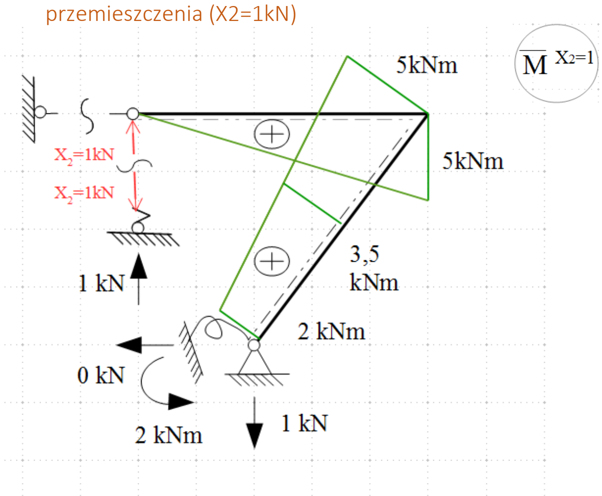
$$1kN \cdot \delta_{22} = \sum_p \left(\int \bar{M}^{X2=1} \frac{\bar{M}^{X2=1}}{EI} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{X2=1} \cdot \bar{S}_m^{X2=1}}{k_m}$$

1) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia (X2=1kN)



$$\bar{S}_1^{X2=1} = -1kN, \quad \bar{S}_2^{X2=1} = -2kNm$$

2) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia (X2=1kN)



$$\bar{S}_1^{X2=1} = -1kN, \quad \bar{S}_2^{X2=1} = -2kNm$$

3) Wyznaczenie przemieszczenia z zasady prac przygotowanych

$$1kN \cdot \delta_{22} = \frac{1}{2\mathrm{EI}} \frac{1}{2} \cdot 5m \cdot 5\mathrm{kNm} \cdot \frac{2}{3} 5\mathrm{kNm} +$$

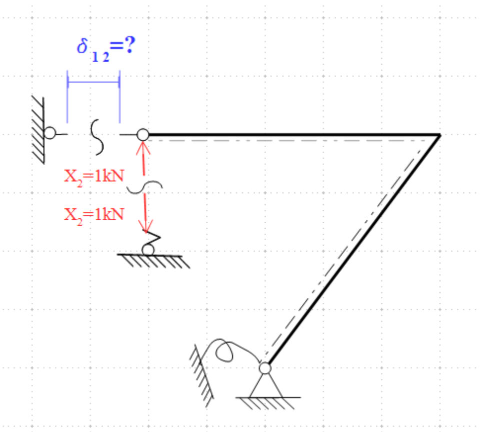
$$+ \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \frac{5m}{6} [2kNm \cdot 2\mathrm{kNm} + 4 \cdot 3{,}5\mathrm{kNm} \cdot 3{,}5\mathrm{kNm} + 5\mathrm{kNm} \cdot 5\mathrm{kNm}] + \frac{(-1\mathrm{kN}) \cdot (-1\mathrm{kN})}{4\,\mathrm{EI}/m^3}$$

$$+ \frac{-2\mathrm{kNm} \cdot (-2\mathrm{kNm})}{5\,\mathrm{EI}/m^3} =$$

$$= 86.8833 /: 1kN$$

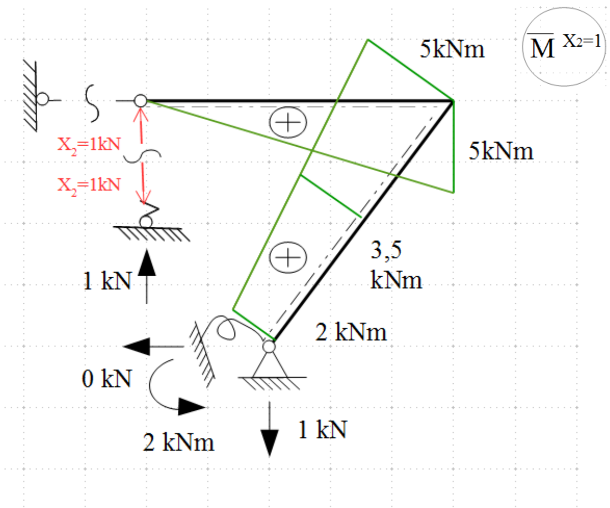
$$\boldsymbol{\delta_{22} = 86.8833 \frac{kNm^3}{EI}}$$

$\delta_{12} = ?$



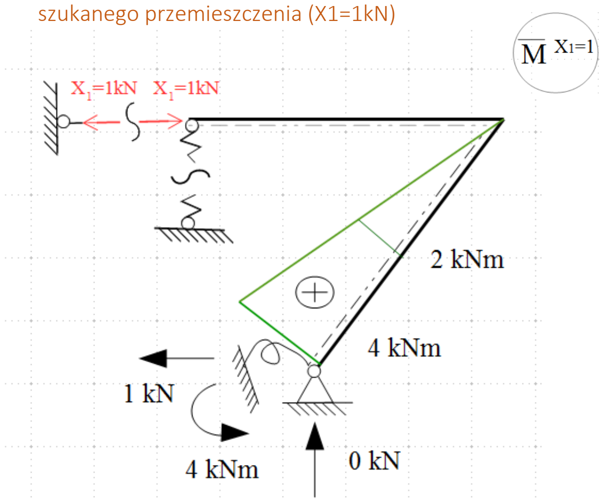
$$1kN \cdot \delta_{12} = \sum_p \left(\int \bar{M}^{X1=1} \frac{\bar{M}^{X2=1}}{EI} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{X1=1} \cdot \bar{S}_m^{X2=1}}{k_m}$$

1) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia (X2=1kN)



$$\bar{S}_1^{X2=1} = -1kN, \quad \bar{S}_2^{X2=1} = -2kNm$$

2) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia (X1=1kN)



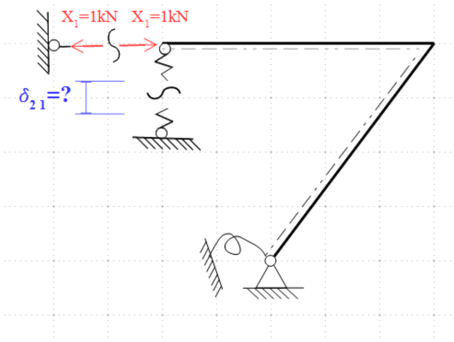
$$\bar{S}_1^{X1=1} = 0kN, \quad \bar{S}_2^{X1=1} = -4kNm$$

3) Wyznaczenie przemieszczenia z zasady prac przygotowanych

$$1kN \cdot \delta_{12} = \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \frac{5m}{6}[2kNm \cdot 4\mathrm{kNm} + 4 \cdot 3{,}5\mathrm{kNm} \cdot 2\mathrm{kNm} + 5\mathrm{kNm} \cdot 0\mathrm{kNm}] + \frac{(-1\mathrm{kNm}) \cdot 0\mathrm{kNm}}{4\,\mathrm{EI}/m^3}$$
$$+ \frac{-2\mathrm{kNm} \cdot (-4\mathrm{kNm})}{5\,\mathrm{EI}/m} = 31.6\frac{kN^2m^3}{EI} /{:}\,1\mathrm{kN}$$

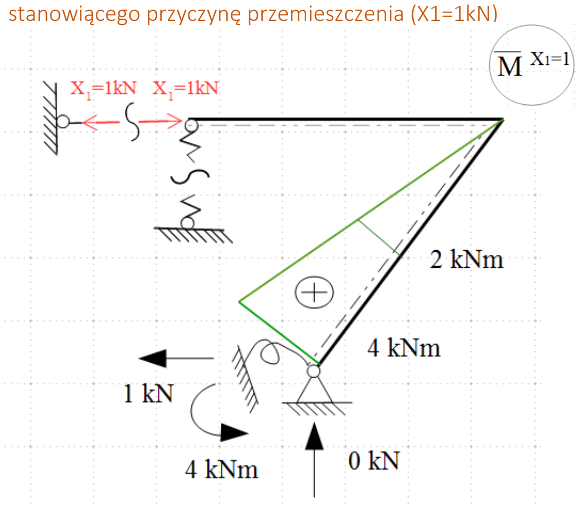
$$\boldsymbol{\delta_{12} = 31.6\frac{kNm^3}{EI}}$$

$\delta_{21} = ?$



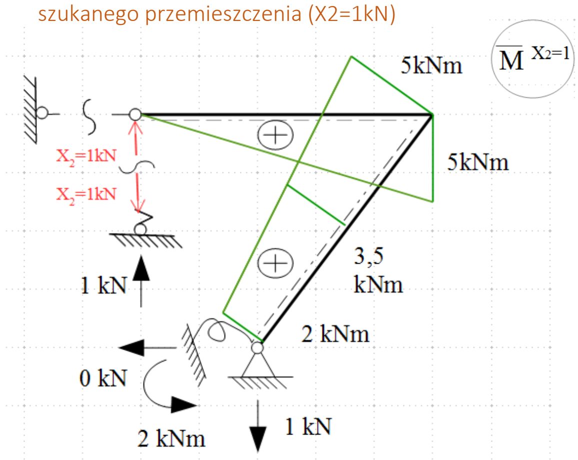
$$1kN \cdot \delta_{21} = \sum_p \left(\int \bar{M}^{X2=1} \frac{\bar{M}^{X1=1}}{EI} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{X2=1} \cdot \bar{S}_m^{X1=1}}{k_m}$$

1) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia (X1=1kN)



$$\bar{S}_1^{X1=1} = 0kN, \quad \bar{S}_2^{X1=1} = -4kNm$$

2) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia (X2=1kN)

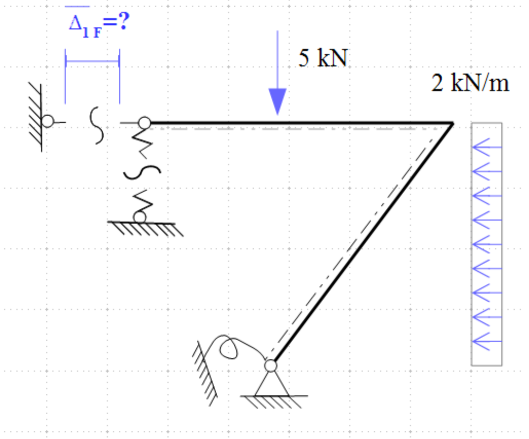


$$\bar{S}_1^{X2=1} = -1kN, \quad \bar{S}_2^{X2=1} = -2kNm$$

3) Wyznaczenie przemieszczenia z zasady prac przygotowanych

$$1kN \cdot \delta_{21} = \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \frac{5m}{6} [2kNm \cdot 4\mathrm{kNm} + 4 \cdot 3{,}5\mathrm{kNm} \cdot 2\mathrm{kNm} + 5\mathrm{kNm} \cdot 0\mathrm{kNm}] + \frac{(-1\mathrm{kNm}) \cdot 0\mathrm{kNm}}{4\,\mathrm{EI}/m^3} + \frac{-2\mathrm{kNm} \cdot (-4\mathrm{kNm})}{5\,\mathrm{EI}/m} = 31.6 \frac{kN^2 m^3}{EI} /: 1\mathrm{kN}$$

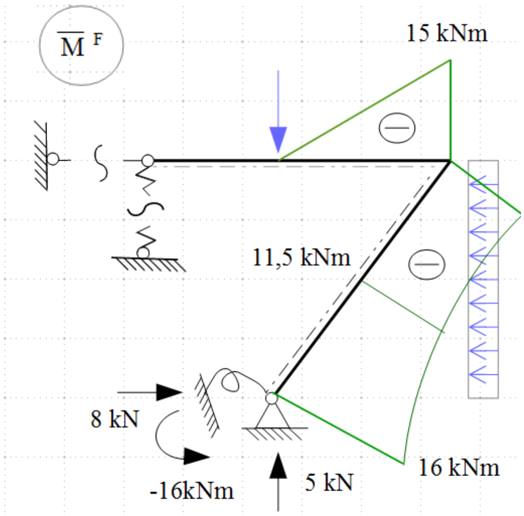
$$\boldsymbol{\delta_{21} = 31.6 \frac{kNm^3}{EI}} = \boldsymbol{\delta_{12}}$$



$\bar{\Delta}_{1F}$=?

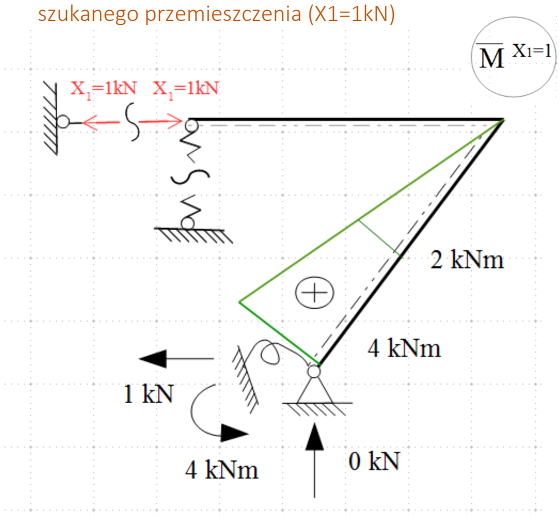
$$1kN \cdot \bar{\Delta}_{1F} = \sum_p \left(\int \bar{M}^{X1=1} \frac{\bar{M}^F}{EI} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{X1=1} \cdot \bar{S}_m^F}{k_m}$$

1) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia (F)



$$\bar{S}_1^F = 0kN, \quad \bar{S}_2^F = 16kNm$$

2) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia (X1=1kN)

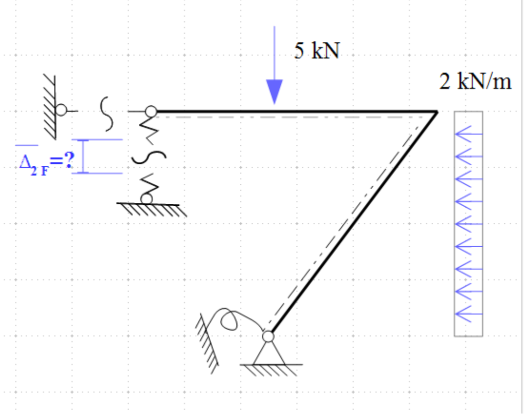


$$\bar{S}_1^{X1=1} = 0kN, \quad \bar{S}_2^{X1=1} = -4kNm$$

3) Wyznaczenie przemieszczenia z zasady prac przygotowanych

$$1kN \cdot \bar{\Delta}_{1F} = \frac{1}{\mathrm{EI}} \cdot \frac{5m}{6} [-16kNm \cdot 4\mathrm{kNm} + 4 \cdot (-11{,}5\mathrm{kNm}) \cdot 2\mathrm{kNm} + (-15\mathrm{kNm}) \cdot 0\mathrm{kNm}] + \frac{0kN \cdot 0\mathrm{kN}}{4\,\mathrm{EI}/m^3} + \frac{16\mathrm{kNm} \cdot (-4\mathrm{kNm})}{5\,\mathrm{EI}/m} = -142.8 \frac{kN^2 m^3}{EI} /: 1kN$$

$$\boldsymbol{\bar{\Delta}_{1F} = -142.8 \frac{kNm^3}{EI}}$$

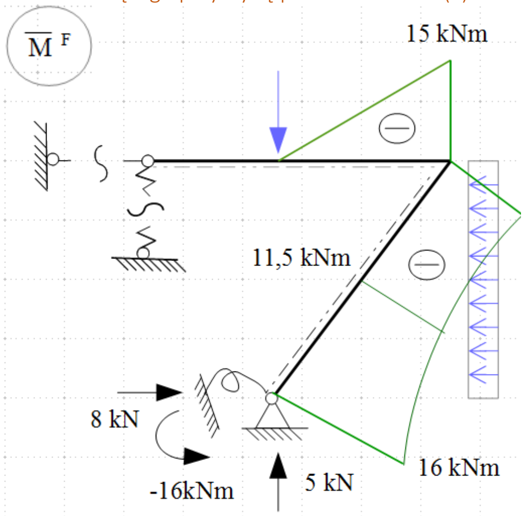


$\bar{\Delta}_{2F}$=?

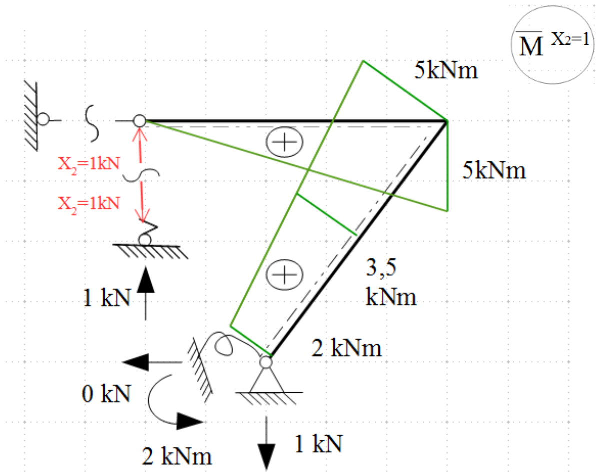
$$1kN\cdot\bar{\Delta}_{2F}=\sum_p\left(\int\bar{M}^{X2=1}\frac{\bar{M}^F}{EI}dx\right)_p+\sum_m\frac{\bar{S}_m^{X2=1}\cdot\bar{S}_m^F}{k_m}$$

1) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia (F)

2) Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia (X2=1kN)



$$\bar{S}_1^F=0kN,\quad \bar{S}_2^F=16kNm$$



$$\bar{S}_1^{X2=1}=-1kN,\quad \bar{S}_2^{X2=1}=-2kNm$$

3) Wyznaczenie przemieszczenia z zasady prac przygotowanych

$$1kN\cdot\bar{\Delta}_{2F}=\frac{1}{\mathrm{EI}}\cdot\frac{5m}{6}[-16kNm\cdot2\mathrm{kNm}+4\cdot(-11{,}5\mathrm{kNm})\cdot3.5\mathrm{kNm}+(-15\mathrm{kNm})\cdot5\mathrm{kNm}]$$

$$+\frac{1}{2\mathrm{EI}}\cdot\frac{3m}{6}[0kNm\cdot2\mathrm{kNm}+4\cdot(-7{,}5\mathrm{kNm})\cdot3.5\mathrm{kNm}+(-15\mathrm{kNm})\cdot5\mathrm{kNm}]+\frac{0kN\cdot(-1\mathrm{kN})}{4\,\mathrm{EI}/m^3}$$

$$+\frac{16\mathrm{kNm}\cdot(-2\mathrm{kNm})}{5\,\mathrm{EI}/m}=-274.733\frac{kN^2m^3}{EI}/:1kN$$

$$\bar{\Delta}_{2F}=\boldsymbol{-274.733\frac{kNm^3}{EI}}$$

5. Rozwiązanie układu równań metody sił ,
(wyliczenie wartości niewiadomych sił hiperstatycznych X_i)

X_j jest współczynnikiem przeskalowania przemieszczenia δ_{ij}

$\delta_{ij}X_j$ określa wartość przemieszczenia w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku „i”-tej siły hiperstatycznej wywołanego obciążeniem „j”-tą siłą hiperstatyczną

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \bar{\Delta}_{1\,F} = 0$$
$$\delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \bar{\Delta}_{2\,F} = 0$$

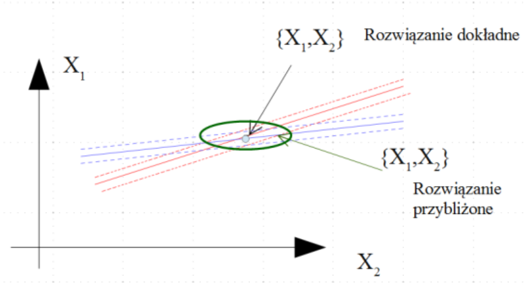
$$29.866\frac{kNm^3}{EI}X_1 + 31.6\frac{kNm^3}{EI}X_2 - 142.8\frac{kNm^3}{EI} = 0$$
$$31.6\frac{kNm^3}{EI}X_1 + 86.8833\frac{kNm^3}{EI}X_2 - 274.733\frac{kNm^3}{EI} = 0$$

$$\{X_1 \to 2.333, \qquad X_2 \to 2.313\}$$

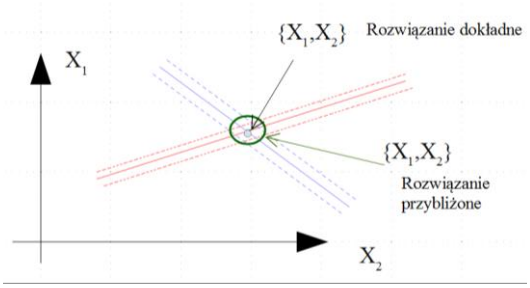
*Uwaga: Sprawdzenie uwarunkowania układu równań

Warto sprawdzić czy dokładność wyliczonych przemieszczeń jest wystarczająca, by uzyskać poprawne wartości sił hiperstatycznych.

Jeśli układ równań jest **źle uwarunkowany** wówczas małe różnice we współczynnikach układu równań mogą powodować bardzo duże różnice w wartościach stanowiących rozwiązanie układu równań.



Jeśli układ jest **dobrze uwarunkowany** wówczas niewielkie różnice we współczynnikach układu równań powodują niewielkie różnice w rozwiązaniu układu równań.

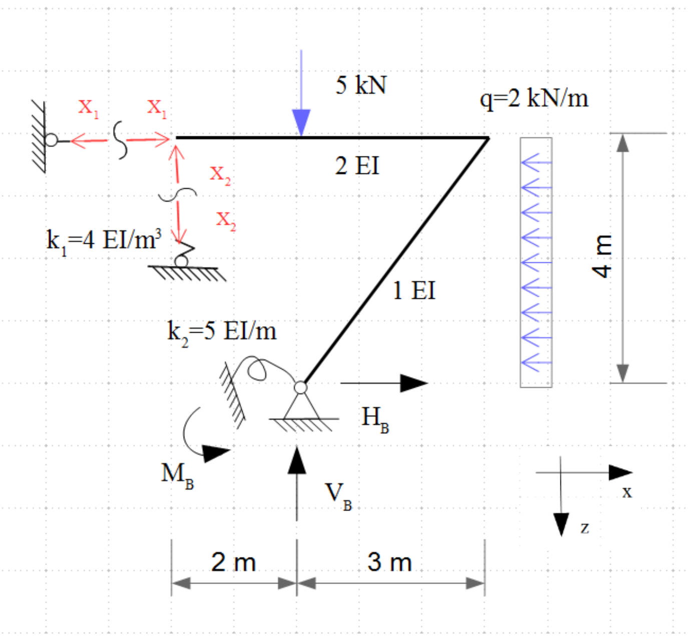


Można zatem zmienić wartość dwóch, trzech współczynników w układzie równań metody sił o kilka setnych i sprawdzić czy uzyska się rozwiązanie bliskie do poprzedniego rozwiązania, jeśli to rozwiązanie będzie się znacznie różnić wówczas wszystkie współczynniki układu równań należy wylicz z większą dokładnością np. uwzględniając siedem, osiem miejsc po przecinku.

6. Wyznaczenie wykresów sił przekrojowych w układzie rzeczywistym SN.

I Sposób

Po wyznaczeniu niewiadomych wartości X_i pozostałe reakcje i siły wewnętrzne wylicza się za pomocą równań równowagi sił, czyli rzeczywista konstrukcja na tym etapie jest SW.



$$\boldsymbol{X_1} = 2.333 \cdot \boldsymbol{1kN}$$

$$\boldsymbol{X_2} = 2.313 \cdot \boldsymbol{1kN}$$

Reakcje podporowe:

$$\sum \boldsymbol{M_B} = \boldsymbol{0}$$

$$M_B + X_2\, 2m + X_1 \cdot 4m - \frac{2kN}{m} \cdot 4m \cdot 2m = 0,$$

$$\boldsymbol{M_B} = -2.039\ kN$$

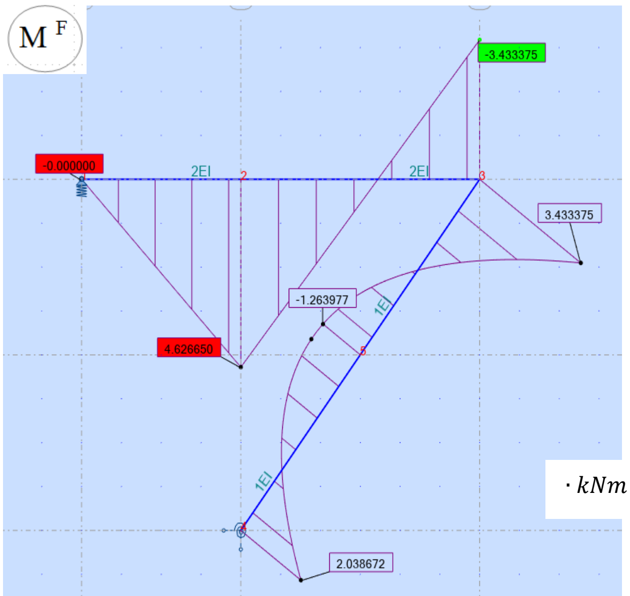
$$\sum \boldsymbol{Z} = \boldsymbol{0}$$

$$-5kN + V_B + X_2 = 0, \qquad \boldsymbol{V_B} = 2.686kN$$

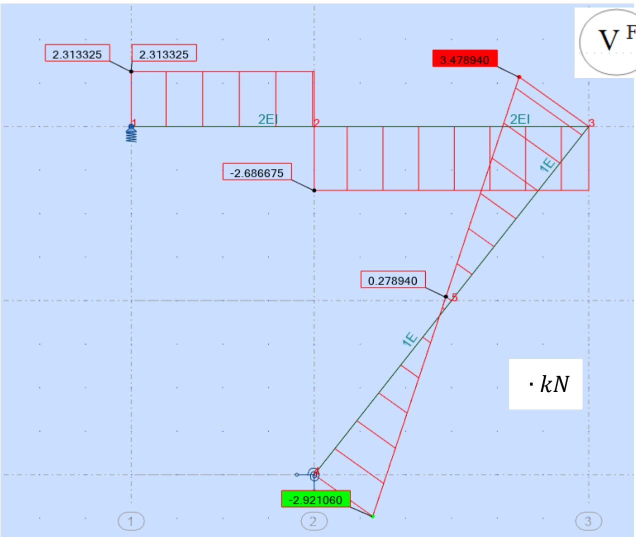
$$\sum \boldsymbol{X} = \boldsymbol{0}$$

$$H_B - \frac{2kN}{m} \cdot 4m + X_1 = 0, \qquad \boldsymbol{H_B} = 5.666\ kN$$

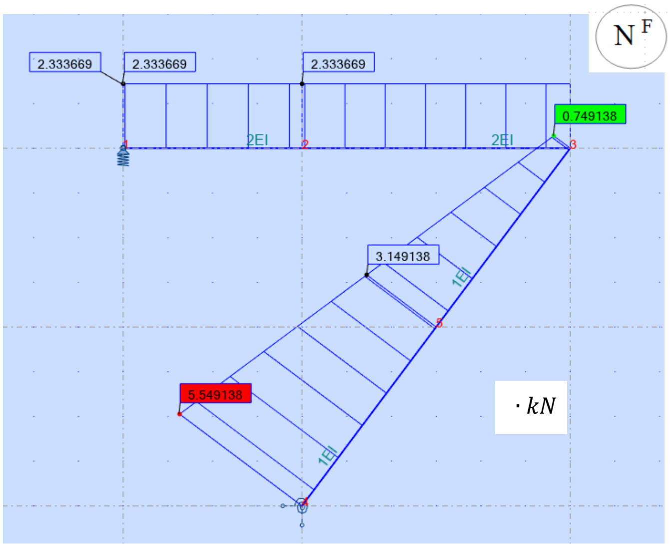
Siły przekrojowe:



Wykres momentów zginających od obciążenia (F)



Wykres sił tnących od obciążenia (F)



Wykres sił osiowych od obciążenia (F) (rozciąganie znak „-„)

Wartości sił w więziach sprężystych: $S_1^F = 2.313kN,\quad S_2^F = -5.549kNm$

II Sposób

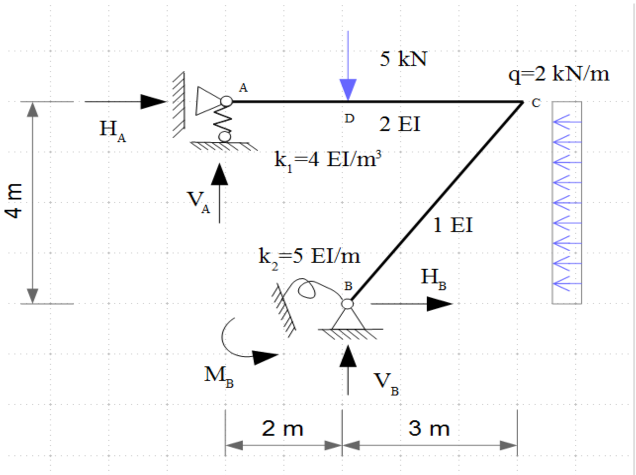
Wartości reakcji oraz sił przekrojowych w punktach charakterystycznych (α) uzyskać można metodą superpozycji poszczególnych rozwiązań.

Momenty zginające : $M_\alpha^F = \overline{M}_\alpha^{X_1=1} * X_1 + \overline{M}_\alpha^{X_2=1} * X_2 + \overline{M}_\alpha^F$

Siły osiowe: $N_\alpha^F = \overline{N}_\alpha^{X_1=1} * X_1 + \overline{N}_\alpha^{X_2=1} * X_2 + \overline{N}_\alpha^F$

Siły tnące: $T_\alpha^F = \overline{T}_\alpha^{X_1=1} * X_1 + \overline{T}_\alpha^{X_2=1} * X_2 + \overline{T}_\alpha^F$

Reakcje: $R_\alpha^F = \overline{R}_\alpha^{X_1=1} * X_1 + \overline{R}_\alpha^{X_2=1} * X_2 + \overline{R}_\alpha^F$



Wartości nadliczbowych reakcji podporowych:

$$\boldsymbol{H_A = X_1} = 2.333 \cdot \boldsymbol{1kN}$$

$$\boldsymbol{V_A = X_2} = 2.313 \cdot \boldsymbol{1kN}$$

Z superpozycji rozwiązań wyznaczone zostaną wartości momentów zginających w rzędnych charakterystycznych

Momenty zginające : $$\boldsymbol{M^F_\alpha = \bar{M}^{X_1=1}_\alpha * X_1 + \bar{M}^{X_2=1}_\alpha * X_2 + \bar{M}^F_\alpha}$$

$$M^F_A = 0kNm * 2.333 + 0kNm * 2.313 + 0kNm = 0kNm$$

$$M^F_B = 4kNm * 2.333 + 2kNm * 2.313 - 16kNm = -2.039kNm$$

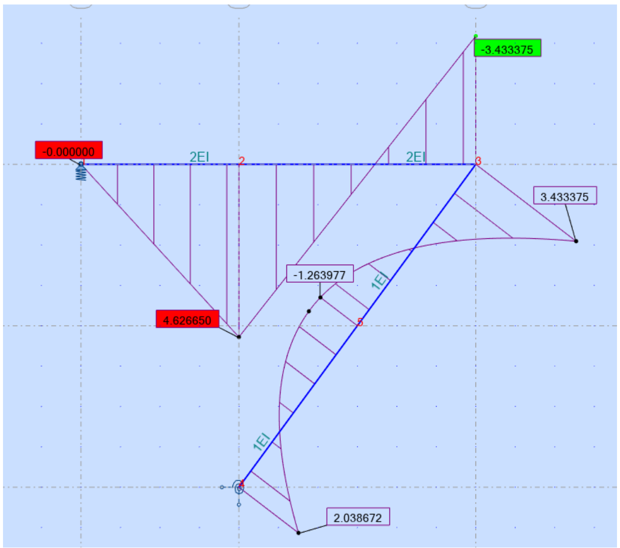
$$M^F_c = 0kNm * 2.333 + 5kNm * 2.313 - 15kNm = -3.433kNm$$

$$M^F_D = 0kNm * 2.333 + 2kNm * 2.313 + 0kNm = 4.626kNm$$

$$M^F_G = 2kNm * 2.333 + 3.5kNm * 2.313 \pm 11.5kNm = 1.264kN$$

*punkt G znajduje się w połowie rozpiętości pręta B-C.

Momenty zginające:



M^F

$\cdot kNm$

Wykres momentów zginających od obciążenia (F)

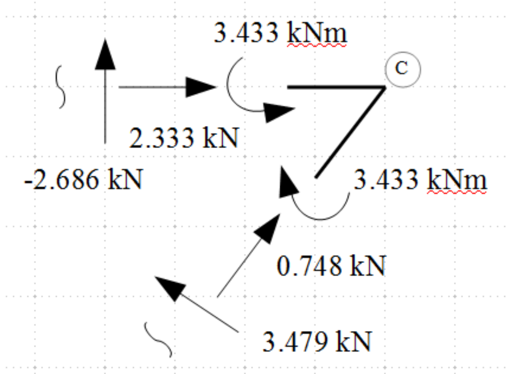
*Aby wyznaczyć siły osiowe N^F_α i siły tnące T^F_α korzystając z superpozycji poszczególnych rozwiązań należałoby mieć rozwiązania sił tnących i sił osiowych od stanów jednostkowych $X_1 = 1kN$ i $X_2 = 1kN$ oraz od obciążenia czynnego F, czyli należałoby sporządzić uprzednio wykresy $\bar{N}^{X_1=1}$, $\bar{N}^{X_2=1}$, $\bar{N}^F$, $\bar{T}^{X_1=1}$, $\bar{T}^{X_2=1}$, $\bar{T}^F$.

7. Kontrola poprawności uzyskanych rozwiązań ($\boldsymbol{M^F}$, $\boldsymbol{V^F}$, $\boldsymbol{N^F}$)

7.1 Kontrola statycznej dopuszczalności uzyskanych rozwiązań

* Aby sprawdzić czy rozwiązanie jest statycznie dopuszczalne m.in. należy :
- sprawdzić równowagę sił we wszystkich węzłach
- sprawdzić równowagę sił w prętach
- sprawdzić czy układ sił czynnych (obciążenie) i układ sił biernych (reakcje) tworzą zrównoważony układ sił

Poniżej sprawdzono jedynie równowagę sił w węźle C



$$\sum M_c = ? = 0$$
$$3.433kNm - 3,433kNm = 0,$$
$$\sum Z = ? = 0$$
$$-0.748kN * 0.8 - 3.479kN * 0.6 + 2.686kN = 0,$$
$$\sum X = ? = 0$$
$$0.748kN * 0.6 - 3.479kN * 0.8 + 2.333kN = 0,$$

Wniosek z przeprowadzonej kontroli statycznej dopuszczalności:

Otrzymane rozwiązania sił wewnętrznych w ramie SN od obciążenia czynnego jest statycznie dopuszczalne.

7.2 Kontrola kinematycznej dopuszczalności uzyskanych rozwiązań (M^F, V^F, N^F)

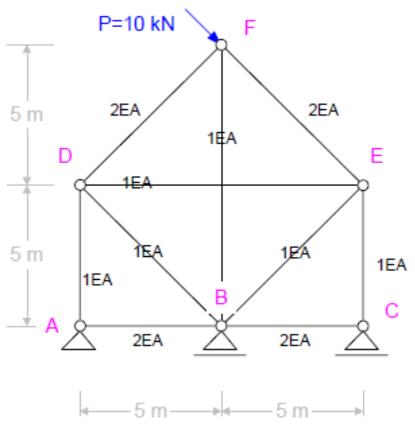
* Sprawdzenie czy wyliczone przemieszczenia w układzie zadanym będą zgodne z warunkami podparcia i ciągłości konstrukcji.

*Uwaga: kontrola kinematycznej dopuszczalności uzyskanego rozwiązania w przykładzie 1 zostanie przeprowadzona na wykładzie nr 7 po omówieniu tematu wyznaczania przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczalnych SN.

Przykład 2.

Należy wyznaczyć wykresy sił osiowych w kratownicy statycznie niewyznaczalnej (SN) i geometrycznie niezmiennej (GN) o schemacie statycznym przedstawionym na rysunku przedstawionym poniżej.
*źródło: wykład prof. Pawła Śniadego

Podaną na rysunku kratownicę rozwiązać metodą sił.

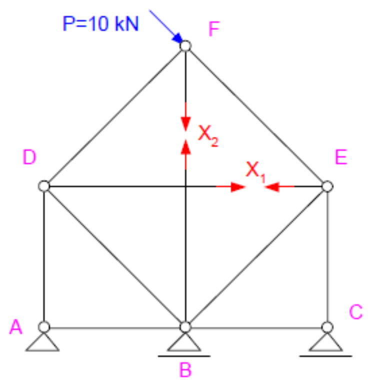


Określenie stopnia statycznej niewyznaczalności n_h :

r=4 p=10 w=6

$$n_h = r + p - 2w = 4 + 10 - 12 = 2$$

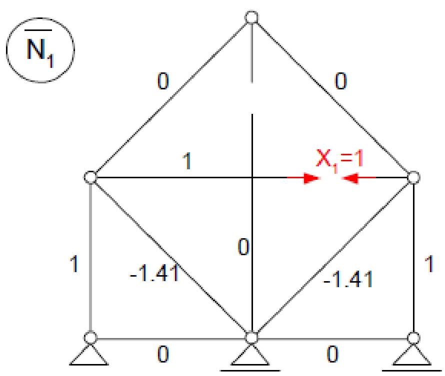
Dobranie układu podstawowego

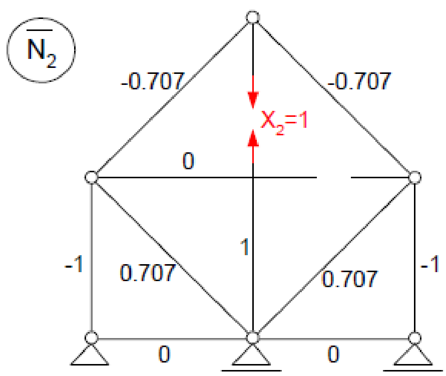


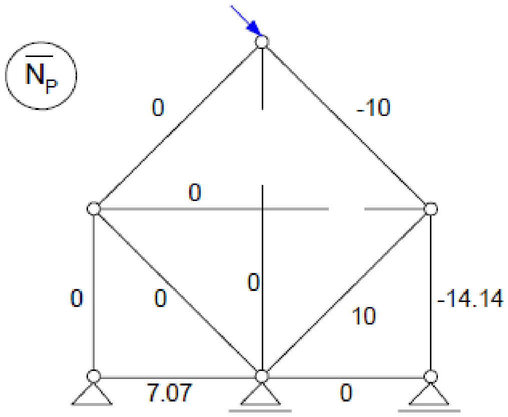
Przecinamy dwa pręty DE oraz BF (przecinamy ale nie wyrzucamy).

Przyjmuje się że mimo przecięcia pręty nadal pozostają proste.

Siły osiowe w układzie podstawowym







Obliczenie współczynników równań kanonicznych metody sił

$$\delta_{11} = \sum_k \frac{\overline{N}_{1k}{}^2 L_k}{EA_k} = \frac{48.275}{EA} \qquad \delta_{12} = \delta_{21} = \sum_k \frac{\overline{N}_{1k}\overline{N}_{2k} L_k}{EA_k} = \frac{-24.138}{EA} \qquad \delta_{22} = \sum_k \frac{\overline{N}_{2k}{}^2 L_k}{EA_k} = \frac{30.604}{EA}$$

$$\overline{\Delta}_{1P} = \sum_k \frac{\overline{N}_{1k}\overline{N}_{Pk} L_k}{EA_k} = \frac{-170.70}{EA} \qquad \overline{\Delta}_{2P} = \sum_k \frac{\overline{N}_{2k}\overline{N}_{2P} L_k}{EA_k} = \frac{145.70}{EA}$$

Układ równań kanonicznych metody sił i jego rozwiązanie :

$$48.275X_1 - 24.138X_2 - 170.70 = 0 \qquad X_1 = 1.908kN$$
$$-24.138X_1 + 30.604X_2 + 145.70 = 0 \qquad X_2 = -3.256kN$$

Wyznaczenie wykresu rzeczywistych sił osiowych oraz kontrola ciągłości konstrukcji. Siły w układzie niewyznaczalnym określono dla każdego pręta korzystając z zasady superpozycji :

$$N_P = \overline{N}_1 X_1 + \overline{N}_2 X_2 + \overline{N}_P$$