

WPROWADZENIE DO STATYKI BUDOWLI

układy statycznie wyznaczalne

„SB1”

materiały dydaktyczne

dla studentów Politechniki Wrocławskiej Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego

Opracowała dr hab. inż. Monika Podwórna, prof. uczelni

Wrocław, grudzień 2022 r

SPIS TREŚCI

SPIS TREŚCI	2
CZĘŚĆ 1 UKŁADY SIŁ	5
1. WPROWADZENIE	5
2. SIŁA NA PŁASZCZYŹNIE I W PRZESTRZENI.....	10
3. MOMENT NA PŁASZCZYŹNIE I W PRZESTRZENI.....	12
4. REDUKCJA UKŁADU SIŁ	17
5. WARUNKI RÓWNOWAGI UKŁADÓW SIŁ.....	38
6. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA.....	54
CZĘŚĆ 2 ANALIZA KINEMATYCZNA PŁASKICH USTROJÓW PRĘTOWYCH	59
1. WPROWADZENIE	59
2. SCHEMAT STATYCZNY	60
3. KINEMATYCZNA ANALIZA UKŁADÓW PŁASKICH	62
4. PRZYKŁADY ROZWIĄZANE.....	66
5. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA.....	80
CZĘŚĆ 3 SIŁY W PŁASKICH USTROJACH	83
1. WPROWADZENIE	83
2. SIŁY CZYNNNE	85
3. SIŁY BIERNE	86
4. SIŁY PRZEKROJOWE.....	87
5. SCHEMAT STATYCZNY	93
6. OGÓLNE ZASADY WYZNACZANIA SIŁ PRZEKROJOWYCH.....	94
7. SIŁY PRZEKROJOWE W PŁASKICH UKŁADACH PRĘTOWYCH SW	95
8. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA.....	119
CZĘŚĆ 4 ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH.....	127
1. ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH DLA CIAŁA SZTYWNEGO	127
2. MECHANIZM	130
3. ŚRODKI WZAJEMNEGO OBROTU TARCZ	130
4. PRZEMIESZCZENIA RZECZYWISTE I OBRÓCONE.....	131
5. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA.....	133
CZĘŚĆ 5 ŁUKI	134
SUPLEMENT ROZWIĄZANE PRZYKŁADY	144
1. BELKA PROSTA	144
2. BELKA WIELOPRZĘSŁOWA	146
3. RAMA PROSTA	149
4. RAMA ZŁOŻONA.....	152
5. RAMA Z KOMORĄ	153
6. TRÓJPRZEGUB Z PRĘTEM PARABOLICZNYM	157
7. KRATOWNICA	159
DODATKOWA LITERATURA KSIĄŻKOWA	162



„Aktywna Platforma Informacyjna e-scienceplus.pl”.

Materiał dydaktyczny pt. "SB1" został przygotowany z myślą o studentkach i studentach Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej jako pomoc w nauce przedmiotów pt. *Mechanika ogólna* oraz *Podstawy statyki budowli*. Jest to uzupełnione połączenie dwóch materiałów: skryptu z 2018r. pt. "PSB" oraz skryptu z 2022r. pt. "MO-układy sił".

Kontynuacją bieżącego materiału będzie skrypt z 2023r. pt. "SB2" jako pomoc do samodzielnej nauki przedmiotu pt. *Statyka budowli*, który jest rozwinięciem *Podstaw statyki budowli*, będącym dalszym ciągiem materiału *Mechaniki ogólnej* (zarówno na studiach stacjonarnych, jak i niestacjonarnych W-2 PWr).

SB1 składa się z 6 części:

1. Dowolne układy sił - płaskie i przestrzenne;
2. Analiza kinematyczna płaskich ustrojów;
3. Siły w płaskich ustrojach prętowych statycznie wyznaczalnych;
4. Zasada prac przygotowanych w płaskich ustrojach prętowych;
5. Łuki płaskie statycznie wyznaczalne.

Suplement zawiera rozwiązane płaskie układy prętowe statycznie wyznaczalne metodą analityczną oraz wybrane siły z wykorzystaniem zasady prac przygotowanych.

Oprócz powyższych skryptów dostępny jest również materiał dydaktyczny z 2017 r. pt. "PDB" jako pomoc do samodzielnej nauki przedmiotu pt. *Podstawy dynamiki budowli*.

Ponieważ myślą przewodnią skryptu jest tylko i wyłącznie pomoc w nauce statyki, większość zaprezentowanych układów wygląda "nieco sztucznie" w porównaniu z tymi, które spotyka inżynier w praktyce konstrukcyjnej.

Wszystkie skrypty wykonane są w ramach projektu pt.: **Atlas Zasobów Otwartej Nauki** AZON.

Wrocław, grudzień 2022 r

Monika Podwórna



projekt AZON

Statyka

jest działem mechaniki
zajmującym się badaniem równowagi statycznej układów obciążeń
i przekształcaniem tych układów.

Słowo STATYKA

łacińskie „statum” = stoję (nieruchomo).

greckie „στατός” -utrzymujący równowagę

statyka *z III blm* 1. «dział mechaniki, nauka o równowadze ciał poddanych działaniu sił»: Ze statyki oraz ze znanych doświadczeń mechanicznych, np. z wahadłem, wiemy, że ciało znajduje się w stanie równowagi, gdy jego środek ciężkości znajduje się najniżej. BUR. *Fiz. X, 22*. Dla techniki budowlanej najważniejszy jest dział statyki, dla techniki maszynowej — dział dynamiki. SIEKL. *Stat. 7*. Nie rozumiem dotychczas, na mocy jakiego prawidła statyki nie spadłem na ziemię — musiałem zapewne oburącz trzymać się kulbaki. LAM J. *Głowy I, 125*. Gabinet mechaniczny pełny rozmaitych modeli do statyki i hydrostatyki, mechaniki, rolnictwa etc. należących. STASZIC *Dzien. I, 283*.

2. «w znaczeniu ogólnym: równowaga, brak ruchu»: Romantycy i neoromantycy podkreślali dynamizm uczuć wyrażonych w muzyce, impresjonizm zaś przeciwnie, podkreśla statykę nastroju. ŁOB. *Muz. 299. // L*

⟨gr. statikós = utrzymujący równowagę⟩

*Słownik języka polskiego,
pod redakcją
Witolda Doroszewskiego
Wydawnictwo PWN 1969*

KODEKS HAMMURABIEGO



Ku przestrodze: (źródło: <https://web.archive.org/>)

§ 229.

Jeśli murarz obywatelowi dom zbudował, a pracy swej (odpowiednio) nie umocnił i dom zbudowany zawalił się i spowodował śmierć²⁶⁸ właściciela domu, murarz ten zostanie zabity;

²⁶⁸ *uštamit od mâtum* — „umrzeć”, a nie „zabić” (*dâkum*).

Użyty tu temat sprawczy (temat *Ś*) należy tłumaczyć dosł. „spowodować, że zmarł” => „spowodował śmierć”.

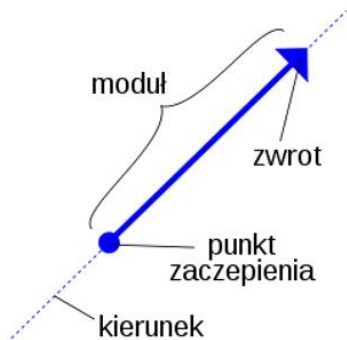
CZĘŚĆ PIERWSZA

UKŁADY SIŁ

1. WPROWADZENIE

Podstawowe pojęcia wektorowe:

(zob. M. Klasztorny, *Mechanika techniczna*.)



źródło: [Wektor – Wikipedia, wolna encyklopedia](#)

Dowolny **wektor** \vec{a} jest sumą trzech rzutów, pokazanych na rysunku poniżej.

Zapis analityczny wektora \vec{a} ma postać:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$$

lub

$$\vec{a} = \vec{a} = \vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z$$

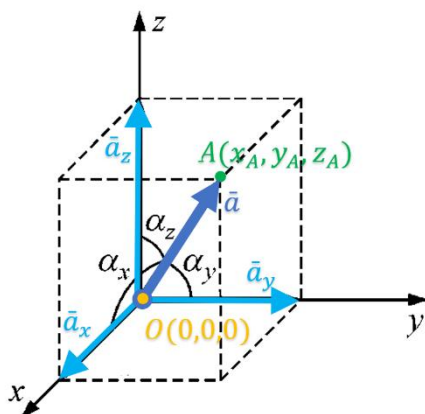
lub

$$\vec{a} = a_x \vec{e}_x + a_y \vec{e}_y + a_z \vec{e}_z$$

lub

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

gdzie a_x, a_y, a_z są składowymi wektora.



Składowe wektora są liczbami, które mogą być dodatnie, ujemne lub równe zero.

Jeżeli wektor (zob. rysunek) jest zaczepiony w punkcie $O(0,0,0)$, to składowe wektora są równe współrzędnym końcowego punktu wektora $A(x_A, y_A, z_A)$, tj.:

$$a_x = x_A - x_O = x_A - 0 = x_A,$$

$$a_y = y_A - y_O = y_A - 0 = y_A,$$

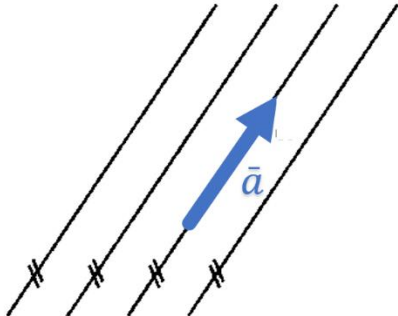
$$a_z = z_A - z_O = z_A - 0 = z_A.$$

Moduł (wartość) wektora \vec{a} jest zawsze liczbą dodatnią i wynosi

$$a = |\vec{a}| = |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

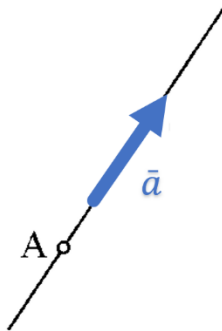
ponieważ wektor \vec{a} jest przekątną prostopadła rozpiętego na rzutach.

Wektor swobodny jest określony przez wartość, zwrot i kierunek oraz może być przesuwany równoległe. Wektor może być dowolnie obrany w przestrzeni. Wektory swobodne można równoległe do siebie przesuwać bez zmiany ich znaczenia.



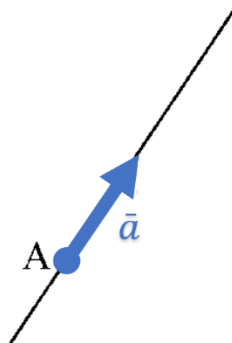
Przykład – wektor momentu pary sił.

Wektor liniowy jest określony przez wartość, zwrot i prostą działania.



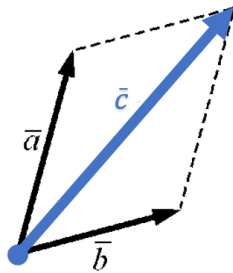
Przykład – wektor siły.

Wektor zaczepiony jest określony przez wartość, zwrot, prostą działania oraz punkt zaczepienia. Wektor, którego punkt początkowy musi znajdować się w ściśle określonym punkcie.



Przykład – wektor momentu względem punktu A.

Suma dwóch wektorów jest określona wzorami:



$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = c_x \bar{e}_x + c_y \bar{e}_y + c_z \bar{e}_z$$

gdzie

$$c_x = a_x + b_x$$

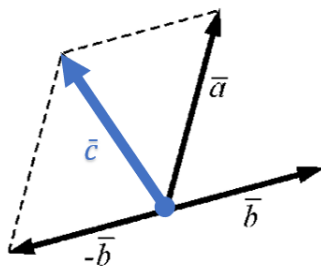
$$c_y = a_y + b_y$$

$$c_z = a_z + b_z$$

Wektor \bar{c} jest przekątną równoległoboku rozpiętego na wektorach \bar{a} i \bar{b} , gdzie

$$\bar{a} = a_x \bar{e}_x + a_y \bar{e}_y + a_z \bar{e}_z \text{ oraz } \bar{b} = b_x \bar{e}_x + b_y \bar{e}_y + b_z \bar{e}_z.$$

Różnica dwóch wektorów jest określona wzorami:



$$\bar{c} = \bar{a} - \bar{b} = \bar{a} + (-\bar{b}) = c_x \bar{e}_x + c_y \bar{e}_y + c_z \bar{e}_z$$

gdzie

$$c_x = a_x - b_x$$

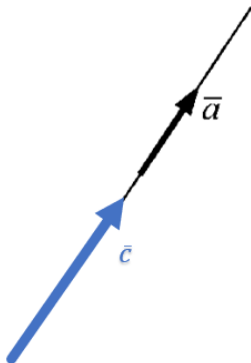
$$c_y = a_y - b_y$$

$$c_z = a_z - b_z$$

Wektor \bar{c} jest przekątną równoległoboku rozpiętego na wektorach \bar{a} i $(-\bar{b})$, gdzie

$$\bar{a} = a_x \bar{e}_x + a_y \bar{e}_y + a_z \bar{e}_z \text{ oraz } (-\bar{b}) = -b_x \bar{e}_x - b_y \bar{e}_y - b_z \bar{e}_z.$$

Mnożenie wektora przez skalar jest określone wzorami



$$\bar{c} = s \cdot \bar{a} = c_x \bar{e}_x + c_y \bar{e}_y + c_z \bar{e}_z$$

gdzie

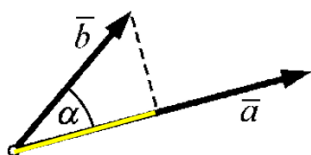
$$c_x = s a_x$$

$$c_y = s a_y$$

$$c_z = s a_z$$

Wektory \bar{a} oraz \bar{c} są kolinearne (współliniowe).

Iloczyn skalarny dwóch wektorów jest określony wzorem



$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = a \cdot b \cdot \cos \alpha$$

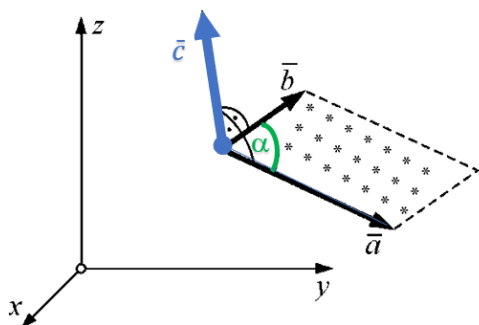
lub

$$s = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

Iloczyn skalarny dwóch wektorów jest równy modułowi pierwszego wektora pomnożonemu przez składową drugiego wektora na kierunek pierwszego wektora.

Wynik iloczynu to skalar. Iloczyn skalarny jest przemienny.

Iloczyn wektorowy dwóch wektorów jest określony wzorami



$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = c_x \vec{e}_x + c_y \vec{e}_y + c_z \vec{e}_z$$

gdzie

$$c_x = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} = a_y b_z - a_z b_y,$$

$$c_y = - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} = -(a_x b_z - a_z b_x) = a_z b_x - a_x b_z,$$

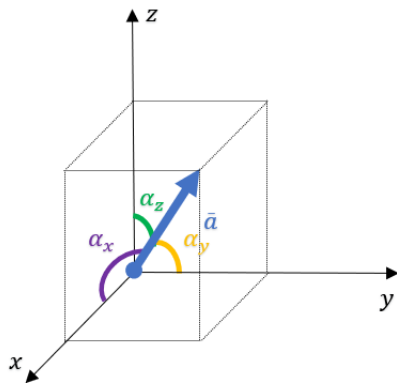
$$c_z = \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} = a_x b_y - a_y b_x.$$

W powyższych wzorach wykorzystano zapis wyznacznikowy i rozwinięcie Laplace'a według elementów pierwszego wiersza. W wyniku otrzymuje się wektor prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory \vec{a} oraz \vec{b} , o zwrocie zgodnym z **regułą prawej dłoni** (**regułą śruby prawoskrętnej**) i wartości równej polu równoległoboku rozpiętego na wektorach \vec{a} , \vec{b} , czyli

$$c = a \cdot b \cdot \sin \alpha.$$

Iloczyn wektorowy nie jest przemienny: $\vec{b} \times \vec{a} = -\vec{a} \times \vec{b}$

Cosinusy kierunkowe wektora \vec{a} wynoszą



$$\begin{aligned}\cos \alpha_x &= \cos \alpha = \frac{a_x}{a} \\ \cos \alpha_y &= \cos \beta = \frac{a_y}{a} \\ \cos \alpha_z &= \cos \gamma = \frac{a_z}{a}\end{aligned}$$

Istnieje zależność:

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1$$

Wersory są wektorami jednostkowymi, określającymi kierunek i uprzywilejowany zwrot rzutów wektora na osie.

Dowolnej osi u przyporządkowany jest wersor \vec{e}_u , którego składowe można obliczyć na podstawie wektora geometrycznego na tej osi, tj.:

$$\vec{\rho} = \rho_x \vec{e}_x + \rho_y \vec{e}_y + \rho_z \vec{e}_z$$

gdzie:

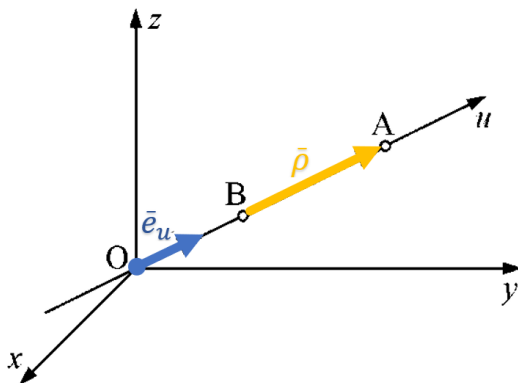
$$\rho_x = x_A - x_B,$$

$$\rho_y = y_A - y_B,$$

$$\rho_z = z_A - z_B,$$

$$\rho = \sqrt{\rho_x^2 + \rho_y^2 + \rho_z^2}.$$

Zapis analityczny wersora \vec{e}_u ma postać:



$$\vec{e}_u = e_{ux} \vec{e}_x + e_{uy} \vec{e}_y + e_{uz} \vec{e}_z,$$

gdzie:

$$e_{ux} = \frac{\rho_x}{\rho},$$

$$e_{uy} = \frac{\rho_y}{\rho},$$

$$e_{uz} = \frac{\rho_z}{\rho}.$$

2. SIŁA NA PŁASZCZYŹNIE I W PRZESTRZENI

Definicja:

(zob. W. Szcześniak, Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej. Statyka.)

Siła jest pochodną przestrzenną energii kinetycznej punktu materialnego. W mechanice teoretycznej znane są dwie definicje siły:

- definicja **Newtona**: jako pochodna pędu

$$\vec{P} = \frac{d(m\vec{v})}{dx}$$

zapis wektorowy

- definicja **Leibniza** w przypadku prostoliniowego ruchu punktu materialnego o stałej masie

$$P = \frac{d}{dx} \left(\frac{mv^2}{2} \right)$$

zapis skalarny

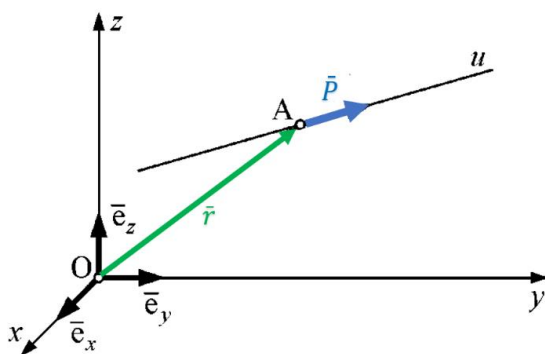
Siła jest pojęciem abstrakcyjnym, poznawalnym jedynie po skutkach swego działania.

Siła skupiona jest wektorem liniowym, tzn. jest określona przez prostą działania, moduł i zwrot. W praktyce, zwykle siłę „przesuwamy” do punktu lokacyjnego, który możemy wybrać dowolnie na jej prostej działania.

Przykład siły: siła ciężkości, siła bezwładności, siła hamowania, siła tarcia, ...

Jednostka siły: $1 \text{ N} = 1 \frac{\text{kg}\cdot\text{m}}{\text{s}^2}$.

2.1. UKŁAD 3D



Siła jest wektorem liniowym (osiowym), tzn. jest związana z określoną linią działania (osią lub prostą)

$$\vec{P} = P_x \vec{e}_x + P_y \vec{e}_y + P_z \vec{e}_z,$$

gdzie P_x, P_y, P_z to składowe siły.

Moduł (wartość) wektora siły wynosi

$$P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}.$$

Promień siły \vec{P} względem punktu $O(0,0,0)$ ma postać

$$\vec{r} = r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y + r_z \vec{e}_z$$

a jego składowe:

$$r_x = x_A, \quad r_y = y_A, \quad r_z = z_A;$$

gdzie $A(x_A, y_A, z_A)$ – dowolny punkt leżący na prostej działania siły u .

Cosinusy kierunkowe:

$$\cos \alpha_x = \frac{P_x}{P} = p_x; \quad \cos \alpha_y = \frac{P_y}{P} = p_y; \quad \cos \alpha_z = \frac{P_z}{P} = p_z.$$

$$\cos^2 \alpha_x + \cos^2 \alpha_y + \cos^2 \alpha_z = 1.$$

Równanie parametryczne osi działania siły:

$$x = x_A + tp_x,$$

$$y = y_A + tp_y,$$

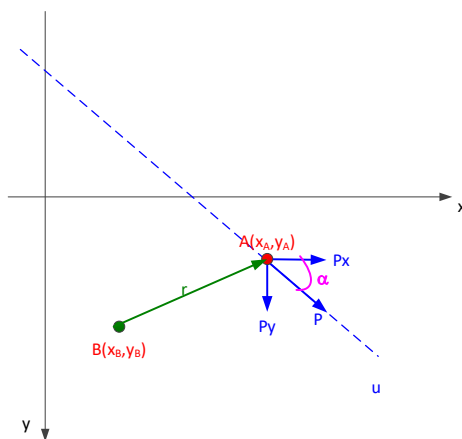
$$z = z_A + tp_z.$$

gdzie

t – parametr,

x_A, y_A, z_A – współrzędne dowolnego punktu A leżącego na prostej działania siły u ,

p_x, p_y, p_z – cosinusy kierunkowe wektora siły \vec{P} .

2.2. UKŁAD 2D

$A(x_A, y_A), B(x_B, y_B)$ – współrzędne punktów;

$\vec{P} = P_x \vec{e}_x + P_y \vec{e}_y$ – wektor siły;

P_x, P_y – składowe wektora siły;

$P = |\vec{P}| = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}$ – moduł (wartość) siły;

$\vec{r} = r_x \vec{e}_x + r_y \vec{e}_y$ – promień siły względem punktu B

$$r_x = x_A - x_B,$$

$$r_y = y_A - y_B$$

Siła na płaszczyźnie jest opisana przez 4 wielkości: $P_x,$

P_y, x_A, y_A albo P, α, x_A, y_A .

Kąt α nazywamy **kątem kierunkowym prostej działania siły**.

$$\frac{P_y}{P_x} = \operatorname{tg} \alpha$$

$$P_x = P \cos \alpha, \quad P_y = P \sin \alpha, \quad P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2}.$$

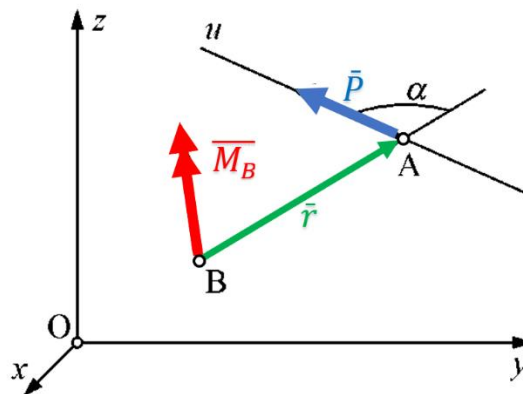
Siła jest wektorem liniowym, czyli można ją przesuwać wzdłuż osi działania, a punktem lokacyjnym może być dowolny punkt na tej osi.

Oś działania siły opisana jest przez

- wersor kierunkowy $\vec{e}_u = e_{ux} \vec{e}_x + e_{uy} \vec{e}_y$
- punkt lokacyjny $A(x_A, y_A)$.

$$e_{ux} = \frac{P_x}{P} = \cos \alpha, \quad e_{uy} = \frac{P_y}{P} = \sin \alpha, \quad |\vec{e}_u| = \sqrt{e_{ux}^2 + e_{uy}^2} = 1.$$

3. MOMENT NA PŁASZCZYŹNIE I W PRZESTRZENI



3.1. UKŁAD 3D

Moment siły względem punktu B jest iloczynem wektorowym $\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{P}$.

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że:

- wektor \vec{M}_B jest prostopadły do płaszczyzny utworzonej przez wektory \vec{r} , \vec{P} ;
- ma zwrot zgodny z regułą prawej dłoni;
- ma wartość równą polu równoległoboku rozpiętego na wektorach \vec{r} , \vec{P} , tzn. $M_B = rP \sin \alpha$;
- jest wektorem zaczepionym w punkcie B;
- wektor \vec{M}_B nie zależy od wyboru punktu A na prostej u .



W przestrzeni możemy skorzystać z zapisu wyznacnikowego iloczynu wektorowego:

$$\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{P} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = M_{Bx}\vec{e}_x + M_{By}\vec{e}_y + M_{Bz}\vec{e}_z$$

składowe momentu:

$$\begin{aligned} M_{Bx} &= P_z r_y - P_y r_z \\ M_{By} &= P_x r_z - P_z r_x \\ M_{Bz} &= P_y r_x - P_x r_y \end{aligned}$$

Wartość momentu \vec{M}_B wynosi $M_B = \sqrt{M_{Bx}^2 + M_{By}^2 + M_{Bz}^2}$.

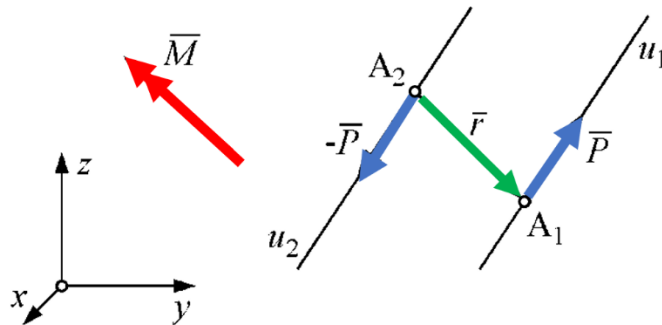
Jednostka momentu: 1 Nm.

$$1 \text{ dN} \cdot \text{m} = 10 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$1 \text{ kN} \cdot \text{m} = 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

$$1 \text{ MN} \cdot \text{m} = 10^6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Parę sił nazywamy dwie siły o równych wartościach i przeciwnych zwrotach, leżące na prostych równoległych.

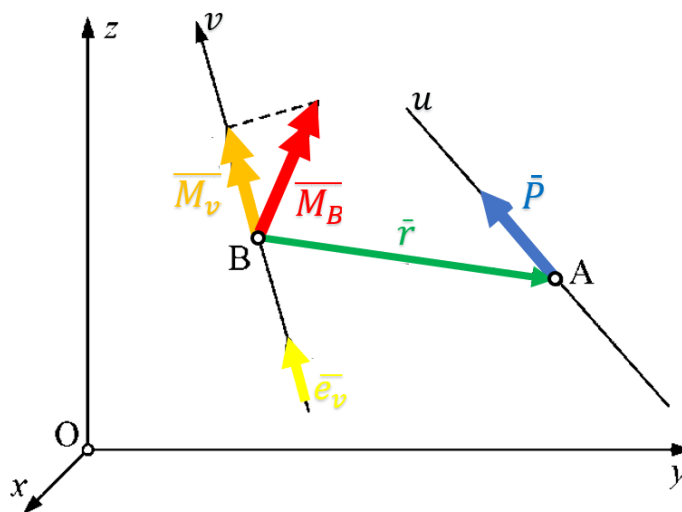


Moment pary sił jest wektorem swobodnym, prostopadłym do płaszczyzny utworzonej przez parę sił, o zwrocie zgodnym z regułą prawej dłoni, określonym jako iloczyn wektorowy $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{P}$.

Moment nie zależy od wyboru punktów A_1, A_2 na prostych u_1, u_2 .

Moment siły \vec{P} względem dowolnej osi v jest równy rzutowi na oś v momentu siły \vec{P} względem punktu B , leżącego na prostej v .

Wynik nie zależy od wyboru punktu A na prostej działania siły \vec{P} (u), ani od wyboru punktu B na osi v .



Składowa momentu na oś v wynosi:

$$M_v = \vec{M}_B \cdot \vec{e}_v = (\vec{r} \times \vec{P}) \cdot \vec{e}_v = \begin{vmatrix} e_{vx} & e_{vy} & e_{vz} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix},$$

a wektor momentu \vec{M}_v :

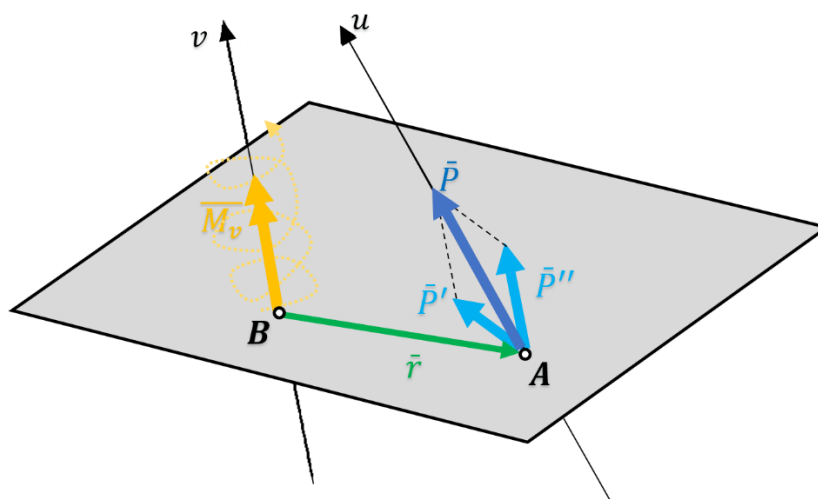
$$\vec{M}_v = M_v \vec{e}_v = (M_v e_{vx}) \vec{e}_x + (M_v e_{vy}) \vec{e}_y + (M_v e_{vz}) \vec{e}_z,$$

gdzie $\vec{e}_v = e_{vx} \vec{e}_x + e_{vy} \vec{e}_y + e_{vz} \vec{e}_z$ jest wersorem osi v .

Twierdzenie:

\vec{M}_v - moment siły \vec{P} względem osi v - jest równy momentowi rzutu siły \vec{P} na płaszczyznę prostopadłą do osi v (na rysunku \vec{P}'), względem punktu przecięcia płaszczyzny przez oś v (na rysunku - punkt B).

umożliwia „szybkie” liczenie momentu siły względem osi x lub y lub z , ze wzoru $\pm Pa$

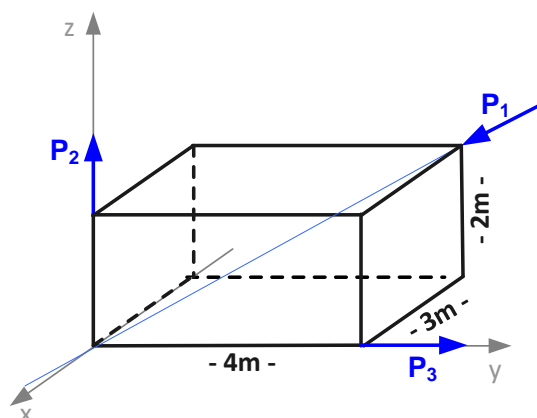


Interpretacje (!!!!!)

1. Moment siły \vec{P} leżącej na prostej $u \parallel v$, względem osi v , jest równy 0.
2. Moment siły \vec{P} leżącej na prostej u przecinającej oś v , względem osi v jest równy 0.
3. Składowe momentu siły \vec{P} względem początku układu współrzędnych są równe momentom tej siły względem osi x, y, z .

Zadanie do rozwiązania.

1. Ile wynoszą składowe wektora \vec{P}_1 . 2. Ile wynosi moment względem początku układu współrzędnych (zob. rysunek)? Dane: $P_1 = 10\sqrt{29}$ kN, $P_2 = P_3 = 10$ kN



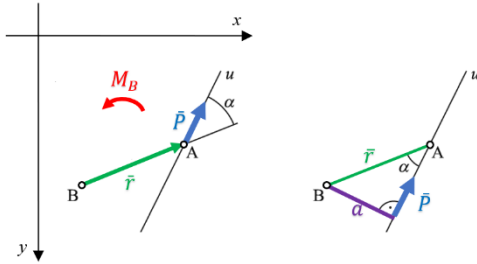
Odpowiedź: 1. $\vec{P}_1 = (30, -40, -20)$ [kN]; 2. $\vec{M}_0 = (0, 0, 0)$.

3.2. UKŁAD 2D

Momentem siły \vec{P} względem punktu B nazywamy wektor $\vec{M}_B = \vec{r} \times \vec{P}$.

Z definicji iloczynu wektorowego wynika, że moment \vec{M}_B jest wektorem prostopadłym do płaszczyzny xy , o zwrocie zgodnym z regułą prawej dłoni i wartości $M_B = rP \sin \alpha$

$$M_B = P(r \sin \alpha) = Pa$$



gdzie

a - ramię siły \vec{P} względem punktu B .

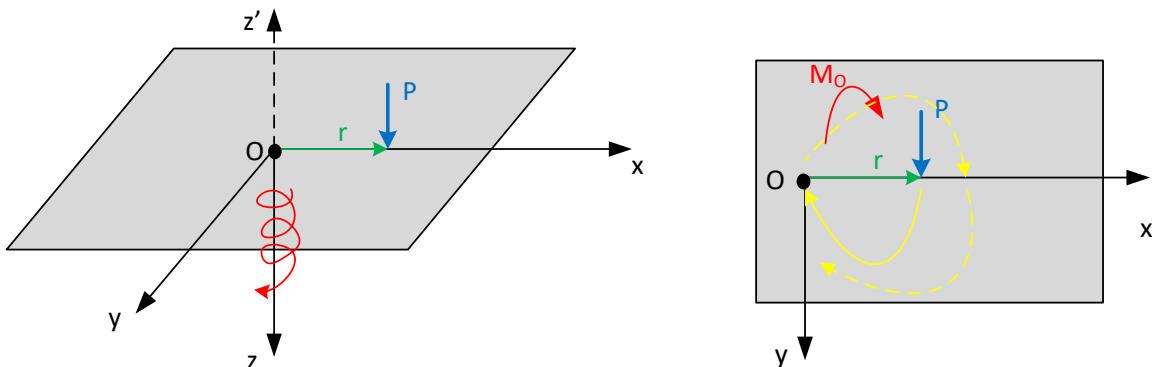
Zapis analityczny momentu \vec{M}_B ma postać:

$$\vec{M}_B = M_{Bz} \vec{e}_z, \text{ gdzie } M_{Bz} = M_B = \pm Pa.$$

Wartość momentu M_B nie zależy od wyboru punktu A na prostej działania siły \vec{P} .

Znak momentu zależy od przyjętego układu współrzędnych.

Przykład dodatniego znaku momentu w prawoskrętnym układzie współrzędnych xyz :

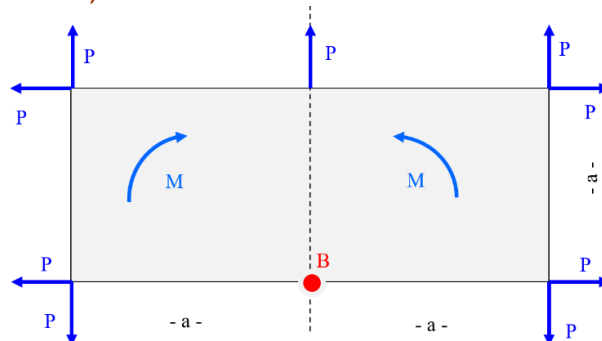


Na powyższym rysunku **moment względem punktu O** jest momentem dodatnim ($M_O = +Pr$); proszę zwrócić uwagę, że **wektor promienia \vec{r}** jest prostopadły do **wektora siły \vec{P}** , gdyż jest momentem prawoskrętnym w układzie prawoskrętnym xy .

Zadanie do rozwiązania.

Ile wynosi moment względem punktu B (zob. rysunek)?

Dane: $M = 10 \text{ kNm}$, $P = 10 \text{ kN}$, $a = 2 \text{ m}$.



Odpowiedź: $M_B = 0 \text{ kNm}$.

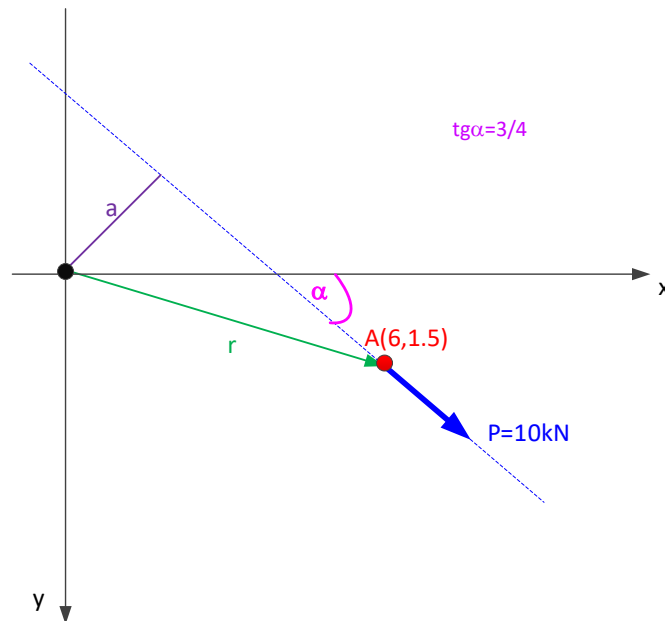


Zadanie do rozwiązania.

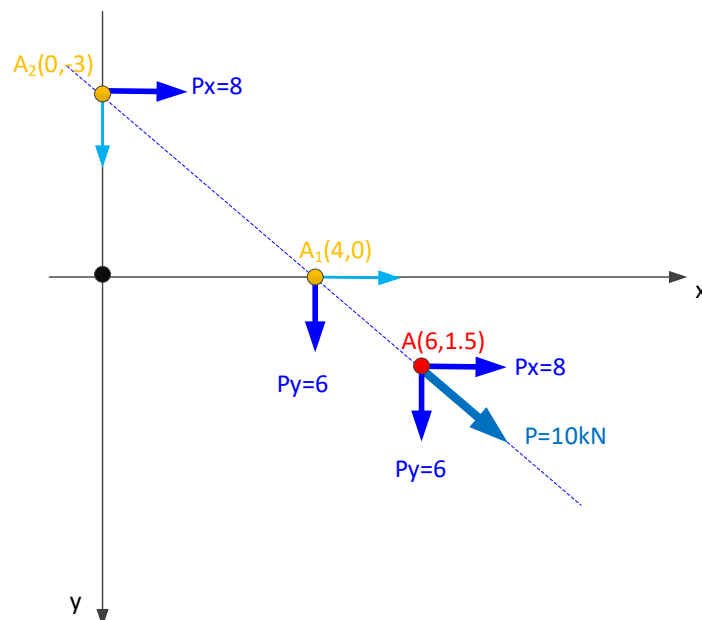
1. Ile wynoszą składowe wektora \vec{P} .

2. Ile wynosi moment względem początku układu współrzędnych (zob. rysunek)?

Dane: $P = 10 \text{ kN}$, $A(6,1.5) \text{ [m]}$, $\text{tg}\alpha = 3/4$.



Podpowiedź – siła jest wektorem liniowym



Odpowiedź:

1. $\vec{P} = (8, 6) \text{ [kN]}$;

2. $M_O = 24 \text{ kNm}$.

4. REDUKCJA UKŁADU SIŁ

Dowolny układ materialny po oswobodzeniu go od więzów wraz z działającymi na niego obciążeniami czynnymi (zewnętrznymi), biernymi (reakcjami więzów) oraz siłami bezwładności d'Alembetra możemy zastąpić układem materialnym, na który działają tylko wektor główny i moment główny. (zob. Wacław Szcześniak, *Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej. Statyka. OWPW, Warszawa 1999*).

Siłą ogólną (główną, zredukowaną) układu zredukowanego do punktu nazywamy sumę wektorową sił działającą na osi, która przechodzi przez punkt O .

Momentem ogólnym (głównym, zredukowanym) układu zredukowanego do punktu nazywamy sumę wektorową momentów sił względem bieguna O .

Wyróżnik układu sił (niezmiennik układu) jest iloczynem skalarnym wektora siły ogólnej i wektora momentu ogólnego, jego wartość nie zależy od wyboru bieguna redukcji.

W układzie płaskim wyróżnik wynosi 0.



Przypadki redukcji układu sił:			
Siła ogólna \vec{S}	Moment ogólny \vec{M}_O	Wyróżnik układu w	Wynik redukcji
$\neq \vec{0}$	$\neq \vec{0}$	$\neq 0$	Zwichrowany układ 3D
$\neq \vec{0}$	$\neq \vec{0}$	$= 0$	Istnieje wypadkowa, której położenie należy wyznaczyć
$\neq \vec{0}$	$= \vec{0}$	$= 0$	Istnieje wypadkowa; O jest jednym z punktów linii centralnej
$= \vec{0}$	$\neq \vec{0}$	$= 0$	Para sił
$= \vec{0}$	$= \vec{0}$	$= 0$	Układ jest w równowadze

Jeżeli dwa układy sił zredukowane do jednego dowolnego bieguna mają jednakową siłę ogólną i moment ogólny, to **układy te są równoważne**.

Układy równoważne mają jednakowy wyróżnik.

Układ, którego suma ogólna i moment ogólny są równe zero - **układ równoważny zeru**.

Jeżeli dwa układy sił zredukowane do jednego dowolnego bieguna mają jednakowe co do modułu, ale odwrotnie skierowane siły ogólne oraz mają jednakowe co do modułu, ale odwrotnie skierowane momenty ogólne, to **układy te są równoważące się**.

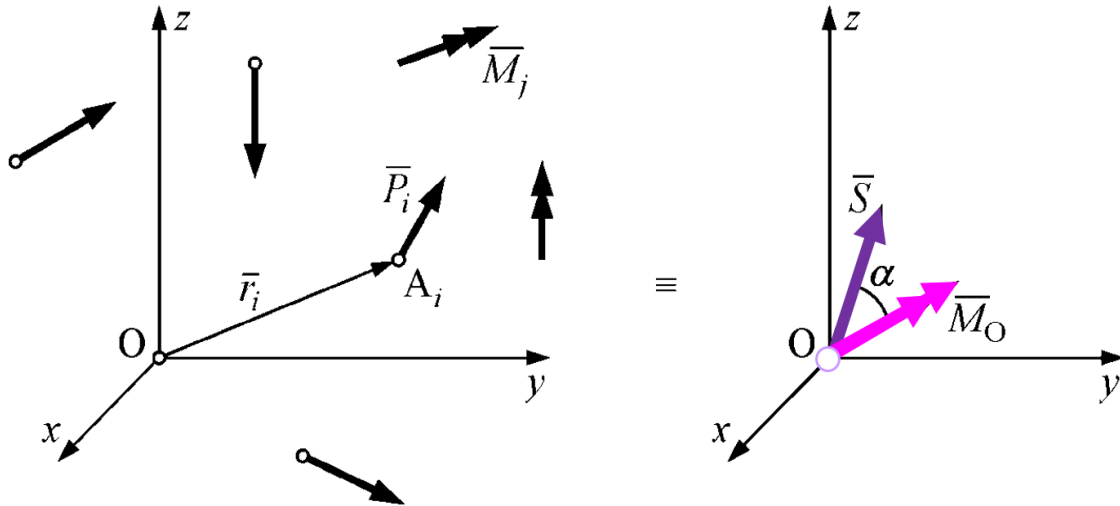
Układy równoważące się mają jednakowy wyróżnik.

Jeżeli dwa układy sił zredukowane do dowolnego bieguna ma siłę ogólną równą zero i moment ogólny równy zero, to **układ jest zrównoważony (układ jest w równowadze)**.

Wyróżnik układu zrównoważonego jest równy zero.

4.1. UKŁAD 3D

Układ składa się ze zbioru sił $\bar{P}_i = P_{ix}\bar{e}_x + P_{iy}\bar{e}_y + P_{iz}\bar{e}_z$ ($i = 1, 2, \dots, n$) działających wzdłuż prostych o punktach lokacyjnych $A_i(x_{Ai}, y_{Ai}, z_{Ai})$ i/lub ze zbioru momentów par sił $\bar{M}_j = M_{jx}\bar{e}_x + M_{jy}\bar{e}_y + M_{jz}\bar{e}_z$ ($j = 1, 2, \dots, m$).



Układ redukujemy wstępnie do wybranego punktu, zwykle do początku układu współrzędnych O . W wyniku otrzymujemy siłę ogólną \bar{S} oraz moment ogólny \bar{M}_O .

Siła ogólna

$$\bar{S} = \sum_{i=1}^n P_i = S_x\bar{e}_x + S_y\bar{e}_y + S_z\bar{e}_z,$$

gdzie

$$S_x = \sum_{i=1}^n P_{ix},$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n P_{iy},$$

$$S_z = \sum_{i=1}^n P_{iz}.$$

Moment ogólny

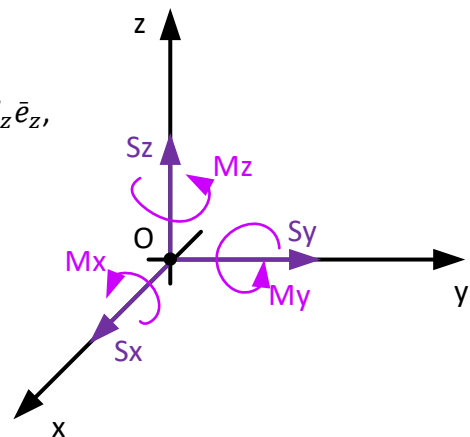
$$\bar{M}_O = \sum_{i=1}^n \bar{r}_i \times \bar{P}_i + \sum_{j=1}^m \bar{M}_j = M_x\bar{e}_x + M_y\bar{e}_y + M_z\bar{e}_z,$$

gdzie

$$M_x = \sum_{i=1}^n (P_{iz}y_{Ai} - P_{iy}z_{Ai}) + \sum_{j=1}^m M_{jx},$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n (P_{ix}z_{Ai} - P_{iz}x_{Ai}) + \sum_{j=1}^m M_{jy},$$

$$M_z = \sum_{i=1}^n (P_{iy}x_{Ai} - P_{ix}y_{Ai}) + \sum_{j=1}^m M_{jz}.$$



Następnie badamy **wyróżnik układu**

$$w = \bar{S} \cdot \bar{M}_O = S_x M_x + S_y M_y + S_z M_z.$$

Przypadki redukcji układów sił:**Jeżeli:**

Siła ogólna \vec{S}	Moment ogólny \vec{M}_O	Wyróżnik układu w	Wynik
$= \vec{0}$	$= \vec{0}$	$= \vec{0}$	Układ jest w równowadze

$$\vec{S} = 0,$$

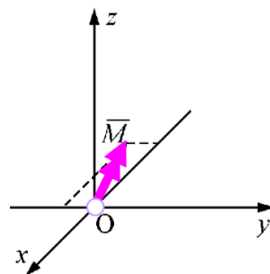
$$\vec{M}_O = 0,$$

to oczywiście, że wyróżnik $w = \vec{S} \cdot \vec{M}_O = \vec{0} \cdot \vec{0} = 0$.

Siły wzajemnie się równoważą.

Jeżeli:

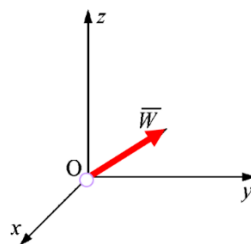
Siła ogólna \vec{S}	Moment ogólny \vec{M}_O	Wyróżnik układu w	Wynik
$= \vec{0}$	$\neq \vec{0}$	$= \vec{0}$	Para sił



Układ redukuje się do pary sił o momencie \vec{M} , który jest wektorem swobodnym.

Jeżeli:

Siła ogólna \vec{S}	Moment ogólny \vec{M}_O	Wyróżnik układu w	Wynik
$\neq \vec{0}$	$= \vec{0}$	$= \vec{0}$	Istnieje wypadkowa Jednym z punktów lokacyjnych wektora wypadkowej jest początek układu współrzędnych



$$\text{Wyróżnik } w = \vec{S} \cdot \vec{M}_O = S_x M_x + S_y M_y + S_z M_z = S_x \cdot 0 + S_y \cdot 0 + S_z \cdot 0 = 0.$$

Wektor siły ogólnej jest wektorem wypadkowej:

$$\vec{S} = \vec{W} \quad \Rightarrow \quad \vec{W} = W_x \vec{e}_x + W_y \vec{e}_y + W_z \vec{e}_z,$$

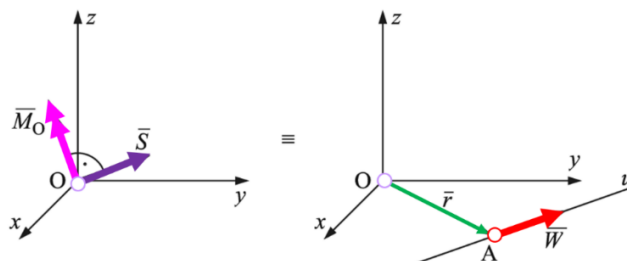
$$W_x = S_x,$$

$$W_y = S_y,$$

$$W_z = S_z.$$

Jeżeli:

Siła ogólna \vec{S}	Moment ogólny \vec{M}_O	Wyróżnik układu w	Wynik
$\neq \vec{0}$	$\neq \vec{0}$	$= \vec{0}$	Istnieje wypadkowa, której położenie należy wyznaczyć



Wyróżnik $w = \vec{S} \cdot \vec{M}_O = S_x M_x + S_y M_y + S_z M_z = 0$.

Redukując nieznaną siłę \vec{W} do punktu O , otrzymuje się: $\vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{W}$.

Należy pamiętać, że $\vec{W} = \vec{S} \Rightarrow \vec{r} \times \vec{S} = \vec{M}_O$.

W zapisie jawnym równanie wektorowe $\vec{r} \times \vec{S} = \vec{M}_O$ ma postać

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_A & y_A & z_A \\ S_x & S_y & S_z \end{vmatrix} = M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y + M_z \vec{e}_z$$

Otrzymuje się nieoznaczony układ równań z niewiadomymi x_A, y_A, z_A :

$$\begin{cases} S_z y_A - S_y z_A = M_x \\ S_x z_A - S_z x_A = M_y \\ S_y x_A - S_x y_A = M_z \end{cases}$$

Jedną z niewiadomych przyjmujemy dowolnie.

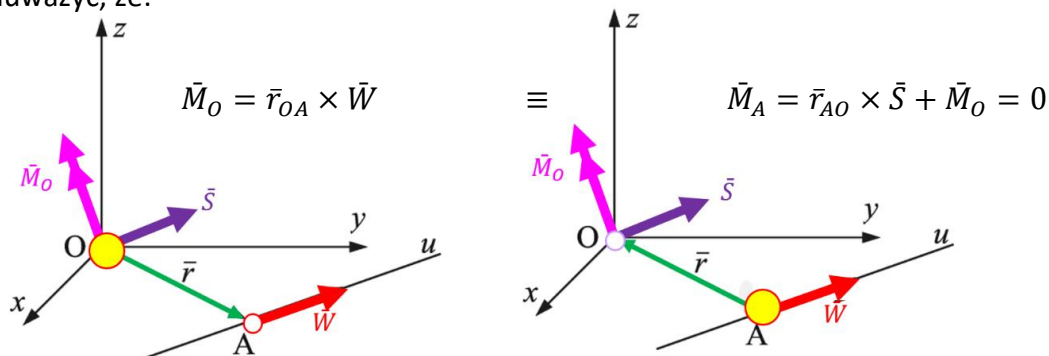
Jeśli $S_x \neq 0$, to jedno z rozwiązań ma postać: $x_A = 0, \quad y_A = -\frac{M_z}{S_x}, \quad z_A = \frac{M_y}{S_x}$.

Jeśli $S_y \neq 0$, to można przyjąć $y_A = 0$ i rozwiązać układ.

Jeśli $S_z \neq 0$, to można przyjąć $z_A = 0$ i rozwiązać układ.

Jest nieskończenie wiele rozwiązań, bo jest nieskończenie wiele punktów na prostej u działania wypadkowej (**linii centralnej**).

Należy zauważyć, że:

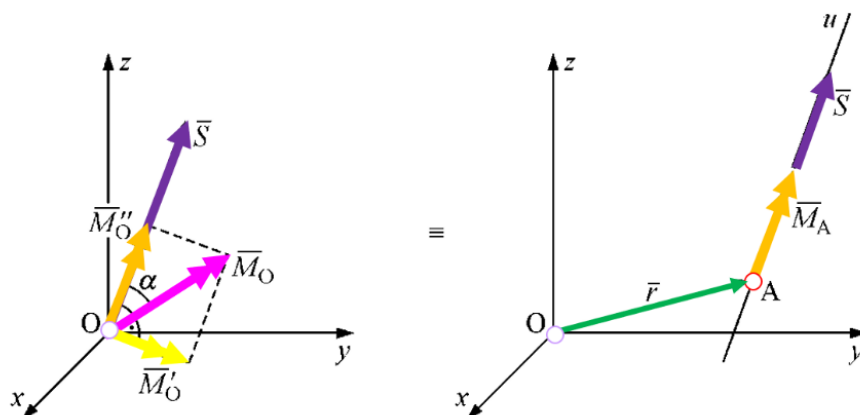


gdzie:

$$\vec{S} = \vec{W}, \quad \vec{r} = \vec{r}_{OA} = -\vec{r}_{AO}$$

Jeżeli:

Siła ogólna \vec{S}	Moment ogólny \vec{M}_O	Wyróżnik układu w	Wynik
$\neq \vec{0}$	$\neq \vec{0}$	$\neq \vec{0}$	Zwichrowany układ 3D



Kolinearne wektory \vec{S} , \vec{M}_A nazywamy skrętnikiem. **Skrętnik** jest dowodem jednoznaczności zagadnienia redukcji przestrzennego dowolnego układu obciążeń.

Wynik nie zależy od wyboru punktu A na linii centralnej u.

Obliczenia:

$$w = \vec{S} \cdot \vec{M}_O = S_x M_x + S_y M_y + S_z M_z \neq 0,$$

$$\text{kwadrat wartości siły ogólnej: } S^2 = S_x^2 + S_y^2 + S_z^2$$

$$\text{wektor } \vec{M}_O \text{ jako suma wektorów } \vec{M}_O = \vec{M}'_O + \vec{M}''_O$$

$$\text{liczba } c = \frac{w}{S^2}$$

$$\text{moment } \vec{M}''_O, \text{ jako składowa wektora } \vec{M}_O: \vec{M}''_O = \vec{M}_A = M_{Ax} \vec{e}_x + M_{Ay} \vec{e}_y + M_{Az} \vec{e}_z$$

$$\text{gdzie } M_{Ax} = c S_x,$$

$$M_{Ay} = c S_y,$$

$$M_{Az} = c S_z.$$

$$\text{momentu } \vec{M}'_O, \text{ jako składowa wektora } \vec{M}_O: \vec{M}'_O = M'_x \vec{e}_x + M'_y \vec{e}_y + M'_z \vec{e}_z.$$

$$\vec{M}_O = \vec{M}'_O + \vec{M}''_O \rightarrow \vec{M}'_O = \vec{M}_O - \vec{M}''_O, \text{ więc:}$$

$$M'_x = M_x - M_{Ax},$$

$$M'_y = M_y - M_{Ay},$$

$$M'_z = M_z - M_{Az}.$$

współrzędne punktu A:

$$\vec{r} \times \vec{S} = \vec{M}'_O \Rightarrow \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_A & y_A & z_A \\ S_x & S_y & S_z \end{vmatrix} = M'_x \vec{e}_x + M'_y \vec{e}_y + M'_z \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} S_z y_A - S_y z_A = M'_x \\ S_x z_A - S_z x_A = M'_y \\ S_y x_A - S_x y_A = M'_z \end{cases}$$

Nieoznaczony układ równań rozwiązujemy analogicznie jak w przypadku wypadkowej.

Jeśli $S_x \neq 0$, to jedno z rozwiązań ma postać

$$x_A = 0, \quad y_A = -\frac{M'_z}{S_x}, \quad z_A = \frac{M'_y}{S_x}.$$

Jeśli $S_y \neq 0$, to można przyjąć $y_A = 0$ i rozwiązać układ, czyli

$$x_A = \frac{M'_z}{S_y}, \quad y_A = 0, \quad z_A = -\frac{M'_x}{S_y}.$$

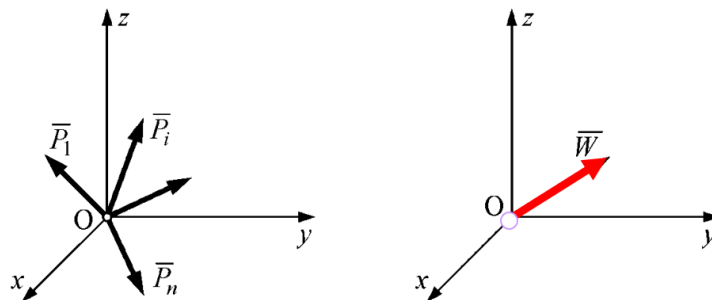
Jeśli $S_z \neq 0$, to można przyjąć $z_A = 0$ i rozwiązać układ, czyli

$$x_A = -\frac{M'_y}{S_z}, \quad y_A = \frac{M'_x}{S_z}, \quad z_A = 0.$$

Przypadki szczególne:

Przestrzenny zbieżny układ sił

Rozpatrujemy zbiór sił zbieżnych w punkcie O .

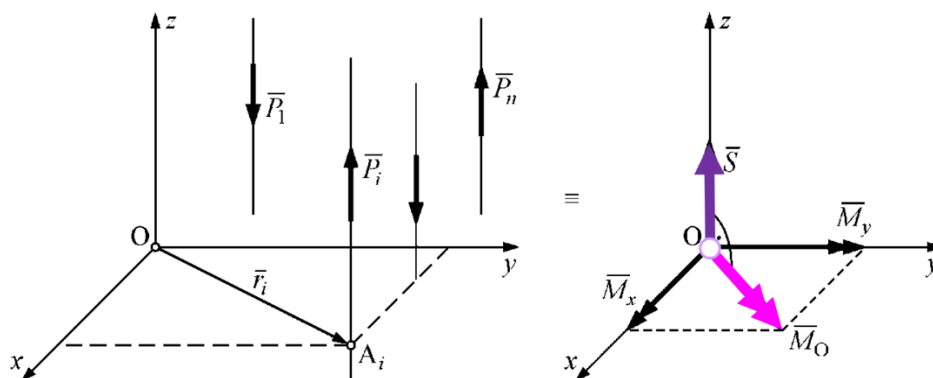


Obieramy początek układu współrzędnych xyz w punkcie zbieżności sił.

Jeżeli, siła ogólna jest różna od zera, to układ ten redukuje się do wypadkowej o linii działania przechodzącej przez punkt zbieżności.

Przestrzenny równoległy układ sił

Rozpatrujemy zbiór sił równoległych do dowolnej osi z .



Obieramy układ współrzędnych z osią, która jest równoległa do osi z , np. oś z .

Redukując ten układ do punktu O , otrzymujemy

siłę ogólną \vec{S} :

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n P_i = S_z \vec{e}_z = (0, 0, S_z);$$

gdzie

$$S_z = \sum_{i=1}^n P_{iz},$$

moment ogólny \vec{M}_O :

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ x_{Ai} & y_{Ai} & 0 \\ 0 & 0 & P_{iz} \end{vmatrix} = M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y = (M_x, M_y, 0);$$

gdzie

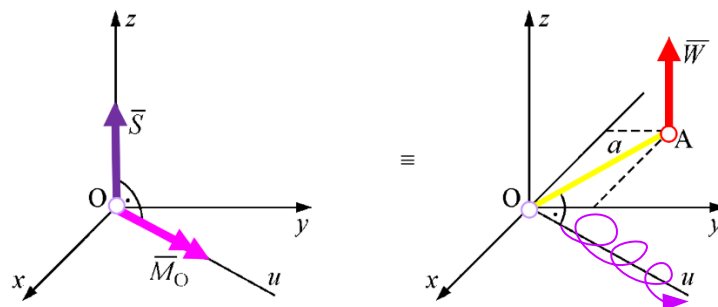
$$M_x = \sum_{i=1}^n (P_{iz} y_{Ai}),$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n (-P_{iz} x_{Ai}).$$

Wynik \vec{S} , \vec{M}_O jest pośrednim wynikiem redukcji.

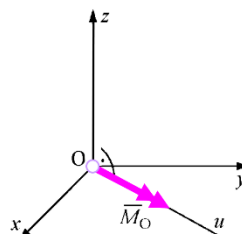
⇒ Jeśli $\vec{S} \neq \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, to można znaleźć taki biegun redukcji $A(x_A, y_A, 0)$, że układ redukuje się do **wypadkowej** \vec{W} .

$$M_O = W \cdot a = S \cdot a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{M_O}{S} = \frac{M_O}{|S_z|}.$$



Ramię a należy tak odłożyć, aby otrzymać właściwy zwrot momentu \vec{M}_O .

⇒ Jeśli $\vec{S} = \vec{0}$, $\vec{M}_O \neq \vec{0}$, to układ redukuje się do pary sił o momencie $\vec{M} = \vec{M}_O$.



Przykład rozwiązany.

Zredukować zadany układ sił (zob. rysunek)

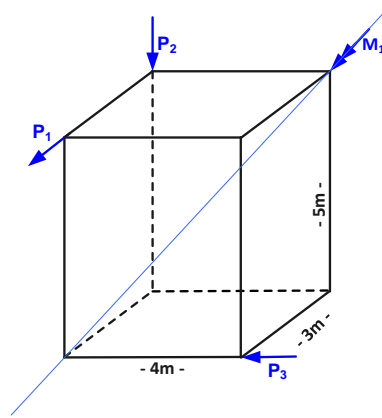
Dane:

$$P_1 = 10 \text{ kN,}$$

$$P_2 = 2 \text{ kN,}$$

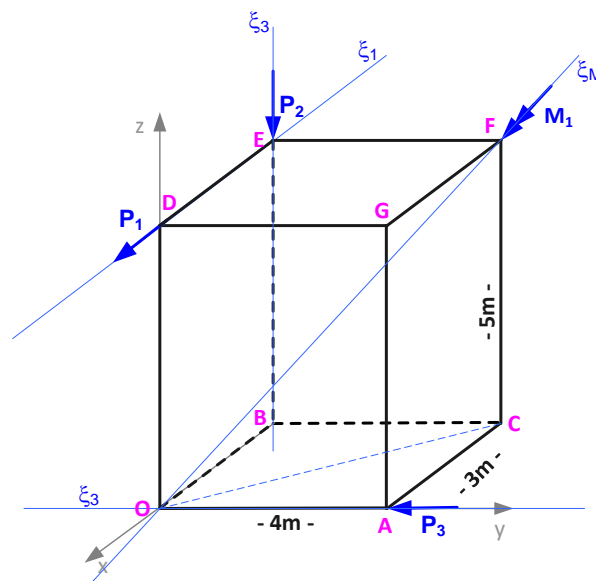
$$P_3 = 1 \text{ kN,}$$

$$M_1 = 5\sqrt{2} \text{ kNm.}$$



1. Przyjęcie układu współrzędnych xyz

np.



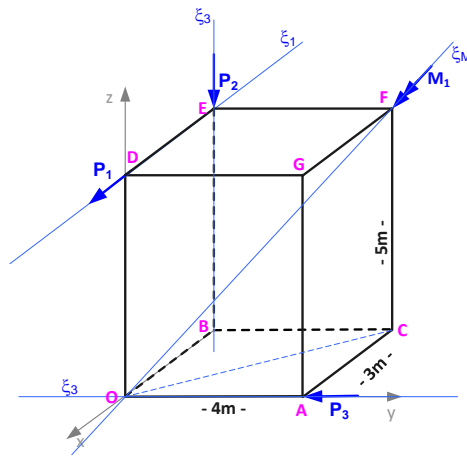
2. Zapis wektorowy obciążeń

$$P_1 = 10 \text{ kN}$$

$$P_2 = 2 \text{ kN}$$

$$P_3 = 1 \text{ kN}$$

$$M_1 = 5\sqrt{2} \text{ kNm}$$



2.1. Moment $M = 5\sqrt{2} \text{ kNm}$

$$\vec{M}_1 = (3, -4, -5) \text{ [kNm]}$$

I sposób:

$$\vec{FO} = (3, -4, -5) \text{ [m]},$$

$$|\vec{FO}| = \sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-5)^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2},$$

$$\vec{e}_M = \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{-4}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{5\sqrt{2}} \right)$$

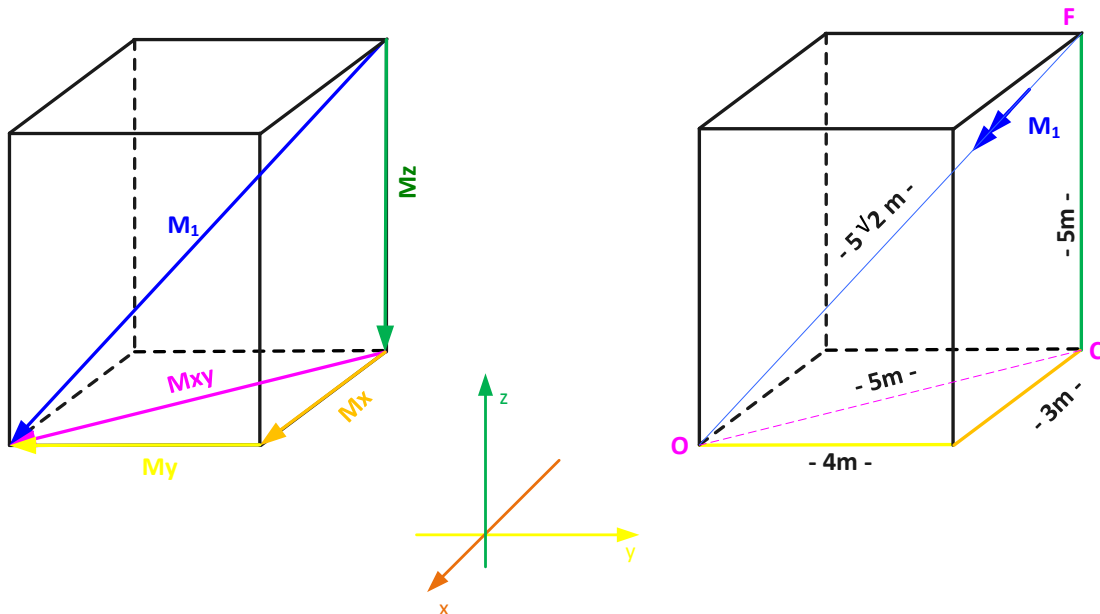
$$\vec{M}_1 = M_1 \cdot \vec{e}_M = 5\sqrt{2} \cdot \left(\frac{3}{5\sqrt{2}}, \frac{-4}{5\sqrt{2}}, \frac{-5}{5\sqrt{2}} \right) = (3, -4, -5) \text{ [kNm]}$$

II sposób:

korzystamy z proporcji boków:

$$M_z = M_{xy} = \frac{5 \cdot M_1}{5\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot 5\sqrt{2}}{5\sqrt{2}} = 5; \quad M_x = \frac{3 \cdot M_{xy}}{5} = \frac{3 \cdot 5}{5} = 3; \quad M_y = \frac{4 \cdot M_{xy}}{5} = \frac{4 \cdot 5}{5} = 4;$$

a następnie porównujemy zwroty wektora ze zwrotami osi



$$\vec{M}_1 = (3, -4, -5) \text{ [kNm]}$$

2.2. $P_1 = 10 \text{ kN}$

I sposób:

$$\vec{P}_1 = (10, 0, 0) \text{ [kN]}$$

Punkty prostej ξ_1 - prostej działania siły \vec{P}_1 to:

$$E = (-3, 0, 5), D = (0, 0, 5),$$

$$\vec{ED} = (3, 0, 0) \text{ [m]}$$

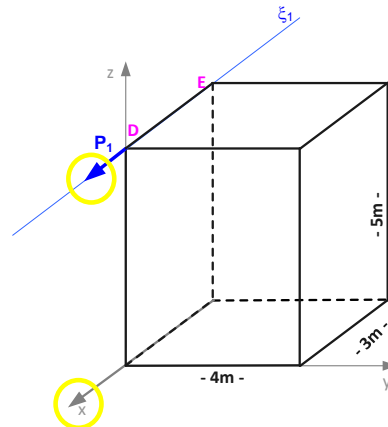
$$|\vec{ED}| = 3$$

$$\vec{e}_{\xi_1} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{P}_1 = P_1 \cdot \vec{e}_{\xi_1} = (10, 0, 0) \text{ [kN]}$$

II sposób:

porównujemy krawędzie i zwroty z odpowiednimi osiami



2.3. $P_2 = 2 \text{ kN}$

$$\vec{P}_2 = (0, 0, -2) \text{ [kN]}$$

Punkty prostej ξ_2 - prostej działania siły \vec{P}_2 to:

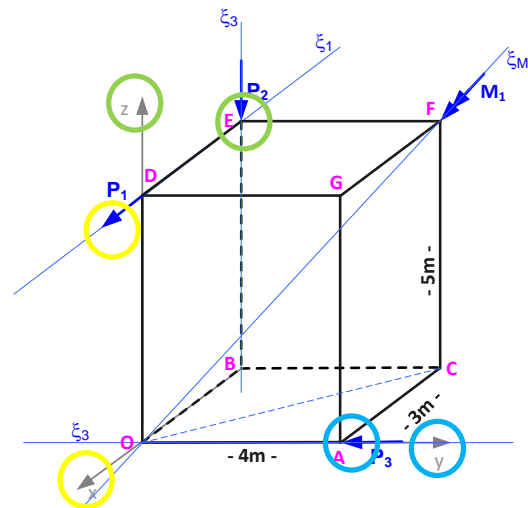
$$E = (-3, 0, 5), B = (-3, 0, 0)$$

$$\vec{EB} = (0, 0, -5) \text{ [m]}$$

$$|\vec{EB}| = 5$$

$$\vec{e}_{\xi_2} = (0, 0, -1)$$

$$\vec{P}_2 = P_2 \cdot \vec{e}_{\xi_2} = (0, 0, -2) \text{ [kN]}$$



2.4. $P_3 = 1 \text{ kN}$

$$\vec{P}_3 = (0, -1, 0) \text{ [kN]}$$

Punkty prostej ξ_3 - prostej działania siły \vec{P}_3 to:

$$A = (0, 4, 0), O = (0, 0, 0)$$

$$\vec{AO} = (0, -4, 0) \text{ [m]}$$

$$|\vec{AO}| = 4$$

$$\vec{e}_{\xi_3} = (0, -1, 0)$$

$$\vec{P}_3 = P_3 \cdot \vec{e}_{\xi_3} = (0, -1, 0) \text{ [kN]}.$$

3. Moment względem punktu O:

I sposób:

$$\vec{M}_0 = \sum \vec{r}_i \times \vec{P}_i + \sum \vec{M}_j = \sum \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ r_{ix} & r_{iy} & r_{iz} \\ P_{ix} & P_{iy} & P_{iz} \end{vmatrix} + \sum \vec{M}_j = M_x \vec{e}_x + M_y \vec{e}_y + M_z \vec{e}_z = (M_x, M_y, M_z),$$

Moment względem punktu O od siły P_1 :

$$\vec{M}_{01} = \vec{r}_{OD} \times \vec{P}_1 = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (0, 50, 0) \text{ [kNm]}.$$

Moment względem punktu O od siły P_2 :

$$\vec{M}_{02} = \vec{r}_{BO} \times \vec{P}_2 = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = (0, -6, 0) \text{ [kNm]}.$$

Moment względem punktu O od siły P_3 :

$$\vec{M}_{03} = \vec{r}_{AO} \times \vec{P}_3 = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (0, 0, 0).$$

Prosta działania siły przechodzi przez punkt O, czyli $\vec{M}_{03} = (0, 0, 0)$.

Moment \vec{M}_1

$$\vec{M}_1 = (3, -4, -5) \text{ [kNm]}.$$

II sposób:

Moment od siły P_1 $\vec{M}_{01} = (0, 50, 0)$ [kNm].

$M_x = 0$ (prosta działania siły równoległa do osi x)

$$M_y = 10 \cdot 5 = 50$$

$M_z = 0$ (prosta działania siły przecina oś z)

Moment od siły P_2 $\vec{M}_{02} = (0, -6, 0)$ [kNm].

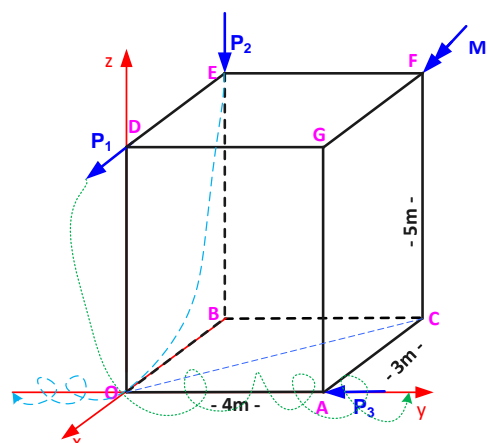
$M_x = 0$ (prosta działania siły przecina oś x)

$$M_y = -2 \cdot 3 = -6$$

$M_z = 0$ (prosta działania siły równoległa do osi z)

Moment od siły P_3 $\vec{M}_{03} = (0, 0, 0)$ [kNm].

Prosta działania siły przecina punkt O



4. Redukcja sił punktu O:

Siła ogólna:

$$\vec{S} = (10, -1, -2) \text{ [kN]}$$

bo:

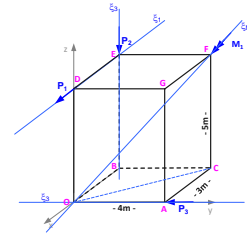
$$\vec{P}_1 = (10, 0, 0),$$

$$\vec{P}_2 = (0, 0, -2),$$

$$\vec{P}_3 = (0, -1, 0),$$

czyli

$$\vec{S} = (10 + 0 + 0)\vec{e}_x + (0 + 0 - 1)\vec{e}_y + (0 - 2 + 0)\vec{e}_z = (10, -1, -2).$$



Moment ogólny:

$$\vec{M}_0 = (3, 40, -5) \text{ [kNm]}$$

bo:

$$\vec{M}_1 = (3, -4, -5),$$

$$\vec{M}_{01} = (0, 50, 0),$$

$$\vec{M}_{02} = (0, -6, 0),$$

$$\vec{M}_{03} = (0, 0, 0),$$

czyli

$$M_x = 3 + 0 + 0 + 0 = 3;$$

$$M_y = -4 + 50 - 6 + 0 = 40;$$

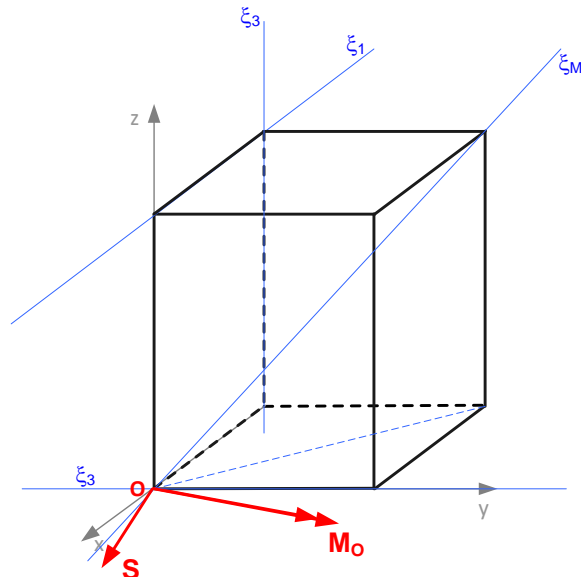
$$M_z = -5 + 0 + 0 + 0 = -5.$$

Lub liczymy względem osi xyz:

$$M_x = 3$$

$$M_y = 10 \cdot 5 - 2 \cdot 3 - 4 = 40$$

$$M_z = -5$$



Wyróżnik (niezmiennik układu):

$$w = \vec{S} \cdot \vec{M}$$

$$w = S_x M_x + S_y M_y + S_z M_z = 10 \cdot 3 + (-1) \cdot 40 + (-2) \cdot (-5) = 30 - 40 + 10 = 0$$

Wniosek: istnieje wypadkowa układu

(zadany układ sił można zredukować do siły wypadkowej)

$$\vec{W} = \vec{S} = (10, -1, -2) \text{ [kN];}$$

$$|\vec{W}| = W = \sqrt{10^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = \sqrt{105} \text{ kN.}$$

5. Poszukiwanie wypadkowej:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x_A & y_A & z_A \\ S_x & S_y & S_z \end{vmatrix} = M_{0x}\vec{e}_x + M_{0y}\vec{e}_y + M_{0z}\vec{e}_z$$

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \times \vec{S} = \begin{vmatrix} e_x & e_y & e_z \\ x_A & y_A & z_A \\ 10 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 3\vec{e}_x + 40\vec{e}_y - 5\vec{e}_z$$

Otrzymano nieoznaczony układ równań z niewiadomymi

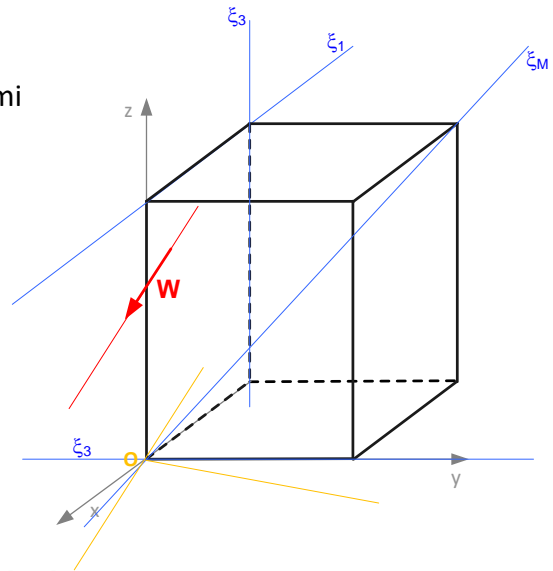
$$\begin{cases} -2y_A + z_A = 3 \\ 10z_A + 2x_A = 40 \\ -1x_A - 10y_A = -5 \end{cases}$$

Przykładowe punkty linii centralnej:

$$x_{A1} = 0, y_{A1} = 0.5, z_{A1} = 4 \quad \rightarrow A_1(0, 0.5, 4)$$

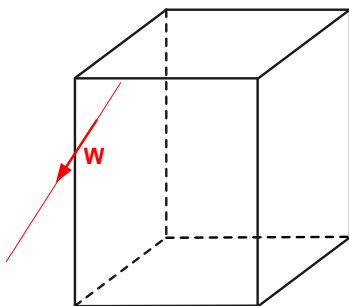
$$y_{A2} = 0, x_{A2} = 5, z_{A2} = 3 \quad \rightarrow A_2(5, 0, 3)$$

$$z_{A3} = 0, x_{A3} = 20, y_{A3} = -1.5 \quad \rightarrow A_3(20, -1.5, 0)$$



Odpowiedź

Wynikiem redukcji jest wypadkowa $\vec{W} = (10, -1, -2)$ [kN] przechodząca przez punkt $A_2(5, 0, 3)$ [m].



Zagadka do rozwiązania.

Czy przyjmując w innym miejscu początek układu współrzędnych

a.

wektor wypadkowej \vec{W} będzie wyglądał tak samo na rysunku?

b.

wektor wypadkowej \vec{W} będzie miał tę samą wartość ($W = \sqrt{105}$ kN) ?

c.

wektor momentu ogólnego \vec{M}_0 będzie taki sam ($\vec{M}_0 = (3, 40, -5)$ [kNm]) ?

d.

wyróżnik układu będzie taki sam ($w = 0$) ?



Odpowiedzi:

- Tak – wypadkowa jest stała w danym układzie sił.
- Tak – wypadkowa jest stała w danym układzie sił.
- Nie – wektor momentu względem punktu zależy od wyboru punktu.
- Tak - wyróżnik (niezmiennik) układu jest stały.

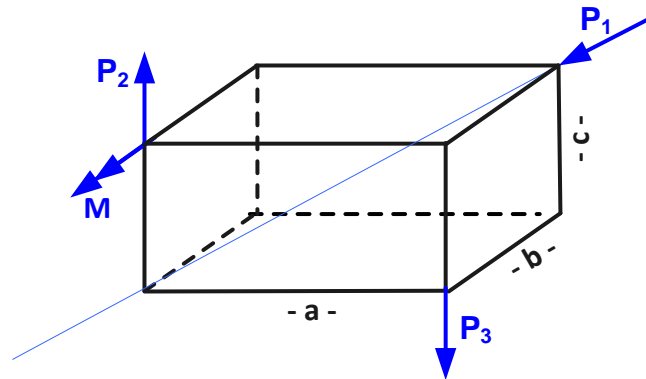
Zadanie do rozwiązania.

Narysować wypadkową układu sił (zob. rysunek)?

Dane:

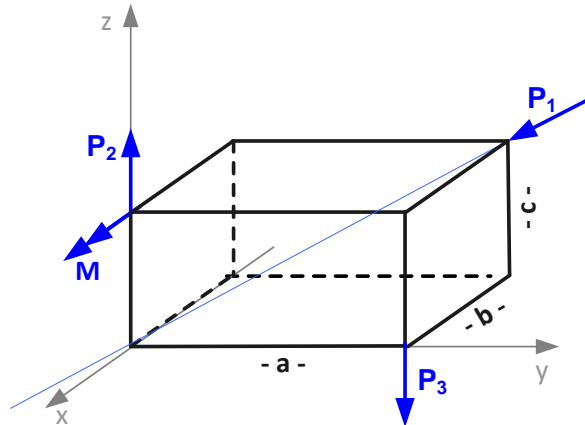
$$a = 4 \text{ m}, b = 3 \text{ m}, c = 2 \text{ m}$$

$$P_1 = 10\sqrt{29}, P_2 = P_3 = 10 \text{ kN}, M = 40 \text{ kNm}$$

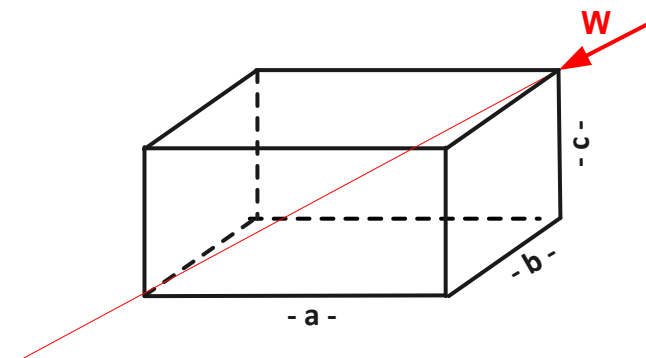


Podpowiedź1.

Przyjęcie optymalnego układu współrzędnych



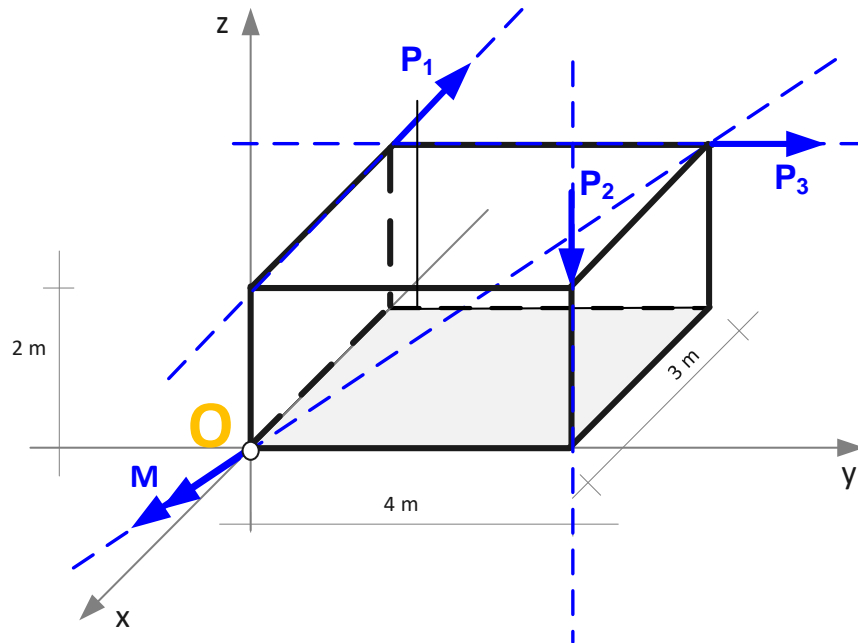
Odpowiedź:



Zadanie do rozwiązania.

Sprawdzić istnienie wypadkowej.

Dane: $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 15 \text{ kN}$, $P_3 = 20 \text{ kN}$, $M = 10\sqrt{29} \text{ kNm}$.

**Podpowiedź 1**

$$\vec{P}_1 = (-10, 0, 0) \text{ [kN]}$$

$$\vec{P}_2 = (0, 0, -15) \text{ [kN]}$$

$$\vec{P}_3 = (0, 20, 0) \text{ [kN]}$$

Podpowiedź 2

$$\vec{M}_{O(P_1)} = (0, -20, 0) \text{ [kNm]}$$

$$\vec{M}_{O(P_2)} = (-60, 0, 0) \text{ [kNm]}$$

$$\vec{M}_{O(P_3)} = (-40, 0, -60) \text{ [kNm]}$$

$$\vec{M}_{O(M)} = (30, -40, -20) \text{ [kNm]}$$

Podpowiedź 3

siła ogólna: $\vec{S} = (-10, 20, -15) \text{ [kN]}$

moment ogólny: $\vec{M}_O = (-70, -60, -80) \text{ [kNm]}$

wyróżnik: $w = 700 \neq 0$.

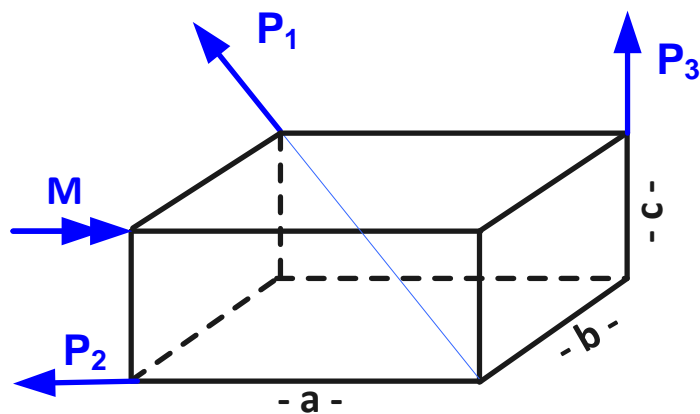
Odpowiedź:

Nie istnieje wypadkowa układu, gdyż niezmiennik układu jest różny od zera.

Zadanie do rozwiązania.

Dobrać tak wartość siły $P_3=P$ aby istniała wypadkowa układu.

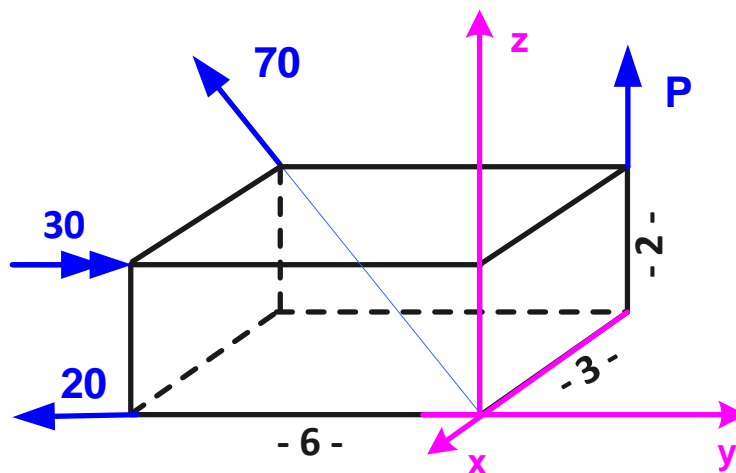
Dane: $a=6\text{m}$, $b=3\text{m}$, $c=2\text{m}$, $P_1 = 70\text{ kN}$, $P_2 = 20\text{ kN}$, $M = 30\text{kNm}$.

**Podpowiedź 1**

Siła ogólna \vec{S}	Moment ogólny \vec{M}_O	Wyróżnik układu w	Wynik
$\neq \vec{0}$	$= \vec{0}$ lub $\neq \vec{0}$	$= \vec{0}$	Istnieje wypadkowa

Podpowiedź 2

Optymalne przyjęcie układu współrzędnych xyz:



$$\vec{P}_1 = (-30, -60, 20) \text{ [kN]}$$

$$\vec{P}_2 = (0, -10, 0) \text{ [kN]}$$

$$\vec{P}_3 = (0, 0, P) \text{ [kN]}$$

$$\vec{M} = (0, 30, 0) \text{ [kNm]}$$

Odpowiedź:

$P_3 = -10\text{ kN}$ (zwrot przeciwny niż na rysunku).

4.2. UKŁAD 2D

Siła ogólna (główna, zredukowana) układu zredukowanego do punktu - suma wektorowa sił działających na osi przechodzącej przez punkt O .

$$\vec{S} = \sum_{i=1}^n P_i = S_x \vec{e}_x + S_y \vec{e}_y$$

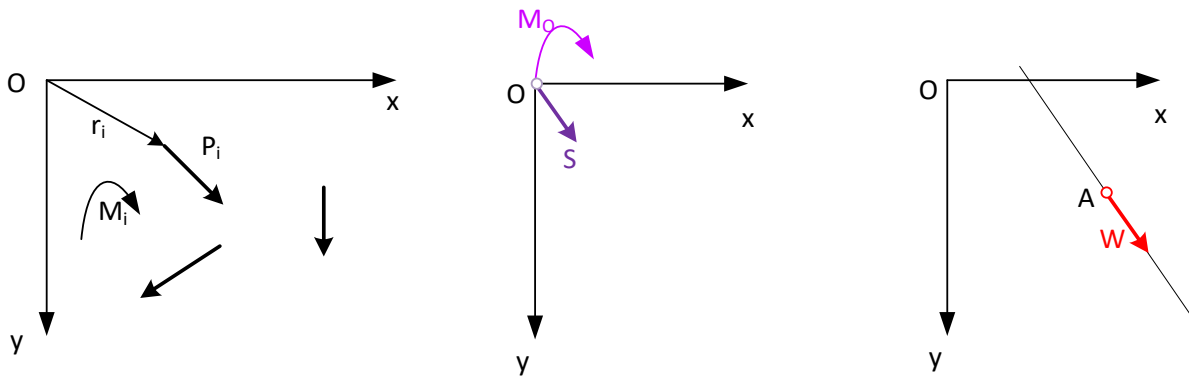
$$S_x = \sum_{i=1}^n P_{ix},$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n P_{iy},$$

Moment ogólny (główny, zredukowany) układu zredukowanego do punktu - suma wektorowa momentów sił względem bieguna O .

$$\vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j = M_z \vec{e}_z$$

Zarówno wektor promienia \vec{r}_i , jak i wektor siły \vec{P}_i są na płaszczyźnie xy , więc moment \vec{M}_O będzie miał tylko jedną niezerową współrzędną M_z – prostopadłą do płaszczyzny xy .



Jeśli $\vec{S} \neq \vec{0}, \vec{M}_O \neq \vec{0}$ w układzie płaskim, to zawsze to można znaleźć taki biegun redukcji

$A(x_A, y_A)$, że układ redukuje się do wypadkowej $\vec{W} = \vec{S}$.

$$M_O = W \cdot r = W_y \cdot x_A - W_x \cdot y_A = W_y \cdot a.$$

r jest prostopadłe do prostej działania W (!!!)

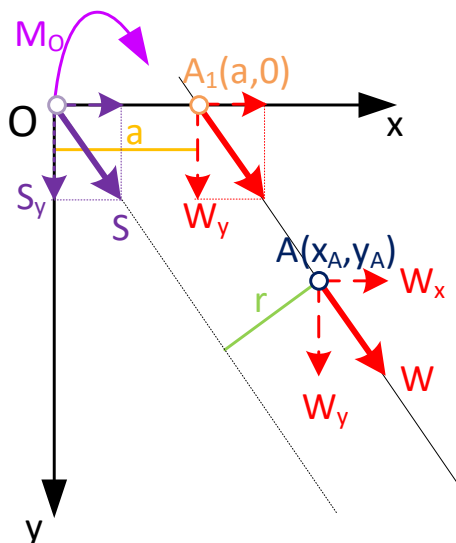
$$M_O = W \cdot r = W_y \cdot a = S_y \cdot a \Rightarrow a = \frac{M_O}{|S_y|}$$

Ramię a należy tak odłożyć, aby otrzymać właściwy zwrot momentu \vec{M}_O (porównaj str. 21).

Należy zauważyć, że

$$M_O = r \cdot W \equiv M_A = -r \cdot S + M_O = 0;$$

([☞ por. strona 15 punkt 3.2](#)).





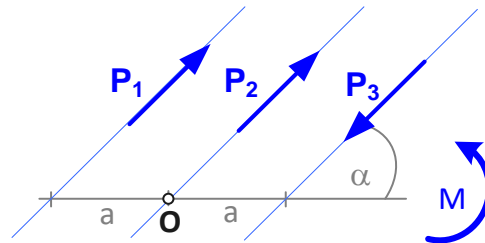
Przykład rozwiązany.

Zredukować zadany układ sił (zob. rysunek)

Dane:

$$P_1 = P_2 = P_3 = 10\sqrt{2} \text{ kN}, M = 40 \text{ kNm}, a = 2 \text{ m}, \alpha = 45^\circ.$$

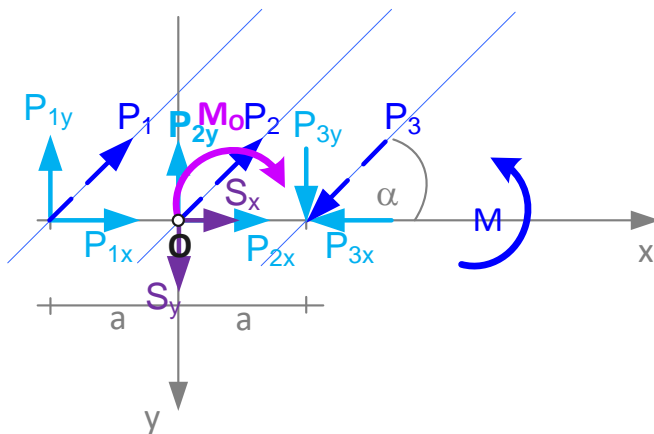
Narysować wynik redukcji.



Rozwiązanie dwoma sposobami:

A. Podejście z klasycznym układem współrzędnych xy

1a. Przyjęcie układu współrzędnych xy



Wektory sił:

$$\vec{P}_i(P_{ix}, P_{iy})$$

$$\vec{P}_1(10, -10) \text{ [kN]}$$

$$\vec{P}_2(10, -10) \text{ [kN]}$$

$$\vec{P}_3(-10, 10) \text{ [kN]}$$

2a. Redukcja do punktu O

$$\text{Siła ogólna } \vec{S} = \sum_{i=1}^n P_i = S_x \vec{e}_x + S_y \vec{e}_y$$

$$S_x = \sum_{i=1}^n P_{ix} = 10 + 10 - 10 = 10,$$

$$S_y = \sum_{i=1}^n P_{iy} = (-10) + (-10) + 10 = -10,$$

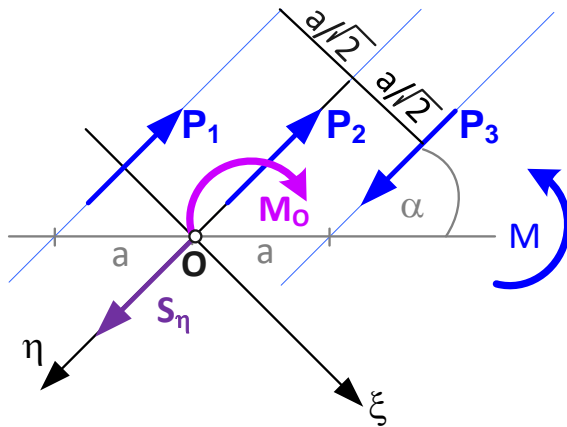
$$\vec{S} = 10\vec{e}_x - 10\vec{e}_y = (10, -10) \text{ [kN]}$$

$$\text{Moment ogólny } \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j = M_z \vec{e}_z$$

$$M_0 = P_{1y} \cdot a + P_{3y} \cdot a - M = 10 \cdot 2 + 10 \cdot 2 - 40 = 0$$

(składowe x wszystkich sił oraz składowa P_{2y} nie dają momentu względem punktu O)

Wynikiem redukcji jest **wypadkowa** $\vec{W} = \vec{S}(10, -10)$ o wartości $W = 10\sqrt{2}$ [kN] i prostej przechodzącej przez punkt O .

B. Podejście z optymalnym układem współrzędnych $\xi\eta$ 1b. Przyjęcie układu współrzędnych $\xi\eta$ 

Wektory sił:

$$\vec{P}_i(P_{i\xi}, P_{i\eta})$$

$$\vec{P}_1(0, -10\sqrt{2}) \text{ [kN]}$$

$$\vec{P}_2(0, -10\sqrt{2}) \text{ [kN]}$$

$$\vec{P}_3(0, 10\sqrt{2}) \text{ [kN]}$$

2b. Redukcja do punktu O

$$\text{Siła ogólna } \vec{S} = \sum_{i=1}^n \vec{P}_i = S_\xi \vec{e}_\xi + S_\eta \vec{e}_\eta$$

$$S_\xi = \sum_{i=1}^n P_{i\xi} = 0 \text{ - widać to na rysunku (układ sił równoległych)}$$

$$S_\eta = \sum_{i=1}^n P_{i\eta} = (-10\sqrt{2}) + (-10\sqrt{2}) + 10\sqrt{2} = -10\sqrt{2} \text{ - łatwo zsumować to na rysunku}$$

$$\vec{S} = -10\sqrt{2} \vec{e}_\eta = (0, -10\sqrt{2}) \text{ [kN]}$$

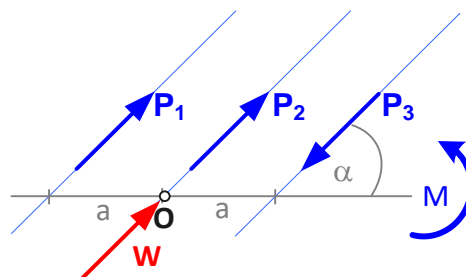
$$\text{Moment ogólny } \vec{M}_O = \sum_{i=1}^n \vec{r}_i \times \vec{P}_i + \sum_{j=1}^m \vec{M}_j = M_z \vec{e}_z$$

$$M_O = P_1 \cdot a/\sqrt{2} + P_3 \cdot a/\sqrt{2} - M = 10\sqrt{2} \cdot 2/\sqrt{2} + 10\sqrt{2} \cdot 2/\sqrt{2} - 40 = 0$$

Wynikiem redukcji jest **wypadkowa** $\vec{W} = \vec{S}(0, -10\sqrt{2})$ o wartości $W = 10\sqrt{2}$ [kN] i prostej przechodzącej przez punkt O.

Odpowiedź

Wynikiem redukcji jest wypadkowa o wartości $W = 10\sqrt{2}$ [kN] równoległa do trzech sił i skierowana do góry oraz przechodząca przez zadany punkt A.

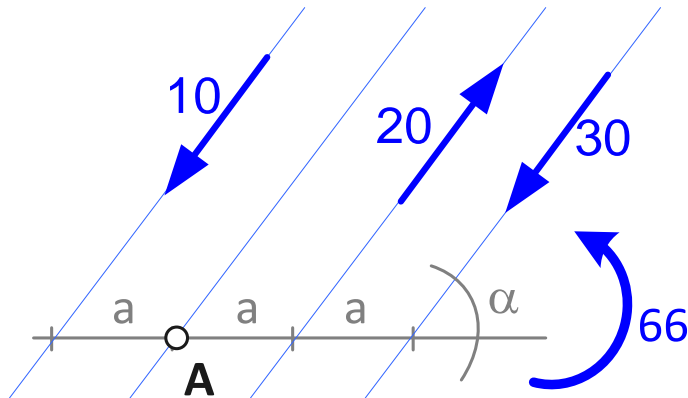
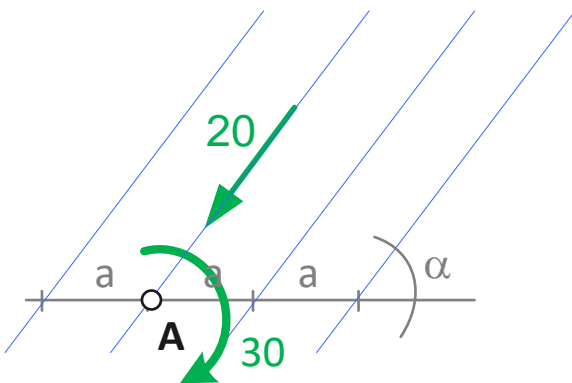


Zadanie do rozwiązania.

Wyznaczyć układ równoważny przechodzący przez punkt A.

Narysować go z odpowiednimi znakami na rysunku poniżej.

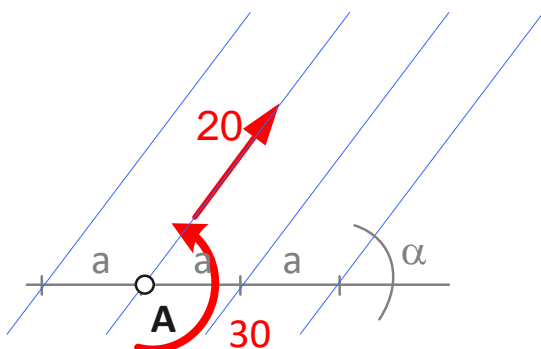
Dane $a = 4\text{ m}$, $P_1 = 10\text{ kN}$, $P_2 = 20\text{ kN}$, $P_3 = 30\text{ kN}$, $M = 66\text{ kNm}$, $\text{tg}\alpha = 4/3$

**Odpowiedź:**

Jeżeli dwa układy sił zredukowane do jednego dowolnego bieguna mają jednakową siłę ogólną i moment ogólny, to **układy te są równoważne**.
Układy równoważne mają jednakowy wyróżnik.

Zadanie do rozwiązania.

Wyznaczyć i narysować układ równoważący do układu z poprzedniego zadania.

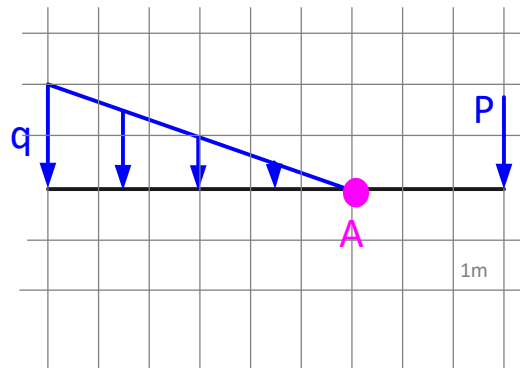
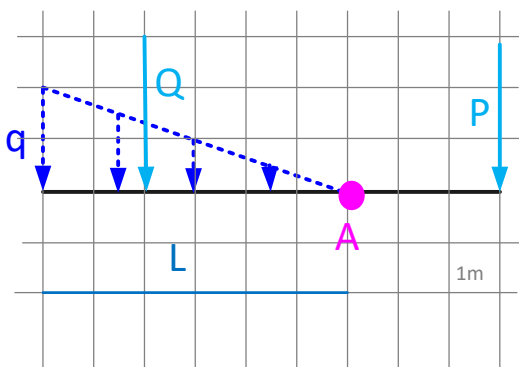
**Odpowiedź:**

Jeżeli dwa układy sił zredukowane do jednego dowolnego bieguna mają jednakowe co do modułu, ale odwrotnie skierowane siły ogólne oraz mają jednakowe co do modułu, ale odwrotnie skierowane momenty ogólne, to **układy te są równoważące się**.
Układy równoważące się mają jednakowy wyróżnik.

Zadanie do rozwiązania.

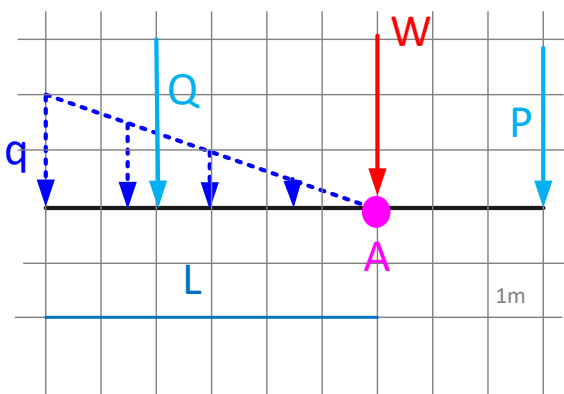
Wyznaczyć układ równoważny przechodzący przez punkt A.
Narysować go z odpowiednimi znakami na rysunku poniżej.

Dane $q = 5 \text{ kN/m}$, $P = 20 \text{ kN}$, na rysunku kratka – 1m x 1m

**Podpowiedź 1**

Układ sił qP można zastąpić układem sił QP , gdzie siła $Q = \frac{1}{2}qL$ (równa jest polu figury, którą zastępuje z położeniem w środku ciężkości danej figury)

$$Q = \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ kN/m} \cdot 6 \text{ m} = 15 \text{ kN}$$

Odpowiedź:

$$W = 35 \text{ kN}$$

5. WARUNKI RÓWNOWAGI UKŁADÓW SIŁ

Konstrukcje można odwzorować za pomocą przestrzennych (3D) lub płaskich (2D) modeli fizycznych. Są to schematy statyczne konstrukcji, zawierające następujące informacje:

- geometria i położenie ciał sztywnych (brył, powłok, płyt, prętów),
- połączenia ciał sztywnych ze sobą oraz z ostoją,
- rodzaj, położenie i wartość obciążeń czynnych.

Przestrzenne modele konstrukcji przedstawiamy w aksonometrii w układzie xyz .

Płaskie modele konstrukcji przedstawiamy w układzie xy .

Do modelowania połączeń służy więź elementarna (więź elementarna), która(y) jest nieodkształcalnym prętem prostym, zakończonym przegubami kulistymi. Przegub kulisty pozwala na obrót w dowolnej płaszczyźnie przechodzącej przez ten przegub. Więź (więź) przenosi reakcję rozciągającą lub ściskającą.

5.1. UKŁAD 3D

Przestrzenny dowolny układ obciążeń jest w równowadze, jeśli $\vec{S} = \vec{0}$ oraz $\vec{M}_O = \vec{0}$, tzn.

$$\begin{aligned} S_x = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \\ S_y = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \\ S_z = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n P_{iz} = 0, \\ M_x = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n (P_{iz}y_{Ai} - P_{iy}z_{Ai}) + \sum_{j=1}^m M_{jx} = 0, \\ M_y = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n (P_{ix}z_{Ai} - P_{iz}x_{Ai}) + \sum_{j=1}^m M_{jy} = 0, \\ M_z = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n (P_{iy}x_{Ai} - P_{ix}y_{Ai}) + \sum_{j=1}^m M_{jz} = 0, \end{aligned}$$

W praktyce stosujemy zapis symboliczny sześciu równań równowagi statycznej (6RRS):

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, \\ \sum Y &= 0, \\ \sum Z &= 0, \\ \sum M_x &= 0, \\ \sum M_y &= 0, \\ \sum M_z &= 0. \end{aligned}$$

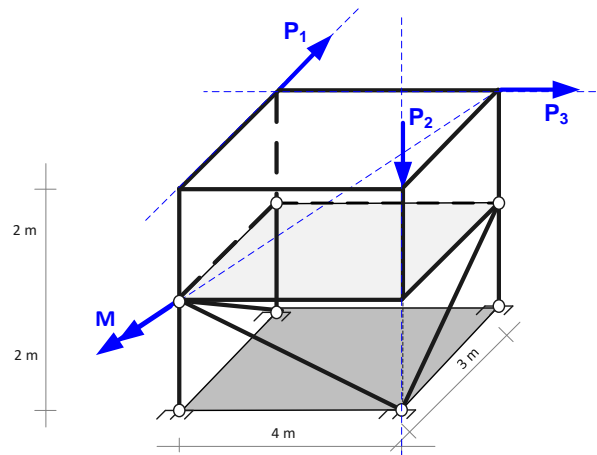
Warunek poprawnego przestrzennego modelu konstrukcji geometrycznie niezmiennego statycznie wyznaczalnego (GN SW) dla jednej bryły:

- ✓ 6 więzów elementarnych,
- ✓ wyznacznik układu równań równowagi $\det A \neq 0$.

Zadanie do rozwiązania.

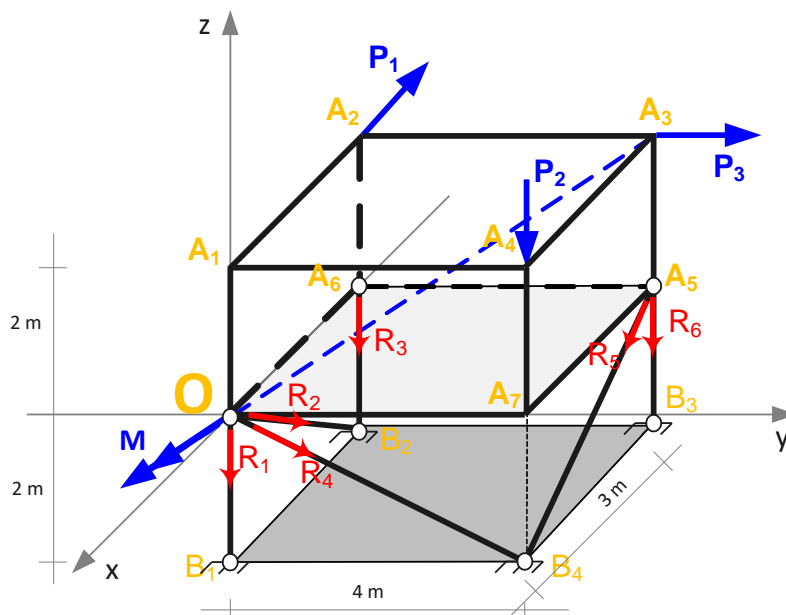
Wyznaczyć siły w więzach łączących bryłę z fundamentem.

Dane: $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 15 \text{ kN}$, $P_3 = 20 \text{ kN}$, $M = 10\sqrt{29} \text{ kNm}$.



Podpowiedź 1

Dowolne przyjęcie początku układu współrzędnych



Podpowiedź 2

Przykładowe równania równowagi:

$$\vec{S} + \vec{R} = 0,$$

$$\vec{M}_O + \vec{M}_R = 0.$$

Podpowiedź 3 = Podpowiedź 3 z poprzedniego zadania

siła ogólna: $\vec{S} = (-10, 20, -15) \text{ [kN]}$

moment ogólny: $\vec{M}_O = (-70, -60, -80) \text{ [kNm]}$

Podpowiedź 4

Składowe reakcji:

$$\vec{R}_1 = (0, 0, -1)R_1,$$

$$\vec{R}_2 = \left(\frac{-3}{\sqrt{9+4}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{9+4}}\right)R_2 = (-0,832; 0 ; -0,555)R_2,$$

$$\vec{R}_3 = (0, 0, -1)R_3,$$

$$\vec{R}_4 = \left(0, \frac{4}{\sqrt{9+16}}, \frac{-2}{\sqrt{9+16}}\right)R_4 = (0 ; 0,894 ; -0,447)R_4,$$

$$\vec{R}_5 = \left(\frac{3}{\sqrt{9+4}}, 0, \frac{-2}{\sqrt{9+4}}\right)R_5 = (0,832 ; 0 ; -0,555)R_5,$$

$$\vec{R}_6 = (0, 0, -1)R_6.$$

Podpowiedź 5

„klasyczne” równania równowagi:

	R1	R2	R3	R4	R5	R6	
X	0	-0,83205	0	0	0,83205	0	-10
Y	0	0	0	0,894427	0	0	20
Z	-1	-0,5547	-1	-0,44721	-0,5547	-1	-15
Mx	0	0	0	0	-2,2188	-4	-70
My	0	0	-3	0	-1,6641	-3	-60
Mz	0	0	0	0	-3,3282	0	-80

Tzn., np.:

$$\sum X = 0: -0,83R_2 + 0,83R_5 - 10 = 0,$$

Wyznacznik układu równań $\det A = 29,7225 \neq 0$, więc istnieje jedno rozwiązanie, czyli układ jest GN SW (geometrycznie niezmienny statycznie wyznaczalny).

Odpowiedź [kN]

$$\vec{R}_1 = (0, 0, -35);$$

$$\vec{R}_2 = (30 ; 0 ; 20);$$

$$\vec{R}_3 = (0 ; 0 ; 2,5);$$

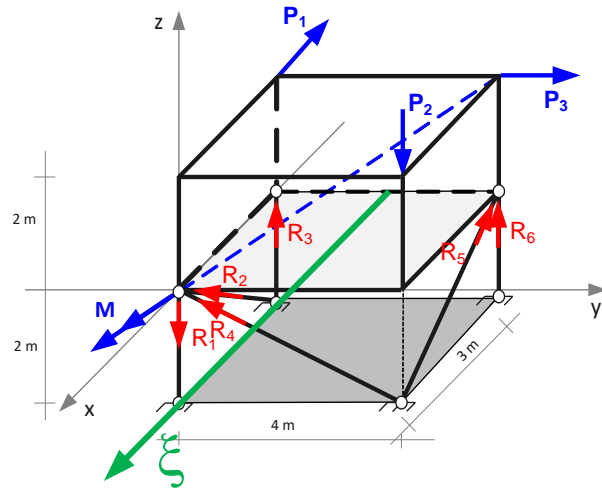
$$\vec{R}_4 = (0 ; -20 ; 10);$$

$$\vec{R}_5 = (-20 ; 0 ; 13,33);$$

$$\vec{R}_6 = (0 ; 0 ; 4,17).$$

Sprawdzenie - Podpowiedź 6

Równanie równowagi – moment względem innej osi niż poprzednie równania



$$\sum M_{\xi} = 0: \quad R_{4z} \cdot 4 + R_{5z} \cdot 4 + R_6 \cdot 4 - P_2 \cdot 4 - P_3 \cdot 4 + M_x = 0$$

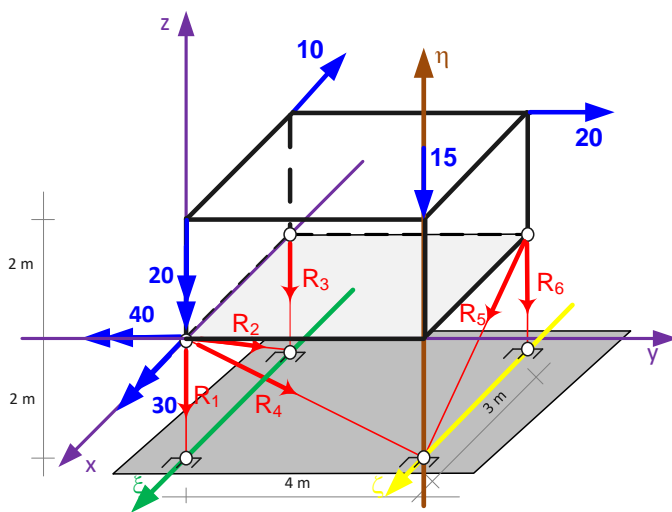
Podstawiając wyznaczone wartości, otrzymano:

$$10 \cdot 4 + 13,33 \cdot 4 + 4,17 \cdot 4 - 15 \cdot 4 - 20 \cdot 4 + 30 = 0;$$

czyli 0=0.

Podpowiedź 7

	R1	R2	R3	R4	R5	R6	
X	0	-0,83205	0	0	0,83205	0	-10
Y	0	0	0	0,894427	0	0	20
Z	-1	-0,5547	-1	-0,44721	-0,5547	-1	-15
Mx	0	0	0	0	-2,2188	-4	-70
My	0	0	-3	0	-1,6641	-3	-60
Mz	0	0	0	0	-3,3282	0	-80
M	-4	-2,2188	-4	0	0	0	-50



Korzystniejszy zestaw równań:

np.

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \vec{R}_4,$$

$$\sum M_z = 0 \Rightarrow \vec{R}_5,$$

$$\sum M_x = 0 \Rightarrow \vec{R}_6, \text{ (bo znamy } \vec{R}_5)$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow \vec{R}_2, \text{ (bo znamy } \vec{R}_5)$$

$$\sum M_y = 0 \Rightarrow \vec{R}_3, \text{ (bo znamy } \vec{R}_5 \text{ i } \vec{R}_6)$$

$$\sum M_{\zeta} = 0 \Rightarrow \vec{R}_1, \text{ (bo znamy } \vec{R}_2 \text{ i } \vec{R}_3)$$

Sprawdzenie

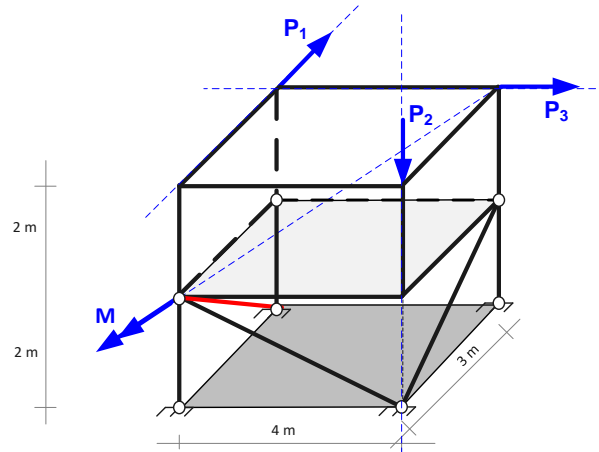
$$\sum Z = 0,$$

kontrola $\vec{R}_1, \vec{R}_2, \vec{R}_3, \vec{R}_4, \vec{R}_5, \vec{R}_6$.

Zadanie do rozwiązania.

Wyznaczyć siłę w jednej więzi – na rysunku znaczonej na czerwono.

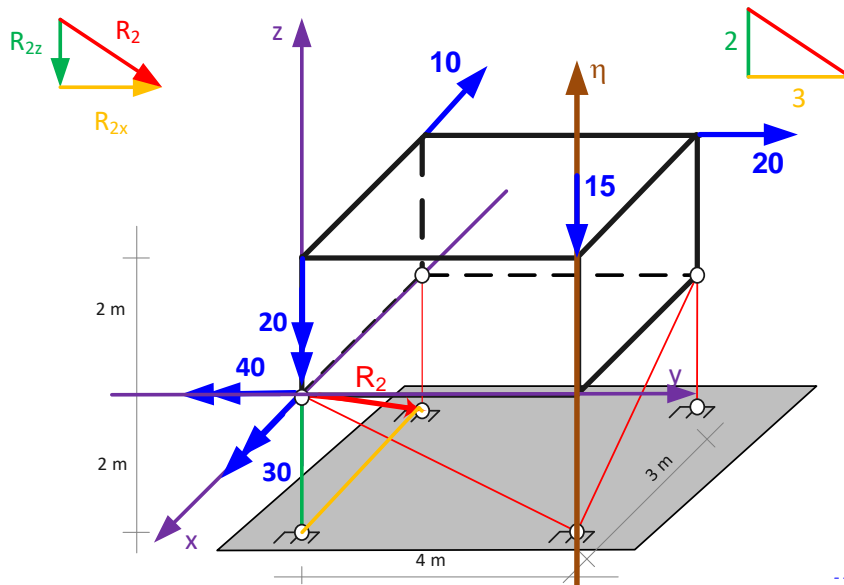
Dane: $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 15 \text{ kN}$, $P_3 = 20 \text{ kN}$, $M = 10\sqrt{29} \text{ kNm}$.



Podpowiedź 1

Zamiast równań równowagi z poprzedniego zadania:

$\sum M_\eta = 0$, bo pozostałe siły bierne (siły w więzach) są albo równoległe, albo ich proste działania przecinają oś



$$\sum M_\eta = 0: \quad -R_{2x} \cdot 4 - 10 \cdot 4 - 20 \cdot 3 - 20 = 0,$$

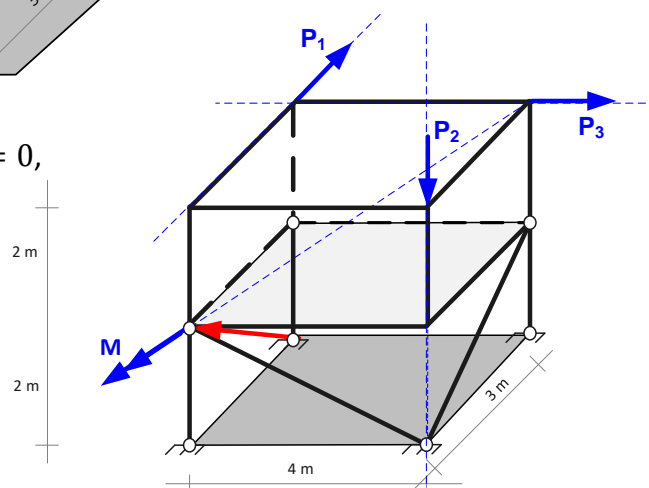
$$\text{stąd } R_{2x} = -\frac{120}{4} = -30$$

$$\text{czyli } R_{2z} = \frac{2}{3} R_{2x} = -20.$$

Odpowiedź

$$\vec{R}_2 = (-30 ; 0 ; -20) \text{ [kN]}$$

(zwrot siły przeciwny do przyjętego)



5.2. UKŁAD 2D

Płaski dowolny układ obciążeń jest w równowadze, jeśli $\bar{S} = \bar{0}$ oraz $\bar{M}_B = \bar{0}$, tzn.

$$\begin{aligned} S_x = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n P_{ix} = 0, \\ S_y = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n P_{iy} = 0, \\ M_z = 0 &\Rightarrow \sum_{i=1}^n (P_{iy}x_{Ai} - P_{ix}y_{Ai}) + \sum_{j=1}^m M_{jz} = 0, \end{aligned}$$

W praktyce stosujemy zapis symboliczny trzech równań równowagi statycznej (3RRS):

$$\begin{aligned} \sum X &= 0, \\ \sum Y &= 0, \\ \sum M_B &= 0. \end{aligned}$$

Jedno lub dwa równania typu „suma rzutów sił” można zastąpić sumą momentów względem punktów A, C:

wariant 1 (warunek: $AB \sim \perp x$):

$$\sum X = 0, \quad \sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0$$

wariant 2 (warunek: $AB \sim \perp y$):

$$\sum Y = 0, \quad \sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0$$

wariant 3 (warunek: A, B, C tworzą trójkąt):

$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad \sum M_C = 0$$

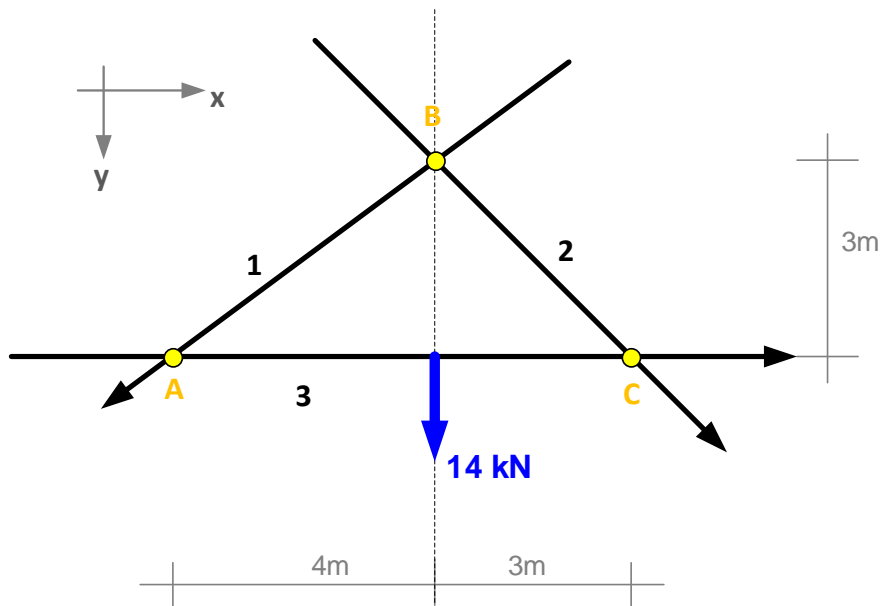
WAŻNE: punkty A, B, C nie leżą na jednej prostej.

Warunek poprawnego płaskiego modelu konstrukcji geometrycznie niezmiennego statycznie wyznaczalnego (GN SW) dla jednej tarczy:

- ✓ 3 więzy elementarne,
- ✓ więzy nie są równoległe,
- ✓ więzy nie są zbieżne.

Przykład rozwiązany.

Wyznaczyć układ równoważący leżący na prostych 1, 2, 3.



Zapisujemy dowolny zestaw 3RRS.

W tym przypadku najwygodniej skorzystać z:

wariant 3 (warunek: A, B, C tworzą trójkąt):

$$\sum M_A = 0, \quad \sum M_B = 0, \quad \dots \sum M_C = 0$$

$$\sum M_A = 7R_{2y} + 4 \cdot 14 = 0; \quad (A - \text{punkt przecięcia nieznanymi sił } R_1 \text{ oraz } R_3)$$

$$\Rightarrow R_{2y} = -8, \text{ więc } R_{2x} = R_{2y} = -8, \text{ czyli } \mathbf{R_2 = -8\sqrt{2} \text{ kN.}}$$

$$\sum M_B = -3R_3 = 0; \quad (B - \text{punkt przecięcia nieznanymi sił } R_1 \text{ oraz } R_2)$$

$$\Rightarrow \mathbf{R_3 = 0.}$$

$$\sum M_C = -7R_{1y} - 3 \cdot 14 = 0; \quad (C - \text{punkt przecięcia nieznanymi sił } R_2 \text{ oraz } R_3)$$

$$\Rightarrow R_{1y} = -6, \text{ więc } |R_{1x}| = \left| \frac{4}{3} R_{1y} \right| = 8, \text{ czyli } \mathbf{R_1 = -10 \text{ kN.}}$$

Sprawdzenie rozwiązania

$$\sum Y = R_{1y} + R_{2y} + 14 = 0; \quad \sum Y = (-6) + (-8) + 14 = 0;$$

$$\sum X = -R_{1x} + R_{2x} + R_3 = 0; \quad \sum X = -(-8) + (-8) + 0 = 0;$$

Odpowiedź

Zwroty reakcji są przeciwne niż na zadanym rysunku i

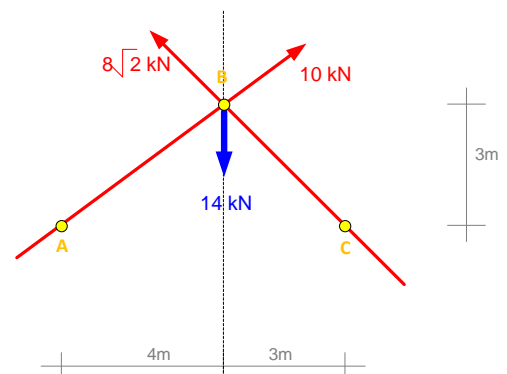
wynoszą:

$$|R_1| = 10 \text{ kN,}$$

$$|R_2| = 8\sqrt{2} \text{ kN,}$$

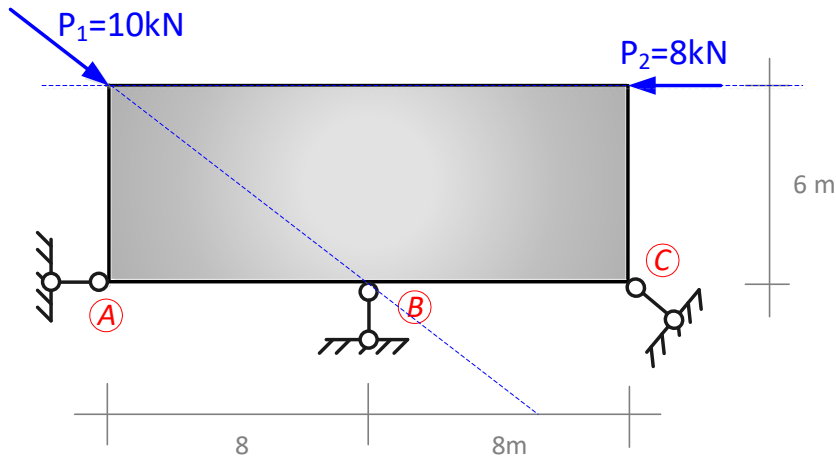
$$R_3 = 0.$$

Układ jest zrównoważony dwoma siłami.



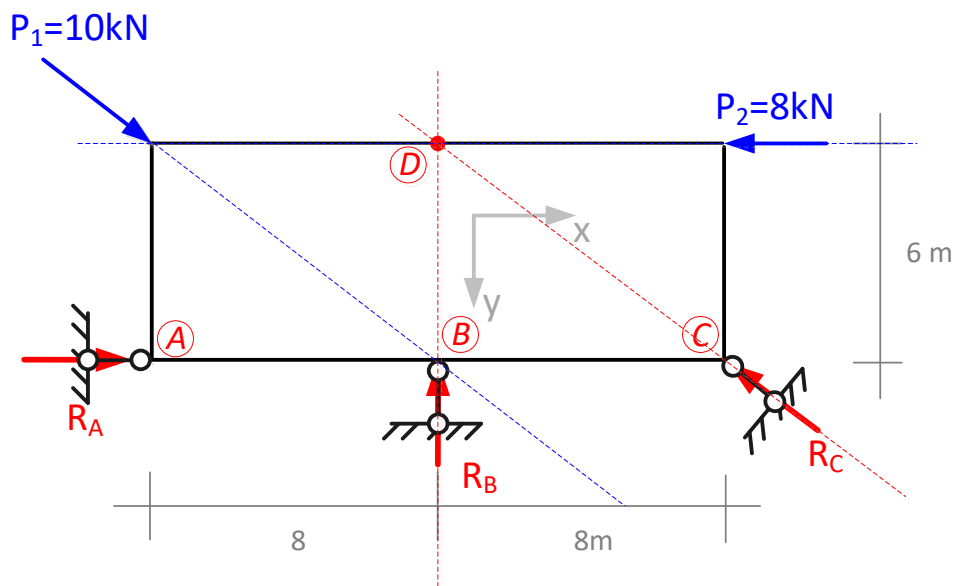
Przykład rozwiązany.

Wyznaczyć siły bierne – siły w więzach elementarnych łączących tarczę z ostoją.

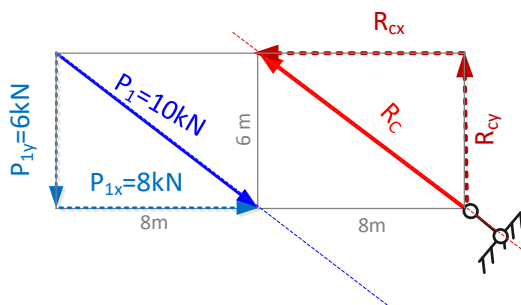


Metoda analityczna

Przyjmujemy dowolny układ współrzędnych. Przyjmujemy dowolne oznaczenia oraz zwroty nieznanymi sił.



Rozkładamy siły na składowe:

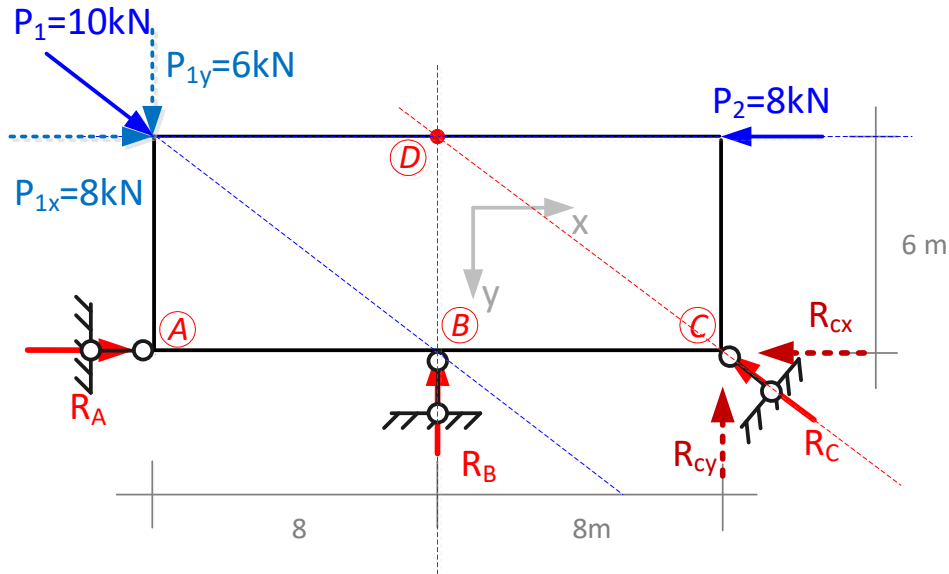


$$\frac{P_{1x}}{P_1} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow P_{1x} = \frac{4}{5} P_1 = \frac{4}{5} 10 = 8 \text{ kN}$$

$$\frac{P_{1y}}{P_1} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow P_{1y} = \frac{3}{5} P_1 = \frac{3}{5} 10 = 6 \text{ kN}$$

$$\frac{R_{cx}}{R_c} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5} \Rightarrow R_{cx} = \frac{4}{5} R_c$$

$$\frac{R_{cy}}{R_c} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5} \Rightarrow R_{cy} = \frac{3}{5} R_c$$



Zapisujemy dowolny zestaw 3RRS.

W tym przypadku najwygodniej skorzystać z:

wariant 3:

$$\sum M_B = 0, \quad \sum M_C = 0, \quad \dots \sum M_D = 0$$

$\sum M_B = 0$; (B – punkt przecięcia nieznanymi sił R_A oraz R_B)

$$\sum M_B = -8R_{cy} - 6P_2 = 0 \text{ (siła } R_2 \text{ rozłożona na składowe w punkcie C);}$$

$$\sum M_B = -8R_{cy} - 6 \cdot 8 = 0; \Rightarrow R_{cy} = -6 \text{ kN;}$$

lub

$$\sum M_B = -6R_{cx} + 6 \cdot 8 = 0; \Rightarrow R_{cx} = -8 \text{ kN (siła } R_2 \text{ rozłożona na składowe w punkcie D);}$$

$$R_{cx} = \frac{4}{5}R_C; R_{cy} = \frac{3}{5}R_C; \frac{R_{cx}}{R_{cy}} = \frac{4}{3}$$

$$\Rightarrow R_C = -10 \text{ kN (zwrot przeciwny do zaznaczonego na rysunku)}$$

Moment względem punktu B od siły P_1 jest równy zero, bo prosta działania siły P_1 przecina punkt B; dowód: $\sum M_{B(P_1)} = -8P_{1y} + 6P_{1x} = -8 \cdot 6 + 6 \cdot 8 = 0$

$\sum M_C = 0$; (C – punkt przecięcia nieznanymi sił R_A oraz R_C)

$$\sum M_C = 8R_B - 6P_2 - 6P_{1x} = 8R_B - 8 \cdot 6 - 6 \cdot 8 = 0$$

lub

$$\sum M_C = 8R_B - 6P_2 + 6P_{1x} - 16P_{1y} = 8R_B - 6 \cdot 8 + 6 \cdot 8 - 16 \cdot 6 = 0$$

(siła P_1 rozłożona na składowe w punkcie B);

$$\Rightarrow R_B = 12 \text{ kN}$$

$\sum M_D = 0$; (D – punkt przecięcia nieznanymi sił R_B oraz R_C)

$$\sum M_D = -6R_A - 8P_{1y} = 0;$$

lub

$$\sum M_D = -6R_A - 6P_{1x} = -6R_A - 6 \cdot 8 = 0 \text{ (siła } P_1 \text{ rozłożona na składowe w punkcie B);}$$

$$\Rightarrow R_A = -8 \text{ kN (zwrot przeciwny do zaznaczonego na rysunku)}$$

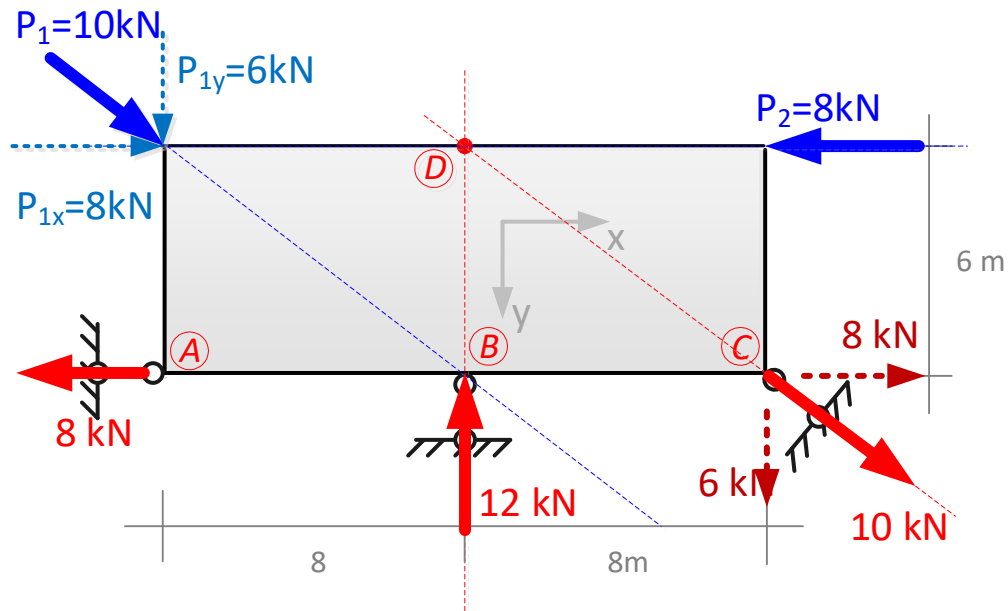
Sprawdzenie:

$$\sum X = 0;$$

$$\sum X = R_A - R_{cx} + P_{1x} - P_2 = (-8) - (-8) + 8 - 8 = 0;$$

$$\sum Y = 0;$$

$$\sum Y = -R_B - R_{cy} + P_{1y} = 12 - (-6) + 6 = 0;$$



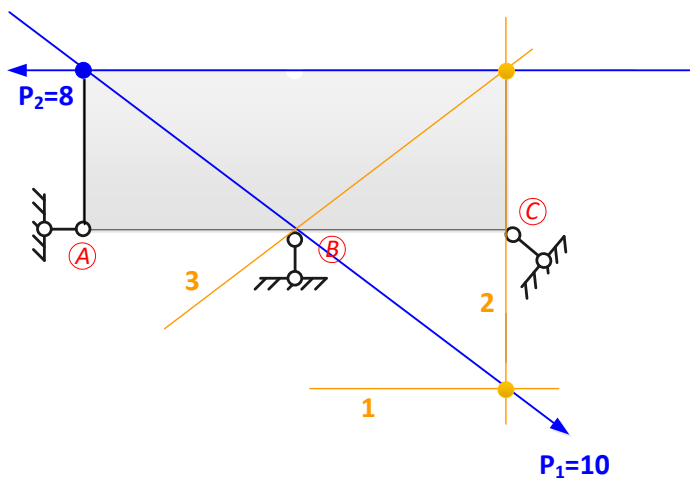
Metoda graficzna

Wyznaczenie siły wypadkowej układu sił czynnych

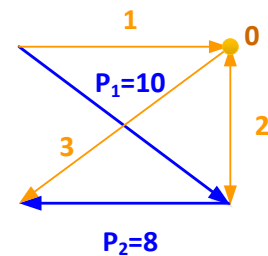
Tworzymy w skali *plan sił* (PS) i *wielobok sił* (WS):

Aby wyznaczyć siły bierne metodą kinematyczną, musimy najpierw zredukować układ sił czynnych.

PS skala

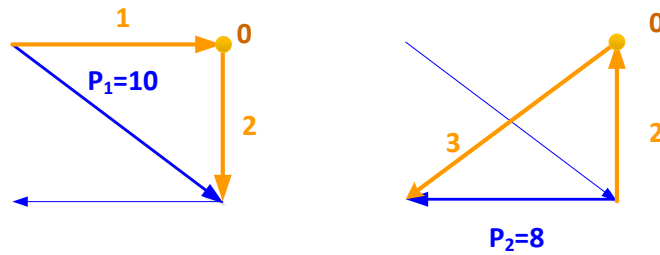


WS skala

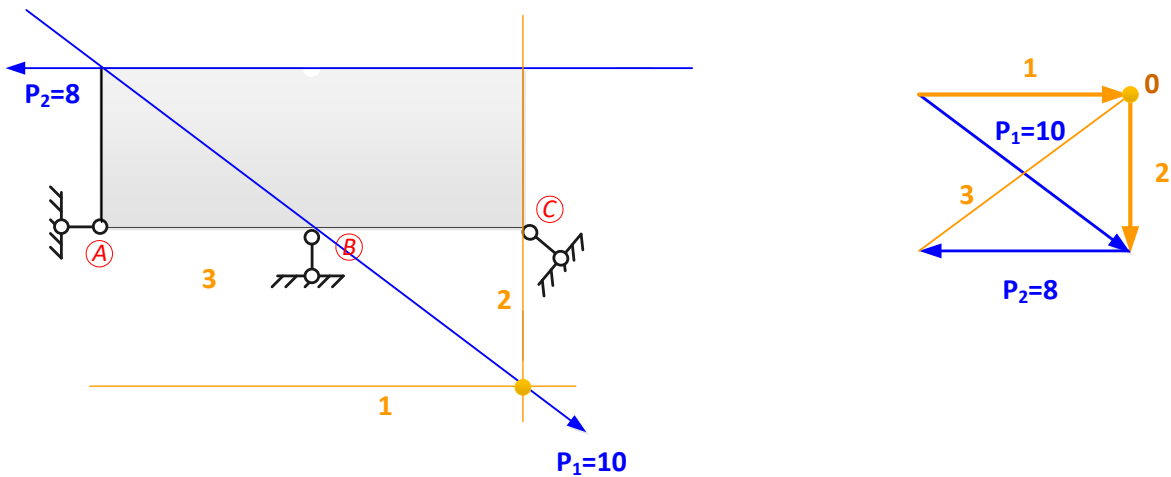


Powyższy PS i WS powstał w następujący sposób:

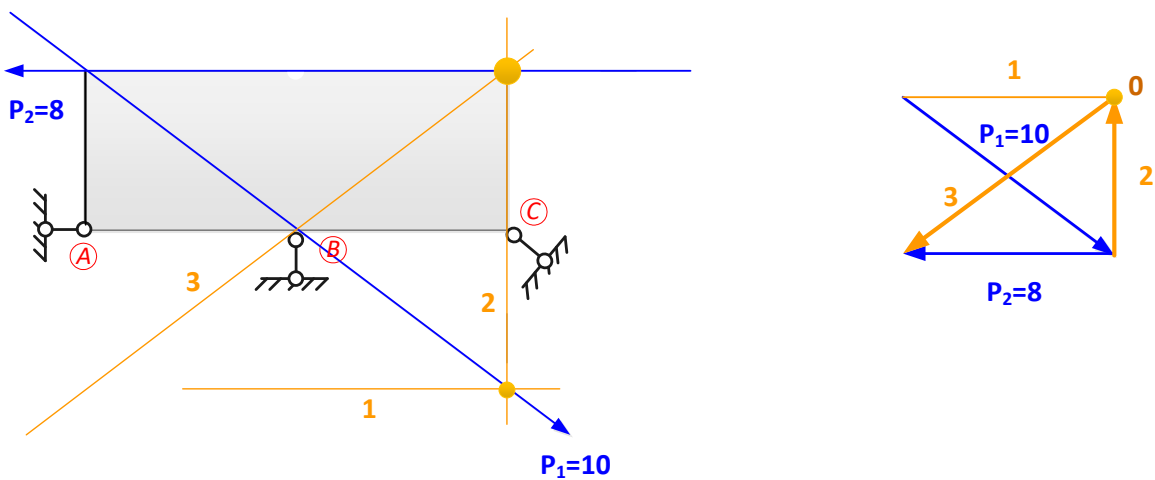
*na WS przyjęto biegun i rozłożono każdą z sił na promienie (składowe);



*na PS narysowano promień pierwszy do przecięcia z prostą działania siły \vec{P}_1 , następnie w tym miejscu narysowano promień drugi;

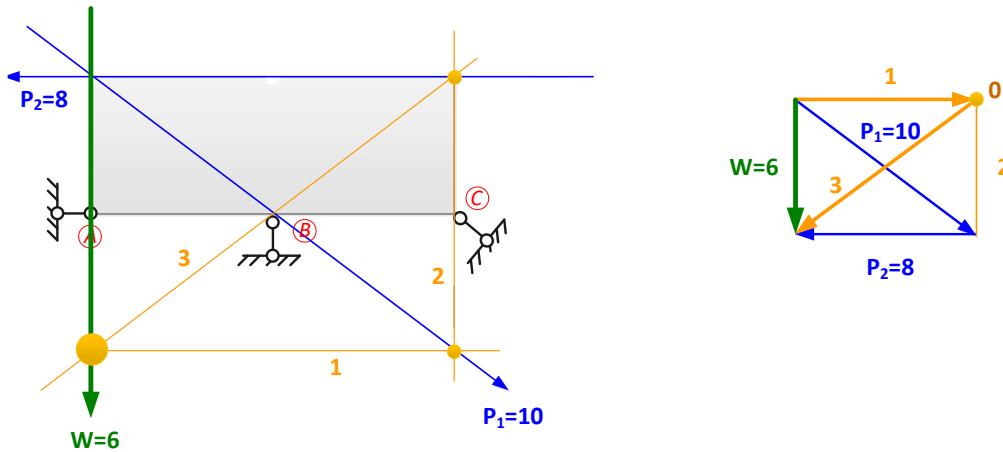


*promień drugi jest „ważny” pomiędzy prostą działania siły \vec{P}_1 a \vec{P}_2 , więc w miejscu przecięcia promienia drugiego z prostą działania siły \vec{P}_2 narysowano promień trzeci;



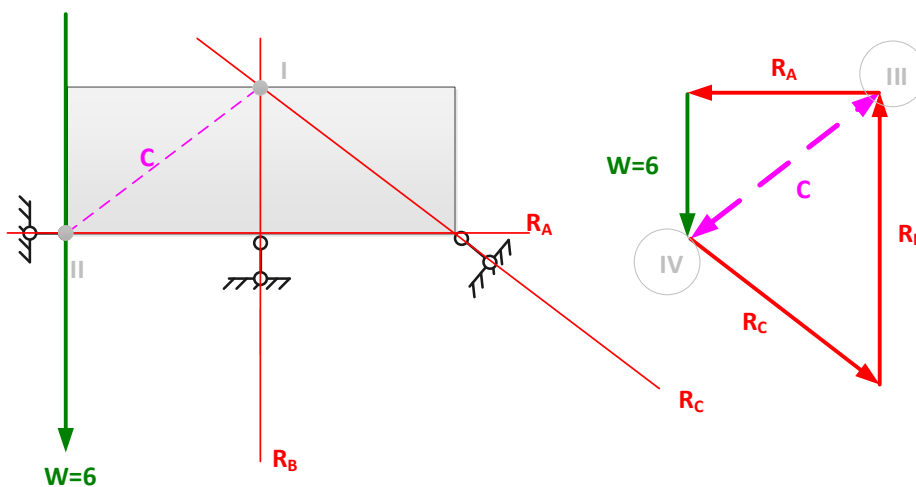
Teraz można przejść do wyznaczenia wypadkowej układu sił.

Na PS, w miejscu przecięcia pierwszego i ostatniego promienia, prowadzimy wypadkową sił – siła jest równoległa do narysowanej wcześniej na WS siły pomiędzy promieniem pierwszym a ostatnim, czyli od „początku” siły pierwszej do „końca” siły ostatniej (w omawianym przykładzie jest to pionowa siła wypadkowa \vec{W} pomiędzy wektorami \vec{P}_1 a \vec{P}_2).



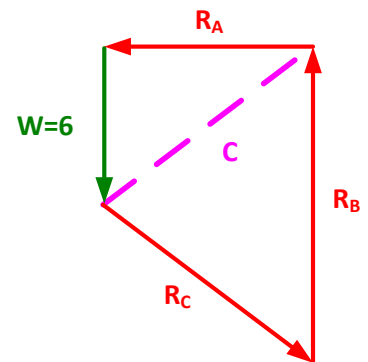
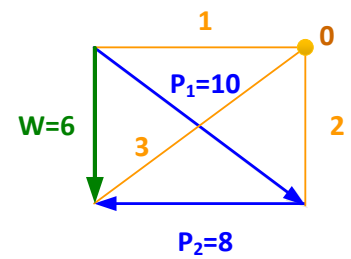
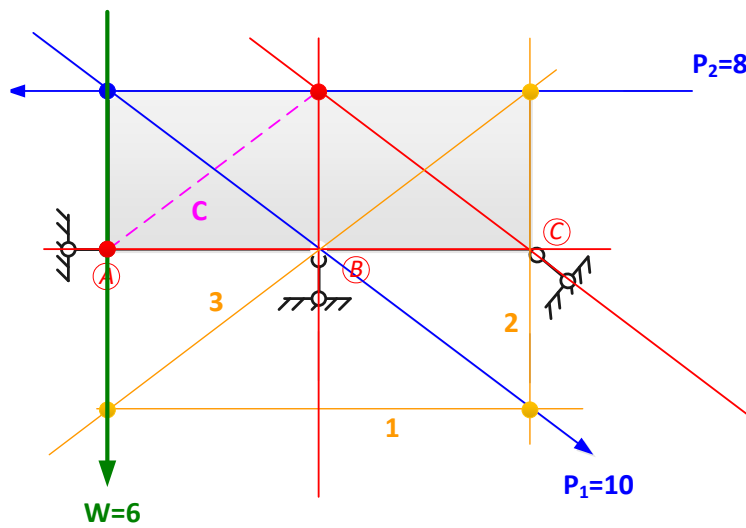
Wyznaczenie sił biernych

Jak już znamy wartość i położenie wypadkowej układu \vec{W} (układ jest zredukowany), to poszukujemy sił, które równoważą układ (siły w więzach elementarnych). W tym celu na PS poszukujemy miejsca przecięcia dowolnych dwóch nieznanymi sił (punkt I) oraz miejsca przecięcia pozostałej nieznannej siły ze znaną siłą wypadkową (punkt II). Przez te dwa punkty rysujemy prostą, która jest kierunkiem „siły Culmana”. Następnie na WS rysujemy w skali wypadkową oraz z jednego końca kierunek nieznannej siły \vec{R}_A oraz \vec{C} . W miejscu, gdzie „przetną” się te dwie siły (punkt III), rysujemy kierunek nieznannej siły, np. \vec{R}_B , a z drugiego punktu (punkt IV) rysujemy kierunek ostatniej nieznannej siły, np. \vec{R}_C . W ten sposób otrzymaliśmy wielobok sił \vec{W} , \vec{R}_A , \vec{R}_B , \vec{R}_C . Odczytując w skali WS, znamy wartości sił \vec{R}_A , \vec{R}_B , \vec{R}_C . Analizując zwrot siły \vec{W} , znamy też zwroty sił \vec{R}_A , \vec{R}_B , \vec{R}_C .



Odczytano: $R_A = 8 \text{ kN}$; $R_B = 12 \text{ kN}$; $R_C = 10 \text{ kN}$.

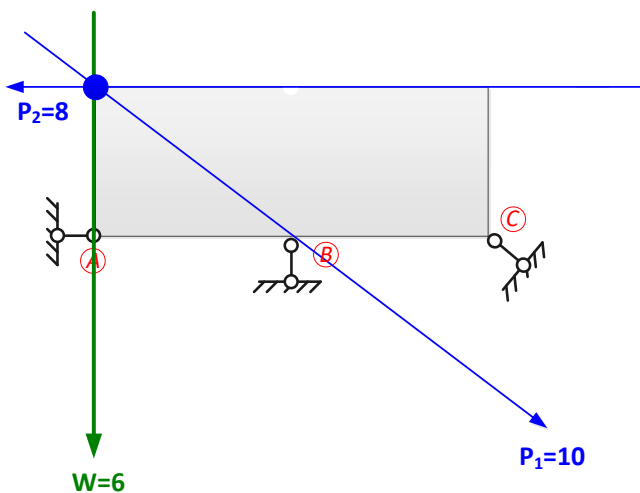
Rysunek kompletny:



Odczytano: $R_A = 8 \text{ kN}$; $R_B = 12 \text{ kN}$; $R_C = 10 \text{ kN}$.

Zagadka do rozwiązania.

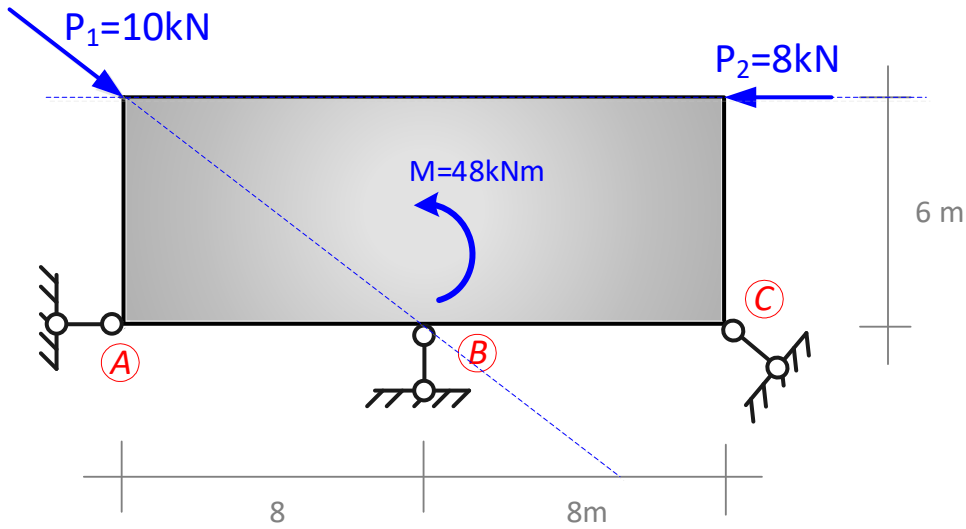
Czy to jest przypadek, że jeden z punktów linii centralnej
(prostej działania wypadkowej układu \vec{W})
jest punktem zbieżności sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 ?



Odpowiedź na następnej stronie.

Zadanie do rozwiązania.

Graficznie wyznaczyć oddziaływania w więźiach.



Podpowiedź do zagadki.

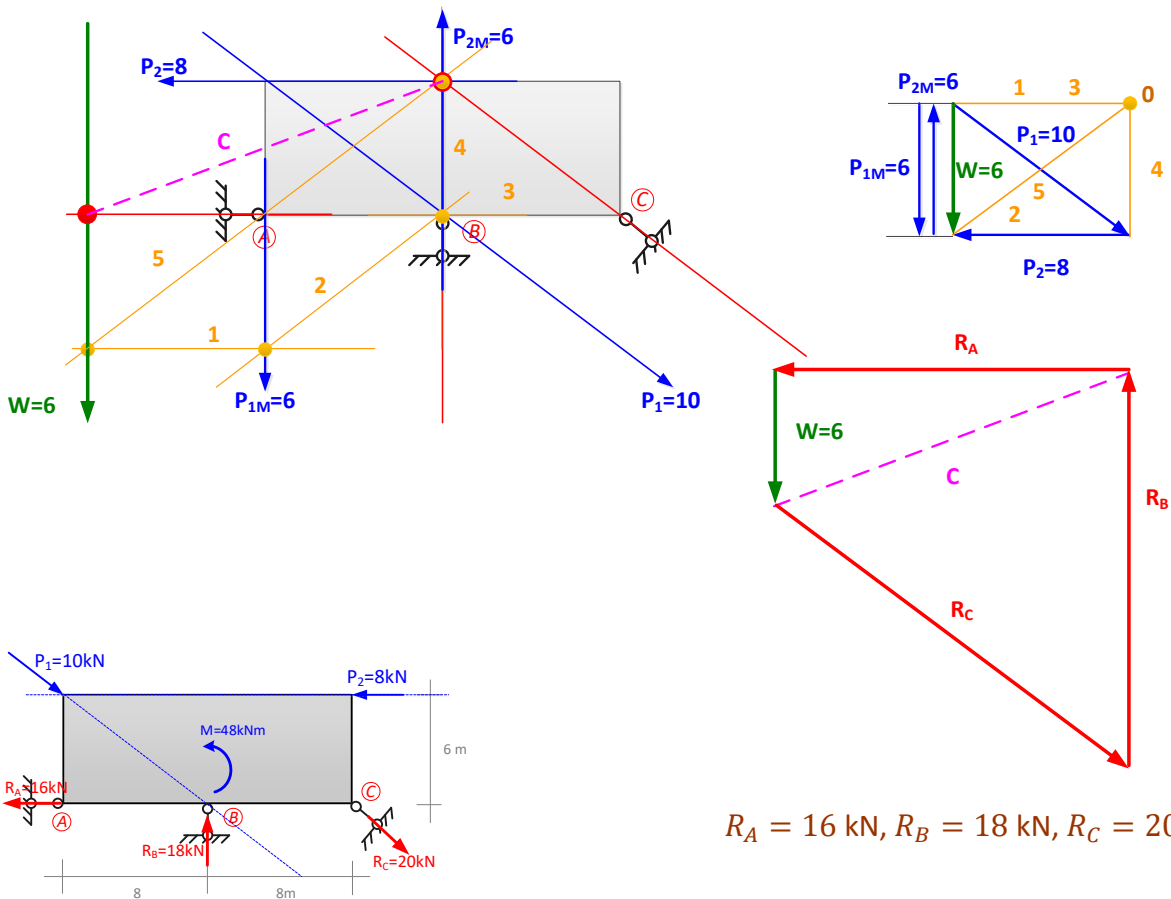


Czy prosta działania wypadkowej tego układu też będzie w punkcie zbieżności sił \vec{P}_1 i \vec{P}_2 ?

NIE – poprzednio był to układ sił zbieżnych, teraz moment „przesunie” położenie wypadkowej.

Wartość \vec{W} będzie taka sama.

Odpowiedź

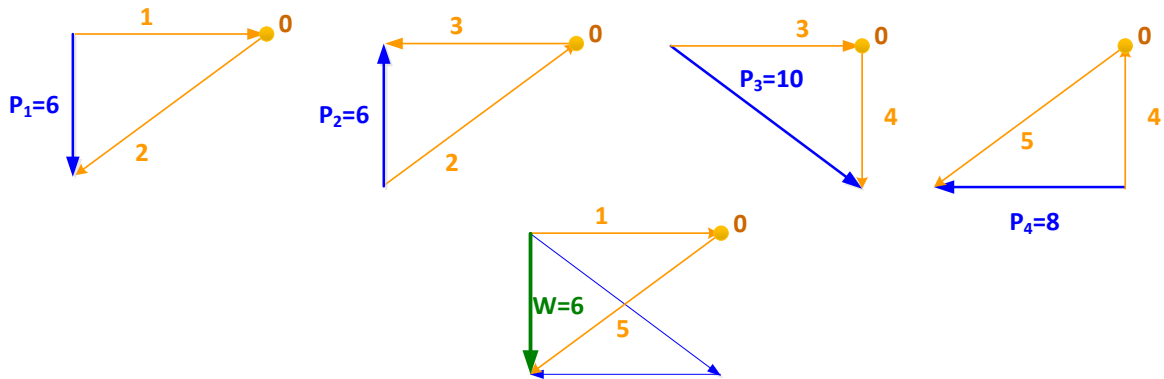


$$R_A = 16 \text{ kN}, R_B = 18 \text{ kN}, R_C = 20 \text{ kN}.$$

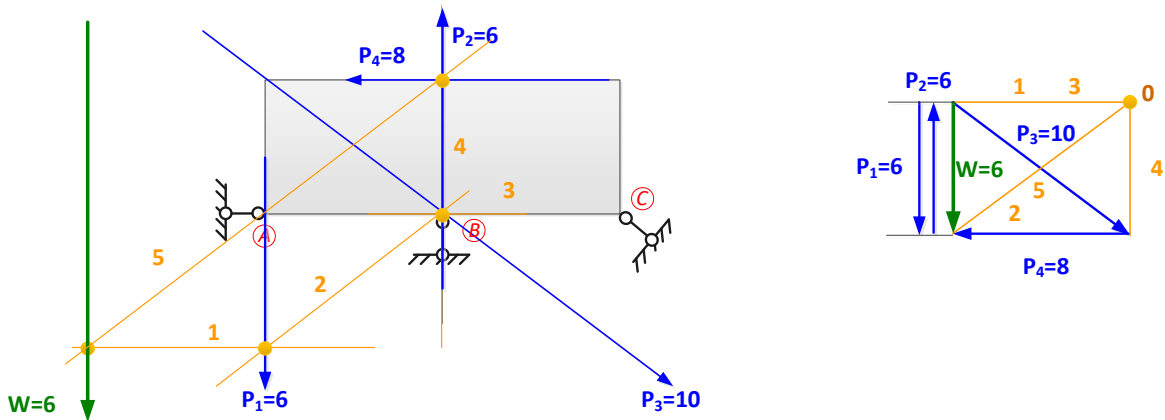
Podpowiedź 1

Rozkładamy moment na dowolną parę sił, np. $P_1 = P_2 = M/8 = 6 \text{ kN}$

Następnie na wieloboku sił obieramy biegun i rozkładamy każdą siłę na promienie.

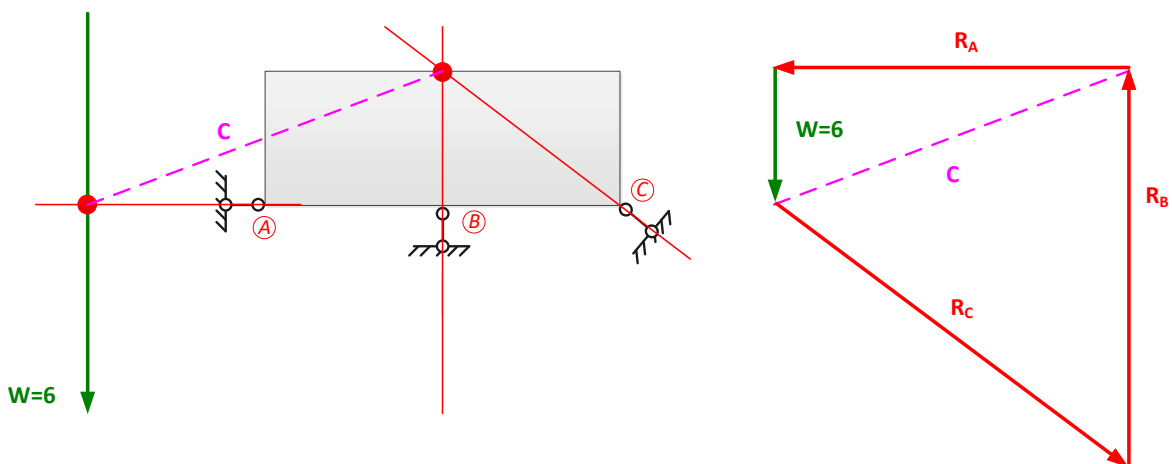


Następnie przenosimy promienie na plan sił, a następnie poszukujemy przecięcia pierwszego i ostatniego promienia – jest to punkt linii centralnej.



Podpowiedź 2

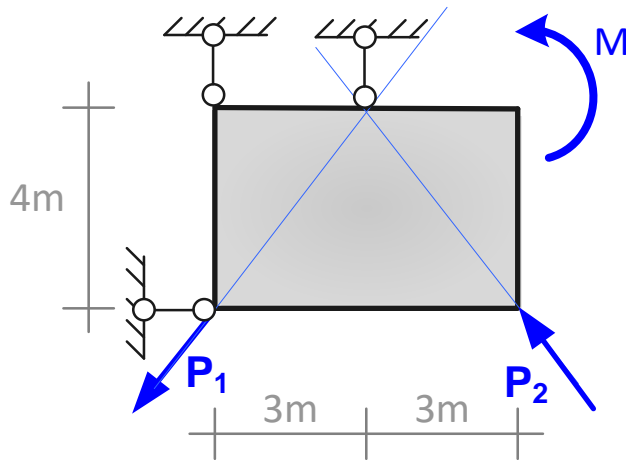
Rysujemy prostą Culmana i wyznaczamy siły w więziach.



Zadanie do rozwiązania.

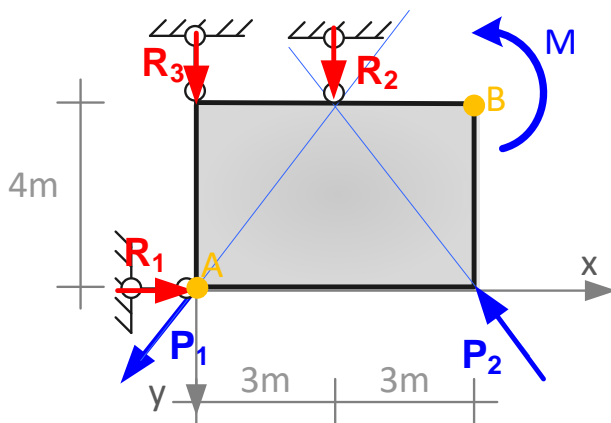
Wyznaczyć oddziaływania w więziach.

Dane $M = 12 \text{ kNm}$, $P_1 = 5 \text{ 000 N}$, $P_2 = 10 \text{ 000 N}$.



Podpowiedź 1

Przyjąć zwroty i oznaczenia sił oraz napisać dowolne równania równowagi, np.:



$$\begin{aligned} \sum X &= R_1 - P_{1x} - P_{2x} = 0; \\ \sum X &= R_1 - 3 - 6 = 0; \\ &\Rightarrow R_1 = 9 \text{ kN}, \\ \sum M_A &= 3R_2 - 6P_{2y} - M = 0. \\ \sum M_A &= 3R_2 - 48 - 12 = 0. \\ &\Rightarrow R_2 = 20 \text{ kN}, \\ \sum Y &= R_2 + R_3 + P_{1y} - P_{2y} = 0; \\ \sum Y &= 20 + R_3 + 4 - 8 = 0; \\ &\Rightarrow R_3 = -16 \text{ kN}, \end{aligned}$$

(zwrot przeciwny niż na rysunku)

Sprawdzenie

$$\begin{aligned} \sum M_B &= -4R_1 - 6R_3 - 3R_2 - 3P_{1y} + 4P_{2x} - M = \\ &= -4 \cdot 9 - 6 \cdot (-16) - 3 \cdot 20 - 3 \cdot 4 + 4 \cdot 6 - 12 = 0 \end{aligned}$$

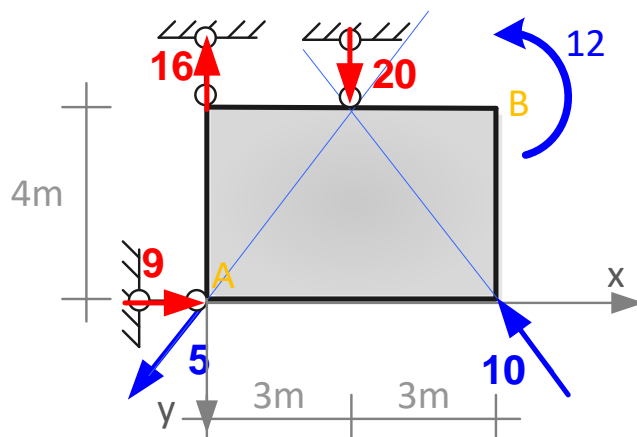
Odpowiedź

$R_1 = 9 \text{ kN}$

$R_2 = 20 \text{ kN}$

$R_3 = 16 \text{ kN}$

Zwroty, jak na rysunku obok.



6. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

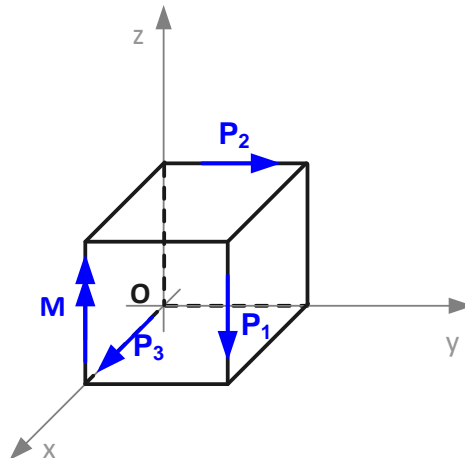
6.1. UKŁAD 3D

Zadanie nr 1

1. Wyznaczyć wypadkową układu jak na rysunku.
2. Podać punkt przebicia prostej działania siły z płaszczyzną yz.

Dane:

Sześcian o boku 500 cm, $M = 11$ kNm, $P_1 = 5$ kN, $P_2 = 4$ kN, $P_3 = 1000$ N.

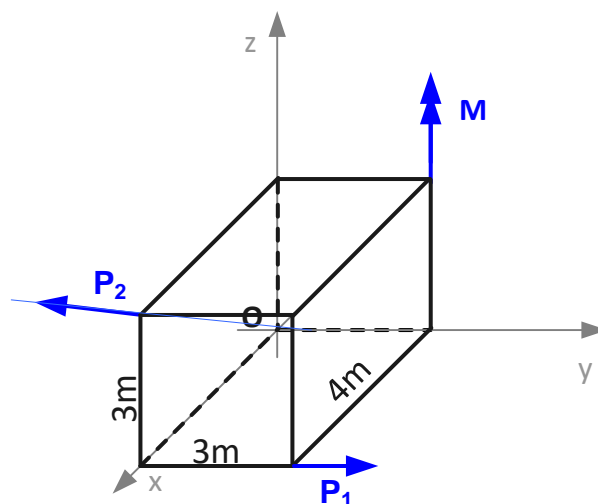


Zadanie nr 2

Podać składowe wektora \vec{M} , dla którego istnieje wypadkowa układu jak na rysunku.

Dane:

$P_1 = 20$ kN, $P_2 = 50$ kN (siła \vec{P}_2 działa wzdłuż przekątnej ściany bocznej prostopadłościanu)



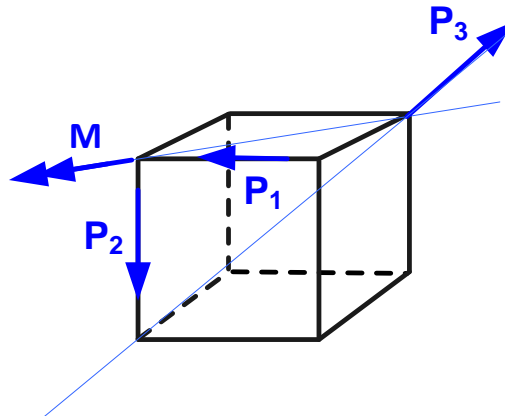
Zadanie nr 3

Dobrać tak siłę $P_1 = P$ aby istniała wypadkowa. Wyznaczyć ją dla $P \neq 0$.

Dane:

Sześcian o boku 30 dm.

$M = 15\sqrt{2}$ kNm, $P_2 = 10\ 000$ N, $P_3 = 10\sqrt{3}$ kN. (siła \vec{P}_3 działa wzdłuż przekątnej sześcianu)

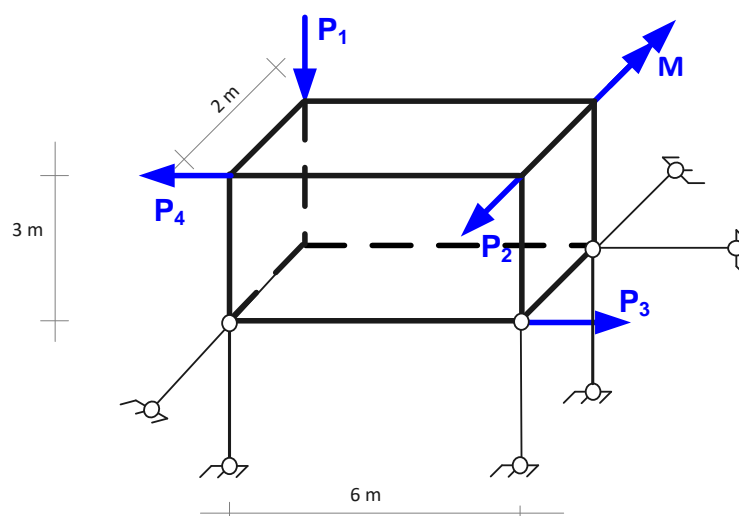
Zadanie nr 4

Wyznaczyć siły w więzach (kierunki więzów pokrywają się z krawędziami prostopadłościanu).

Dane:

$M = 20$ kNm, $P_1 = 20$ kN, $P_2 = 10$ kN, $P_3 = 30$ kN, $P_4 = 10$ kN,

(wektory obciążeń czynnych również pokrywają się z krawędziami prostopadłościanu).



Zadanie nr 5Część 1

Sprawdzić istnienie wypadkowej \vec{W} .

Dane:

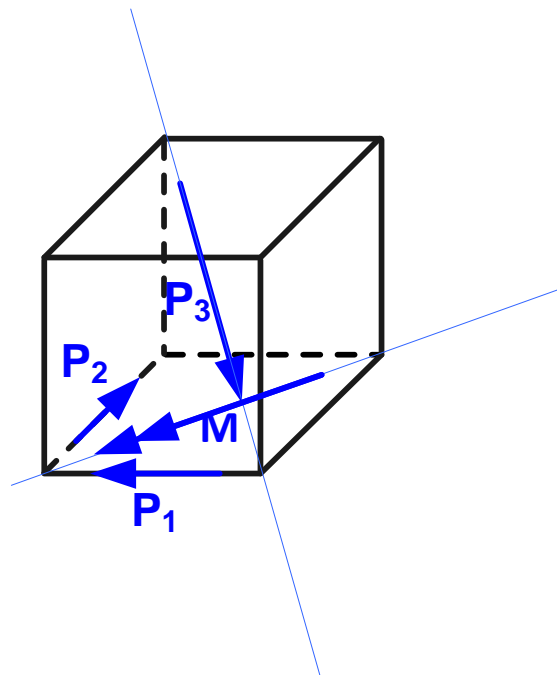
Sześcian o boku 3 m,

$M = 60\sqrt{2}$ kNm (wektor na przekątnej podstawy sześcianu),

$P_1 = 20$ kN (wektor wzdłuż krawędzi sześcianu),

$P_2 = 20$ kN (wektor wzdłuż krawędzi sześcianu),

$P_3 = 20\sqrt{3}$ kN (wektor na przekątnej sześcianu).

Część 2

Jeżeli istnieje wypadkowa, podać:

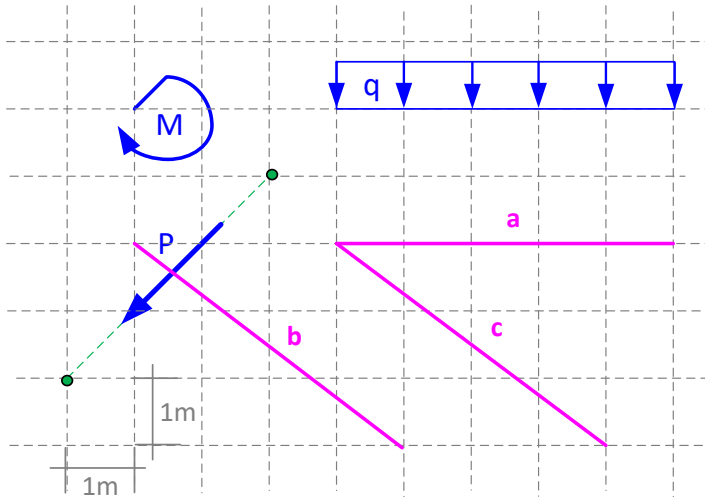
- wektor siły wypadkowej
- moduł wektora siły wypadkowej
- dowolny punkt lokacyjny prostej działania siły wypadkowej.

6.2. UKŁAD 2D

Zadanie nr 1

Wyznaczyć siły leżące na prostych a , b , c równoważące dane obciążenie.

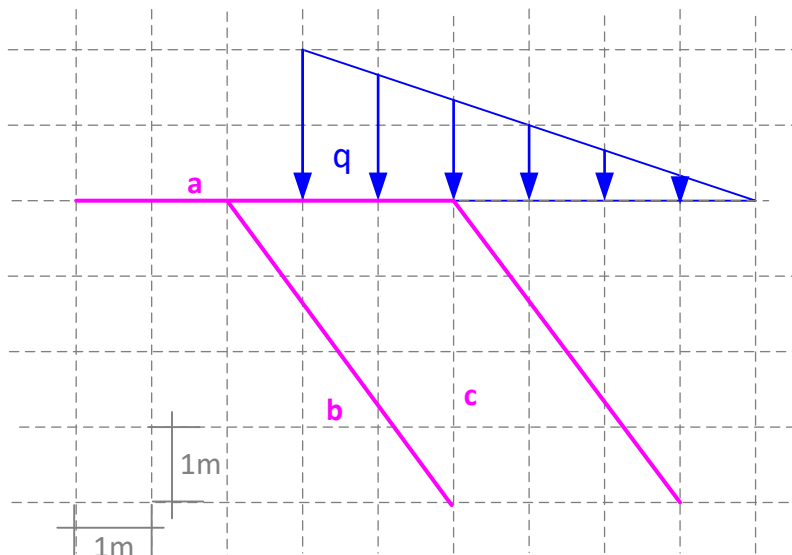
Dane : $M = 24 \text{ kNm}$, $P = 40\sqrt{2} \text{ kN}$, $q = 10 \text{ kN/m}$,



Zadanie nr 2

Wyznaczyć siły leżące na prostych a , b , c równoważące dane obciążenie.

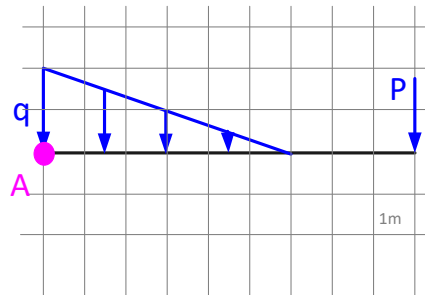
Dane : $q = 20 \text{ kN/m}$,



Zadanie nr 3

Wyznaczyć układ równoważny przechodzący przez punkt A.

Dane $q = 5 \text{ kN/m}$, $P = 10 \text{ kN}$

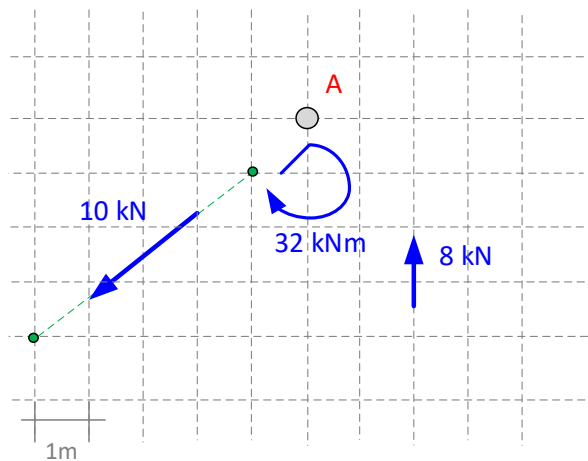


Zadanie nr 4

Dla danych z zadania 3, wyznaczyć układ równoważący przechodzący przez punkt A.

Zadanie nr 5

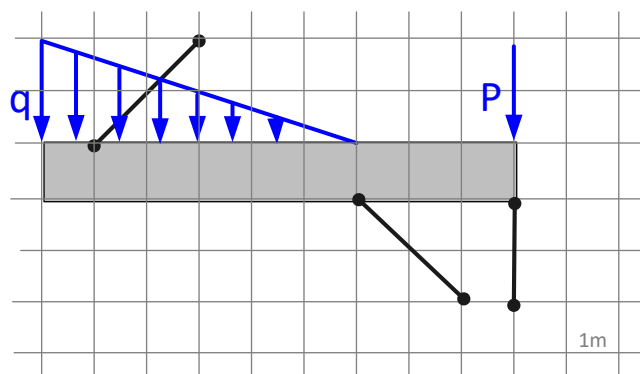
Zredukować układ do punktu A. Wynik proszę narysować na rysunku.



Zadanie nr 6

Wyznaczyć siły w więzach.

Dane $q = 8 \text{ kN/m}$, $P = 20 \text{ kN}$



CZĘŚĆ DRUGA

ANALIZA KINEMATYCZNA PŁASKICH USTROJÓW PRETOWYCH

1. WPROWADZENIE

Podstawowe pojęcia

Punkt materialny – obiekt o nieskończone małych wymiarach i skończonej masie, którego położenie można określać jak położenie punktu geometrycznego

Ciało materialne lub **układ materialny** – każdy układ ciał, który można rozpatrywać jako układ punktów materialnych.

Tarcza – jest to zbiór punktów materialnych, których wzajemne odległości są ustalone.

Ostoja (fundament, podłoże) jest z definicji nieruchomą tarczą.

Szczególnym przypadkiem tarczy jest **pręt pryzmatyczny**, którego dwa wymiary gabarytowe są o rząd mniejsze od wymiaru trzeciego.

Stopień swobody - niezależny parametr, za pomocą którego opisujemy położenie tarczy sztywnej na płaszczyźnie. Aby znać dokładne położenie tarczy sztywnej na płaszczyźnie wystarczy znać położenie dowolnego odcinka należącego do tarczy. Położenie tego odcinka może być opisane za pomocą dwóch współrzędnych dowolnego punktu i kąta, który jest kątem nachylenia tego odcinka.

Punkt swobodny na płaszczyźnie ma **dwa stopnie swobody** - potrzebne są dwie informacje geometryczne do określenia zmiany położenia punktu.

Tarcza swobodna na płaszczyźnie ma **trzy stopnie swobody** - potrzebne są trzy informacje geometryczne do określenia zmiany położenia tarczy.

Więź elementarna (więź elementarna) – najprostszymi ideowy model łącznika. Jest to pręt prosty opatrzony na końcach przegubami.

Oś pręta – miejsce geometryczne środków mas przekroju pręta.

2. SCHEMAT STATYCZNY

Niektóre konstrukcje można odwzorować za pomocą płaskich modeli fizycznych. Są to **schematy statyczne konstrukcji**, zawierające następujące informacje:

- geometria i położenie tarcz,
- połączenia tarcz z ostoją i ze sobą,
- rodzaj, położenie i wartość obciążeń czynnych.

Wszystkie elementy modelu płaskiego są w jednej płaszczyźnie, zwanej **płaszczyzną modelu**. (zał. Przemieszczenia elementów modelu mogą występować tylko w płaszczyźnie modelu.)

Na schematach statycznych pręt pryzmatyczny jest przedstawiany za pomocą odcinka pokrywającego się z osią pręta, np.



Wrocław, 2017. Wiadukt nad ul. Racławicką, fot. własna



łożyska¹ mostowe (miejsce oparcia przęsa na filarze)

¹ **łożysko** – element konstrukcyjny przenoszący obciążenia z jednego elementu konstrukcyjnego na drugi i umożliwiający wzajemne przemieszczenia elementów konstrukcyjnych (zob. Jan Bień, *Wprowadzenie do terminologii mostowej*, DWE Wrocław, 2022)

Szczególnym przypadkiem tarczy jest **pręt pryzmatyczny**, którego dwa wymiary gabarytowe są o rząd mniejsze od wymiaru trzeciego.

W odniesieniu do prętów obowiązują następujące definicje:

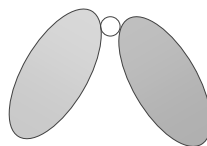
1. Przekroje poprzeczne są prostopadłe do osi pręta.
2. Przekrój poprzeczny jest figurą płaską, której przyporządkowany jest środek masy.
3. Oś pręta jest miejscem geometrycznym środków masy przekrojów poprzecznych.
4. Pręt pryzmatyczny ma oś prostoliniową, stały przekrój i tworzące równoległe do osi pręta.

Do modelowania połączeń służy **więź elementarna (wiąź elementarna)**, która jest prętem pryzmatycznym zakończonym przegubami płaskimi. Więż elementarna łączy dwie tarcze, może być fizyczna lub abstrakcyjna.

Rodzaje połączeń między tarczami:

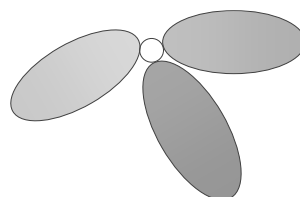
- *więzy – tarcze mogą się przesuwać względem siebie na kierunku prostopadłym do więzi oraz mogą się obracać w płaszczyźnie modelu*
 - więż zewnętrzny (pręt podporowy)
 - więż wewnętrzny (wewnętrzny pręt przegubowo-przegubowy, który też może stanowić tarczę)
- przegub - *tarcze mogą się tylko obracać względem przegubu*
 - przegub

Jeżeli dwie tarcze są połączone przegubem jest to równoznaczne z połączeniem dwoma więziami, które przecinają się w miejscu przegubu.



- przegub wielokrotny

Jeżeli przegub łączy więcej niż dwie tarcze – to jest to **przegub wielokrotny**. Jeżeli liczba tarcz związanych przegubem i wynosi t_i , to przegub ma **krotność $k_i = t_i - 1$** oraz zastępuje on **$e_i = 2k_i = 2(t_i - 1)$ więzi elementarnych**.



3. KINEMATYCZNA ANALIZA UKŁADÓW PŁASKICH

Analiza kinematyczna służy nam do określenia czy dany układ spełnia wszystkie warunki, aby być konstrukcją budowlaną.

Ważnym pojęciem przy analizie kinematycznej jest **stopień swobody**. Jest to niezależny parametr, za pomocą którego opisujemy położenie tarczy sztywnej na płaszczyźnie. Ich liczba określa nam **liczbę stopni swobody** tarczy sztywnej.

Pojedyncza tarcza sztywna posiada na płaszczyźnie trzy stopnie swobody.

Tarcza swobodna połączona z tarczą podstawową za pomocą **dwóch więzi** elementarnych zostaje pozbawiona dwóch stopni swobody. Punkt przecięcia tych więzi jest **środkiem wzajemnego obrotu tarcz**.

Od konstrukcji budowlanej wymagamy, aby nie była ona mechanizmem i pozostała nieruchoma pod wpływem obciążenia. Aby tak było należy odebrać jej wszystkie stopnie swobody. Robi się to przymocowując tarcze sztywne do nieruchomej tarczy podporowej za pomocą więzów. Tarczą podporową w przypadku rzeczywistych konstrukcji jest na przykład podłoże gruntowe.

Geometryczna niezmiennność układów płaskich

1. Układ tarcz nazywamy **wewnętrznie geometrycznie niezmiennym** (WGN), jeśli można go zastąpić jedną tarczą.
2. Układ tarcz nazywamy **geometrycznie niezmiennym** (GN), jeśli jest nieruchomy względem ostoi.
3. Układ tarcz nazywamy **geometrycznie zmiennym** (GZ), jeśli możliwy jest ruch układu względem ostoi.

Warunki geometrycznej niezmienności:

A. Warunek ilościowy

$$e \geq 3t$$



t – liczba tarcz

e – liczba więzi

Jest warunkiem koniecznym, ale niewystarczającym.

B. Warunek jakościowy:**Twierdzenie Aronholdta (o trzech tarczach)**

Układ złożony z trzech tarcz, w których każda para połączona jest za pomocą dwóch więzów elementarnych, tworzy jedną tarczę, jeżeli środki wzajemnego obrotu tych tarcz nie leżą na jednej prostej.

Jeżeli jedna z tych tarcz jest ostoją, to układ jest geometrycznie niezmienny.

Twierdzenie o dwóch tarczach

Dwie tarcze połączone za pomocą trzech więzów elementarnych, jednocześnie nierównoległych i jednocześnie niezbieżnych tworzą jedną tarczę.

Jeżeli jedna z tych tarcz jest ostoją, to układ jest geometrycznie niezmienny.

Geometryczna niezmiennosc układów płaskich

$e = 3t$ – warunek konieczny GN (geometrycznej niezmiennosci układu)

$e > 3t$ – warunek konieczny GN układu przeszywnionego

$e < 3t$ – warunek dostateczny GZ (geometrycznej zmienności układu)

Statyczna wyznaczalność układów płaskich

Statyczna wyznaczalność dotyczy tylko układów geometrycznie niezmiennych

$e = 3t, GN \Rightarrow SW$ – układ statycznie wyznaczalny

$e > 3t, GN \Rightarrow SN$ – układ statycznie niewyznaczalny

$n_h = e - 3t$ - stopień statycznej niewyznaczalności (SN) układu płaskiego

$e < 3t \Rightarrow GZ$

$n_g = 3t - e$ - stopień geometrycznej zmienności (GZ) układu płaskiego

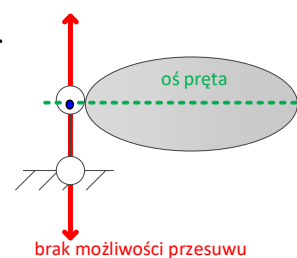
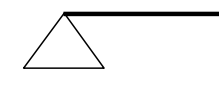
Jeśli $n_g = 1$, to układ nazywamy **mechanizmem o jednym stopniu swobody**.

Połączenia tarcz z ostoją – nazywamy **podporami**.

Rozróżniamy następujące rodzaje podpór:

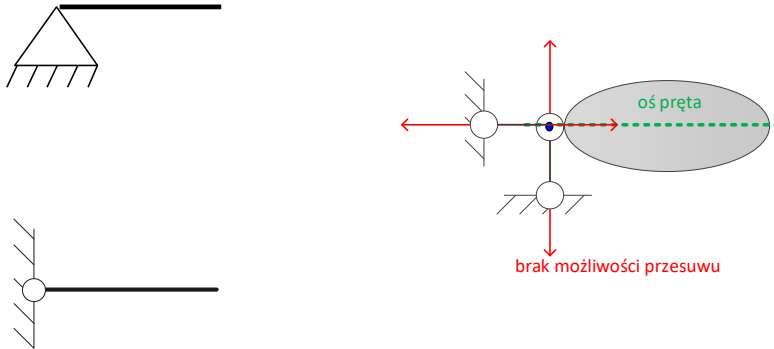
1. Podpora przegubowo-przesuwna

Podpora umożliwia obrót wokół punktu zamocowania i przesuw w wybranym kierunku, a odbiera jeden stopień swobody – przesuw na kierunku więzu.



2. Podpora przegubowa

Podpora umożliwia obrót wokół punktu zamocowania, a odbiera dwa stopnie swobody – przesuw na dowolnym kierunku.



3. Podpora sztywna (sztywne zamocowanie)

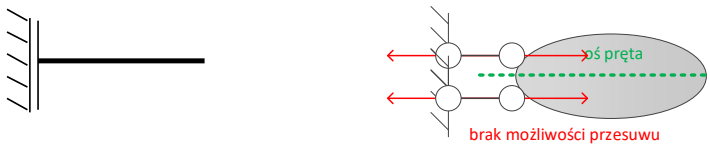
Podpora wszystkie trzy stopnie swobody – brak możliwości obrotu oraz przesuwu na dowolnym kierunku.



4. Podpora sztywno-przesuwna

Podpora umożliwia przesuw na wybranym kierunku, a odbiera dwa stopnie swobody – obrót oraz przesuw na kierunku prostopadłym.

- możliwy przesuw pionowy



- możliwy przesuw poziomy





Tabela. Zestawienie podpór.

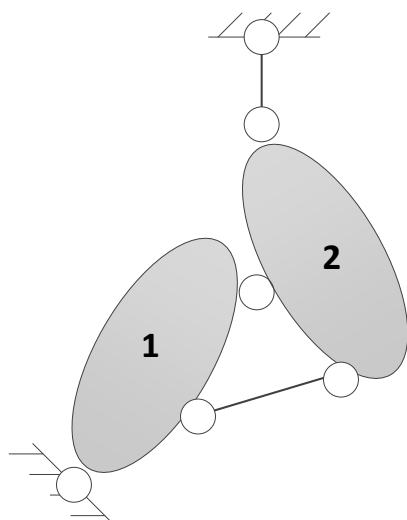
Nazwa podpory	Oznaczenie	Opis	Połączenie tarczy z ostoją za pomocą więzów
Podpora przegubowo-przesuwna		Podpora umożliwia obrót wokół przegubu oraz przesuw w wybranym kierunku	
Podpora przegubowa		Podpora umożliwia obrót wokół przegubu	
Podpora sztywna		Podpora unieruchamia tarczę	
Podpora sztywno-przesuwna („tyżwa pionowa”)		Podpora umożliwia przesuw w wybranym kierunku. (pionowym)	
Podpora sztywno-przesuwna („tyżwa pozioma”)		Podpora umożliwia przesuw w wybranym kierunku. (poziomym)	

4. PRZYKŁADY ROZWIĄZANE

4.1. DOWOLNE UKŁADY TARCZOWE

PRZYKŁAD NR 1

Przeprowadzić analizę kinematyczną układu tarczowego:



Warunek ilościowy:

$$t = 2$$

$$e = 6$$

$$e = 3t$$

Warunek jakościowy:

(1 - 2) tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach - $(1 - 2)_{2T}$

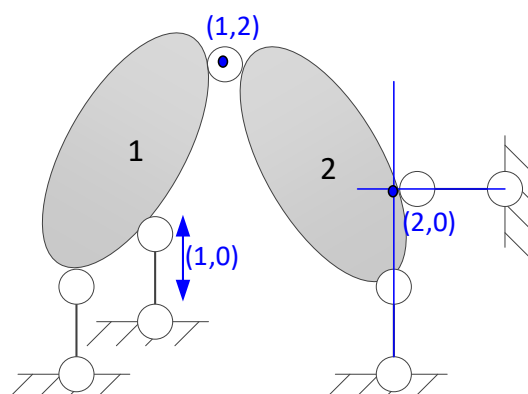
$[(1 - 2) - 0]$ tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach

$$[(1 - 2)_{2T} - 0]_{2T} = 0$$

Odpowiedź: Układ GN SW

PRZYKŁAD NR 2

Przeprowadzić analizę kinematyczną układu tarczowego:



Warunek ilościowy:

$$t = 2$$

$$e = 6$$

$$e = 3t$$

Warunek jakościowy:

(1 - 2 - 0) tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o trzech tarczach - $(1 - 2 - 0)_{3T}$

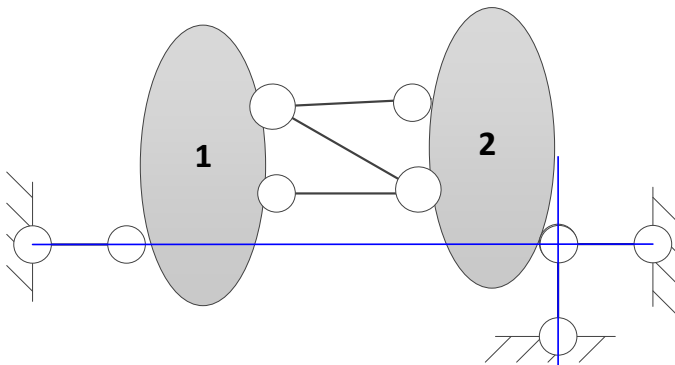
$$(1 - 2 - 0)_{3T} = 0$$

Odpowiedź: Układ GN SW



PRZYKŁAD NR 3

Przeprowadzić analizę kinematyczną układu tarczowego:



Warunek ilościowy:

$$t = 2$$

$$e = 6$$

$$e = 3t$$

Warunek jakościowy:

(1 – 2) tworzy jedną tarczę na podstawie

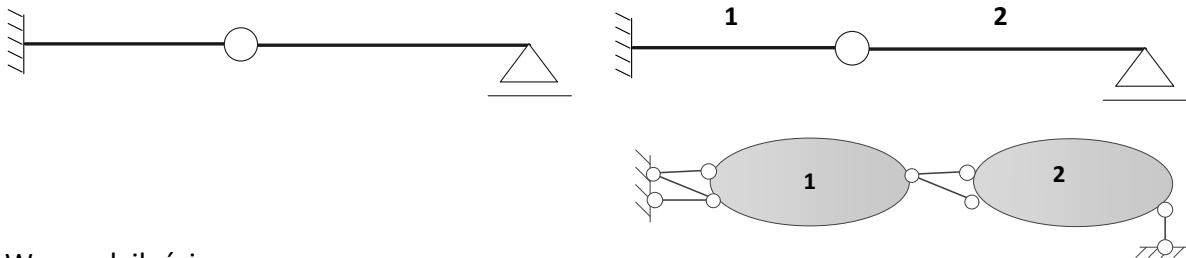
twierdzenia o dwóch tarczach - $(1 - 2)_{2T}$ $[(1 - 2) - 0]$ **NIE tworzy** jednej tarczy

(więzi zbieżne)

Odpowiedź: **Układ GZ**

4.2. UKŁADY BELKOWE

Każdy układ prętowy możemy zastąpić tarczowym, np.:



Warunek ilościowy:

$$t = 2$$

$$e = 6$$

$$e = 3t$$

Warunek jakościowy:

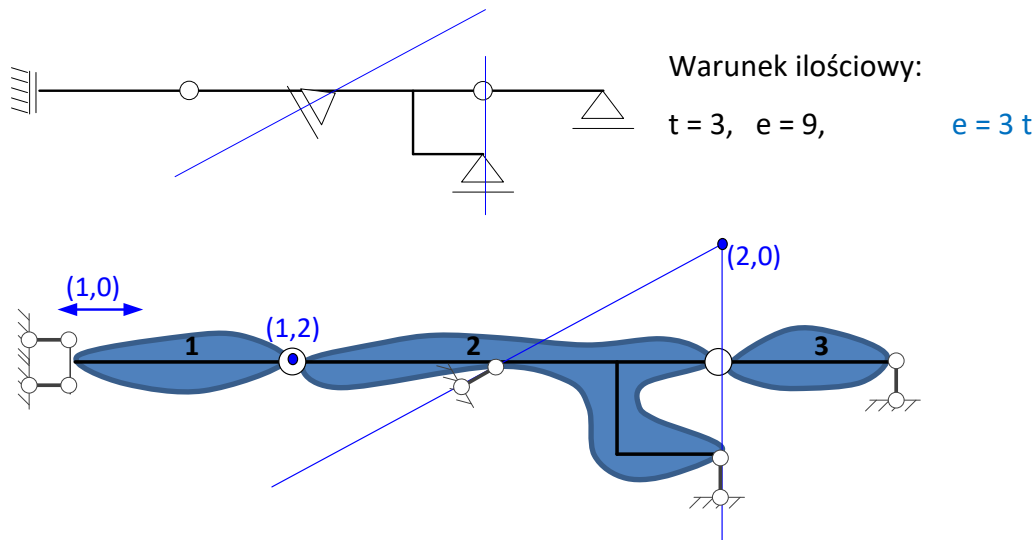
(0 – 1) tworzy jedną tarczę nieruchomą - na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach - $(1 - 2)_{2T}$ $[(0 - 1) - 2]$ tworzy jedną tarczę nieruchomą - na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach

$$[(0 - 1)_{2T} - 2]_{2T} = 0$$

Odpowiedź: **Układ GN SW**

PRZYKŁAD NR 1

Przeprowadzić analizę kinematyczną belki wieloprzęstowej:

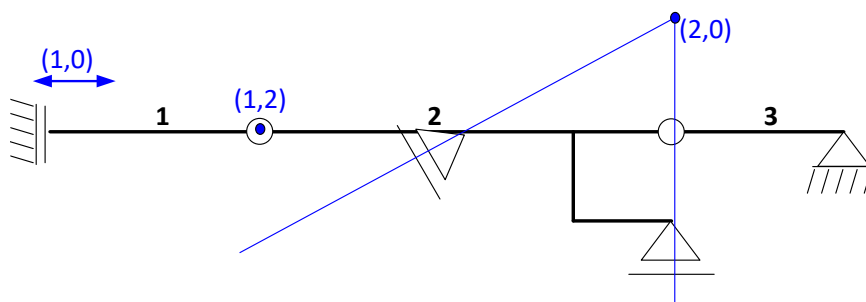


Warunek jakościowy:

(1 - 2 - 0) tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o trzech tarczach - $(1 - 2 - 0)_{3T}$ [[1 - 2 - 0] - 3] tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach - $[[1 - 2 - 0] - 3]_{2T}$ $[(1 - 2 - 0)_{3T} - 3]_{2T} = 0,$ Odpowiedź: **Układ GN SW**

PRZYKŁAD NR 2

Przeprowadzić analizę kinematyczną belki wieloprzęstowej:



Warunek ilościowy:

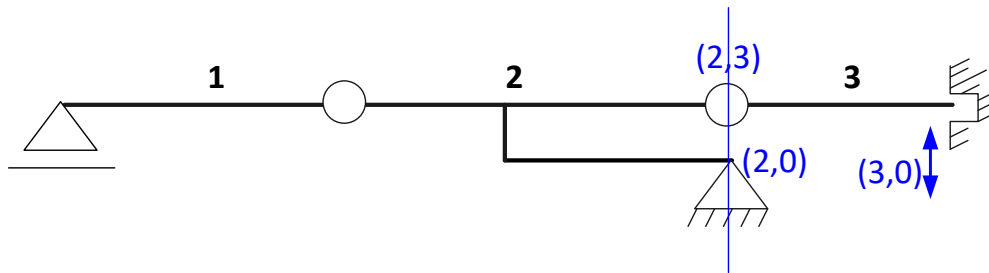
 $t = 3, e = 10, e > 3t$

Warunek jakościowy:

(1 - 2 - 0) tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o trzech tarczach - $(1 - 2 - 0)_{3T}$ [[1 - 2 - 0] - 3] tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach - $[[1 - 2 - 0] - 3]_{2T}$ $[(1 - 2 - 0)_{3T} - 3]_{2T} = 0,$ Odpowiedź: **Układ GN SN**

PRZYKŁAD NR 3

Przeprowadzić analizę kinematyczną belki wieloprzęsłowej:



Warunek ilościowy:

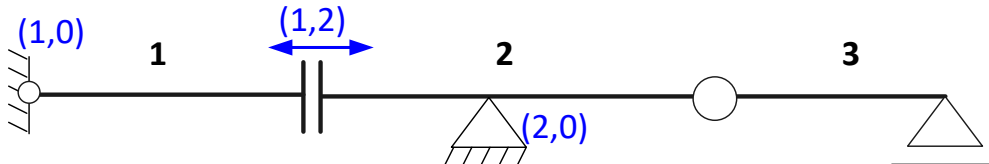
$$t = 3, \quad e = 9, \quad e = 3t$$

Warunek jakościowy:

(2 - 3 - 0) **NIE tworzy** jednej tarczy (środki obrotu leżą na jednej prostej)Odpowiedź: **Układ GZ**

PRZYKŁAD NR 4

Przeprowadzić analizę kinematyczną belki wieloprzęsłowej:



Warunek ilościowy:

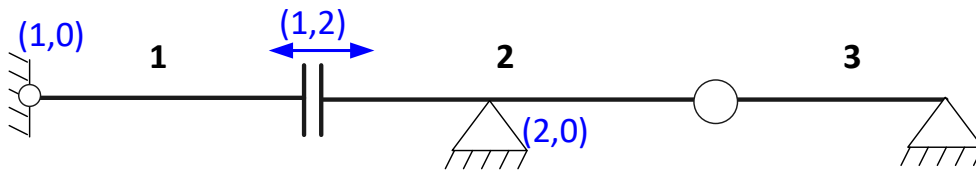
$$t = 3, \quad e = 9, \quad e = 3t$$

Warunek jakościowy:

(1 - 2 - 0) **NIE tworzy jednej tarczy** (środki obrotu leżą na jednej prostej)Odpowiedź: **Układ GZ**

PRZYKŁAD NR 5

Przeprowadzić analizę kinematyczną belki wieloprzęstowej:



Warunek ilościowy:

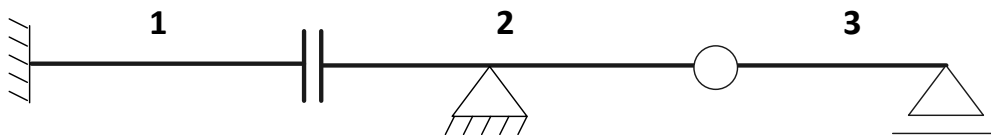
$$t = 3, \quad e = 10, \quad e > 3t$$

Warunek jakościowy:

(1 - 2 - 0) **NIE tworzy jednej tarczy** (środki obrotu leżą na jednej prostej)Odpowiedź: **Układ GZ**

PRZYKŁAD NR 6

Przeprowadzić analizę kinematyczną belki wieloprzęstowej:



Warunek ilościowy:

$$t = 3, \quad e = 10, \quad e > 3t$$

Warunek jakościowy:

(0 - 1) tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach - $(1 - 0)_{2T}$ [(0 - 1) - 2] tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach - $[(1 - 0) - 2]_{2T}$ [(0 - 1 - 2) - 3] tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach - $[(0 - 1 - 2) - 3]_{2T}$

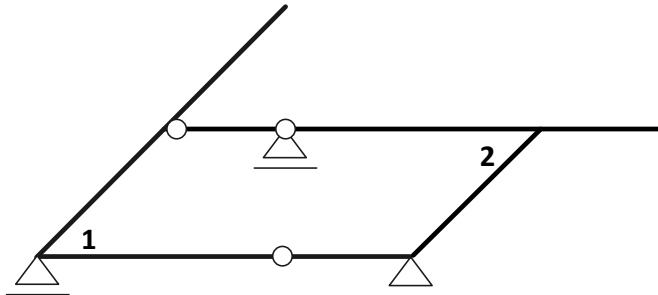
$$\{[(0 - 1)_{2T} - 2]_{2T} - 3\}_{2T} = 0$$

Odpowiedź: **Układ GN SN**

4.3. UKŁADY RAMOWNICOWE

PRZYKŁAD NR 1

Przeprowadzić analizę kinematyczną ramy:



I sposób:

Warunek ilościowy:

$$t = 2, \quad e = 6, \quad e = 3t$$

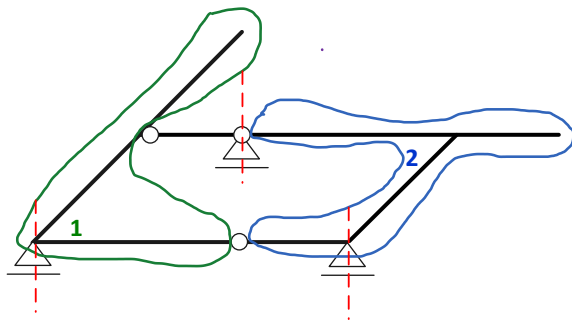
Warunek jakościowy:

$(1 - 2)$ tworzy jedną tarczę na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach - $(1 - 2)_{2T}$

Układ jest WGN, ale

$[(1 - 2) - 0]$ **NIE tworzy** jednej tarczy

(3 więzy pionowe)

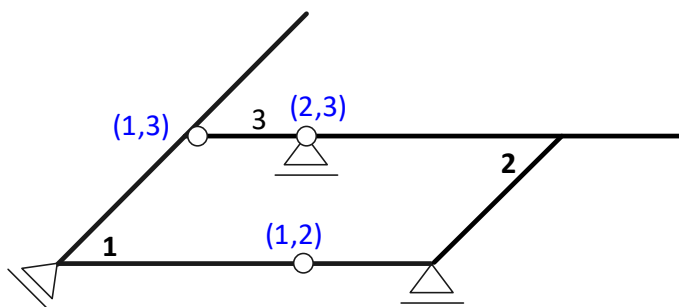


II sposób: $t = 3, \quad e = 9, \quad e = 3t$ (zob. przykład poniżej)

Odpowiedź: **Układ GZ**

PRZYKŁAD NR 2

Przeprowadzić analizę kinematyczną ramy:



I sposób:

$$t = 2, \quad e = 6, \quad e = 3t$$

$$[(1 - 2)_{2T} - 0]_{2T} = 0,$$

II sposób:

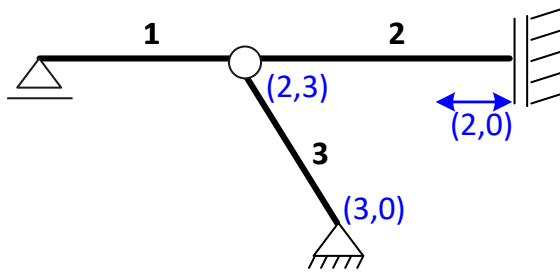
$$t = 3, \quad e = 9, \quad e = 3t$$

$$[(1 - 2 - 3)_{3T} - 0]_{2T} = 0$$

Odpowiedź: **Układ GN SW**

PRZYKŁAD NR 3

Przeprowadzić analizę kinematyczną ramy:



$$t = 3, \quad e = 9, \quad e = 3t$$

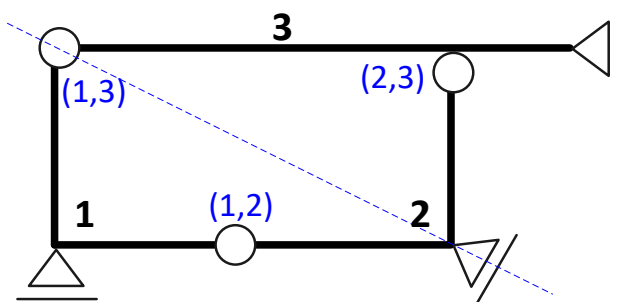
(przegub dwukrotny = 4 więzi)

$$[(0 - 2 - 3)_{3T} - 1]_{2T} = 0$$

Odpowiedź: Układ GN SW

PRZYKŁAD NR 4

Przeprowadzić analizę kinematyczną ramy:



$$t = 3, \quad e = 9, \quad e = 3t$$

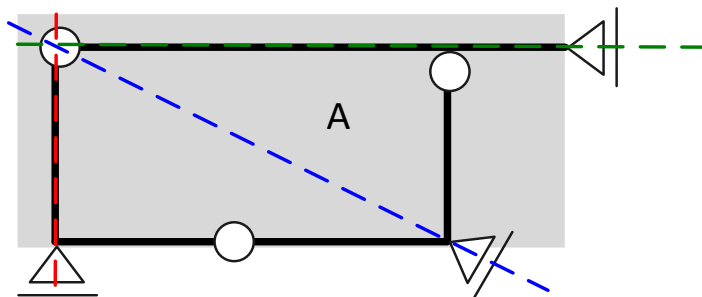
$$[(1 - 2 - 3)_{3T} - 0]$$

NIE tworzy jednej tarczy (3 więzi zbieżne)

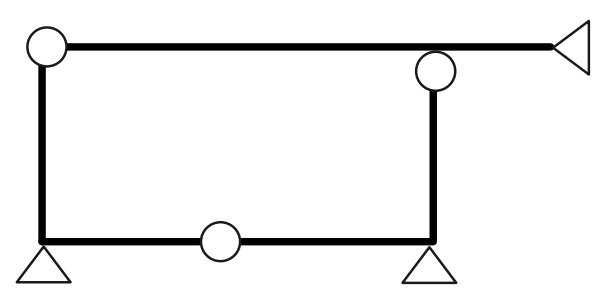
Odpowiedź: Układ GZ

Proszę zaproponować podobny układ GN SW:

Podpowiedź:



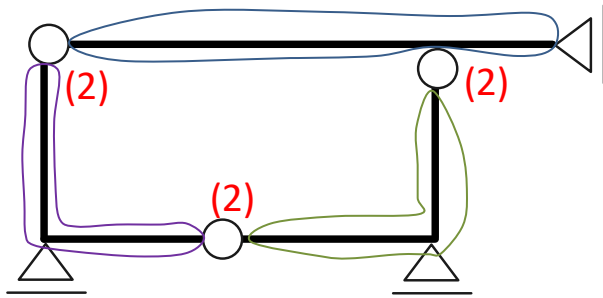
Układ jest WGN (1-2-3=A), więc wystarczy zaproponować 3 podpory przegubowo-przesuwne, aby nie były równoległe ani zbieżne, np.:



Dodatkowe pytanie:

Sprawdzić warunek ilościowy

a)

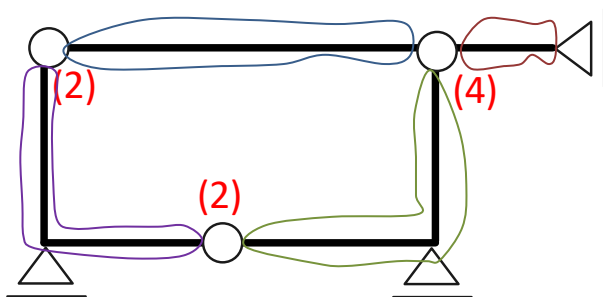


$$t = 3, e = 3 \times 2 + 3 = 9,$$

$$e = 3t$$



b)



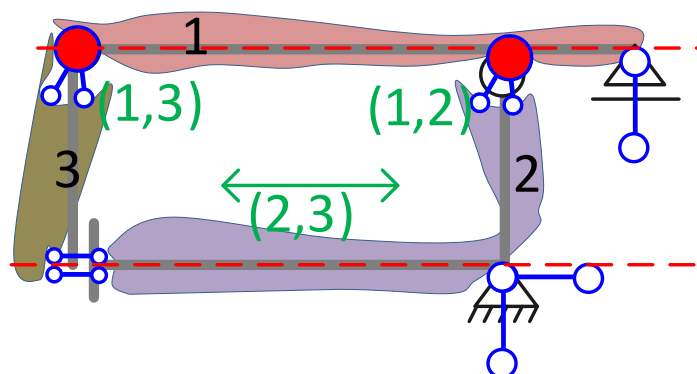
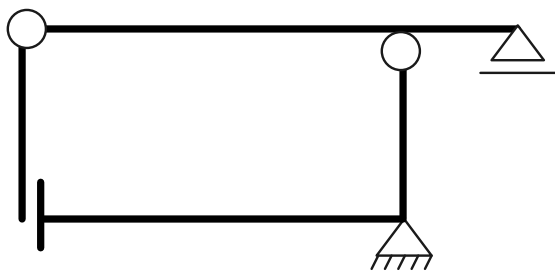
$$t = 4, e = 2 \times 2 + 4 + 3 = 11,$$

$$e < 3t$$

Układ GZ!!

PRZYKŁAD NR 5

Przeprowadzić analizę kinematyczną ramy:



$$t = 3, e = 9,$$

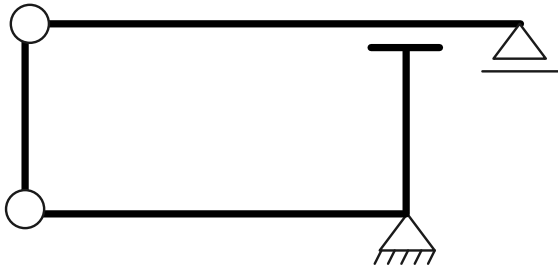
$$e = 3t$$

(3 środki obrotu leżą na jednej prostej)

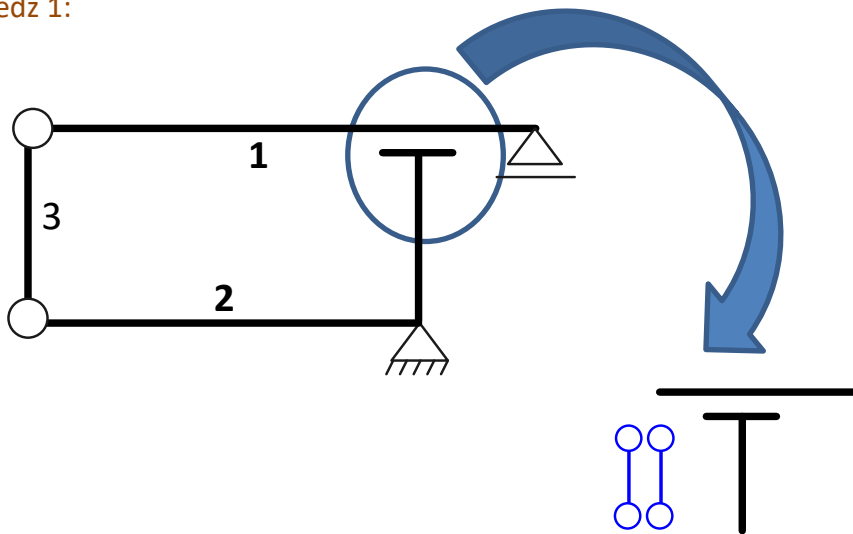
Odpowiedź Układ GZ

PRZYKŁAD NR 6

Przeprowadzić analizę kinematyczną ramy:



Podpowiedź 1:



Podpowiedź 2:

I sposób:

$$t = 2, \quad e = 6, \quad e = 3t$$

(3 więzi zbieżne)

II sposób:

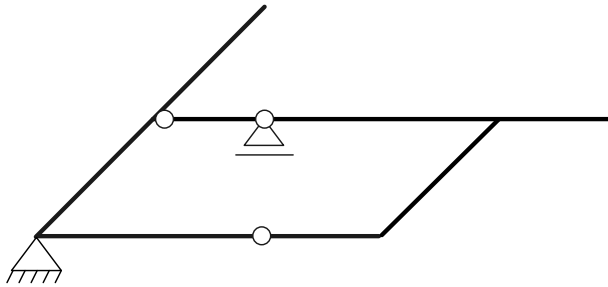
$$t = 3, \quad e = 9, \quad e = 3t$$

(3 środki obrotu leżą na jednej prostej)

Odpowiedź **Układ GZ**

PRZYKŁAD NR 7

Sprawdzić czy poniższy układ może być przykładem schematu statycznego konstrukcji budowlanej.

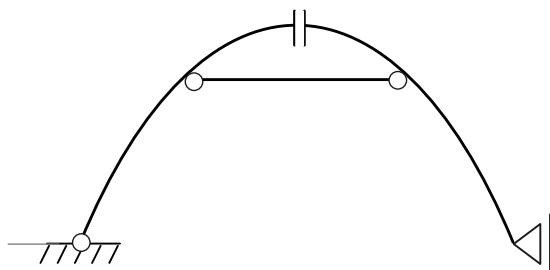


Odpowiedź TAK – bo układ GN, SW

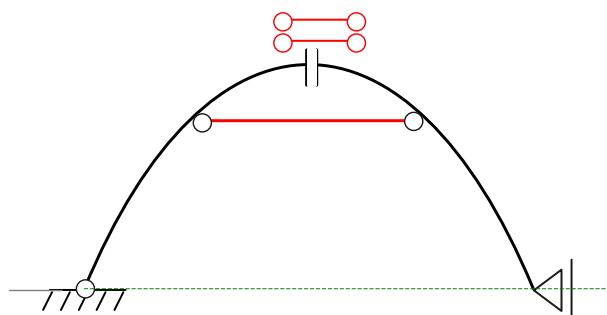
[dowód: WGN - spełnione twierdzenie o dwóch tarczach lub o trzech tarczach (w zależności czy pręt przegubowo-przegubowy zostanie potraktowany jako więź czy jako tarcza), a następnie twierdzenie o dwóch tarczach]

PRZYKŁAD NR 8

Sprawdzić czy poniższy układ może być przykładem schematu statycznego konstrukcji budowlanej.



Podpowiedź:

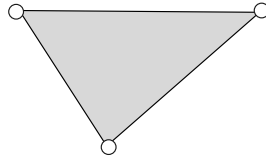


Odpowiedź NIE – bo układ GZ

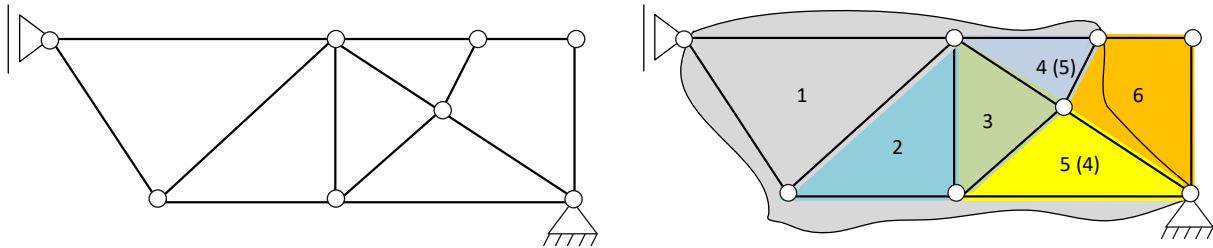
[dowód – podwójnie nie jest spełnione twierdzenie o dwóch tarczach]

4.4. UKŁADY KRATOWNICOWE

Najprostszym przypadkiem tarczy o strukturze kratowej jest trójkąt zbudowany z 3 prętów połączonych przegubowo (**tw. Aronholdta**) o trzech węzłach nie leżących na jednej prostej.



Jeżeli utworzymy ciąg trójkątów, w którym każdy sąsiadujący trójkąt ma jeden bok wspólny, to ciąg taki jest jedną tarczą.



Ilościowy warunek geometrycznej niezmienności układów kratowych:

$$e = 3t$$

t – liczba tarcz

e – liczba więzów

zakładamy, że każdy pręt kratownicy jest tarczą, czyli $p = t$

p – liczba prętów kratownicy

w – liczba węzłów kratownicy

r – liczba więzi podporowych

$$r + \sum_w 2(p_i - 1) = 3p$$

p_i – liczba prętów kratownicy zbiegających się w węzle

$$r + 2 \sum_w p_i - 2 \sum_w 1 = 3p$$

$$r + 2 \cdot 2p - 2 \cdot w = 3p$$

$$\boxed{r + p = 2w}$$



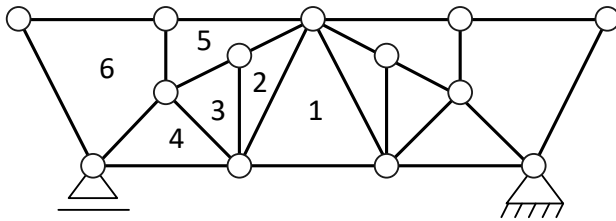
Jeśli $r + p < 2w$

to układ jest **geometrycznie zmienny o stopniu zmienności** $s \geq 2w - (r + p)$

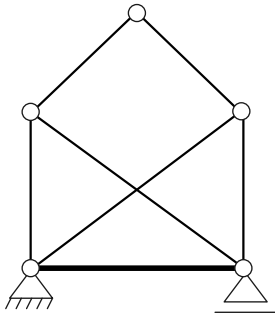
Jeśli $r + p > 2w$

to układ jest **geometrycznie niezmienny o stopniu przesztywnienia** $n = r + p - 2w$

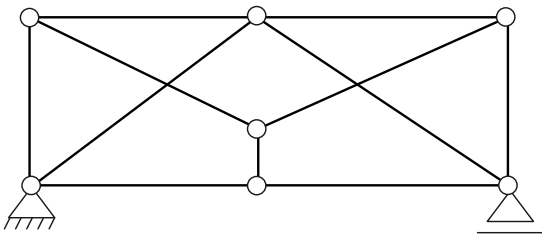
Przykłady układów geometrycznie niezmiennych statycznie wyznaczalnych:



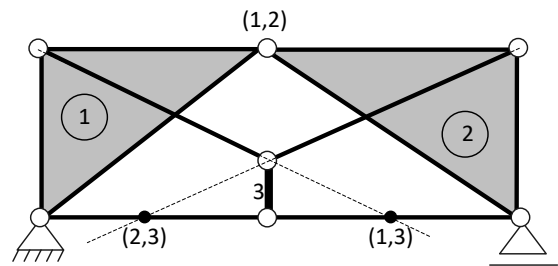
budowa trójkątna kratownicy



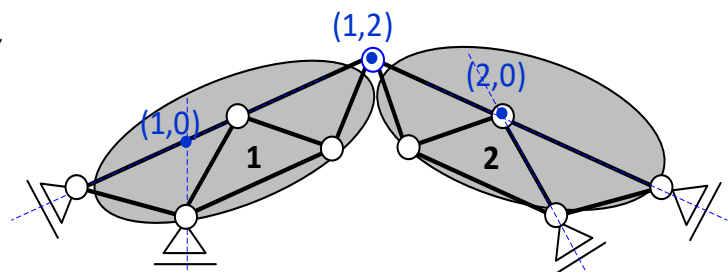
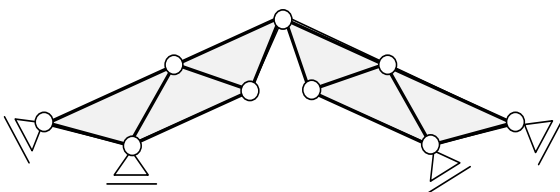
Pręt z pasa dolnego jest jako baza i z jego końców wyprowadzono dwa nierównoległe pręty do przecięcia się, czyli tak utworzony nowy węzeł tworzy wraz z bazą jedną tarczę, itd.



=

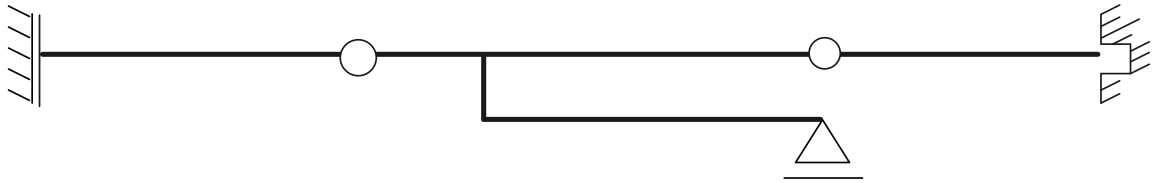


Dwie tarcze tworzące układ trójprzegubowy:



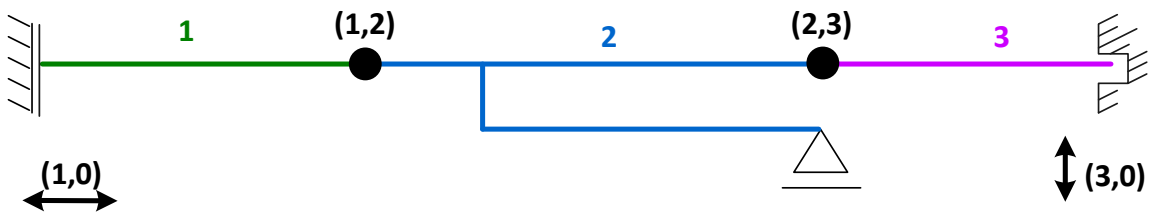
4.5. BRAK MOŻLIWOŚCI WYKORZYSTANIA TWIERDZEŃ O TARCZACH

Analizę poniższej belki wieloprzęsłowej nie można przeprowadzić z wykorzystaniem twierdzenia o dwóch / trzech tarczach.

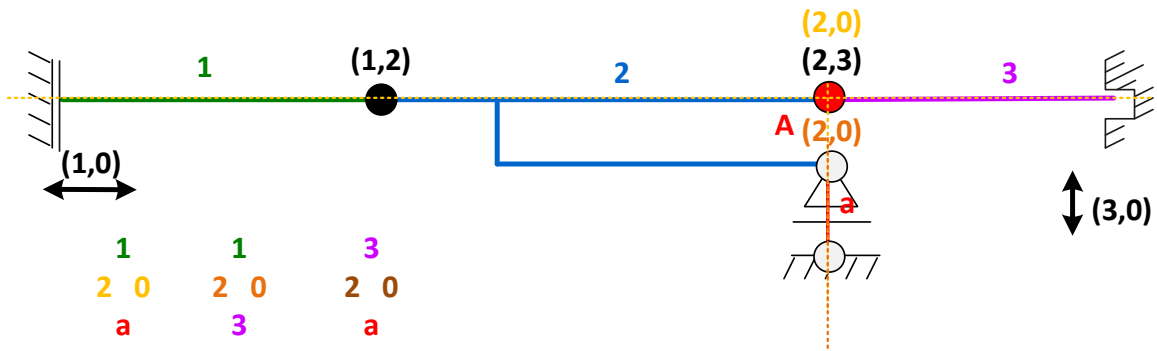


Zakładamy, że układ jest mechanizmem. Poszukujemy środków wzajemnego obrotu tarcz:

(zob. punkt 3 część 4)

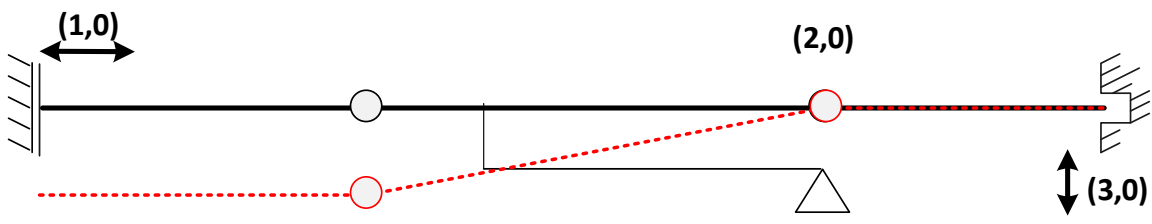


Środek (2,0) poszukujemy trzema sposobami – 3 kombinacje z wykorzystaniem tarczy 1, 3 oraz więzi podporowej.



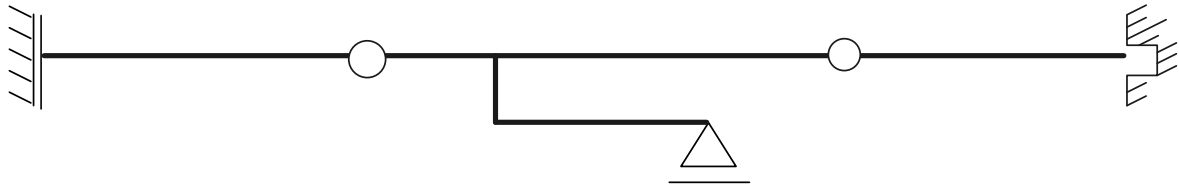
Stąd wniosek, że tarcza druga obraca się wokół swojego środka obrotu (punkt A).

Poniżej przedstawiono możliwe zachowanie się mechanizmu:



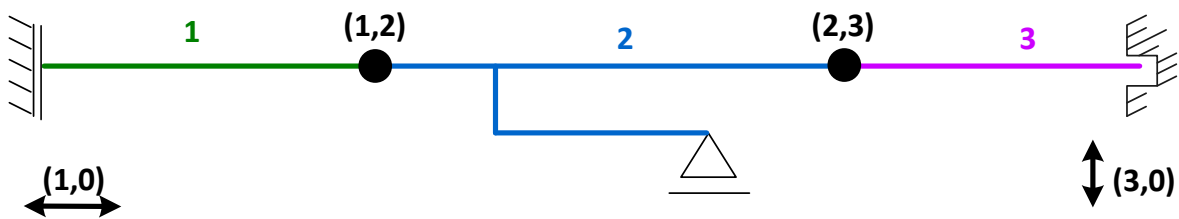
Odpowiedź: Układ GZ

Gdyby kierunek więzi podporowej nie przecinał przegubu:

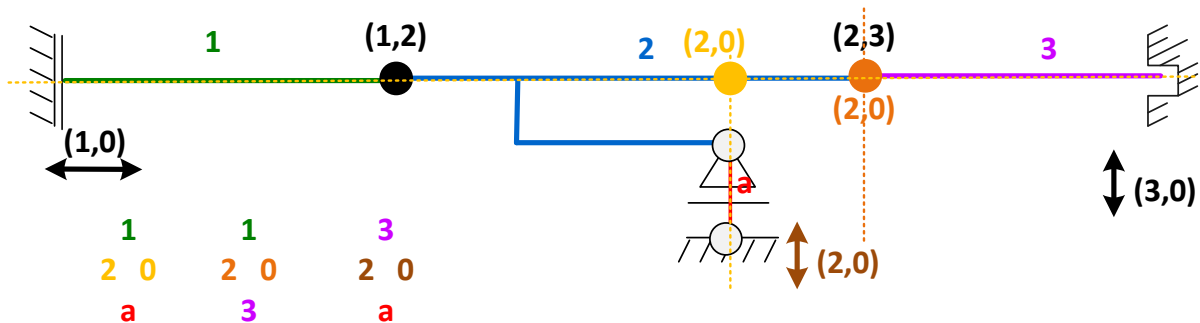


Zakładamy, że układ jest mechanizmem. Poszukujemy środków wzajemnego obrotu tarcz:

(zob. punkt 3 część 4)



Środek (2,0) poszukujemy trzema sposobami – 3 kombinacje z wykorzystaniem tarczy 1, 3 oraz więzi podporowej.

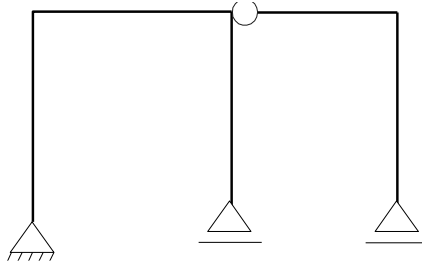


Stąd wniosek, że tarcza druga jest nieruchoma – brak jednoznacznie wyznaczonego środka obrotu tarczy względem fundamentu. Jeżeli tarcza druga jest nieruchoma, to zarówno pierwsza, jak i trzecia również nie ma możliwości ani przesuwu, ani obrotu.

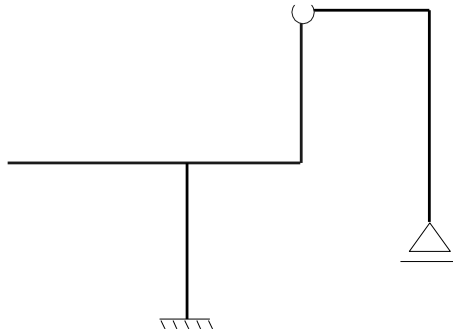
Układ GN, SW

5. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

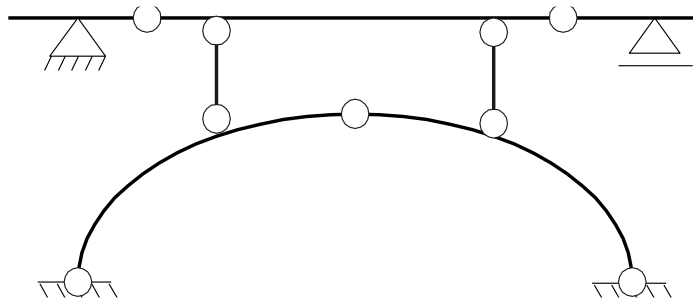
Zadanie nr 1



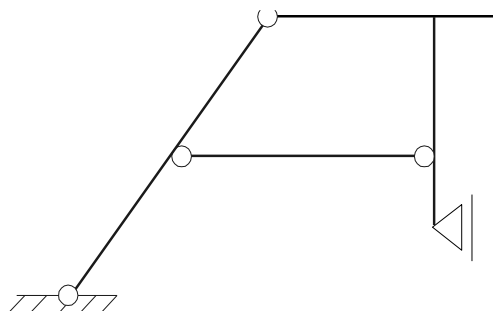
Zadanie nr 2



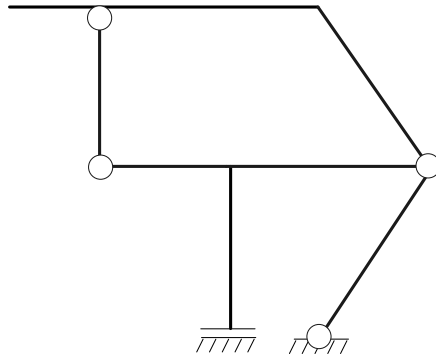
Zadanie nr 3



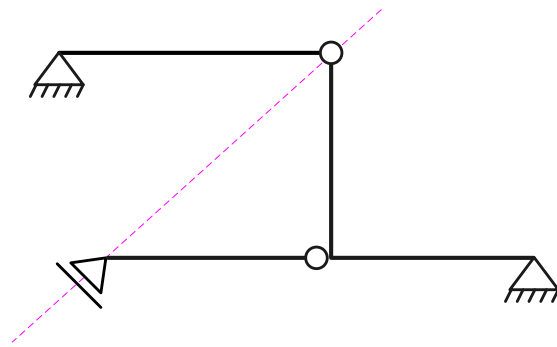
Zadanie nr 4



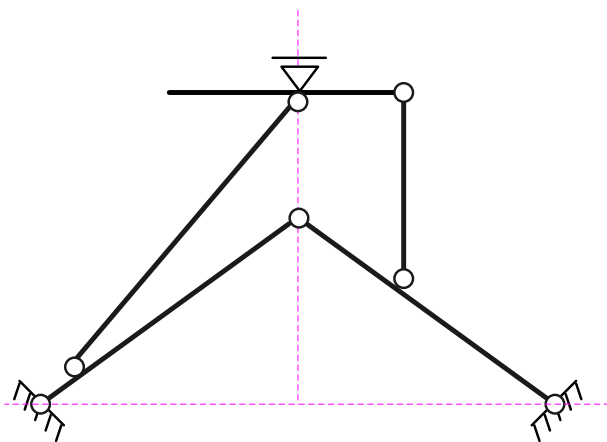
Zadanie nr 5



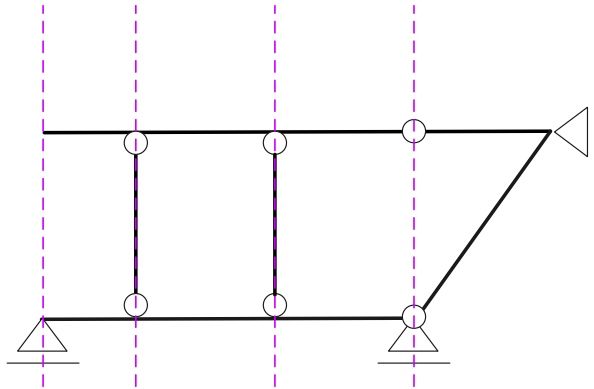
Zadanie nr 6



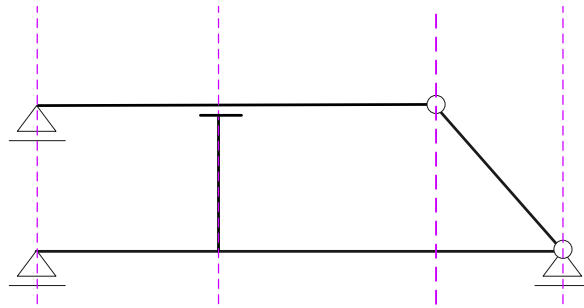
Zadanie nr 7



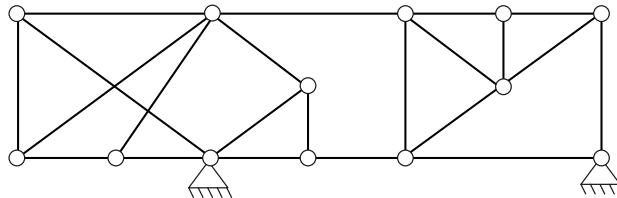
Zadanie nr 8



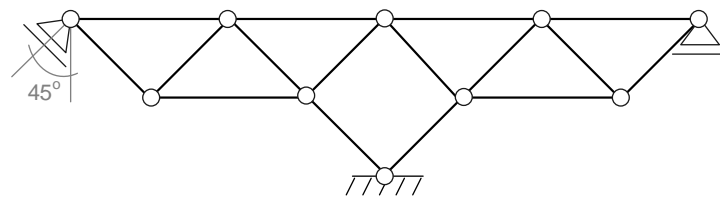
Zadanie nr 9



Zadanie nr 10



Zadanie nr 11



CZĘŚĆ TRZECIA SIŁY W PŁASKICH USTROJACH

1. WPROWADZENIE

Podstawowe pojęcia:

Podstawowym pojęciem mechaniki jest pojęcie siły jako wektora.

Siła – jakakolwiek przyczyna fizyczna zdolna do zmiany warunków ruchu lub spoczynku ciała materialnego albo do jego odkształcenia

Siła jest wielkością kierunkową, czyli wektorem liniowym, tzn. jest określona przez prostą działania, moduł i zwrot.

Parą sił nazywamy dwie siły leżące na prostych równoległych, mające tę samą wartość i przeciwne zwroty.

Moment pary sił jest wektorem swobodnym, prostopadłym do płaszczyzny działania pary sił, o zwrocie zgodnym z regułą prawej dłoni i wartości $M = P \cdot a$, gdzie a jest ramieniem pary sił.

Układ sił i momentów par sił nazywamy **obciążeniem dowolnym** ciała sztywnego.

Dwa układy obciążeń są sobie **równoważne**, jeśli zastąpienie jednego układu obciążeń układem drugim wywołuje takie same skutki.

Redukcją układu obciążeń nazywamy zastąpienie tego układu najprostszym układem równoważnym.

Układ obciążeń działających na ciało sztywne jest w **równowadze statycznej**, jeśli redukuje się do zera.

Tarcza – jest to zbiór punktów materialnych, których wzajemne odległości są ustalone.

Punkt swobodny na płaszczyźnie ma **dwa stopnie swobody** - potrzebne są dwie informacje geometryczne do określenia zmiany położenia punktu.

Tarcza swobodna na płaszczyźnie ma **trzy stopnie swobody** - potrzebne są trzy informacje geometryczne do określenia zmiany położenia tarczy.

Ostoja (fundament, podłoże) jest z definicji nieruchomą tarczą.

W statyce przyjmuje się szereg założeń, najważniejsze z nich:

Założenia dotyczące konstrukcji

Każda konstrukcja wykonana jest z konkretnego materiału charakteryzującego się pewnymi własnościami fizycznymi, co do których czynimy założenia:



ciągłość materiału

materiał ciała wypełnia w sposób ciągły całą jego objętość, czyli stanowi tzw **kontinuum materialne**,



jednorodność materiału

materiał jest **jednorodny**, czyli równe objętości mają równe masy,



izotropowość materiału

materiał jest **izotropowy**, czyli mający te same właściwości we wszystkich kierunkach.

Założenia dotyczące obciążeń



obciążenia działają w sposób **statyczny**, tzn. wzrastają od zera do swojej wartości końcowej w sposób powolny,

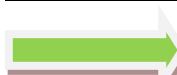


skutki działania poszczególnych sił są niezależne. Skutek działania układu sił jest równy sumie wektorowej skutków sił składowych (**zasada superpozycji**)



konstrukcje rzeczywiste pod wpływem obciążeń doznają odkształceń (podlegają procesom deformacji). Zakładamy, że te deformacje są pomijalnie małe, a więc konfiguracja geometryczna obciążeń w procesie obciążania jest niezmienna (**zasada zeszywnienia**).

W odniesieniu do prętów obowiązują następujące definicje:



Przekrój poprzeczny jest figurą płaską, której przyporządkowany jest środek masy. Przekroje poprzeczne są prostopadłe do osi pręta.



Oś pręta jest miejscem geometrycznym środków masy przekrojów poprzecznych.



Pręt pryzmatyczny ma oś prostoliniową, stały przekrój i tworzące równoległe do osi pręta.

2. SIŁY CZYNNNE

Obciążenia obiektów budowlanych lub ich części można – ze względu na czas ich trwania i sposób działania – podzielić na

stałe

np. ciężar własny stałych elementów i konstrukcji, w tym elementów nośnych i osłonowych; ciężar własny gruntu w stanie rodzimym, nasypów i zasypów, i parcie z niego wynikające; siły sprężające konstrukcję.

zmienne

technologiczne (zależne od funkcji obiektu i sposobu jego użytkowania)
środowiskowe (zależne od środowiska, w którym obiekt się znajduje).

Mogą one być

- w całości długotrwałe (np. parcie wody o stałym poziomie jej zwierciadła),
- w części długotrwałe (np. obciążenia stropów w pomieszczeniach)
- w całości krótkotrwałe (np. obciążenia śniegiem lub wiatrem).

wyjatkowe

np. uderzenia pojazdami, obciążenia sejsmiczne, obciążenia spowodowane huraganowym wiatrem itp.

Obciążenia czynne są obciążeniami przyłożonymi do układu, np. siły skupione, momenty skupione, obciążenie rozłożone.

Obciążenia dzielimy też na

bezpośrednie

np.:

- stałe lub zmienne w czasie
- skupione lub ciągłe
- statyczne lub dynamiczne

pośrednie

(przemieszczenia wywołane jakimś czynnikiem, np. temperaturą, skurczem itp.)


Przykłady sił, jakie można analizować badając ustroje konstrukcyjne:

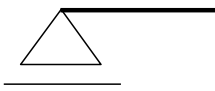
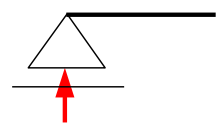
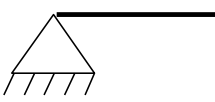
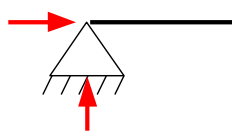
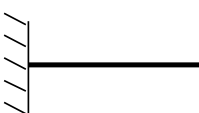
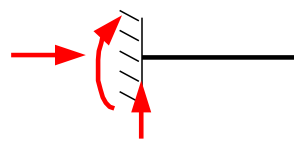
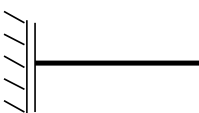
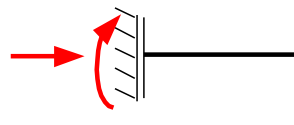
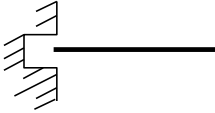
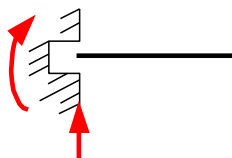
- ✚ ciężar własny elementów konstrukcyjnych
- ✚ obciążenie zmienne technologiczne (np. obciążenie stropu zależne od przeznaczenia obiektu oraz sposobu użytkowania pomieszczeń)
- ✚ obciążenie zmienne środowiskowe (np. śnieg, wiatr)

3. SIŁY BIERNE

W wyniku działania **obciążenia czynnego** w więziach/więzach elementarnych łączących tarczę z ostoją powstają oddziaływania (reakcje), które nazywamy **siłami biernymi (reakcjami)**. Zależą one od obciążeń czynnych oraz konfiguracji ustroju. **Liczba sił biernych jest równa liczbie zastosowanych więzi elementarnych**

Tabela. Zestawienie podpór.



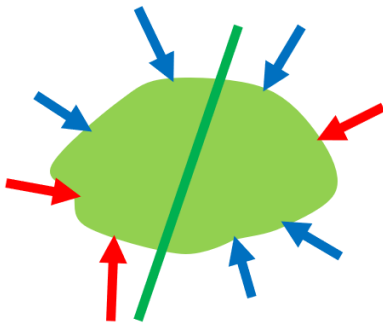
Nazwa podpory	Oznaczenie	Reakcje
Podpora przegubowo-przesuwna		
Podpora przegubowa		
Podpora sztywna		
Podpora sztywno-przesuwna („tyżwa pionowa”)		
Podpora sztywno-przesuwna („tyżwa pozioma”)		

4. SIŁY PRZEKROJOWE

4.1. INFORMACJE OGÓLNE

Obciążenie przyłożone do elementu konstrukcyjnego powoduje powstanie w nim pewnych sił, które można nazwać **siłami wewnętrznymi**. Siły te wywołują w materiale stan wyężenia, który może doprowadzić do zniszczenia elementu.

Dana jest unieruchomiona tarcza sztywna obciążona układem **sił czynnych** (obciążenie) i **biernych** (reakcje).



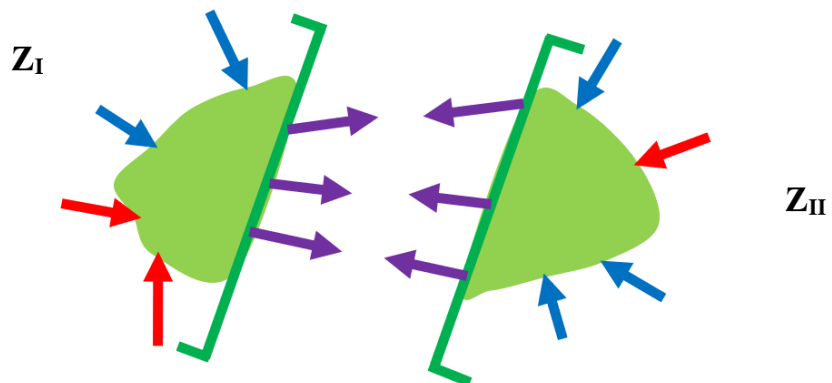
Jeżeli tarcza jest unieruchomiona, to układ sił działających na nią jest równoważny układowi zerowemu (układ jest w równowadze).

Jeżeli ciało, będące w równowadze podzielimy na części, to każda z tych części również będzie pozostawać w równowadze.

$$Z_I + Z_{II} = 0$$

$$Z_I + W_I = 0$$

$$Z_{II} + W_{II} = 0$$



$$Z_I = W_{II}$$

Układ sił zewnętrznych przyłożonych do części pierwszej jest równoważny układowi sił wewnętrznych przyłożonych do części drugiej.

$$Z_{II} = W_I$$

Układ sił zewnętrznych przyłożonych do części drugiej jest równoważny układowi sił wewnętrznych przyłożonych do części pierwszej.

Dwa układy sił są równoważne, jeżeli mają równe sumy i równe momenty liczone względem tego samego punktu.

Redukując zatem w dowolnym punkcie przekroju układ sił zewnętrznych przyłożonych do jednej części ciała, dostaniemy układ złożony z siły i momentu, który będzie równoważny układowi sił wewnętrznych przyłożonemu do drugiej części.

Dla układów prętowych, będziemy przyjmować, że biegunem redukcji będą punkty należące do osi pręta. Zredukowany w każdym przekroju układ sił nazywamy **siłami przekrojowymi**. Siłę tego układu rozkłada się na dwie składowe: wzdłuż osi pręta i prostopadle do niej. Składową równoległą do osi pręta nazywamy **siłą podłużną (osiową)** i oznaczamy najczęściej przez **N**, natomiast siłę prostopadłą do osi pręta nazywamy **siłą poprzeczną (tnącą)** i oznaczamy przez **T**. Moment będący wynikiem redukcji, z racji efektu działania na pręt, nazywany jest **momentem zginającym** - oznaczamy przez **M**.

M



Momentem zginającym (gnącym) w danym przekroju nazywamy sumę momentów względem środka masy przekroju układu obciążeń działających na myślowo odciętą część ustroju. Moment zginający jest dodatni, jeżeli wywołuje rozciąganie włókien uprzywilejowanych.

T



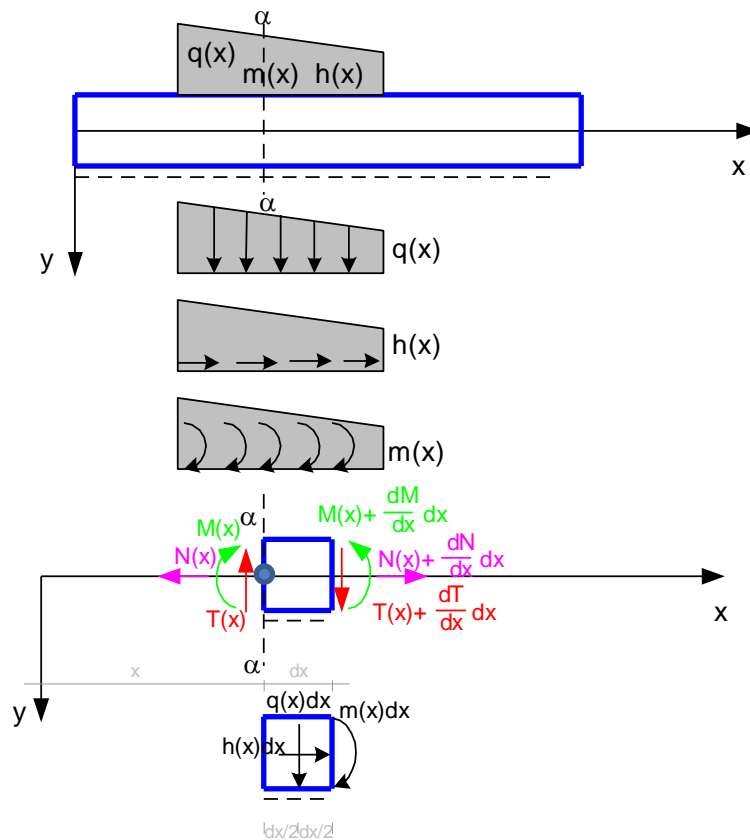
Siłą tnącą (poprzeczną) w danym przekroju nazywamy sumę rzutów na kierunek prostopadły do osi pręta układu sił działających na myślowo odciętą część ustroju. Siła tnąca jest dodatnia, jeżeli z lewej strony przekroju jest skierowana do góry, a z prawej do dołu.

N

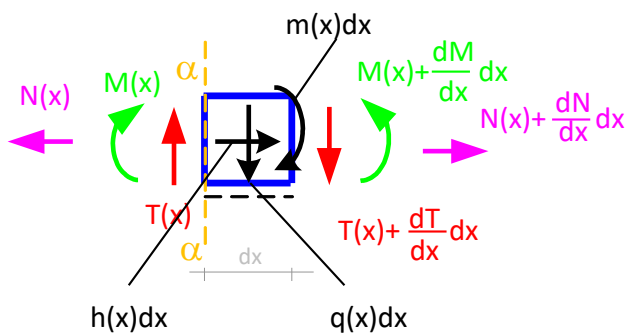


Siłą osiową w danym przekroju nazywamy sumę rzutów na kierunek styczny do osi pręta układu sił działających na myślowo odciętą część ustroju. Siła osiowa jest dodatnia, jeżeli wywołuje rozciąganie pręta.

4.2. ZWIĄZKI MIĘDZY SIŁAMI PRZEKROJOWYMI DLA PRĘTA PROSTEGO



Równania równowagi wycinka pręta



$$\sum X = 0: \quad -N + N + \frac{dN}{dx} dx + h dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dN(x)}{dx} = -h(x)$$

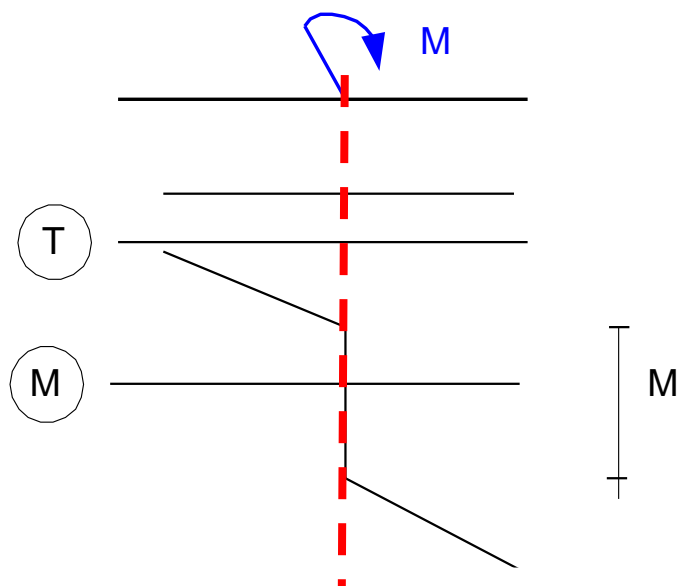
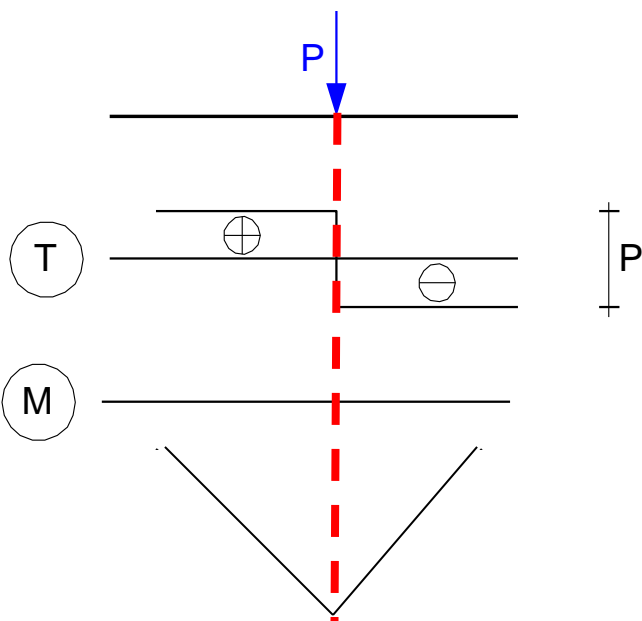
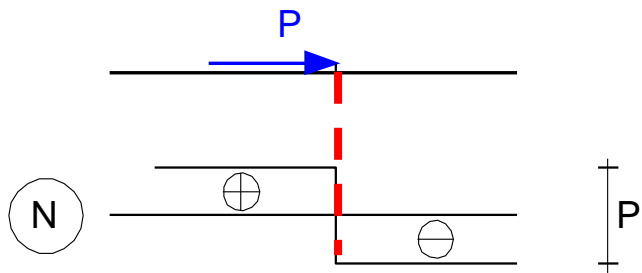
$$\sum Y = 0: \quad -T + T + \frac{dT}{dx} dx + q dx = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT(x)}{dx} = -q(x)$$

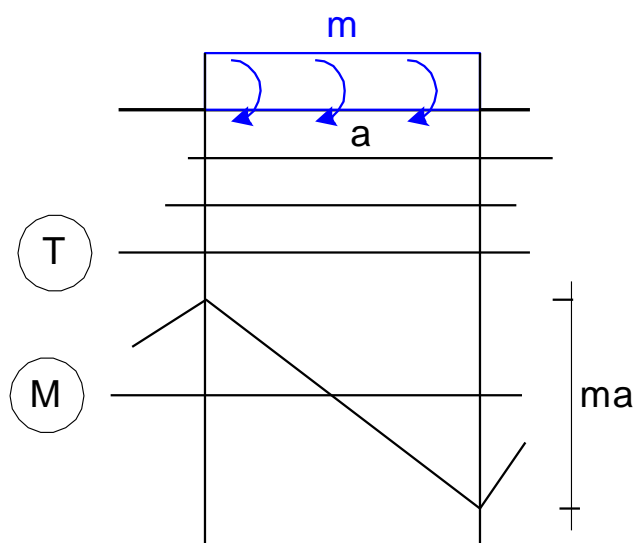
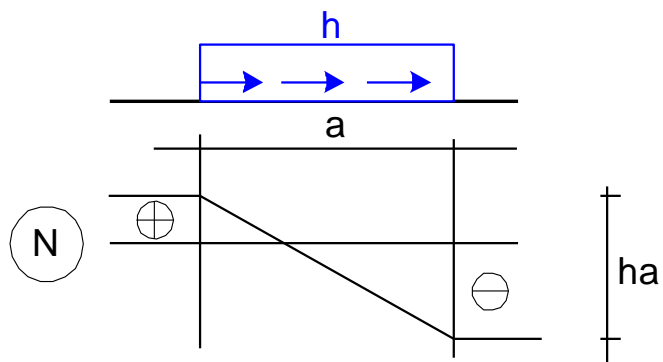
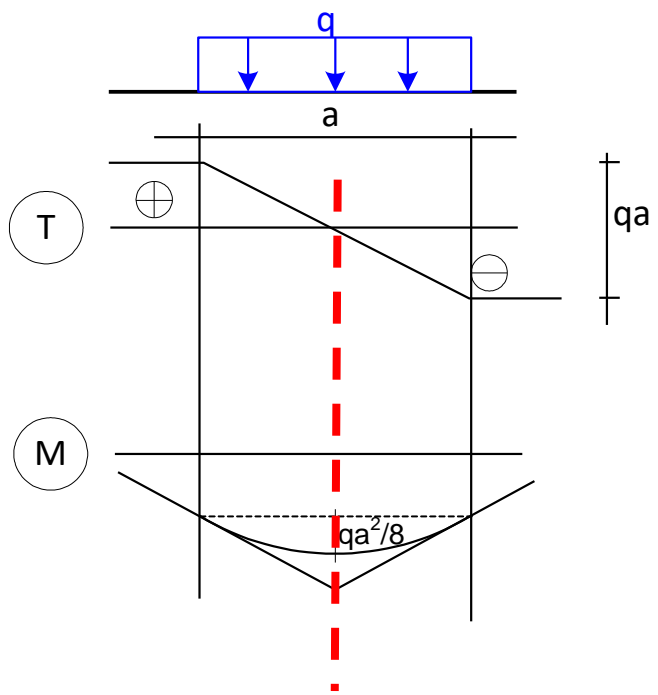
$$\sum M_0 = 0: \quad M - (M + \frac{dM}{dx} dx) + (T + \frac{dT}{dx} dx) dx + q dx \frac{dx}{2} + m dx = 0$$

$$-\frac{dM}{dx} + T + \frac{dT}{dx} dx + q \frac{dx}{2} + m = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dM(x)}{dx} = T(x) + m(x)$$

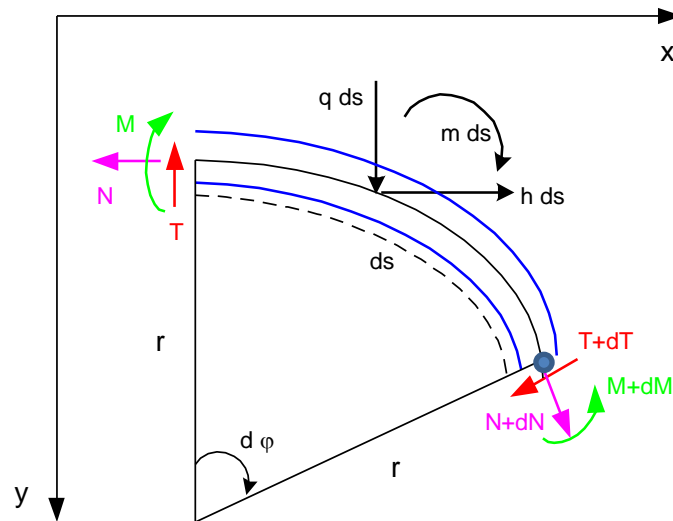
Cechy charakterystyczne wykresów sił przekrojowych

Dla podstawowych przypadków obciążeń pręta prostoliniowego:





4.3. ZWIĄZKI MIĘDZY SIŁAMI PRZEKROJOWYMI DLA PRĘTA ZAKRZYWIONEGO



r – promień lokalnej krzywizny pręta

$d\phi$ - różniczkowy przyrost kąta

$$\begin{aligned}\cos(d\phi) &= 1 \\ \sin(d\phi) &= d\phi \\ ds &= r \sin d\phi = r d\phi\end{aligned}$$

Równania równowagi wycinka pręta

$$\sum X = 0:$$

$$\begin{aligned}-N + \left[\left(N + \frac{dN}{ds} ds \right) \cos d\phi \right] - \left[\left(T + \frac{dT}{ds} ds \right) \sin d\phi \right] + h r \sin d\phi &= 0 \\ -\cancel{N} + \cancel{N} + dN - T d\phi + dT d\phi + h ds = 0 \rightarrow dN - T d\phi + h ds = 0/ds\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dN}{ds} - \frac{T}{r} = -h}$$

$$\sum Y = 0:$$

$$\begin{aligned}-T + \left[\left(T + \frac{dT}{ds} ds \right) \cos d\phi \right] + \left[\left(N + \frac{dN}{ds} ds \right) \sin d\phi \right] + q r \sin d\phi &= 0 \\ -\cancel{T} + \cancel{T} + dT + N d\phi + dN d\phi + q ds = 0 \rightarrow dT + N d\phi + q ds = 0/ds\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dT}{ds} + \frac{N}{r} = -q}$$

$$\sum M_0 = 0:$$

$$\begin{aligned}\cancel{M} + T r \sin d\phi - N(r - r \cos d\phi) - \cancel{M} - \frac{dM}{ds} ds + m r \sin d\phi - q \dots + h \dots &= 0 \\ T r d\phi - N(r - r) - dM + m ds = 0/ds\end{aligned}$$

$$\boxed{\frac{dM}{ds} = T + m}$$

5. SCHEMAT STATYCZNY

Niektóre konstrukcje można odwzorować za pomocą płaskich **modeli fizycznych**.

Wszystkie elementy modelu płaskiego są w jednej płaszczyźnie, zwanej **płaszczyzną modelu**.

Przemieszczenia elementów modelu mogą występować tylko w płaszczyźnie modelu.

Płaskie modele fizyczne, zapisuje się w postaci **schematów statycznych konstrukcji**.

Schematy statyczne konstrukcji, zawierają następujące informacje:

- geometria i położenie tarcz,
- połączenia tarcz z ostoją i ze sobą,
- rodzaj, położenie i wartość obciążeń czynnych.

Dla ułatwienia obliczeń tworzy się różne **schematy obliczeniowe** (mogą być różne na różnym etapie obliczeń).

Do wyznaczenia sił biernych (reakcji):

Schematy obliczeniowe, zawierają następujące informacje:

- geometria i położenie tarcz,
- połączenia tarcz z ostoją i ze sobą, przy czym **połączenia z ostoją zastąpione reakcjami o znanych kierunkach i przyjętych zwrotach**,
- rodzaj, położenie i wartość obciążeń czynnych.

Do wyznaczenia sił przekrojowych:

Schematy obliczeniowe, zawierają następujące informacje:

- geometria i położenie tarcz,
- połączenia tarcz z ostoją i ze sobą, przy czym **połączenia z ostoją zastąpione reakcjami o znanych kierunkach, wartościach i zwrotach**,
- rodzaj, położenie i wartość obciążeń czynnych, **przyłożonych do osi pręta**.

6. OGÓLNE ZASADY WYZNACZANIA SIŁ PRZEKROJOWYCH

Rozwiązanie można otrzymać na drodze analitycznej lub graficznej (wykreślnej).

W **wersji graficznej** siły przekrojowe (wewnętrzne MTN) wyznacza się na podstawie znajomości wszystkich sił zewnętrznych (czynnych i biernych). Wykorzystuje się wielobok sił (do wyznaczenia sił T i N) oraz wielobok sznurowy wraz z zamykającymi (do wyznaczenia M).

W **wersji analitycznej** siły przekrojowe (wewnętrzne MTN) wyznacza się stosując:

- sposób (metodę) przepisów funkcyjnych SPF

SPF jest pełnym rozwiązaniem analitycznym. Belkę dzieli się na przedziały, w których MTN są określone pojedynczymi funkcjami zmiennej geometrycznej x . Na podstawie tych wzorów wyznacza się rzędne charakterystyczne i wartości ekstremalne. Liczba przedziałów wynika z obciążenia zewnętrznego przekazywanego na belkę (pręt główny belki).

- sposób (metodę) rzędnych charakterystycznych SRC

SRC jest skróconym rozwiązaniem analitycznym. Oblicza się tylko rzędne charakterystyczne wykresów sił przekrojowych MTN. Położenie rzędnych wynika z cech charakterystycznych wykresów sił przekrojowych (np. miejsce przyłożenia siły).

Algorytm analitycznego wyznaczania sił przekrojowych w układach płaskich GN, SW

1. Narysować schemat statyczny układu.
2. Przeprowadzić analizę kinematyczną układu (*warunek ilościowy i jakościowy*)
3. Narysować schemat obliczeniowy układu do wyznaczenia reakcji, *tzn. połączenia zastąpić reakcjami*.
4. Napisać równania równowagi statycznej i rozwiązać je, *tzn. wyznaczyć niewiadome reakcje*.
5. Sprawdzić poprawność wyznaczonych sił biernych.
6. Narysować schemat obliczeniowy układu do wyznaczenia sił czynnych, *tzn. narysować reakcje jako znane siły (znane kierunki, zwroty i wartości) oraz siły czynne przyłożone bezpośrednio do osi pręta*.
7. Wyznaczyć wartości sił przekrojowych (*momenty, siły tnące, siły osiowe*) w miejscach charakterystycznych lub dla przedziałów za pomocą przepisów funkcyjnych.
8. Narysować w skali wykresy sił przekrojowych (*momenty, siły tnące, siły osiowe*).
9. Sprawdzić cechy charakterystyczne wykresów sił przekrojowych.



7. SIŁY PRZEKROJOWE W PŁASKICH UKŁADACH PRĘTOWYCH SW

Belkę nazywamy pręt prosty przeznaczony do przenoszenia głównie obciążeń poprzecznych do jego osi. Oddziaływania i siły wewnętrzne (przekrojowe) obliczamy według ogólnych zasad. Siły zewnętrzne (czynne i bierne) mogą być przekazywane na belkę bezpośrednio lub pośrednio. W tym drugim przypadku mówimy o pręcie głównym belki.

7.1. BELKI PROSTE

Belki proste to belki, dla których oddziaływania wyznaczamy z trzech warunków równowagi statycznej (3RRS), np.:

$$\sum X = 0, \sum Y = 0, \sum M_B = 0$$

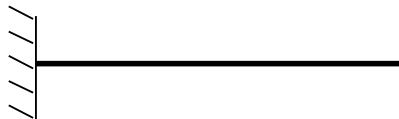
W celu niezależnego wyznaczenia oddziaływań często korzystamy z innych wariantów równowagi, np.: $\sum M_A = 0, \sum M_B = 0, \sum M_C = 0$; pod warunkiem, że punkty A, B, C nie leżą na jednej prostej. ([zob. punkt 5.2. część 1](#))

Przykłady belek prostych:

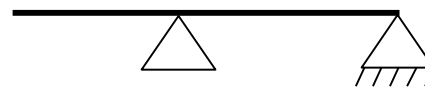
- belka swobodnie podparta



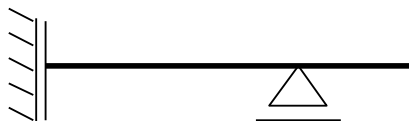
- wspornik (belka wspornikowa)



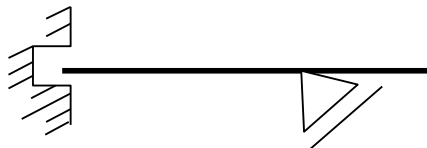
- belka wspornikowa jednostronnie przewieszona



- belka z możliwością przesuwu poprzecznego



- belka z możliwością przesuwu podłużnego



Przykładowe rozwiązania:

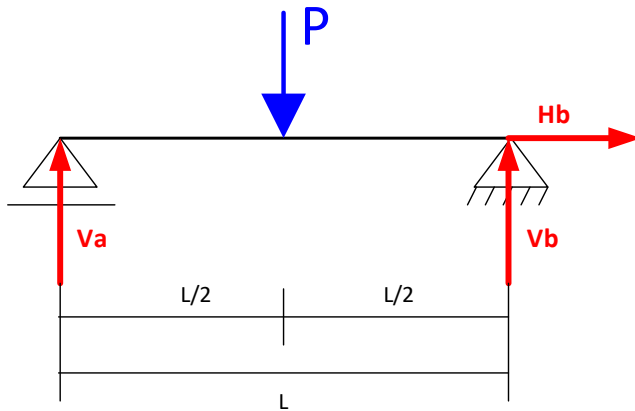
1. Belka swobodnie podparta obciążona pionową siłą skupioną w połowie rozpiętości

Znane: P [kN], L [m]

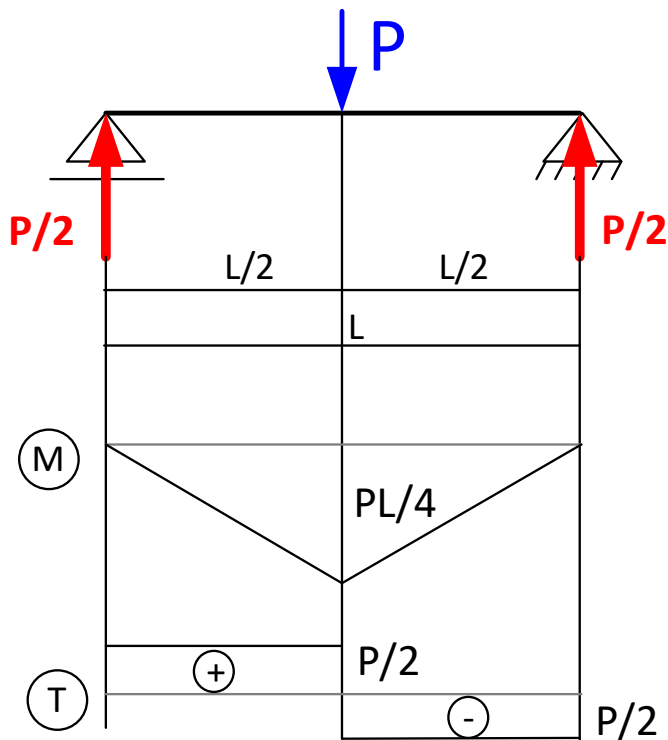
Wyznaczono reakcje:

$$V_a = V_b = P/2$$

$$H_b = 0$$



Wykresy MT ($N=0$):

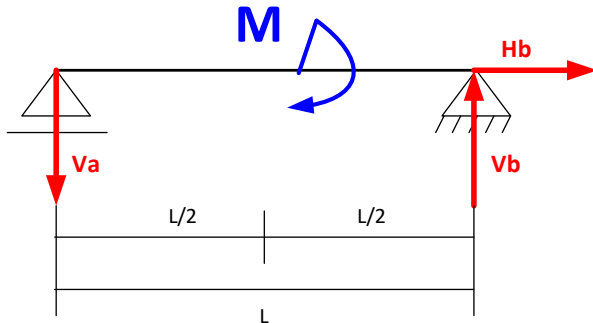


(zob. punkt 4.2. część 3)

2. Belka swobodnie podparta obciążona momentem skupionym w połowie rozpiętości

Znane: M [kNm], L [m]

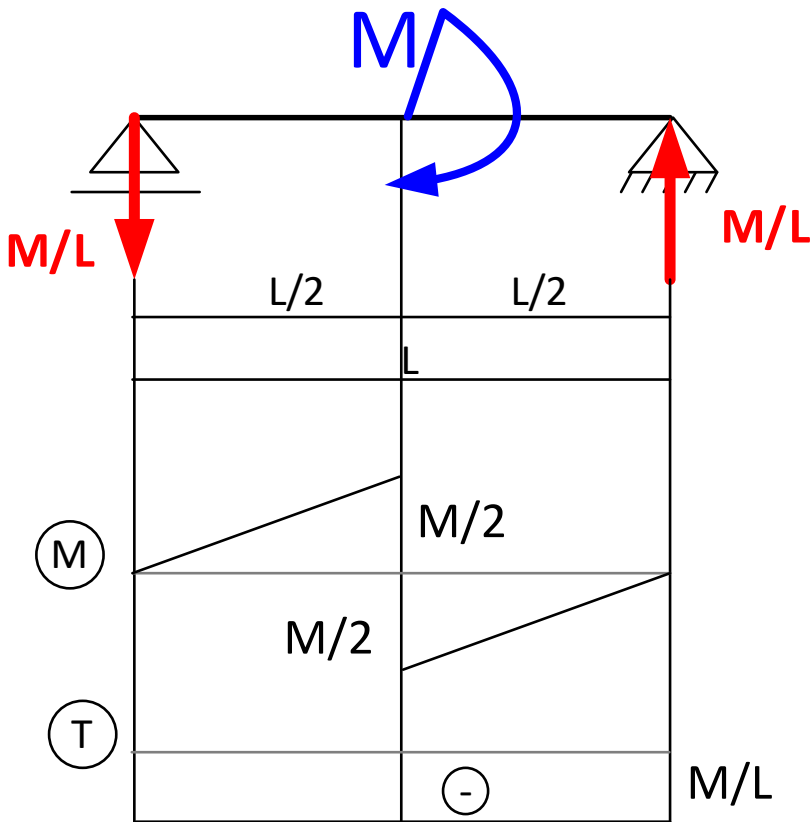
Wyznaczono reakcje:



$$V_a = V_b = M/L$$

$$H_b = 0$$

Wykresy MT (N=0):



(zob. punkt 4.2. część 3)

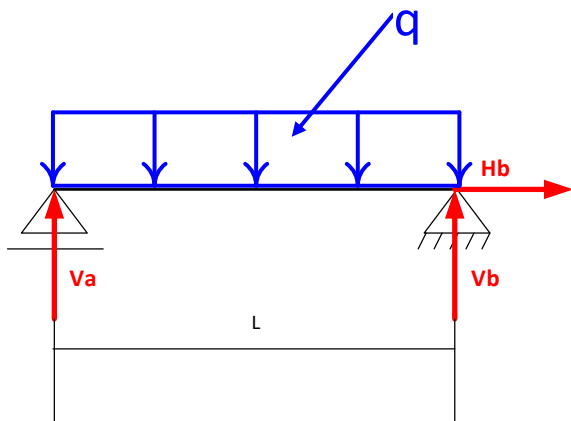
3. Belka swobodnie podparta obciążona obciążeniem rozłożonym równomiernie

Znane: q [kN/m], L [m]

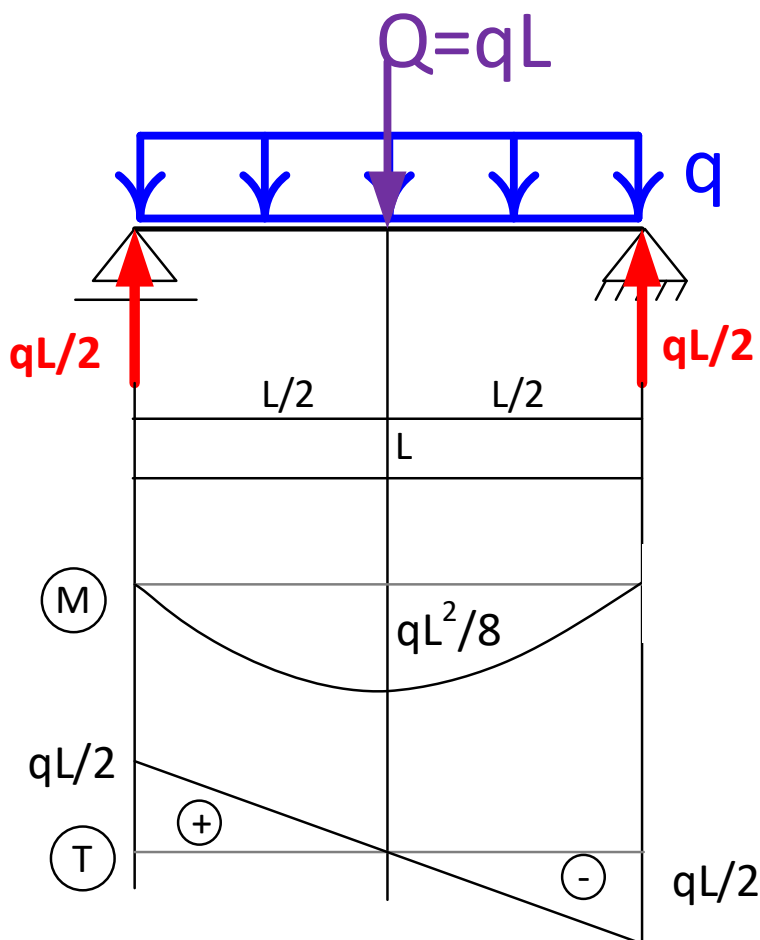
Wyznaczono reakcje:

$$V_a = V_b = qL/2$$

$$H_b = 0$$



Wykresy MT (N=0):



(zob. punkt 4.2. część 3)

4. Belka swobodnie podparta obciążona obciążeniem ciągłym zmiennym liniowo

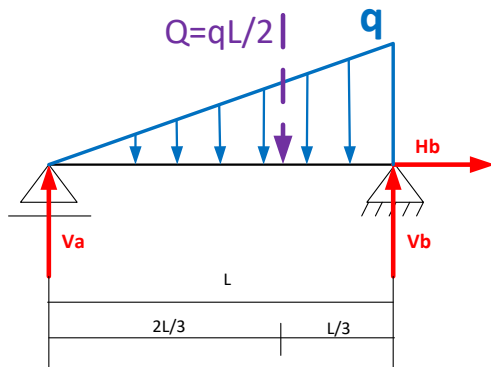
Znane: q [kN/m], L [m]

Wyznaczono reakcje:

$$V_a = qL/6$$

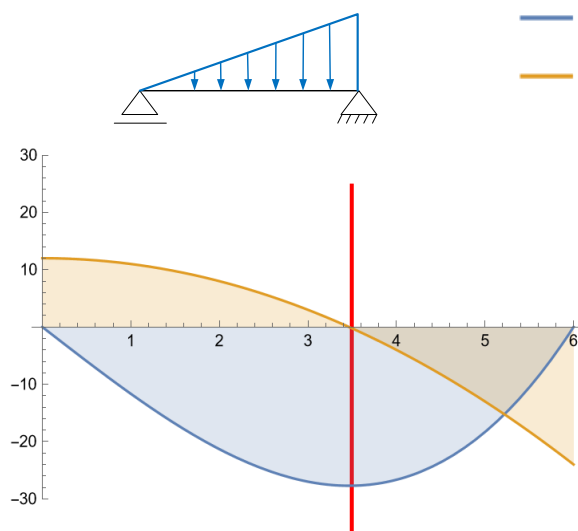
$$V_b = qL/3$$

$$H_b = 0$$

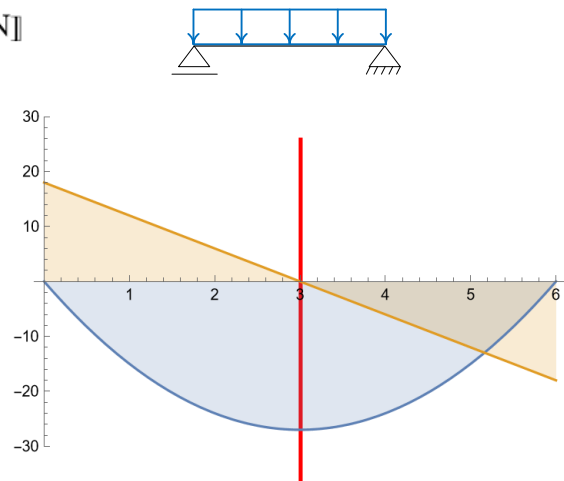


Wykresy MT (N=0) dla $q=12\text{kN/m}$, $L=6\text{m}$:

Wykresy MT (N=0) dla $q=6\text{kN/m}$, $L=6\text{m}$:



— M [kNm]
— T [kN]



$$M(x) = \left[\frac{qL}{6}\right]x - \left[\frac{1}{2}\frac{qx}{L}x\right]\frac{1}{3}x$$

$$M(x) = \left[\frac{qL}{2}\right]x - [qx]\frac{1}{2}x$$

$$M(x) = \frac{qL}{6}x - \frac{q}{6L}x^3$$

$$M(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{q}{2}x^2$$

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{qL}{6} - \frac{3q}{6L}x^2$$

$$T(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{qL}{2} - \frac{2q}{2}x$$

Moment ekstremalny:

$$M_{ekst} = \frac{qL^2}{9\sqrt{3}} \text{ dla } x = L/\sqrt{3}$$

$$M_{ekst} = \frac{qL^2}{8} \text{ dla } x = L/2$$

5. Belka wspornikowa obciążona siłą skupioną nachyloną pod kątem α do osi pręta

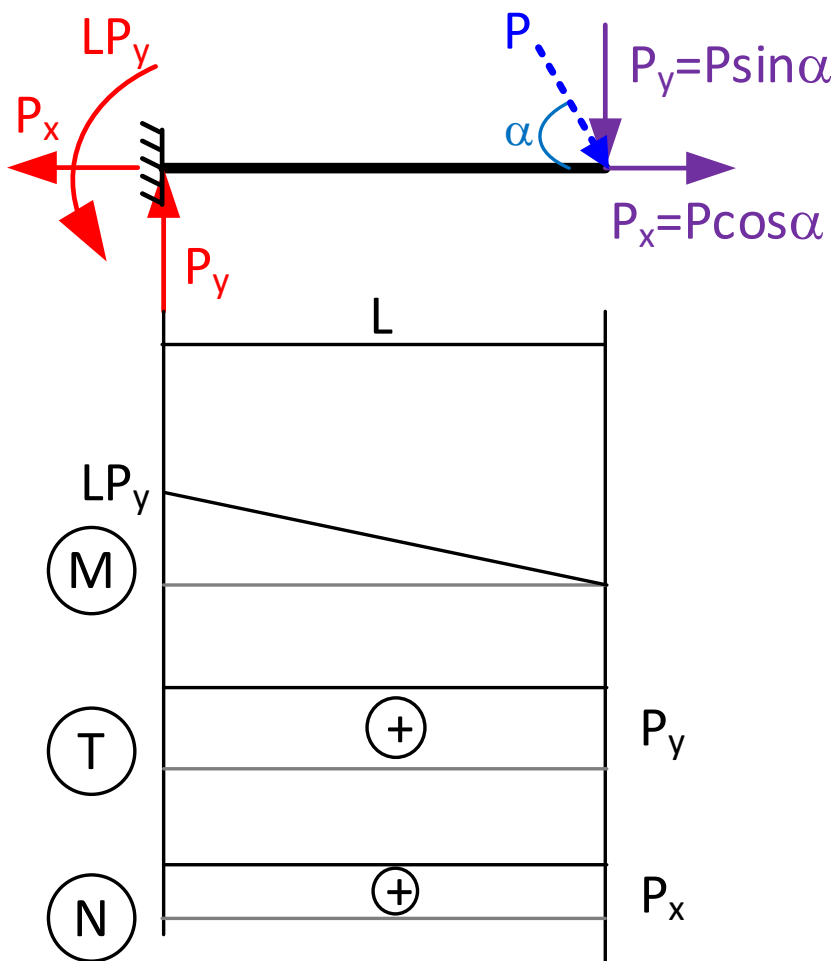
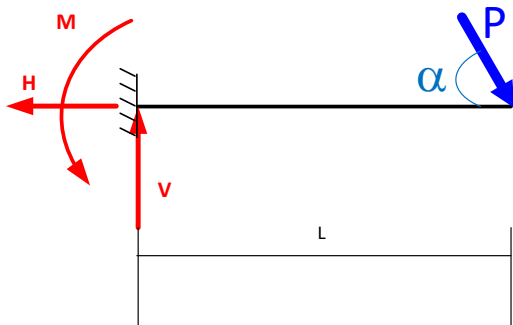
Znane: P [kN], L [m], α

Wyznaczono reakcje:

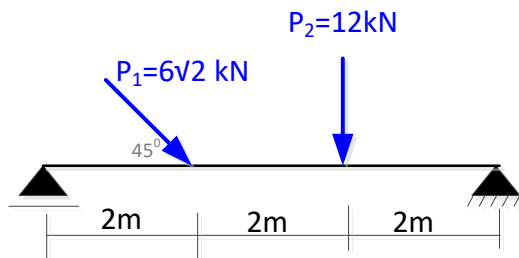
$$V = P \sin \alpha$$

$$H = P \cos \alpha$$

$$M = PL \sin \alpha$$



Metodą graficzną wyznaczyć siły przekrojowe

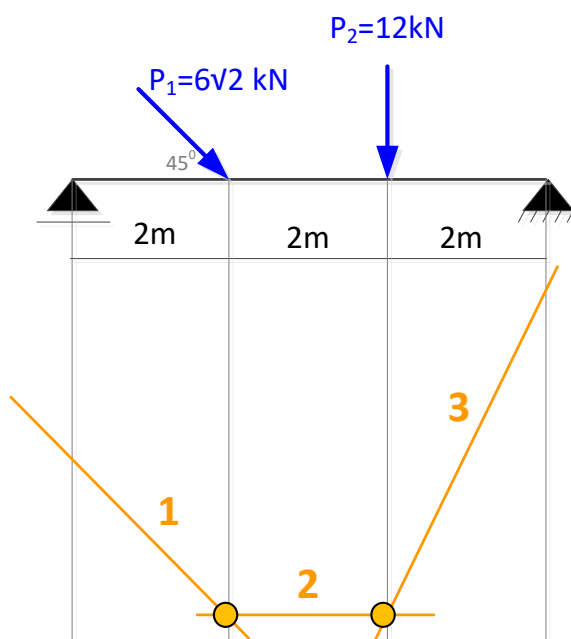
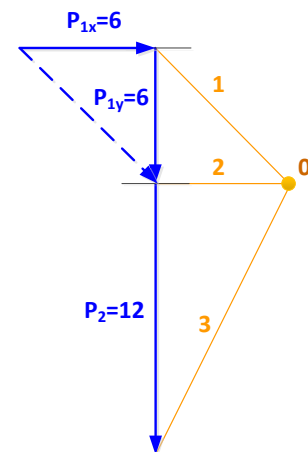


Tworzymy **plan sił** (PS) i **wielobok sił** (WS) w skalach optymalnych do danych, np.

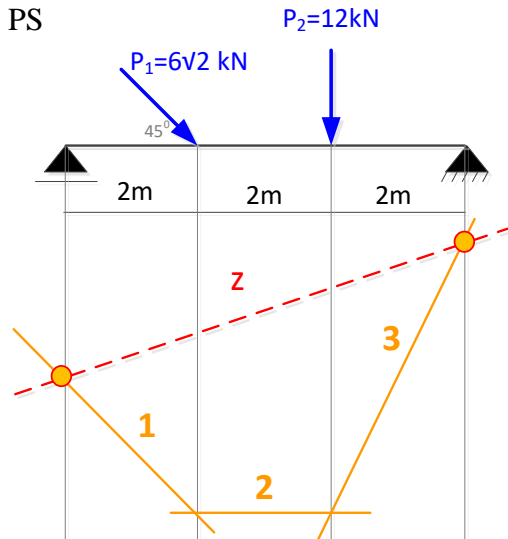
PS: 1cm – 1 m; WS: 1cm – 2 kN

Na WS przyjęto biegun i rozłożyło każdą z sił na promienie (składowe)

zobacz przykład str. 47 ([zob. część 3](#))



Siły analizowane są w osi pręta belki. Na PS narysowano promień pierwszy do przecięcia z prostą działania pionowej składowej siły \vec{P}_1 , następnie w tym miejscu narysowano promień drugi; następnie promień drugi jest „ważny” pomiędzy prostą działania siły \vec{P}_1 a \vec{P}_2 , więc w miejscu przecięcia promienia drugiego z prostą działania siły \vec{P}_2 narysowano promień trzeci. Tak powstał **wielobok sznurowy**.



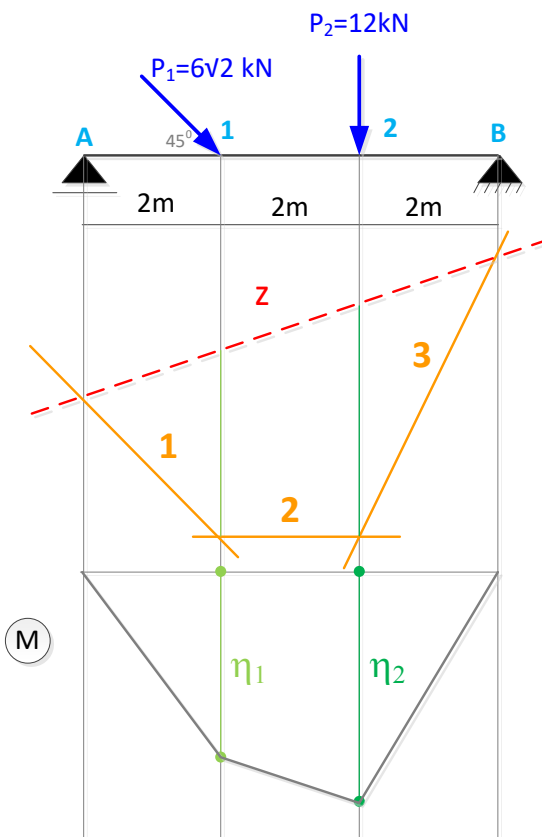
siła \vec{P}_1 pomiędzy promieniami numer 1 i 2
 siła \vec{P}_2 pomiędzy promieniami numer 2 i 3
 siła \vec{R}_B pomiędzy promieniami numer 3 i z
 siła \vec{R}_A pomiędzy promieniami numer z i 1
 $\vec{R}_A = \vec{V}_A$; $\vec{R}_B = \vec{V}_B + \vec{H}_B$

Z WS odczytano:

$$V_A = 10 \text{ kN}$$

$$V_B = 8 \text{ kN}$$

$$H_B = 6 \text{ kN}$$

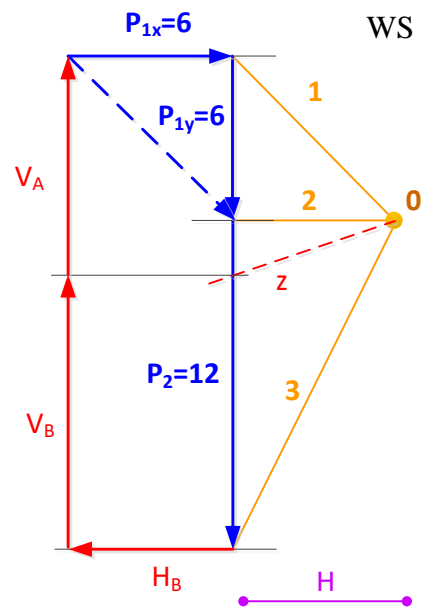


Teraz można przejść do wyznaczenia sił biernych.

Na PS: jeden punkt to miejsce przecięcia pierwszego promienia z kierunkiem lewej pionowej więzi; drugi punkt – ostatniego promienia i prawej pionowej więzi.

Przez te dwa punkty prowadzimy zamykającą układ.

Kierunek zamykającej przenosimy na WS i w ten sposób możemy odczytać wartości sił biernych.



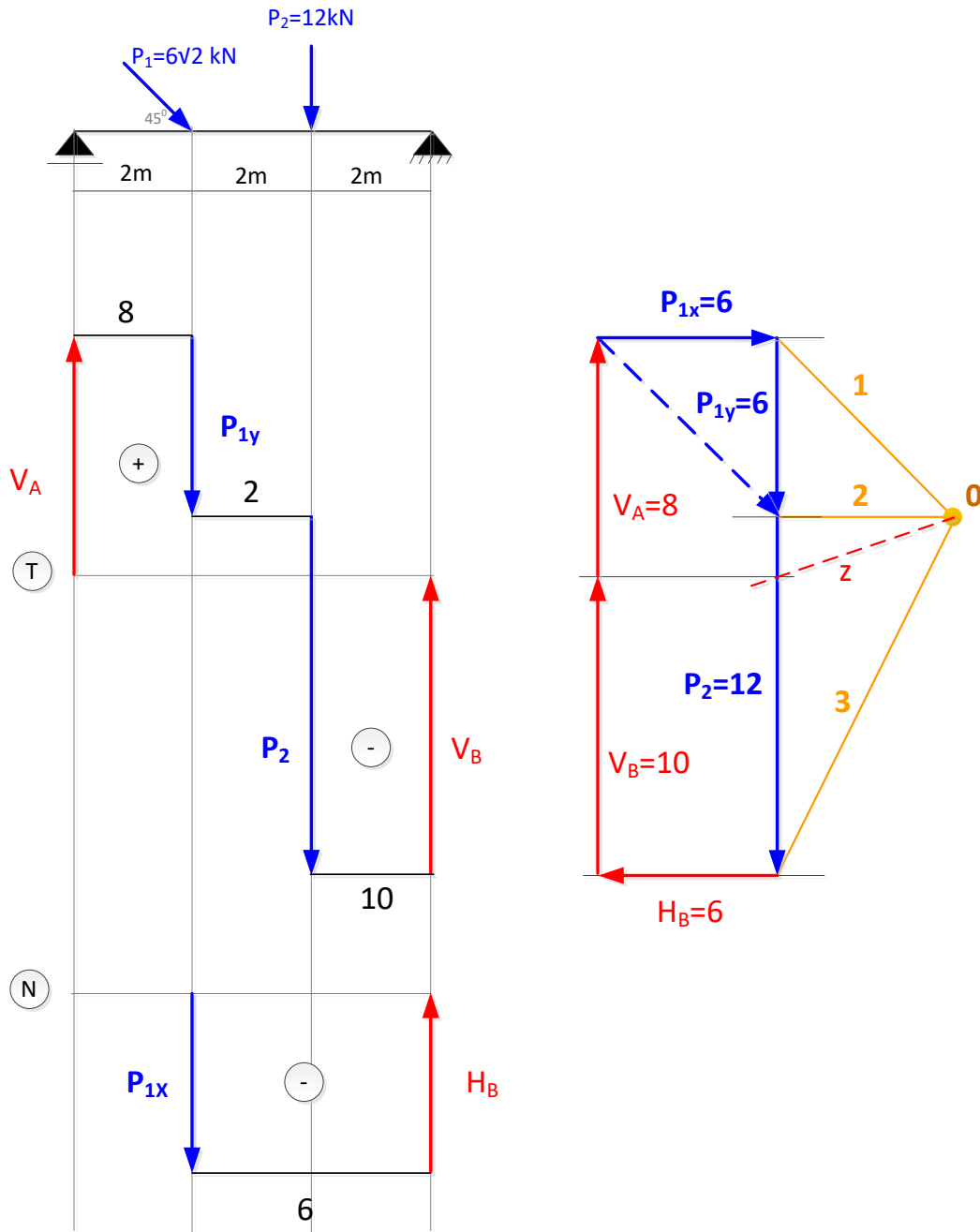
Na PS praktycznie jest już wykres momentów – należy go tylko „wyprostować”. W tym celu rysujemy zamykającą poziomą i w miejscach charakterystycznych odkładamy wyznaczone wielkości w skali.

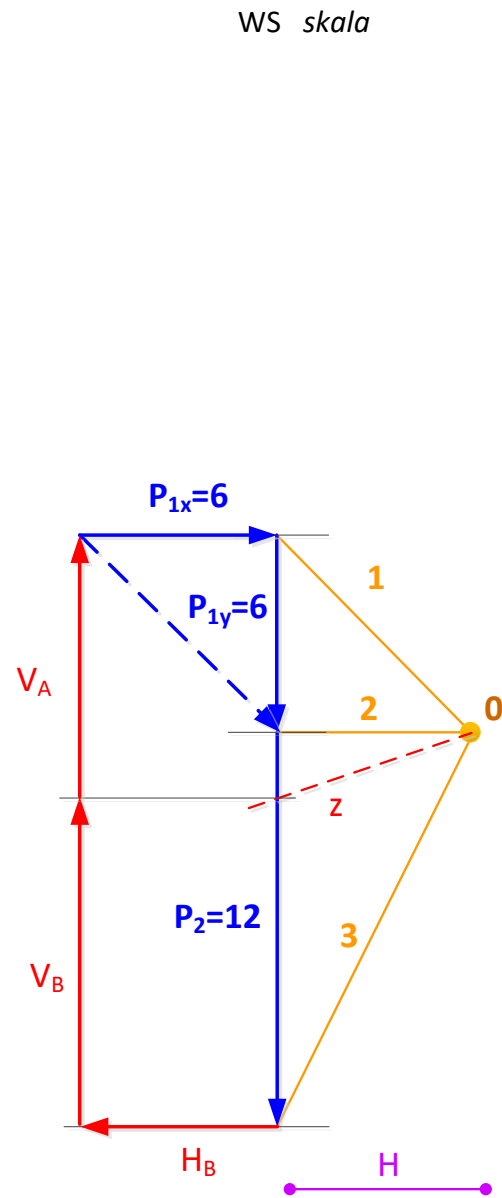
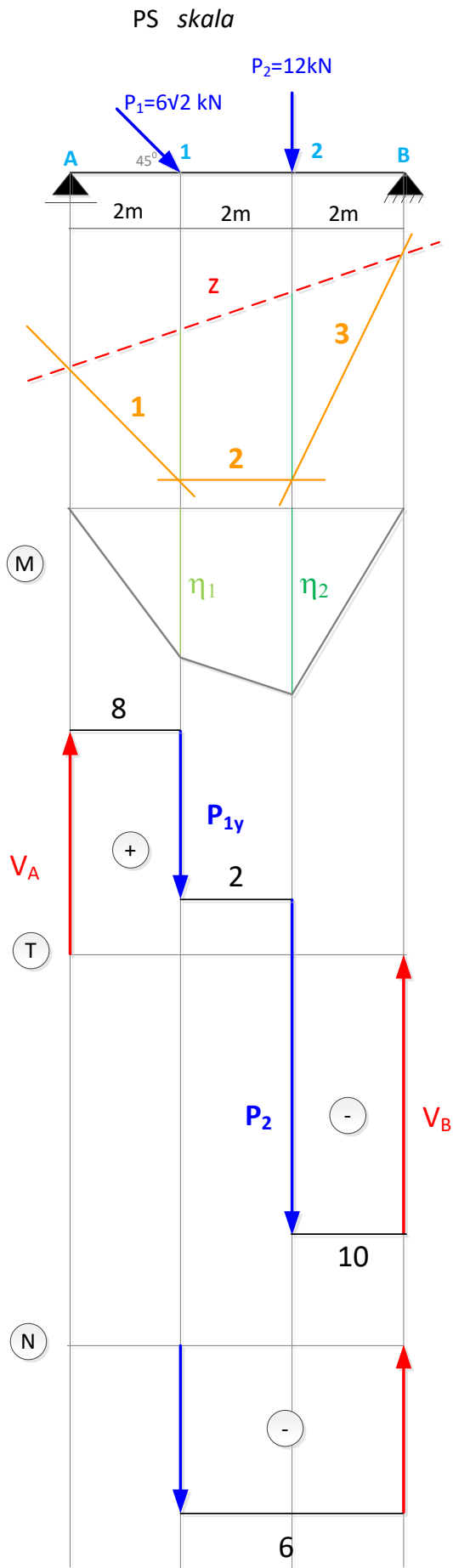
Odczytane wielkości momentów to:

$$M_1 = \eta_1 \cdot H = 2,7m \cdot 6 \text{ kN} \cong 16 \text{ kNm}$$

$$M_2 = \eta_2 \cdot H = 3,4m \cdot 6 \text{ kN} \cong 20 \text{ kNm}$$

Następnie rysujemy siły tnące i osiowe odkładając kolejno siły z WS.



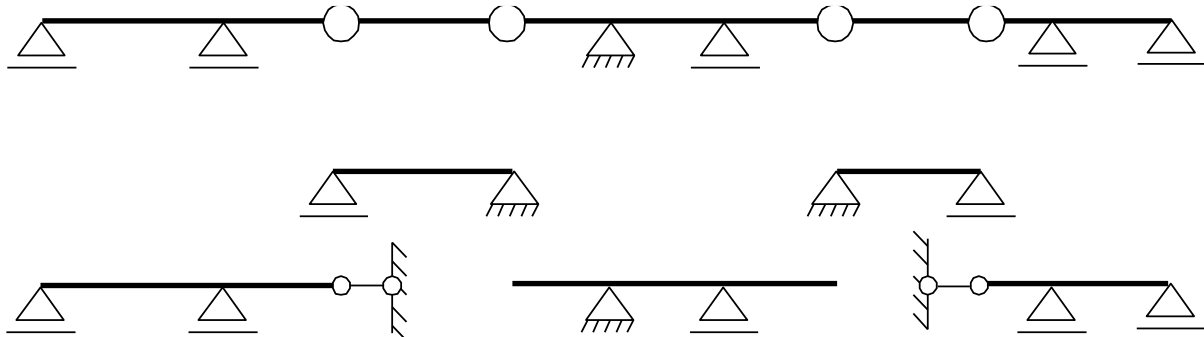


7.2. BELKI WIELOPRZĘSŁOWE

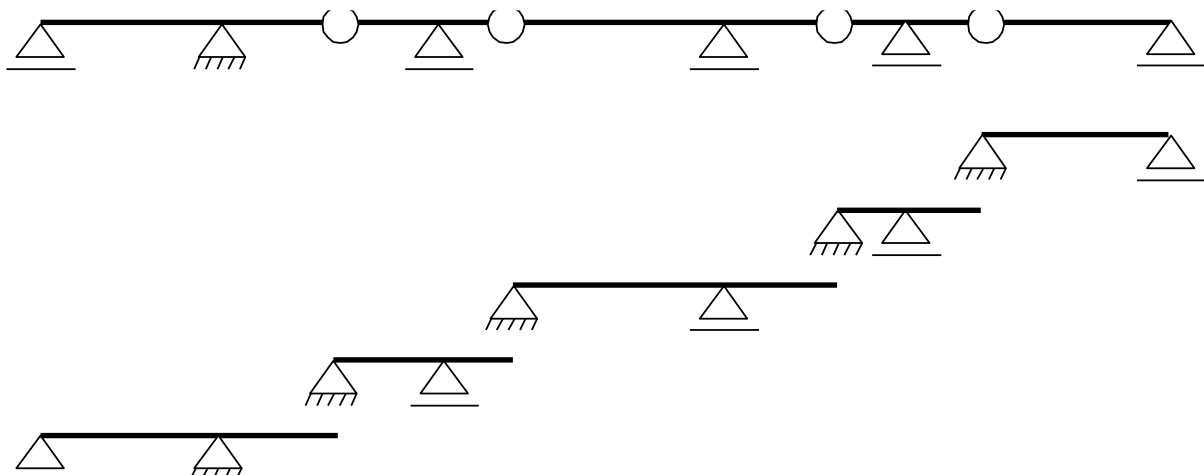
Belki wieloprzęsłowe można realizować w postaci zbioru belek swobodnie podpartych połączonych przegubowo. Lepsze rezultaty ekonomiczne można uzyskać przesuując przeguby na pewne odległości od podpór – utworzą się wsporniki odciążające. W ten sposób powstaje **belka wieloprzęsłowa przegubowa Gerbera** (Heinrich Gerber - ur.18-11-1832 w Hof, zm. 03-01-1912 w Monachium)

Systemy belek:

- system belek zawieszonych (SZ)



- system belek dźwigniowy (SD)



W praktyce można spotkać **system mieszany**, który jest kombinacją powyższych schematów. W każdym z systemów można dokonać rozbicia na belki proste (elementarne). Może to jednak nastroczać trudności związane z lokalizacją tzw. **belki podstawowej**, samej w sobie geometrycznie niezmiennej.

Rozwiązanie można otrzymać na drodze analitycznej lub graficznej (wykreślnej).

Rozwiązanie graficzne przeprowadza się na ogół dla schematu globalnego, przy czym istotna jest tutaj technika prowadzenia zamykających – zgodna z warunkami podparcia oraz warunkami narzuconymi przez węzły pośrednie.

Rozwiązywanie analityczne belek

- sposób pośredni

Należy oddzielnie rozpatrywać wpływ obciążeń stycznych sprowadzonych do osi belki (jako układ kolinearny obciążający schemat globalny) i oddzielnie wpływ obciążeń poprzecznych do belki. Tu najwygodniej jest analizować poszczególne belki elementarne w kolejności umożliwiającej sukcesywne rozwiązanie.

Rozbicie na belki proste dla układu sił poprzecznych belki.

- sposób bezpośredni

Sposób polega na globalnym rozwiązywaniu schematu przy wykorzystaniu warunków równowagi oraz dodatkowych warunków narzuconych przez węzły pośrednie (na ogół przeguby – każdy dodatkowy przegub umożliwia napisanie dodatkowego równania równowagi dotyczącej jednostronnych momentów). Nie istnieje tu potrzeba sprowadzania układu sił na kolinearny i układ sił równoległych (poprzecznych do belki).

7.3. RAMY

Ramami (lub ramownicami) nazywamy układy prętowe złożone z prętów prostych lub zakrzywionych, charakteryzujących się budową komorową. Mogą to być konstrukcje statycznie wyznaczalne (**izostatyczne**) lub statycznie niewyznaczalne (**hiperstatyczne**).

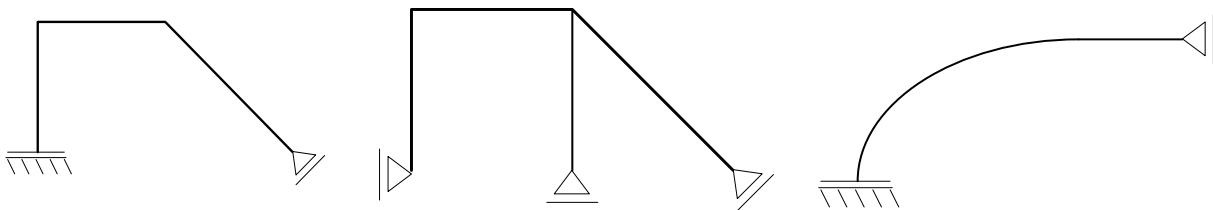
Ramy statycznie wyznaczalne rozwiązuje się na ogół metodą analityczną według ogólnych zasad:

- ustalenie schematu statycznego i obciążenia czynnego
- obliczenia oddziaływań (= sił biernych = reakcji)
- obliczenia sił wewnętrznych (= sił przekrojowych = sił MTN)
- sporządzenie wykresów.

Siły przekrojowe wyznacza się **metodą rzędnych charakterystycznych** lub **metodą przepisów funkcyjnych** (metoda „od przekroju do przekroju” czyli droga kolejnych redukcji obciążenia do początku przedziału).

7.3.1. RAMY PROSTE

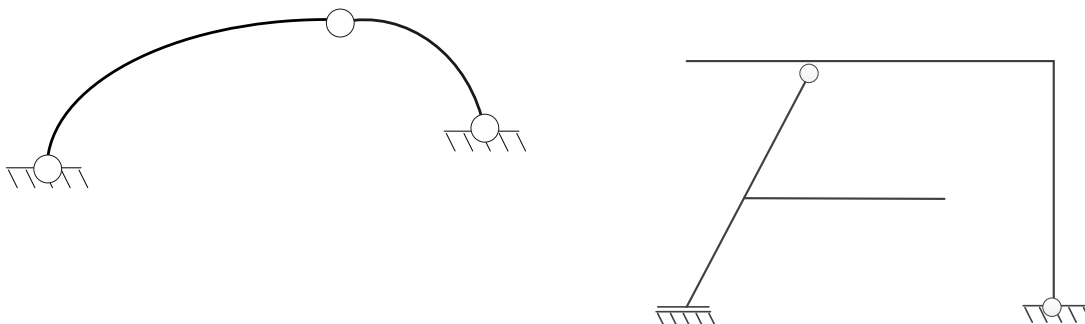
Ramy proste są zbudowane z jednej tarczy tworzącej graf otwarty, podpartej trzeba więziami podporowymi (elementarnymi).



7.3.2. USTROJE TRÓJPRZEGUBOWE

Ustrojem trójprzegubowym nazywamy ustrój złożony z dwóch tarcz połączonych między sobą i z układem odniesienia za pomocą węzłów przegubowych. Ustrój jest geometrycznie niezmienny, jeżeli te trzy przeguby nie leżą na jednej prostej. ([zob. tw. o trzech tarczach](#)).

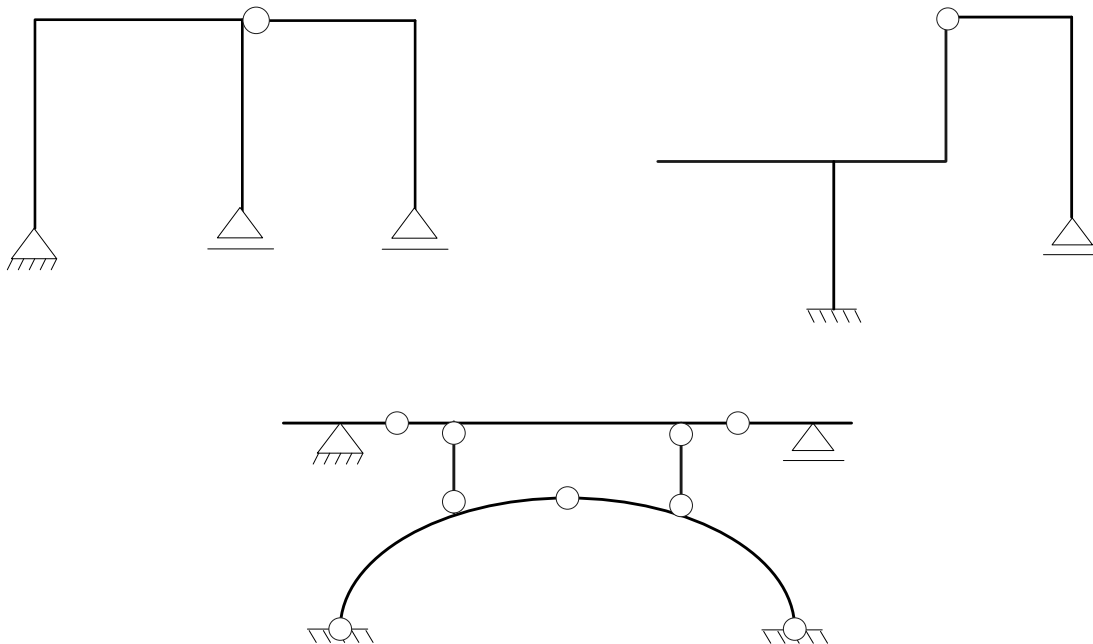
Jako konstrukcje inżynierskie wykorzystywane są najczęściej w postaci łuku trójprzegubowego ([zob. część 5](#)).



7.3.3. RAMY ZŁOŻONE

Cechą charakterystyczną ram złożonych jest ich budowa, w której można wyróżnić układ (lub układy) podstawowy (zasadniczy) oraz układ (lub układy) podporządkowany (podukład, układ podrzędny, drugorzędny). Ramy te mają budowę hierarchiczną. Układami mogą być belki, trójprzeguby, ramy proste.

Można je rozwiązywać przez rozbięcie na układy prostsze (wersja pośrednia) lub w sposób globalny (wersja bezpośrednia)



7.3.4. RAMY Z KOMORAMI ZAMKNIĘTYMI

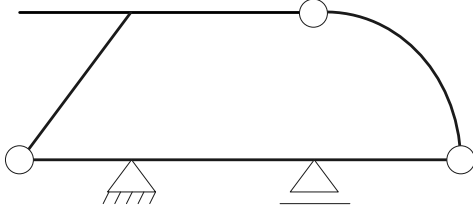
Ramy te charakteryzują się złożoną budową, w których występuje komora lub komory zamknięte (układ tarcz tworzą graf zamknięty) a siły wewnętrzne dla tej komory nie da się wyznaczyć nawet przy znajomości reakcji dla całego układu.

W zależności od budowy ramy, w pierwszej kolejności można wyznaczyć reakcje, a następnie „otworzyć komorę” (przykłady 1-5), albo nie ma możliwości wyznaczenia reakcji bez równoczesnego „otwarcia komory” (przykłady 6-8),

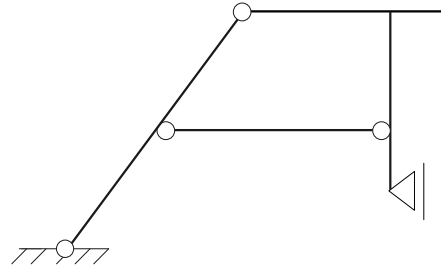
„Otwieramy komorę” w dowolnym miejscu, ale najwygodniejsze miejsca to

- nieobciążony pręt przegubowo-przegubowy, bo w nim występuje tylko siła osiowa;
- połączenie „łyżwą”, bo nie występuje tam siła na kierunku przesuwu;
- połączenie przegubowe, bo nie występuje tam moment.

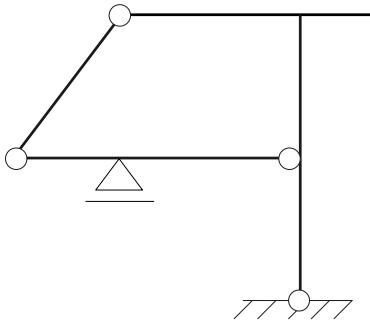
1.



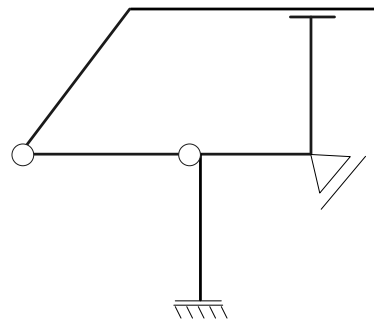
2.



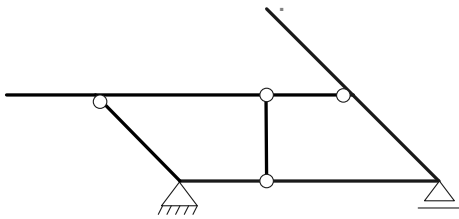
3.



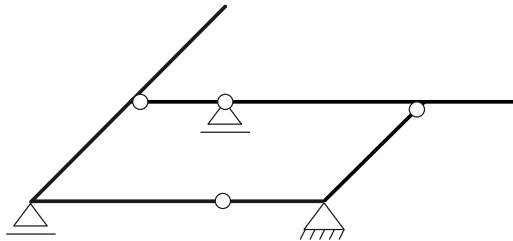
4.



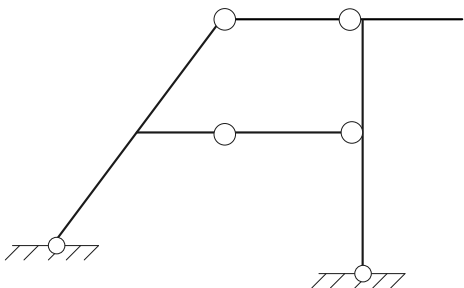
5.



6.



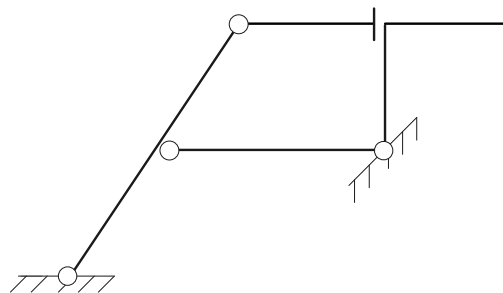
7.



4

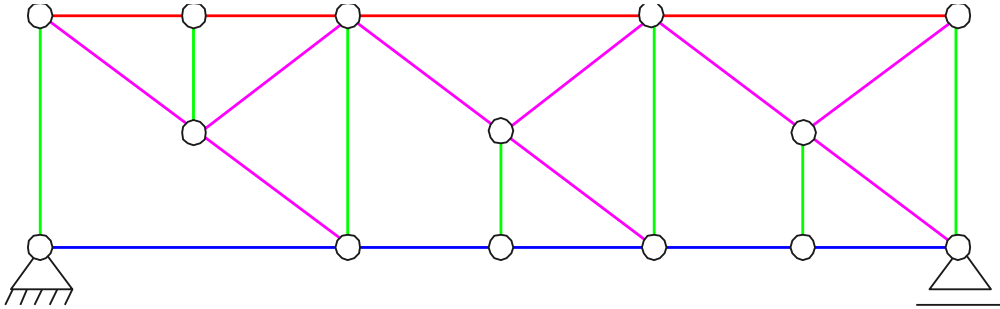
5

8.



7.4. KRATOWNICE

Kratownica – geometrycznie niezmienny ustrój prętowy, w którym końce prętów są połączone między sobą za pomocą węzłów przegubowych. Ustrój przenosi obciążenia w postaci sił skupionych przyłożonych w węzłach. Pręty kratownicy są proste i w zależności od umiejscowienia w siatce strukturalnej kratownicy mogą należeć do tzw. **pasa dolnego** lub **pasa górnego**, mogą to być **krzyżulce**, **słupki**.



Kratownice budowane są jako układy przestrzenne lub płaskie. Mogą być schematami statycznie wyznaczalnymi lub niewyznaczalnymi. Założenia o przegubowym charakterze węzłów w praktyce na ogół nie są spełnione. Różnice są pomijalne, jeżeli *węzły nie są zbyt rozległe, a pręty dostatecznie smukłe*.

Modelem kratownicy płaskiej może być tarcza lub zbiór tarcz połączonych między sobą i z ostoją za pomocą więzi elementarnych tworząc układ geometrycznie niezmienny ([zob. punkt 4.2. część 2](#)).

W prętach obciążonej kratownicy występują **wyłącznie siły osiowe rozciągające**:

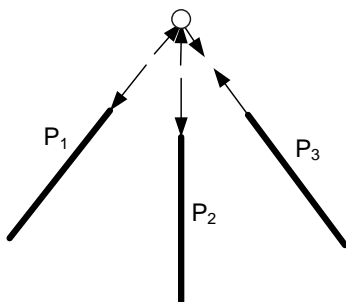


ściskające:



W każdym węźle należącym do kratownicy siły te tworzą **układ zbieżny** i muszą spełniać 2 równania równowagi:

$$\sum P_{ix} = 0, \quad \sum P_{iy} = 0$$



łączna liczba niewiadomych

$r + p$

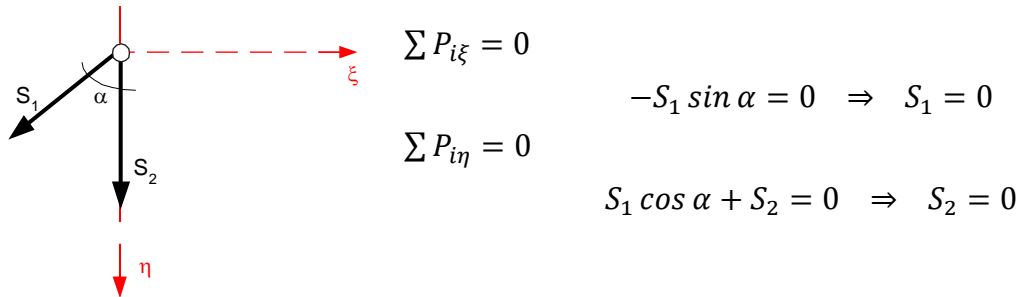
łączna liczba równań

$2w$

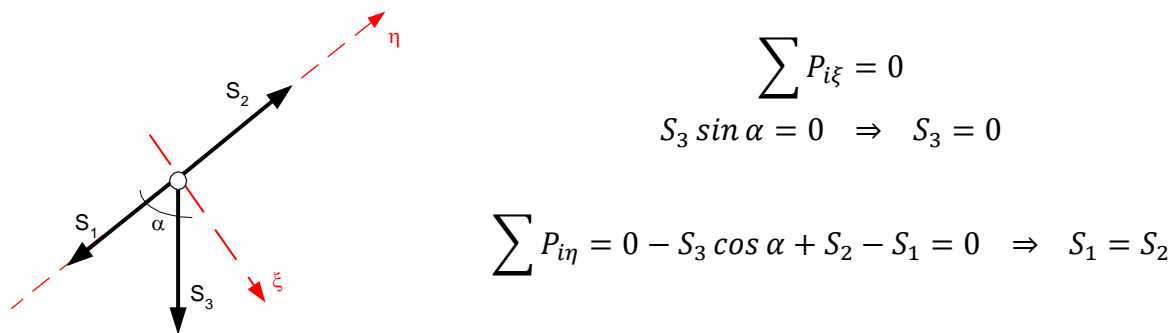
7.4.1. PRĘTY ZEROWE

W niektórych okolicznościach można zidentyfikować a priori „**pręty zerowe**” (pręty, w których siły są równe zero, co nie oznacza, że są to pręty zbędne).

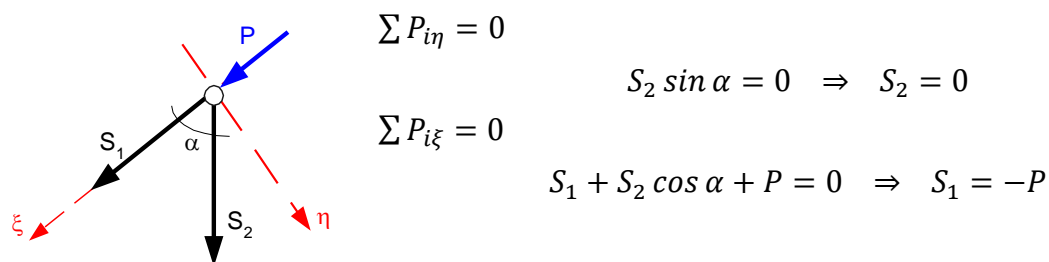
1. Jeżeli w węźle nieobciążonym schodzą się dwa pręty nie leżące na jednej prostej, to oba są zerowe.



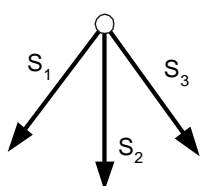
2. Jeżeli w węźle nieobciążonym schodzą się trzy pręty, z których dwa leżą na jednej prostej, to trzeci jest zerowy.



3. Jeżeli w węźle obciążonym schodzą się dwa pręty i jeden z nich leży na kierunku obciążenia to drugi jest zerowy.



4. Jeżeli w węźle nieobciążonym schodzą się trzy dowolne pręty to albo wszystkie są zerowe albo żaden z nich.



7.4.2. METODA RÓWNOWAŻENIE WĘZŁÓW

WERSJA ANALITYCZNA

Rozwiązanie kratownicy polega na wyznaczeniu sił biernych (reakcji) w punktach podparcia kratownicy oraz sił wewnętrznych ściskających lub rozciągających poszczególne pręty.

„Wycinamy” niezależnie węzły kratownicy. Przyjmujemy niewiadome siły rozciągające jako dodatnie. Piszemy warunki równowagi rzutów sił w dowolnym układzie odniesienia. Można zapisać równania macierzowo. Gdy układ jest GN SW macierz jest kwadratowa i jej wyznacznik jest różny od zera.

W „łatwiejszych” kratownicach można zapisać algorytm postępowania:

1. Sprawdzamy, czy kratownica jest statycznie wyznaczalna i geometrycznie niezmienna.
2. Wyznaczamy siły bierne (reakcje) z równań równowagi.
3. „Wycinamy” węzeł kratownicy z dwoma niewiadomymi prętami.
4. Przyjmujemy niewiadome siły rozciągające jako dodatnie.
5. Piszemy warunki równowagi rzutów sił w dowolnym układzie odniesienia.

WERSJA GRAFICZNA (sposób Bowa – Cremony)

Rozwiązanie kratownicy polega na wyznaczeniu sił biernych (reakcji) w punktach podparcia kratownicy oraz sił wewnętrznych ściskających lub rozciągających poszczególne pręty. Każdy węzeł kratownicy możemy traktować jako punkt zbieżności pewnej liczby sił zewnętrznych i wewnętrznych. Dla płaskiego układu sił zbieżnych mamy dwa warunki; analityczny tzn. **suma rzutów wszystkich sił na oś x i y musi być równa zero** oraz warunek wykreślny tzn. **wielobok wszystkich sił występujących w układzie musi być zamknięty**.

1. Sprawdzamy, czy kratownica jest statycznie wyznaczalna i geometrycznie niezmienna.
2. Wyznaczamy siły bierne (reakcje).
3. Opisujemy poszczególne pola kratownicy np. literami alfabetu.
4. Rysujemy wielobok sił zewnętrznych korzystając z odpowiedniej skali.
5. Rysujemy plan Bowe’a - Cremony na wieloboku sił zewnętrznych obchodząc po kolei wszystkie węzły kratownicy.
6. Ustalamy które pręty są rozciągane a które ściskane.
7. Dokonujemy powtórnego obejścia wszystkich węzłów zaznaczając przy węźle w którą stronę poruszaliśmy się po planie Cremony.
8. Wyniki podajemy np. w tabeli.

7.4.3. METODA PRZECIĘĆ

WERSJA ANALITYCZNA - METODA RITTERA

Rozwiązanie kratownicy polega na wyznaczeniu sił biernych (reakcji) w punktach podparcia kratownicy oraz sił wewnętrznych ściskających lub rozciągających poszczególne pręty. Przecinamy kratownicę na dwie części, aby przekrój przechodził przez 3 niezbieżne pręty.

1. Sprawdzamy, czy kratownica jest statycznie wyznaczalna i geometrycznie niezmienna.
2. Wyznaczamy siły bierne (reakcje) z równań równowagi.
3. Przecinamy kratownicę na dwie części, aby przekrój przechodził przez 3 niezbieżne pręty.
4. Dla odciętej części piszemy niesprzężone równania równowagi.

Przekrój może być dokonany przez większą ilość prętów pod warunkiem, że istnieje punkt Rittera dla danego pręta (punkt, w którym przecinają się osie nieznanymi prętów) lub gdy znamy wartości sił w niektórych „przeciętych prętach” – zaliczamy je wtedy do grupy sił

WERSJA GRAFICZNA - SPOSÓB CULMANA

Rozwiązanie kratownicy polega na wyznaczeniu sił biernych (reakcji) w punktach podparcia kratownicy oraz sił wewnętrznych ściskających lub rozciągających poszczególne pręty. Przecinamy kratownicę na dwie części, aby przekrój przechodził przez 3 niezbieżne pręty.

1. Sprawdzamy, czy kratownica jest statycznie wyznaczalna i geometrycznie niezmienna.
2. Wyznaczamy siły bierne (reakcje).
3. Przecinamy kratownicę na dwie części, aby przekrój przechodził przez 3 niezbieżne pręty.
4. Dla odciętej części rozwiązujemy zadanie równowagi wykreślnie (sposób Culmana)


( [zob. punkt 5.2. część 1](#))

7.4.4. METODA DOJŚCIA POŚREDNIEGO

Jeżeli siła, którą chcemy wyznaczyć nie może być bezpośrednio wyznaczona np. metodą przecięć to należy ją wyznaczyć pośrednio – wyznaczając najpierw siły w prętach pośrednich.

7.4.5. METODA WYMIANY PRĘTÓW (METODA HENNEBERGA)

Dana jest kratownica GN i SW ($p + r = 2w$) „trudna do rozwiązania”. Jedynym ogólnym sposobem analitycznym jest rozwiązanie – ułożenie $2w$ sprzężonych równań równowagi węzłów.

Sposób Henneberga polega na tym, że przecinamy jeden z prętów i wprowadzamy go w inne miejsce w kratownicy, tak aby przekształcona kratownica nadal była GN i SW ale łatwa do rozwiązania. (Zabieg ten ma na celu wyłapania węzła, od którego można by było rozpocząć obliczenia analityczne - maksymalnie 2 niewiadome). Rozwiązanie uzyskujemy **metodą superpozycji** ( [zob. punkt 1 część 3](#))

Algorytm postępowania:**Etap I**

obliczamy całą „zmienioną” kratownicę od obciążeń zewnętrznych P dowolną „łatwą” metodą (pomijając siłę x powstałą w wyniku usunięcia pręta),

Etap II

obliczamy „zmienioną” kratownicę tylko od siły $x = 1$

(W przyjętym pręcie (x) kratownicy wyjściowej występuje nieznaną siłą, przyjmujemy ją równą 1 i obliczamy „drugą” kratownicę - bez obciążenia zewnętrznego, ale z obciążeniem jednostkowym zamiast usuniętego pręta),

Etap III

Obliczamy siły w całej kratownicy metodą superpozycji

$$S_i = S_i^P + \bar{S}_i \cdot X$$

W „nowym” pręcie dołączonym siła musi być równa 0 (przecież jego nie było w wyjściowej kratownicy)

$$Z = Z^P + \bar{Z} \cdot X = 0 \quad \Rightarrow \quad X = -\frac{Z^P}{\bar{Z}}$$

Warunkiem rozwiązania jest $\bar{Z} \neq 0$.

Jest to równocześnie warunek GN pierwotnej kratownicy.

UWAGI:

1. Jeżeli chcemy udowodnić GN metoda Henneberga wystarczy wykonać II etap i udowodnić, że $\bar{Z} \neq 0$.
2. Wymiana może dotyczyć pręta podporowego (więzi podporowej).

7.4.6. METODA KINEMATYCZNA

Metoda kinematyczna (**metoda prac przygotowanych**) polega na wyznaczeniu siły w pręcie kratownicy po przekształceniu kratownicy GN SW w mechanizm, a następnie wykorzystaniu ZPP. Jest to metoda bardzo przydatna w analizie złożonych kratownic. ([zob. część 4](#))

Etap I

Tworzymy odpowiedni mechanizm do wyznaczenia nieznaną siły („usuwamy” pręt i „wstawiamy” nieznaną siłę).

Etap II

Poszukujemy przemieszczeń obroconych dla mechanizmu.

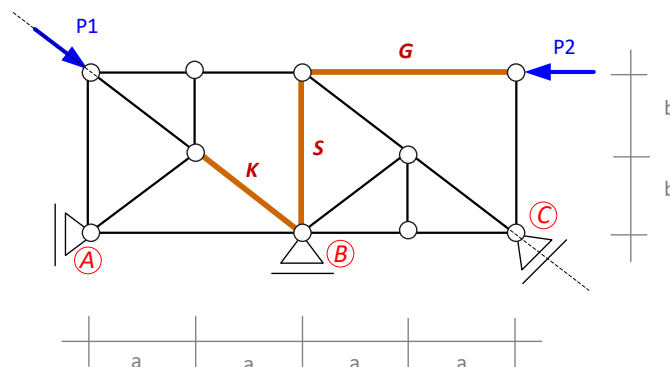
Etap III

Zapisujemy równanie pracy przygotowanej. Praca jest równa zero, stąd możemy wyznaczyć nieznaną siłę.

7.4.7 PRZYKŁAD

Wyznaczyć siły w prętach kratownicy – G, S, K

Dane: $P_1 = 10 \text{ kN}$, $P_2 = 8 \text{ kN}$, $a = 4 \text{ m}$, $b = 3 \text{ m}$



1. Sprawdzamy, czy kratownica jest statycznie wyznaczalna i geometrycznie niezmienna.

1.1. Warunek ilościowy

$$r + p = 2w$$

liczba reakcji

$$r = 3$$

liczba prętów: 3 w pasie górnym, 3 w pasie dolnym, 5 słupków, 6 krzyżulców;

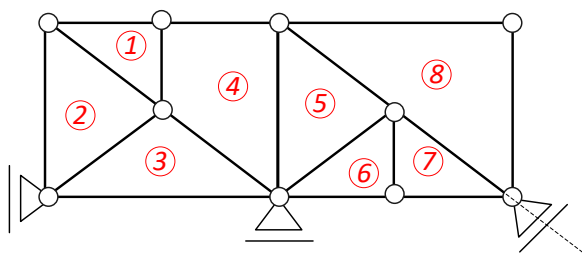
$$p = 17$$

liczba węzłów

$$w = 10$$

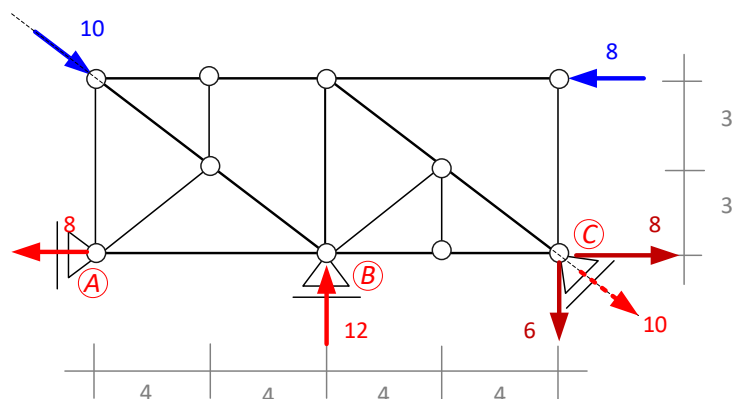
1.2. Warunek jakościowy

Budowa trójkątna – budując kolejno trójkąty od lewej strony

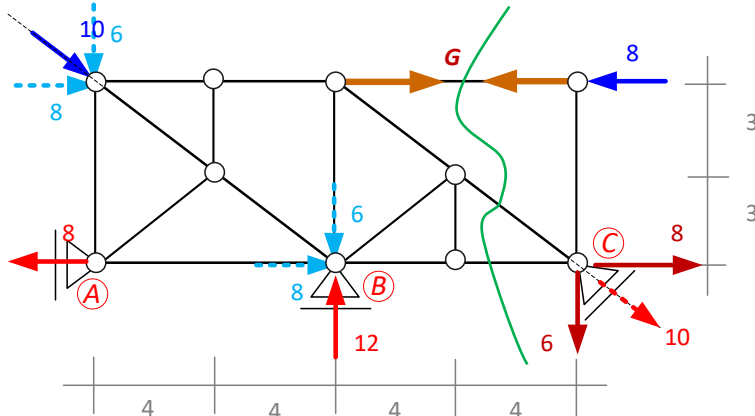


Odpowiedź – układ jest GN, SW

2. Wyznaczamy siły bierne (reakcje) – zobacz przykład str. 45 ([zob. część 3](#))



3. Przycinamy kratownicę na dwie części, aby przekrój przechodził przez 3 niezbieżne pręty.

3.1. Do wyznaczenia pręta G :

$$\sum M_C = 0; \text{ (C – punkt przecięcia pozostałych dwóch przeciętych prętów)}$$

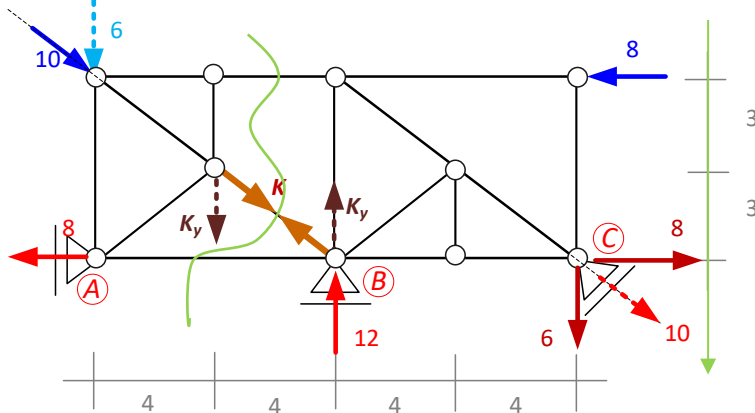
$$\sum M_C^p = -8 \cdot 6 - G \cdot 6 = 0; \text{ (z prawej strony cięcia)}$$

lub

$$\sum M_C^l = -6 \cdot 8 - G \cdot 6 = 0; \text{ albo } \sum M_C^l = -6 \cdot 16 + 8 \cdot 6 - G \cdot 6 = 0$$

$$\Rightarrow G = -8 \text{ kN (zwrot przeciwny do zaznaczonego na rysunku)}$$

założono siłę rozciągającą, czyli siła w pręcie G jest siłą ściskającą

3.2. Do wyznaczenia pręta K :

Pozostałe dwa przecięte pręty są równoległe, więc obieram oś prostopadłą do nich:

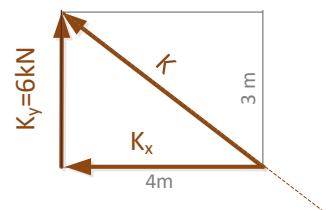
$$\sum Y = 0$$


$$\sum Y^l = 6 + K_y = 0; \text{ (z lewej strony cięcia)}$$

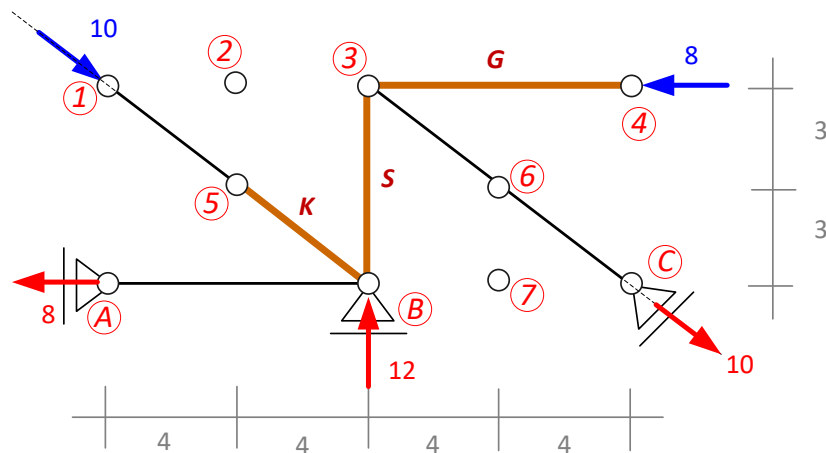
$$\text{lub } \sum Y^p = -K_y - 12 + 6 = 0;$$

$$\Rightarrow K_y = -6 \text{ kN (zwrot przeciwny do zaznaczonego na rysunku)}$$

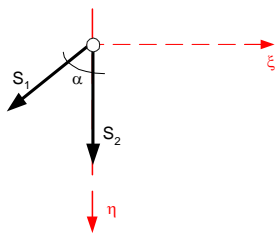
$$\Rightarrow K = -10 \text{ kN (zwrot przeciwny do zaznaczonego na rysunku)}$$



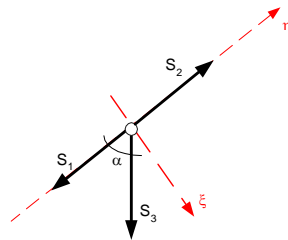
3.3. Do wyznaczenia pręta S:
warto **poszukać prętów zerowych**: ( [zob. punkt 4.7.1](#))



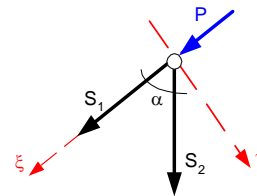
p.1.



p. 2.

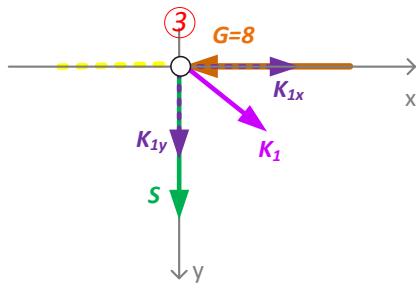
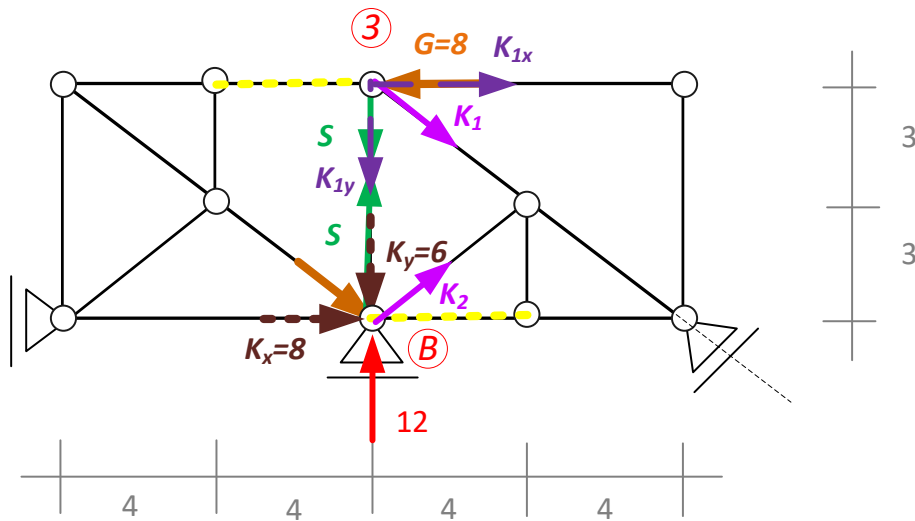


p. 3.



węzeł nr 2 – p.2, czyli pręt 2-5 jest prętem zerowym
 węzeł nr 7 – p.2, czyli pręt 6-7 jest prętem zerowym
 węzeł nr 4 – p.3, czyli pręt C-4 jest prętem zerowym
 wtedy węzeł nr C – p.3, czyli pręt C-7 jest prętem zerowym
 (pod warunkiem, że siła w pręcie C-4 wynosi zero)
 dalej węzeł nr 7 - pręt B-7 jest prętem zerowym
 węzeł nr A – p.3, czyli pręt A-1 jest prętem zerowym
 wtedy węzeł nr 1 – p.3, czyli pręt 1-2 jest prętem zerowym
 (pod warunkiem, że siła w pręcie A-1 wynosi zero)
 dalej węzeł nr 2 - pręt 2-3 jest prętem zerowym

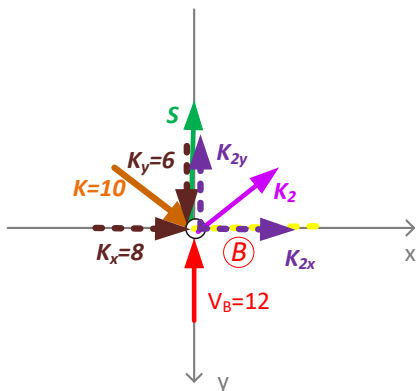
Siłę S można wyznaczyć z dowolnego cięcia lub z równowagi węzła korzystając z wcześniej wyznaczonej siły G lub K (metoda dojścia pośredniego)



Równowaga węzła nr 3:

$$\begin{aligned} \sum P_x = 0 : K_{1x} - 8 = 0 &\Rightarrow K_{1x} = 8 \\ &\Rightarrow K_{1y} = 6 \\ \sum P_y = 0 : K_{1y} + S = 0 &\Rightarrow S = -K_{1y} = -6 \\ &\Rightarrow S = -6 \text{ kN} \end{aligned}$$

lub



Równowaga węzła nr B:

$$\begin{aligned} \sum P_x = 0 : K_{2x} + 8 = 0 &\Rightarrow K_{2x} = -8 \\ &\Rightarrow K_{2y} = -6 \\ \sum P_y = 0 : -K_{2y} - S - 12 = 0 \\ &\quad -(-6) - S - 12 = 0 \Rightarrow S = -6 \\ &\Rightarrow S = -6 \text{ kN} \end{aligned}$$

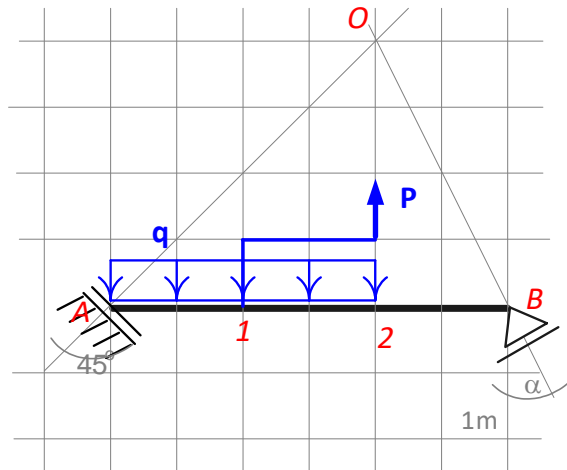
(zwrot przeciwny do zaznaczonego na rysunku; czyli siła w pręcie S jest siłą ściskającą)

8. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

Zadanie nr 1

Narysować wykresy MTN dla pręta głównego belki elementarnej.

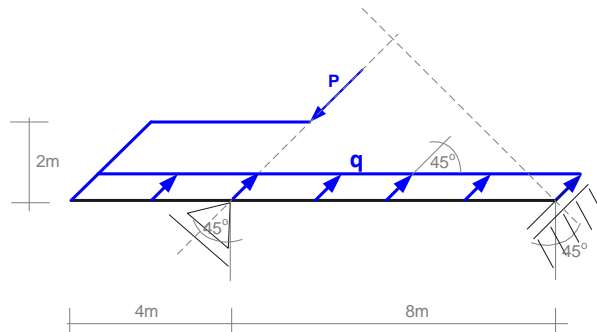
Dane: $P = 9 \text{ kN}$, $q = 6 \text{ kN/m}$, $\text{tg}\alpha = \frac{1}{2}$



Zadanie nr 2

Narysować wykresy MTN dla pręta głównego belki elementarnej.

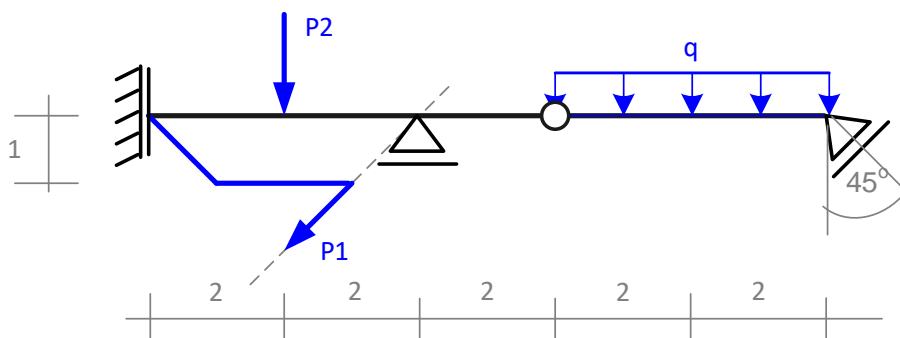
Dane: $q = \sqrt{2} \text{ N/m}$, $P = 4 \text{ N}$



Zadanie nr 3

Narysować wykresy MTN dla pręta głównego belki dwuprzęsłowej.

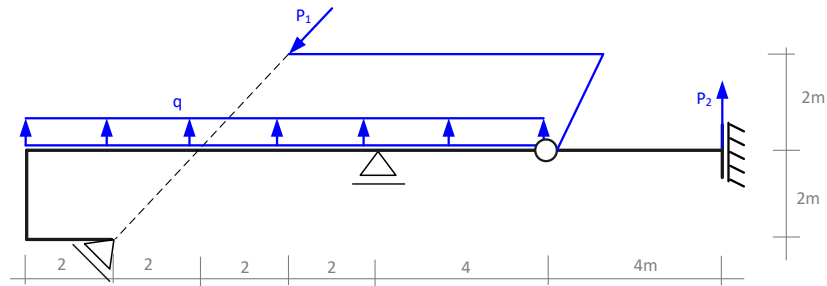
Dane: $q = 10 \text{ kN/m}$, $P_1 = 20\sqrt{2} \text{ kN}$, $P_2 = 40 \text{ kN}$



Zadanie nr 4

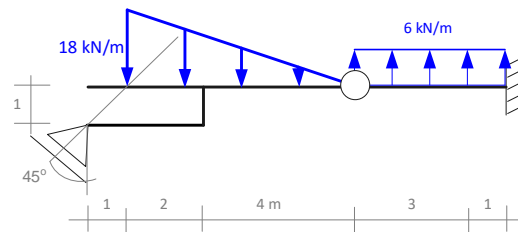
Udowodnić GN SW układu. Narysować wykresy MTN dla pręta głównego belki.

Dane: $q = 1 \frac{kN}{m}$, $P_1 = 4\sqrt{2} kN$, $P_2 = 4 kN$,



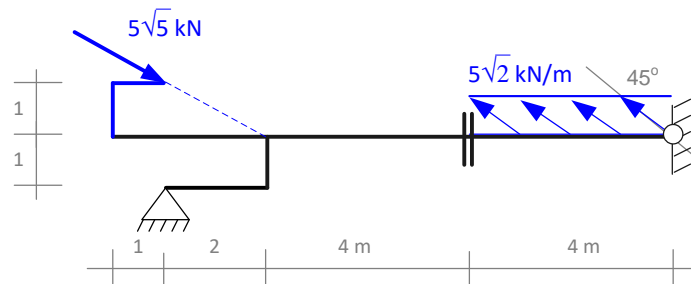
Zadanie nr 5

Narysować wykresy MTN dla pręta głównego belki dwuprzęsłowej.



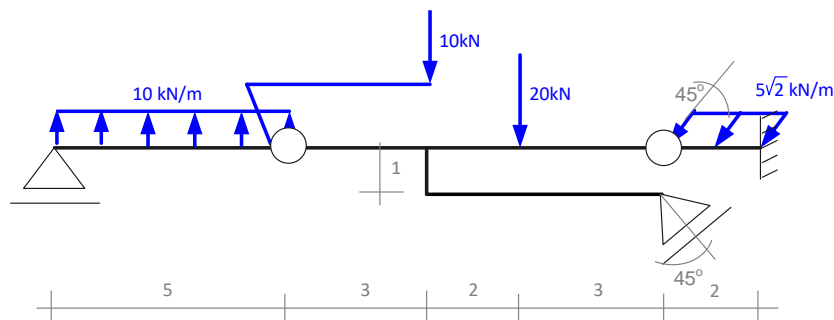
Zadanie nr 6

Narysować wykresy MTN dla pręta głównego belki dwuprzęsłowej.



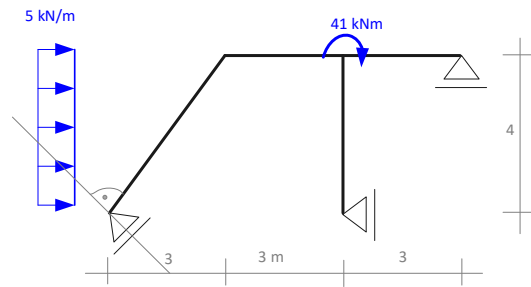
Zadanie nr 7

Narysować wykresy MTN dla pręta głównego belki trzyprzęsłowej.



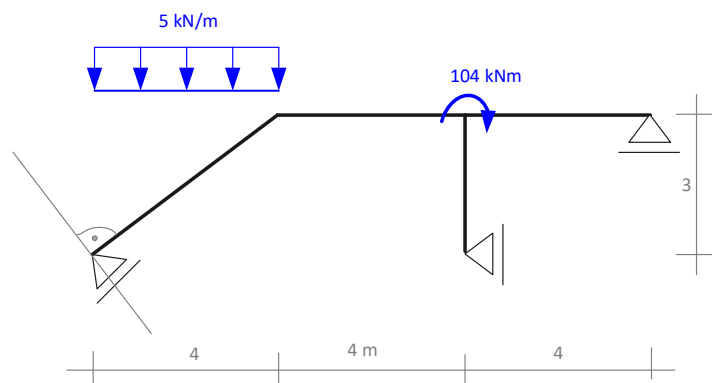
Zadanie nr 8

Narysować wykresy MTN dla ramy prostej.



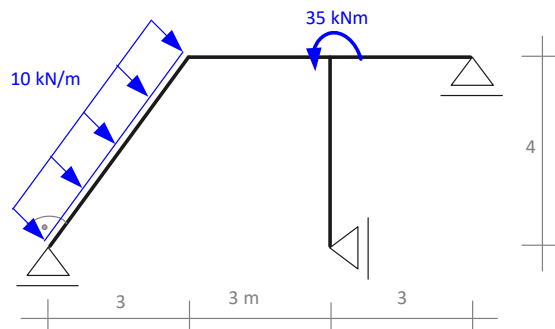
Zadanie nr 9

Narysować wykresy MTN dla ramy prostej.



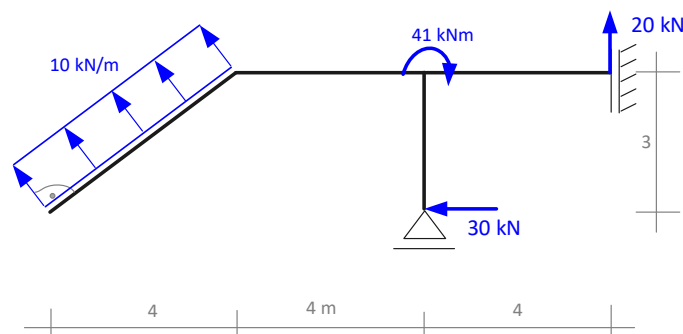
Zadanie nr 10

Narysować wykresy MTN dla ramy prostej.



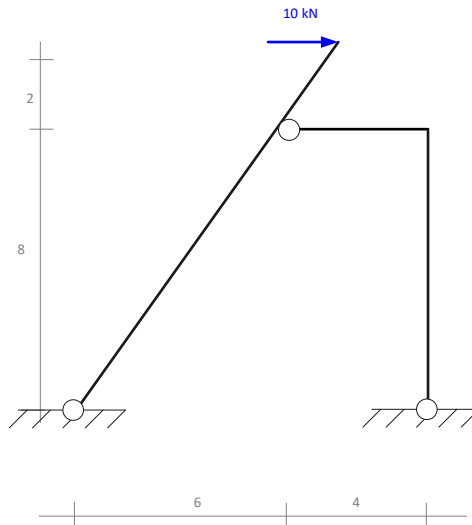
Zadanie nr 11

Narysować wykresy MTN dla ramy prostej.



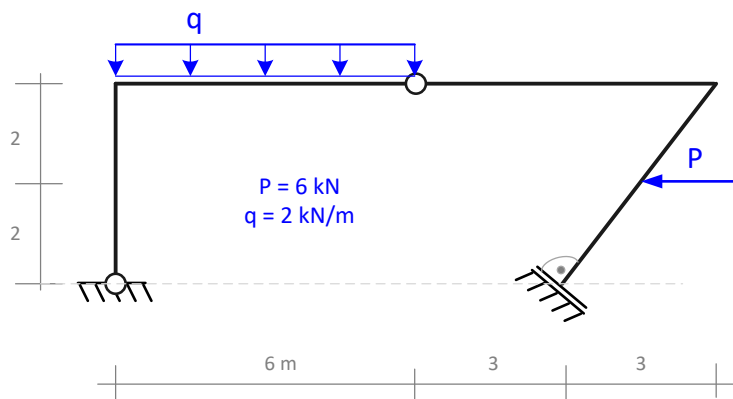
Zadanie nr 12

Narysować wykresy MTN dla układu ramowego.



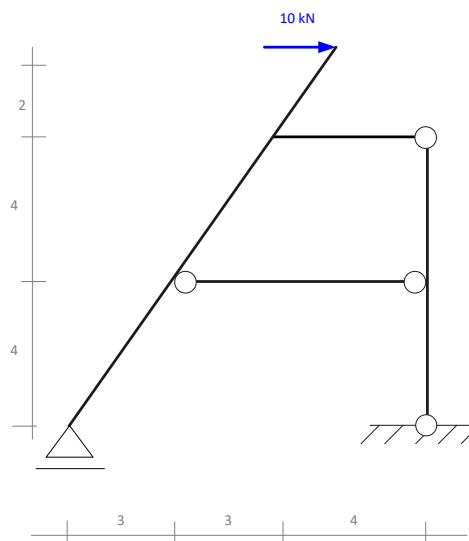
Zadanie nr 13

Narysować wykresy MTN dla układu ramowego.



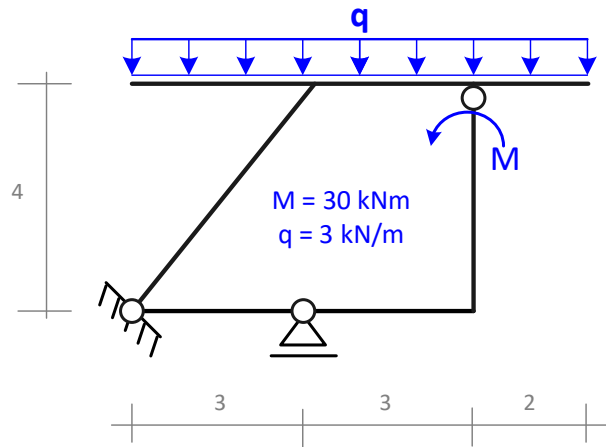
Zadanie nr 14

Narysować wykresy MTN dla układu ramowego.



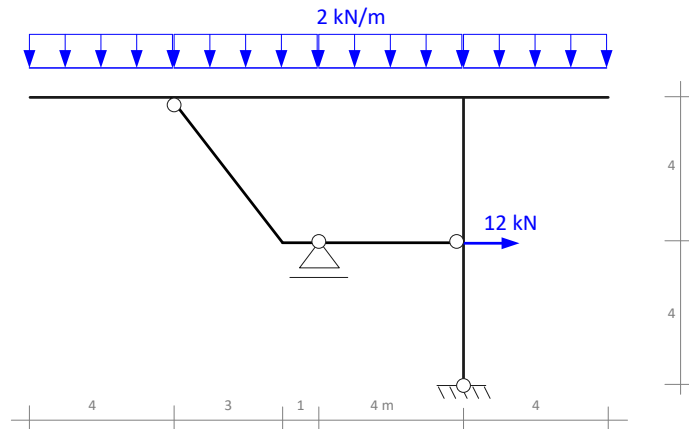
Zadanie nr 15

Narysować wykresy MTN dla układu ramowego.



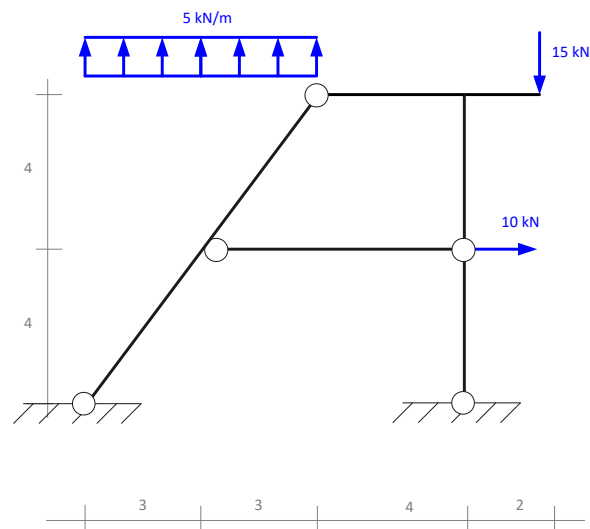
Zadanie nr 16

Narysować wykresy MTN dla układu ramowego.



Zadanie nr 17

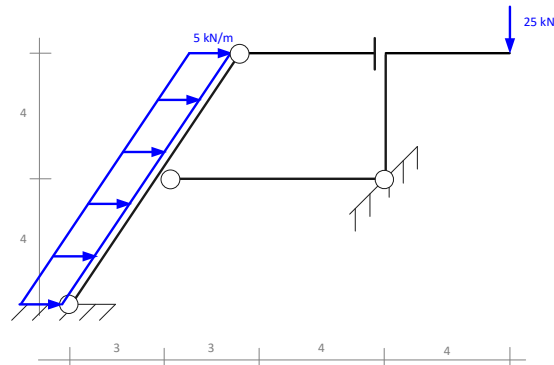
Narysować wykresy MTN dla układu ramowego.



podpowiedź – przy wyznaczaniu reakcji, wykorzystać warunek konstrukcyjny (prawy przegub)

Zadanie nr 18

Narysować wykresy MTN dla układu ramowego.

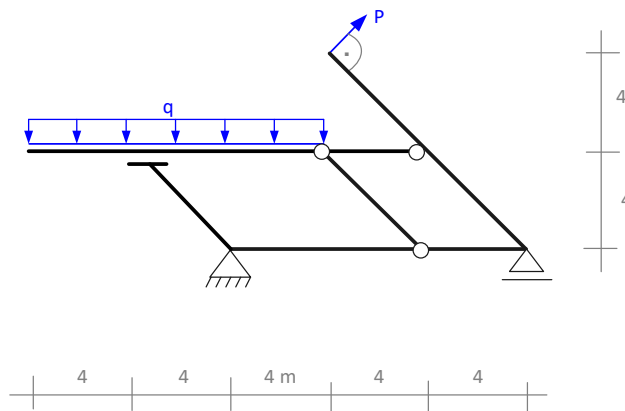


podpowiedź – przy wyznaczaniu reakcji rozciąć komorę

Zadanie nr 19

Narysować wykresy MTN dla układu ramowego.

Dane: $P = 6\sqrt{2}$ kN, $q = 4$ kN/m.

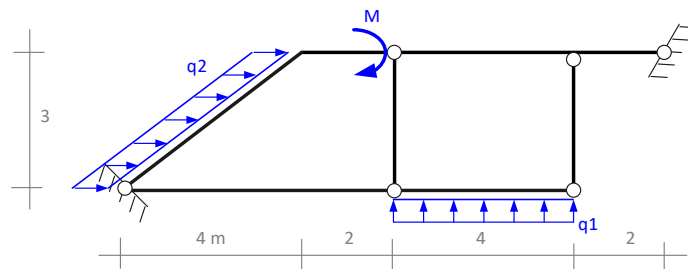


podpowiedź – rozciąć obydwie pręty przegubowe

Zadanie nr 20

Narysować wykresy MTN dla układu ramowego.

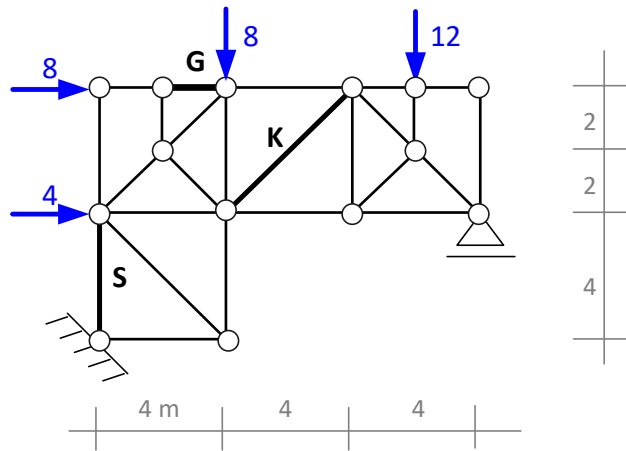
Dane: $M = 24$ kNm, $q_1 = 3$ kN/m, $q_2 = 6$ kN/m.



podpowiedź – rozłożyć układ na układy elementarne („części pierwsze”)

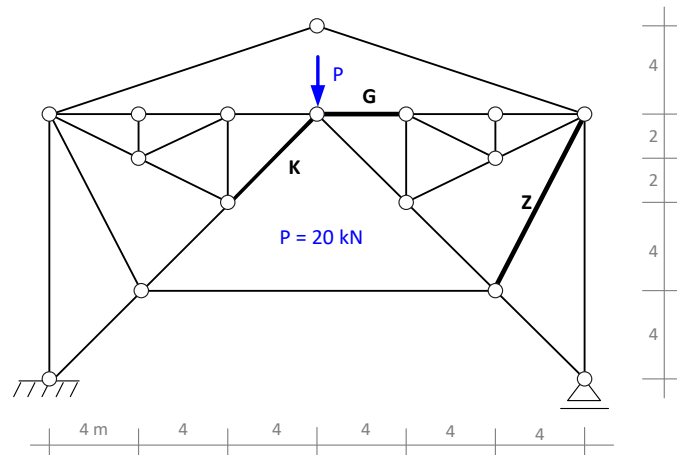
Zadanie nr 21

Wyznaczyć siły w zaznaczonych prętach kratownicy.



Zadanie nr 22

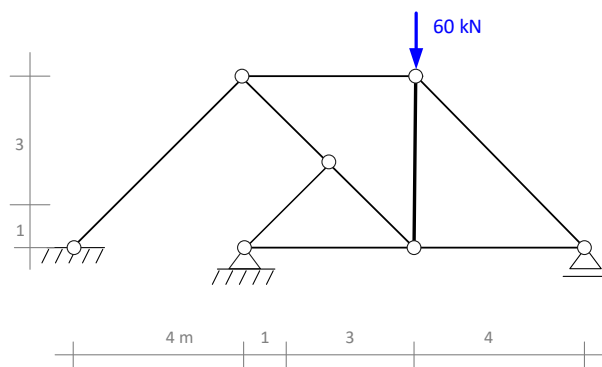
Wyznaczyć siły w zaznaczonych prętach kratownicy.



podpowiedź – najpierw poszukać prętów zerowych

Zadanie nr 23

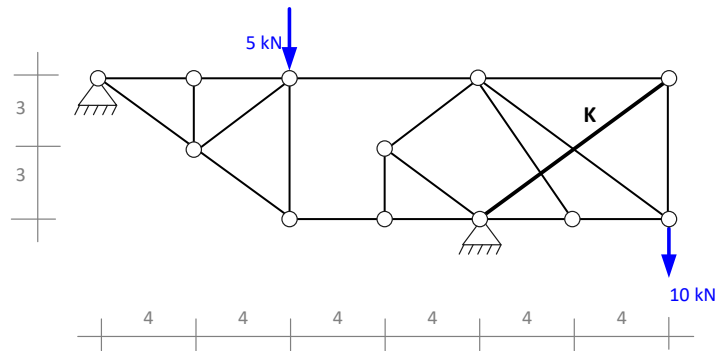
Wyznaczyć siły w prętach kratownicy.



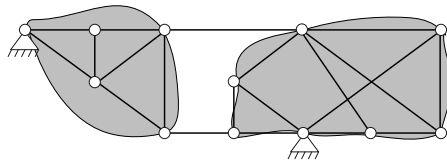
podpowiedź – znaleźć pręty zerowe kratownicy, a dopiero potem wyznaczyć reakcje lub zastosować metodę Henneberga

Zadanie nr 24

Wyznaczyć siły w zaznaczonym pręcie kratownicy.



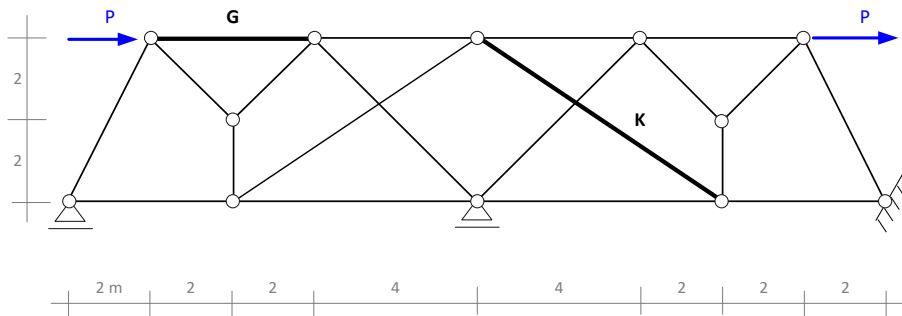
podpowiedź: analiza kinematyczna układu



Zadanie nr 25

Wyznaczyć siły w zaznaczonych prętach kratownicy.

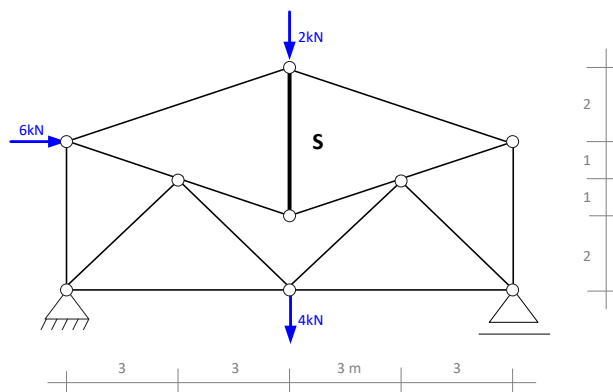
Dane: $P = 10 \text{ kN}$.



podpowiedź – zastosować metodę Henneberga

Zadanie nr 26

Wyznaczyć siłę w zaznaczonym pręcie kratownicy.



podpowiedź – zastosować zasadę prac przygotowanych

CZĘŚĆ CZWARTA

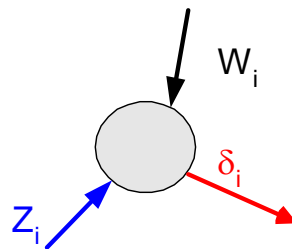
ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH

Metodę kinematyczną (metoda prac przygotowanych, ZPP) można stosować do wyznaczania pojedynczej siły zewnętrznej lub wewnętrznej w geometrycznie niezmiennych, statycznie wyznaczalnych ustrojach prętowych. Algorytm postępowania [zob. punkt 7.4.6 część 3.](#)

1. ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH DLA CIAŁA SZTYWNEGO

Ciało nieodkształcalne – ciało materialne doskonale sztywne – ciało materialne, którego odległości między punktami nie mogą ulec zmianie.

Rozważmy tarczę płaską doskonale sztywną będącą w równowadze pod wpływem działania sił P_1, P_2, \dots, P_n (czynnych i biernych) leżących w jej płaszczyźnie. Tarcza jest w równowadze, gdy w równowadze znajduje się każdy z punktów materialnych (tarcza = zbiór punktów materialnych). Na taki punkt, oprócz sił wewnętrznych \vec{W}_i (pochodzących od pozostałych punktów materialnych), mogą działać siły zewnętrzne \vec{Z}_i .



\vec{Z}_i - wypadkowa sił zewnętrznych działających na punkt materialny „i”

\vec{W}_i - wypadkowa sił wewnętrznych działających na punkt materialny „i”

Dla punktu materialnego „i” warunkiem równowagi jest

$$\vec{Z}_i + \vec{W}_i = 0 \quad (1)$$

Nadajmy tarczy **przemieszczenie wirtualne (przygotowane)**,

które charakteryzuje się tym, że jest:

- nieskończenie małe,
- niezależne od sił obciążających tarczę,
- dowolne, ale zgodne z ograniczeniami kinematycznymi (możliwe),
- niezależne od czasu.

Praca wszystkich sił działających na punkt materialny „i”, wynosi:

$$(\vec{Z}_i + \vec{W}_i) \cdot \vec{\delta}_i = 0 \quad (2)$$

gdzie: $\vec{\delta}_i$ - przemieszczenie punktu „i” (rotacyjne, translacyjne lub łączne).

$$\vec{Z}_i \cdot \vec{\delta}_i + \vec{W}_i \cdot \vec{\delta}_i = 0 \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \vec{Z}_i \cdot \vec{\delta}_i &= Z_i \cdot \delta_i \cdot \cos(\vec{Z}_i, \vec{\delta}_i) \\ \vec{W}_i \cdot \vec{\delta}_i &= W_i \cdot \delta_i \cdot \cos(\vec{W}_i, \vec{\delta}_i) \end{aligned} \quad (4)$$

Wyrażenia (4) nazywamy

pracą wirtualną sił \vec{Z}_i i \vec{W}_i na przemieszczeniu wirtualnym $\vec{\delta}_i$.

Dla wszystkich punktów materialnych wchodzących w skład tarczy otrzymujemy:

$$\sum_i (\vec{Z}_i \cdot \vec{\delta}_i) + \sum_i (\vec{W}_i \cdot \vec{\delta}_i) = 0 \quad (5)$$

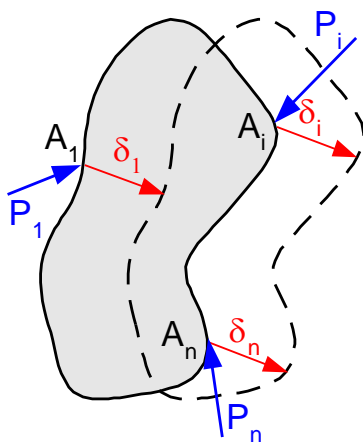
Siły wewnętrzne jako wynik wzajemnego oddziaływania punktów materialnych są sobie równe, lecz przeciwnie skierowane, zatem ich praca wirtualna będzie równa zero.

Stąd otrzymujemy:

$$\sum_i (\vec{Z}_i \cdot \vec{\delta}_i) = 0 \quad (6)$$

Dla układu sił będącego w równowadze suma prac wirtualnych sił zewnętrznych na wirtualnych przemieszczeniach jest równa zero.

Przyjmując przemieszczenie przygotowane – **translacje** (przesunięcie) δ :



Wektor przesunięcia $\vec{\delta}_i = \vec{\delta}$

$$\sum_i (\vec{P}_i \cdot \vec{\delta}_i) = 0 \quad (7)$$

$$\delta \sum_i (\vec{P}_i) = 0 \quad (8)$$

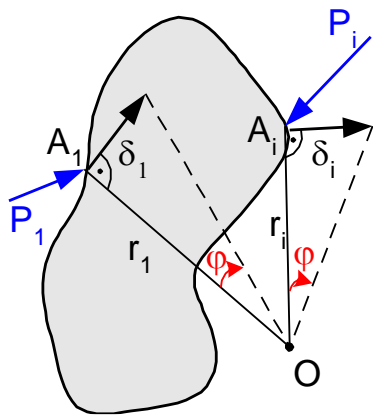
$$\sum_i \vec{P}_i = 0 \quad (9)$$

$$\rightarrow \vec{S} = 0$$

Przyjmując przemieszczenie przygotowane – **rotację** (kąt obrotu) ϕ :

Małe ruchy tarcz interpretujemy jako obroty wokół środków obrotu, a przesunięcia punktów tarczy przyjmujemy stycznie do kołowych trajektorii ruchu, tj. prostopadle do promienia.

Jeżeli $\phi \approx 0$ to $tg\phi = \phi$.



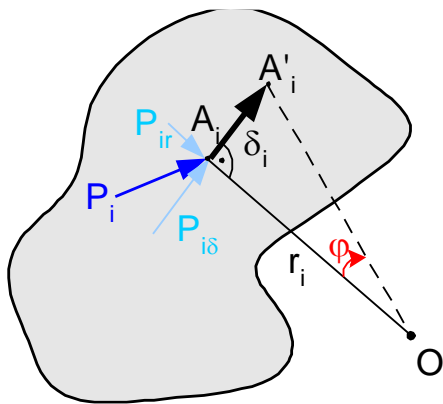
Wektor przesunięcia $\vec{\delta}_i = \vec{r}_i \phi$

$$\sum_i (\vec{P}_i \cdot (\vec{r}_i \phi)) = 0 \tag{10}$$

$$\phi \sum_i (\vec{P}_i \cdot \vec{r}_i) = 0 \tag{11}$$

$$\sum_i (\vec{P}_i \cdot \vec{r}_i) = 0 \tag{12}$$

Mając na uwadze, że $\vec{P}_i = \vec{P}_{ir} + \vec{P}_{i\delta}$



$$\sum_i (\vec{P}_{ir} \cdot \vec{r}_{ir}) + \sum_i (\vec{P}_{i\delta} \cdot \vec{r}_{i\delta}) = 0 \tag{13}$$

$$0 + \sum_i (\vec{P}_{i\delta} \cdot (\phi \cdot \vec{r}_i)) = 0 \tag{14}$$

$$\sum_i P_{i\delta} r_i = 0 \tag{15}$$

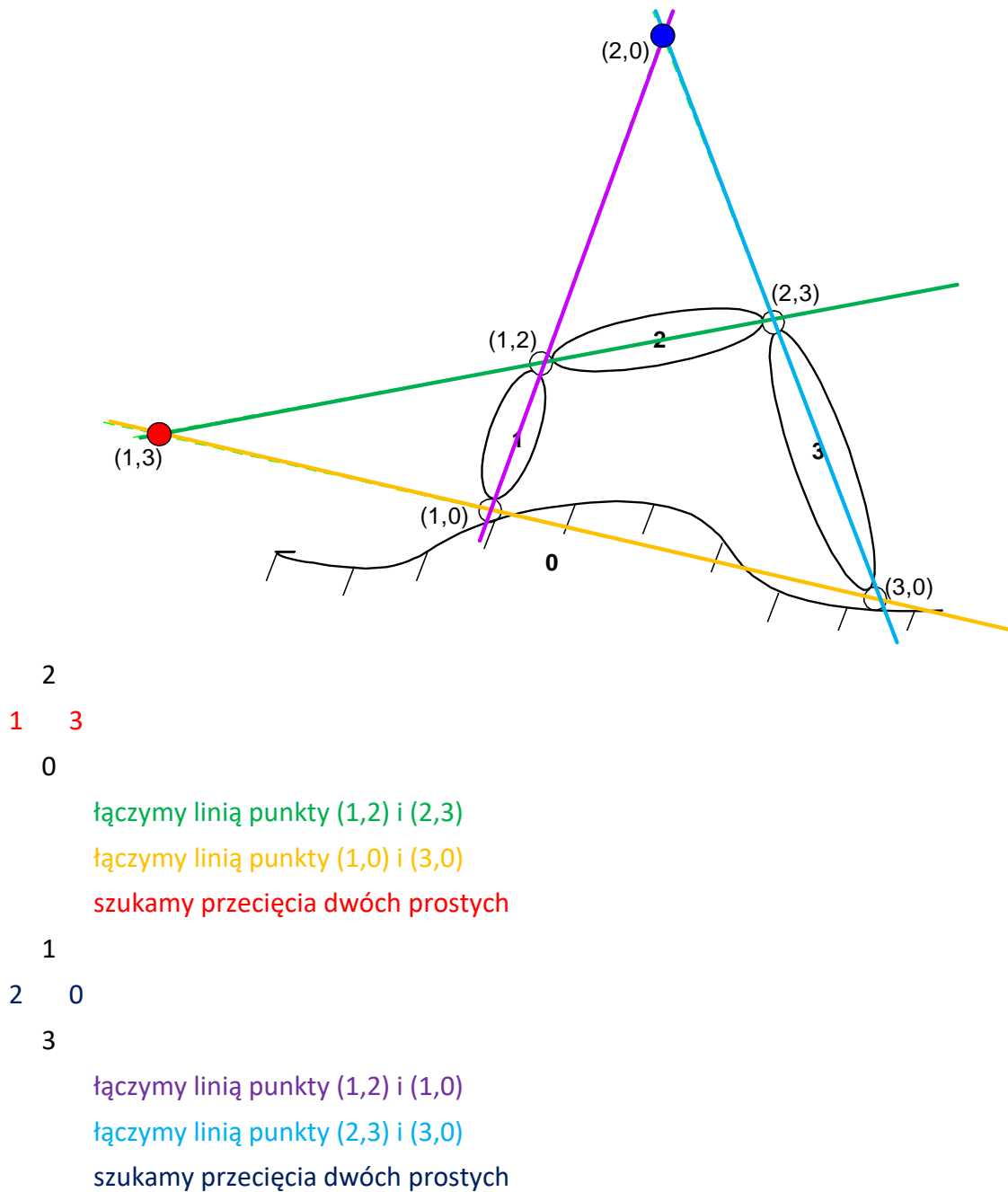
-> $M_o = 0$

2. MECHANIZM

Jeżeli w układzie SW i GN usuniemy jedną więź elementarną, otrzymamy mechanizm, który może wykonywać ruchy, przy czym ruch jednej tarczy jednoznacznie determinuje ruch pozostałych tarcz.

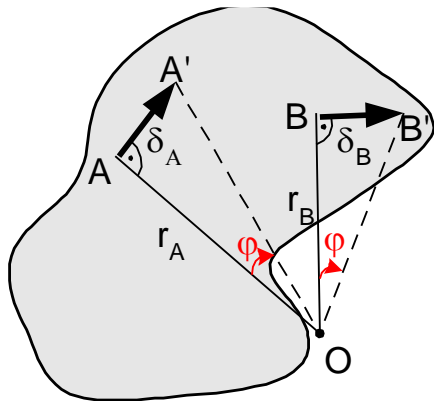
3. ŚRODKI WZAJEMNEGO OBROTU TARCZ

Przykład poszukiwania środków obrotów tarcz względem osi.



(zob. punkt 4.5 część 2)

4. PRZEMIESZCZENIA RZECZYWISTE I OBRÓCONE



ϕ - kąt obrotu tarczy

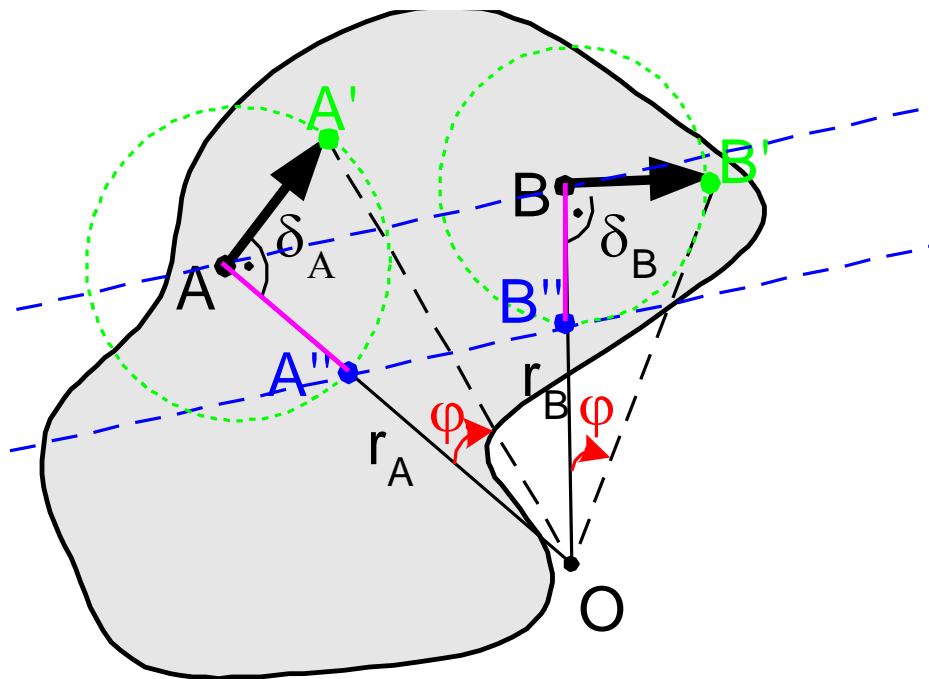
przesunięcie punktu A: $\delta_A = r_A \phi$

przesunięcie punktu B: $\delta_B = r_B \phi$

Kąt obrotu promieni wodzących punktów należących do jednej tarczy jest jednakowy dla wszystkich promieni.

małych ruchach)

Przemieszczenia rzeczywiste są proporcjonalne do promieni wodzących i są do nich prostopadłe (przy bardzo



$$\tan \phi = \frac{\delta_A}{r_A} = \frac{\delta_B}{r_B} \quad (16)$$

$$\frac{\delta_A}{\delta_B} = \frac{r_A}{r_B} \quad (17)$$

$$\frac{AA''}{BB''} = \frac{OA}{OB} \quad (18)$$

Z twierdzenia Talesa $\overline{A''B''} \parallel \overline{AB}$.

$\overline{AA'}$ – wektor przesunięcia rzeczywistego punktu A

$\overline{AA''}$ – wektor przesunięcia obróconego punktu A

r_A – promień wodzący punktu A

Wnioski:

1. Przesunięcia obrócone punktów należących do jednej tarczy są zbieżne w środku tej tarczy (punkt O)
2. Figura zbudowana na końcach wektorów przemieszczeń obróconych punktów należących do jednej tarczy jest równoległa i podobna do figury utworzonej przez te punkty w pierwotnym położeniu (ABC, A''B''C'')
3. „Figura obrócona” dla układu tarcz jest równoległa do „figury pierwotnej”, ale nie jest figurą podobną, ponieważ każda tarcza ma swój współczynnik odwzorowania:

$$k = \frac{A''B''}{AB} = \frac{OA''}{OA} = \frac{r_A - r_A\phi}{r_A} = 1 - \phi = \text{const}$$

Przesunięcia rzeczywiste występujące w mechanizmie układów tarcz pozwalają narysować przemieszczony układ i tworzą tzw. **plan przemieszczeń rzeczywistych (PPR – punkty A' B')**, a obrócone – **plan przemieszczeń obróconych (PPO - punkty A'' B'')**.

Czasami wygodnie jest skorzystać z **biegunowego planu przemieszczeń obróconych (BPPO)**, który pokazuje względne przesunięcia punktów mechanizmu. Wielkość przesunięć łatwo określić proporcjonalnie do siebie, jeśli jedno z przesunięć obierzemy w podziałce rysunku.

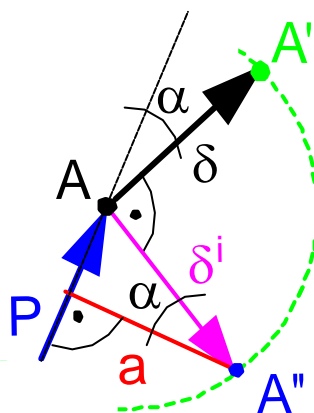
1.5. ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH W USTROJACH PRĘTOWYCH

1. wyznaczanie oddziaływań oraz sił wewnętrznych ([zob. przykłady w suplemencie](#))

W tym celu należy przeciąć wież odpowiadającą poszukiwanej wielkości i zastąpić ją nieznaną siłą czynną, która wraz z faktycznym obciążeniem czynnym da pracę przygotowaną.

Równoczesne przecięcie więzi przekształca geometrycznie niezmienny układ w mechanizm, któremu można nadać przemieszczenie przygotowane.

Równanie prac można zapisać zarówno dla przemieszczeń rzeczywistych, jak i obróconych.



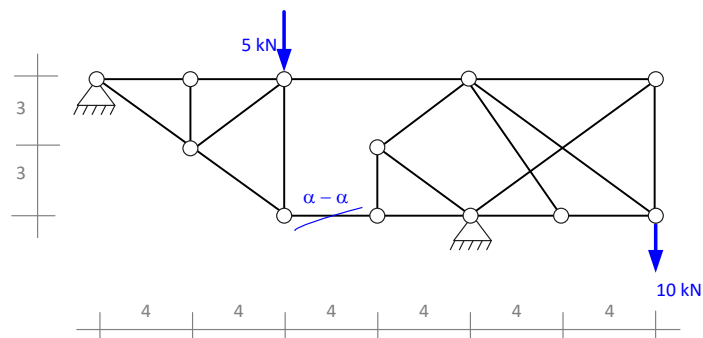
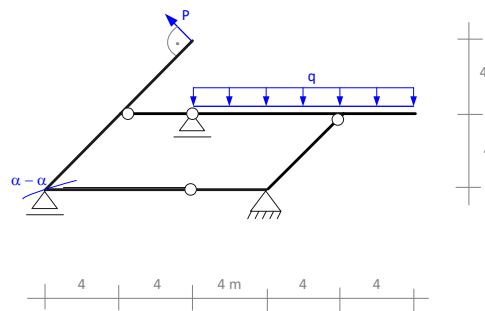
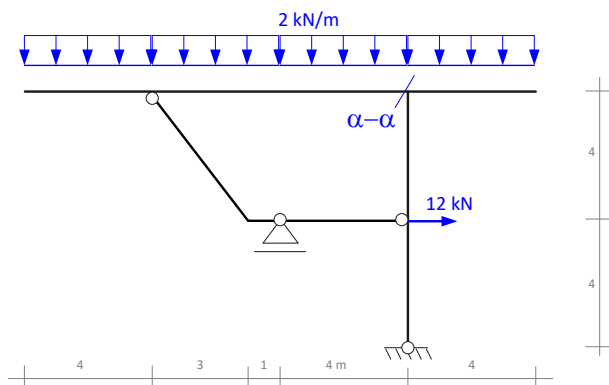
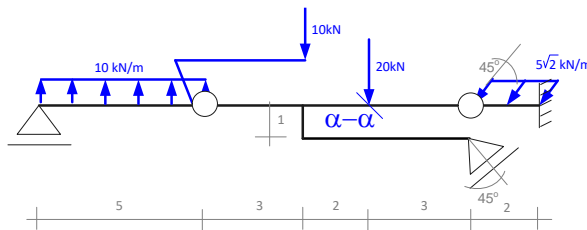
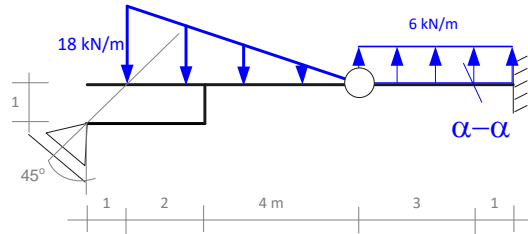
$$L = \vec{P} \cdot \vec{\delta} = P \delta \cos \alpha = P \delta^i \cos \alpha = P a$$

2. badanie geometrycznej niezmienności układu ([zob. punkt 4.5 część 2](#))

4. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

Wyznaczyć siły w zaznaczonym przekroju $\alpha-\alpha$:

(por. przykłady punkt 8 z części 3)



CZĘŚĆ PIĄTA

ŁUKI

łuk – element konstrukcyjny o osi opisanej pewną krzywą płaską w płaszczyźnie pionowej o krzywiznie stałego znaku.

(zob. *Gustaw Rakowski, Roman Solecki, Pręty zakrzywione. Obliczenia statyczne, Arkady Warszawa 1965*)

W niniejszym materiale, „**łukiem**” będziemy nazywać pręt zakrzywiony w płaszczyźnie działania sił i podparty na końcach w sposób zapewniający jego geometryczną niezmiennność. Działanie sił czynnych powoduje powstanie reakcji podporowych o dowolnym kierunku. Składowa pozioma reakcji zwana siłą rozporu może być przeniesiona przez odpowiednio ukształtowane fundamenty lub podpory bądź też przez zastosowanie ściągu.

W zależności od tego, czy oś łuku jest krzywa kołową, eliptyczną, paraboliczną czy koszową, łuki dzielimy na kołowe, eliptyczne...

Strzałka łuku (f) - wysokość punktu osi o największej wysokości łuku.

Rozpiętość podporowa (L) – odległość między podporami.

Podstawową charakterystyką łuku jest jego **wyniosłość** - stosunek f do L .

$$\frac{f}{L} = \frac{1}{12} \div 1 \text{ czasami } 2 \Rightarrow \text{łuki strzeliste}$$

\Rightarrow łuki spłaszczone, małowynioste

Charakterystyczną cechą łuku jest jego poziome oddziaływanie na podpory nazywane **rozporą**, który jest tym większy im mniejsza jest wyniosłość łuku. Wymaga to zastosowania odpowiedniego ukształtowanych podpór. Łuki o właściwie dobranych kształtach osi mogą pracować na czyste ściskanie. Łuki dwuprzegubowe powinny mieć kształt zgodny z **linią ciśnienia**. (zob. *Stefan Bryła, Bolesław Mayzel, Statyka budowli, PWN Warszawa 1955*)

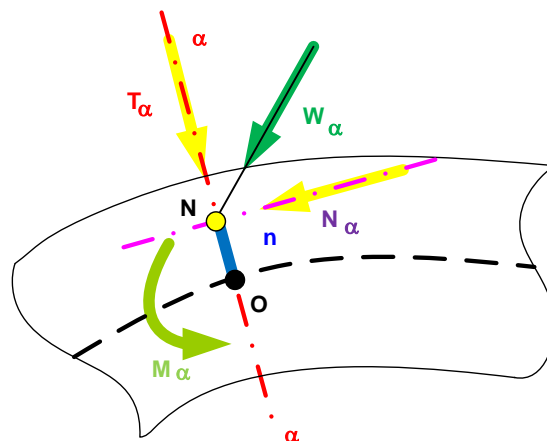
Łuki ceglane swoją popularność zawdzięczają faktowi, iż w początkach budownictwa nie znano materiałów o zdolności przenoszenia naprężeń rozciągających. Stąd konieczne było rozwiązanie, które umożliwi zbudowanie konstrukcji co przenosić będzie tylko naprężenia ściskające.

Łuki najczęściej się pojawiały się w:

- nadprożach drzewiowych,
- nadprożach okiennych,
- bramach wjazdowych,
- sklepieniach,
- w mostach i wiaduktach,
- w stropach.

Konstrukcje te zawdzięczają swoją wysoką trwałość odpowiednio dobranym kształtom tak aby linia ciśnień, będąca w funkcji obciążenia działającego na konstrukcję, znajdowała się w **rdzeniu łuku** wyznaczonego przez przyjętą jego geometrię.

Obciążając wiotkie ciągną dowolnym układem sił, uzyskamy odkształcenie cięgna, na skutek którego będzie ono wyłącznie rozciągane. Analogicznie, odpowiednie ukształtowanie łuku pozwala na całkowite wyeliminowanie momentu zginającego i siły tnącej. Pręty łuku będą wtedy ściskane osiowo (co wymaga ich określonej sztywności).



Można to uzasadnić korzystając z zależności momentu zginającego M_α od siły osiowej N_α , którą wyraża równanie:

$$M_\alpha = N_\alpha \cdot n$$

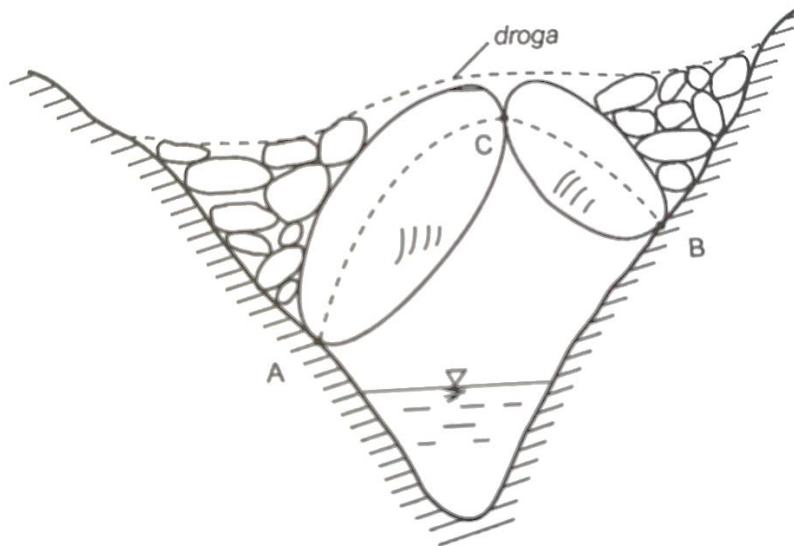
gdzie n jest mimosrodkiem siły N_α , określającym punkt N zaczepienia wypadkowej W_α .

Krzywą, będącą zbiorem punktów N , nazywamy **linią ciśnień**.

Łuk jest ściskany osiowo tylko wtedy, gdy jego oś pokrywa się z linią ciśnień!

Oddziaływanie jednej części łuku na drugą możemy zastąpić wypadkową W_α . wszystkich sił działających z jednej strony przekroju. Jeżeli podzielimy łuk przekrojami poprzecznymi na szereg małych odcinków i w każdym przekroju określimy mimosród n , następnie odłożymy jego wartość dodatnią nad osią, a ujemną pod osią łuku i połączymy końce tych odcinków, to łącząca je linia przedstawi przebieg wypadkowych W – jest to tzw. **linia ciśnień**.

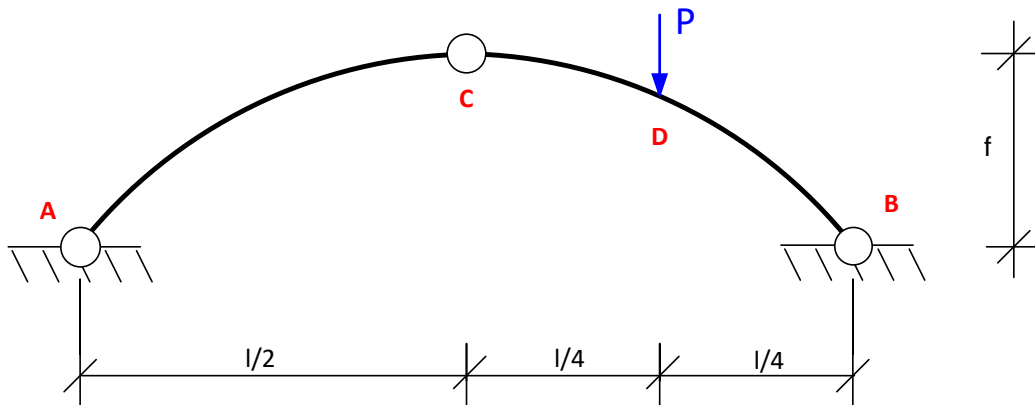
łuki trójprzegubowe stosowane są jako dźwigary nośne już od czasów starożytnego Rzymu, w budownictwie mostowym i ogólnym. Początkowo wykonywane z kamienia, drewna, następnie żeliwa, stali, betonu zbrojonego i sprężonego, stanowią w mechanice teoretycznej jedynie przykłady zastosowań równań równowagi. Koncepcja łuku trójprzegubowego powstała w wyniku obserwacji potawinowych gładów skalnych, klinujących się wzajemnie na zboczach. (zob. *Wacław Szcześniak, Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej. Statyka. OWPW, Warszawa 1999*).



Rys. *Wacław Szcześniak, Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej. Statyka. OWPW, Warszawa 1999; strona 152*

Przykład nr 1.

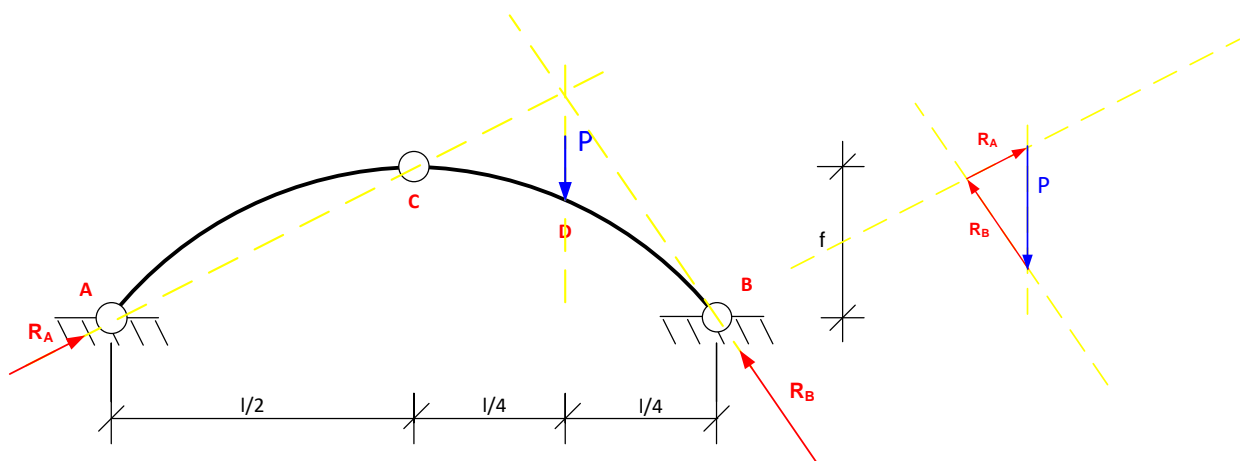
Wyznaczyć graficznie linię ciśnień dla łuku trójprzegubowego



Linia ciśnień dla sił obciążających jest wielobokiem sznurowym, którego boki muszą przechodzić przez wszystkie połączenia przegubowe łuku (moment zginający w przegubie jest równy zero). Reakcje podporowe odpowiadają skrajnym promieniom wieloboku sznurowego, przechodzącym przez przeguby podporowe.

Zadane obciążenie siłą P jest równoważone reakcjami R_A i R_B , które wyznaczymy wykorzystując twierdzenie o trzech siłach. Wynika z niego, że *trzy nierównoległe siły są w równowadze wtedy, gdy ich proste działania przecinają się w jednym punkcie*.

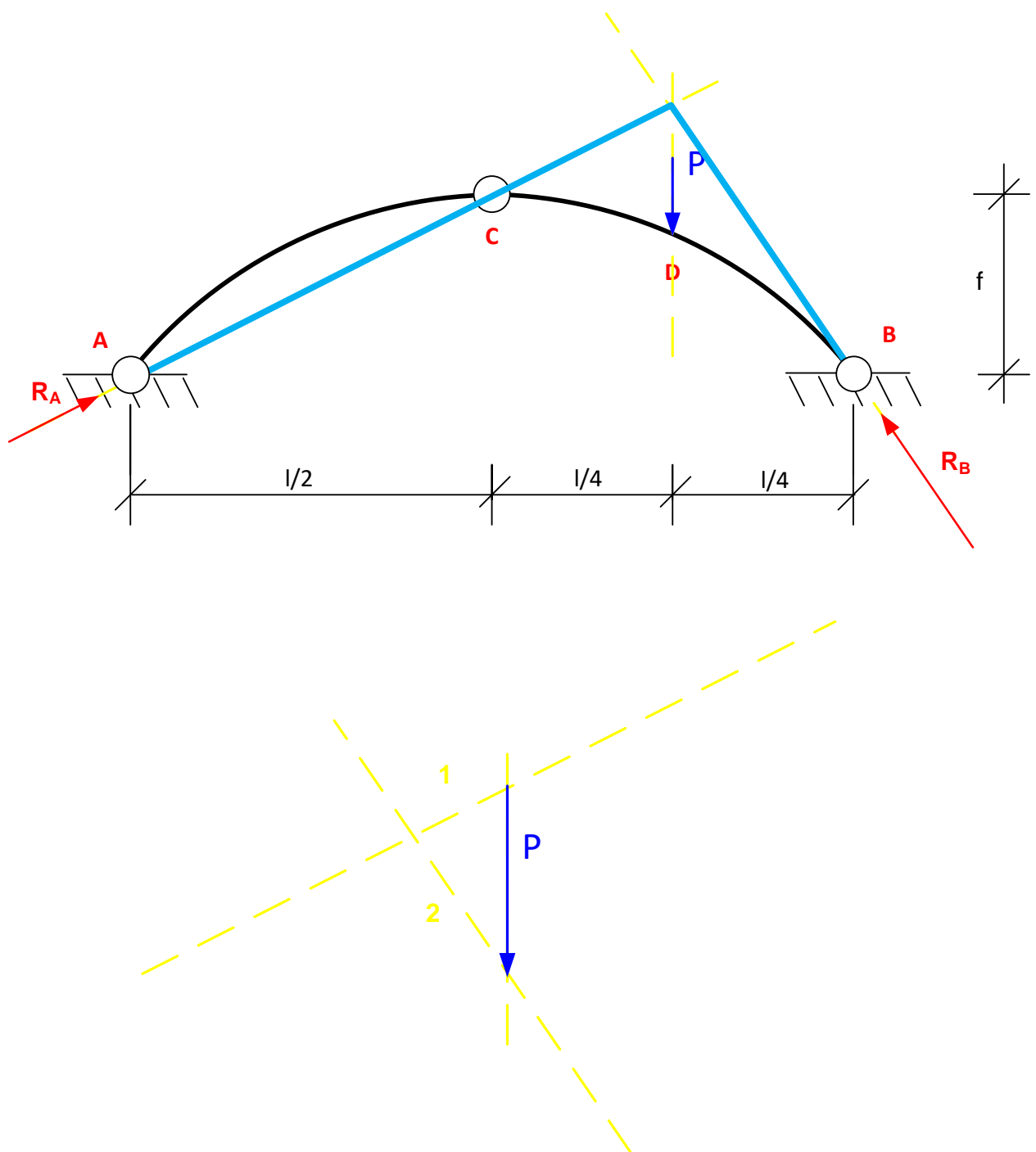
Kierunek reakcji R_A znajdujemy prowadząc prostą przechodzącą przez punkt A (punkt przyłożenia reakcji) oraz przez przegub C (moment zginający w przegubie C musi być równy zero). Przecięcie prostych działania siły P oraz reakcji podporowej R_A wyznacza punkt zbieżności układu. Prostą działania reakcji R_B określa punkt B oraz punkt zbieżności.



Wartości liczbowe i zwroty szukanych reakcji podporowych wyznaczymy, na podstawie znanych już kierunków, budując wielobok sił.

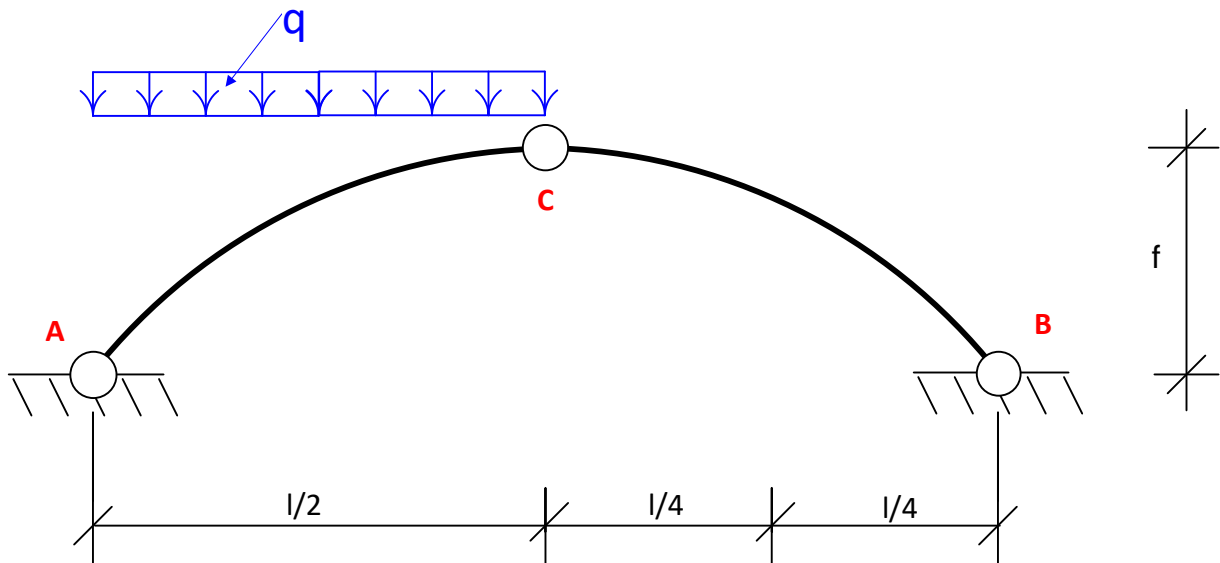
Przecięcie prostych działania reakcji R_A i R_B na wieloboku sił określa położenie bieguna O , zatem promienie 1 i 2, poprowadzone do początku i końca siły P , pokrywają się z kierunkami reakcji podporowych.

Wielobok sznurowy takiego układu, zbudowany jest więc z dwóch skrajnych boków: 1' i 2' odpowiadających linii ciśnień dla zadanego obciążenia

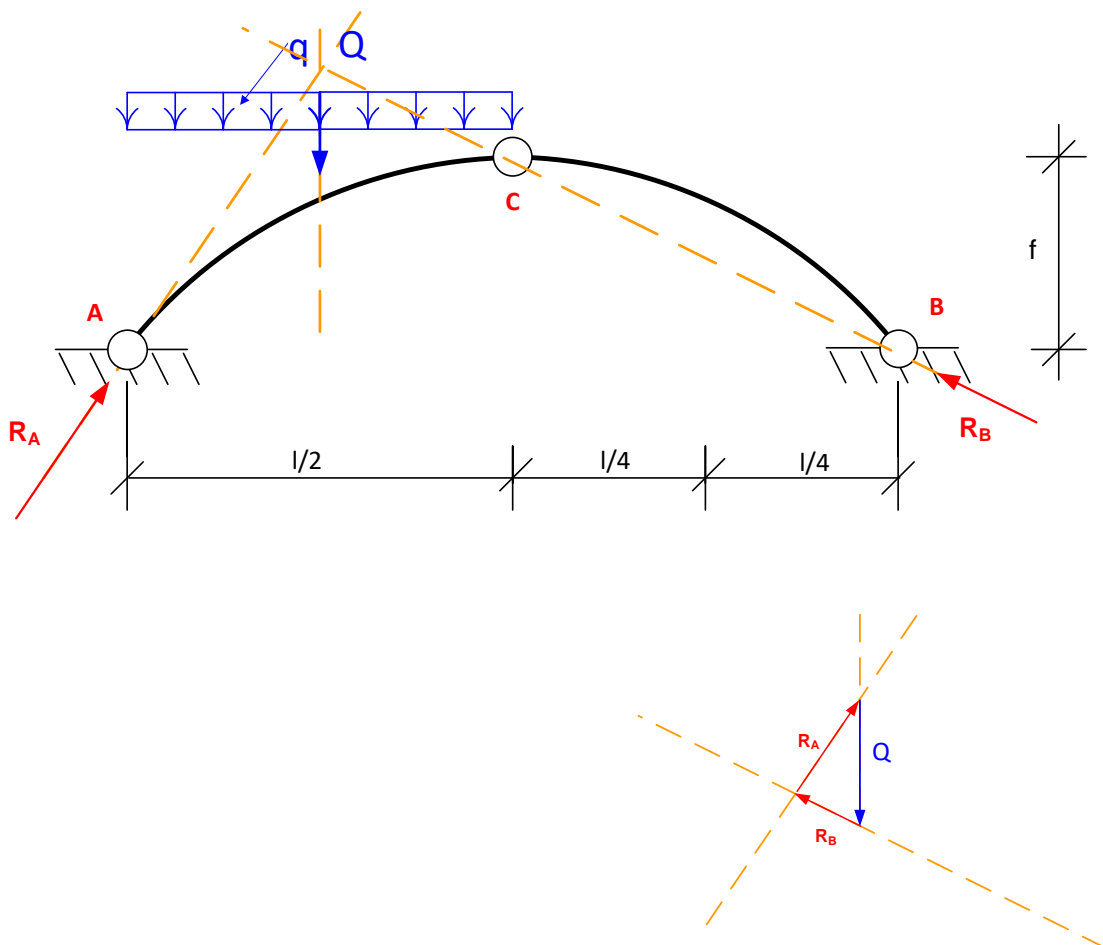


Przykład nr 2.

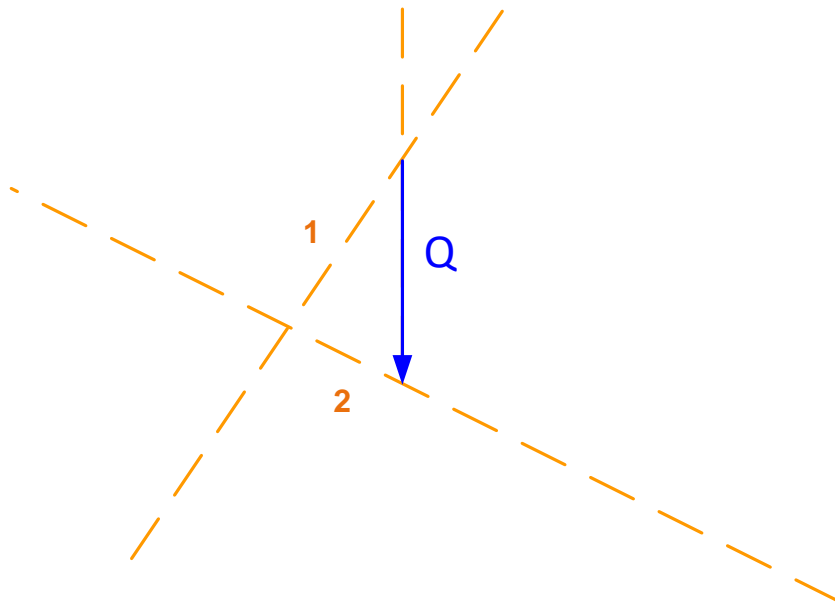
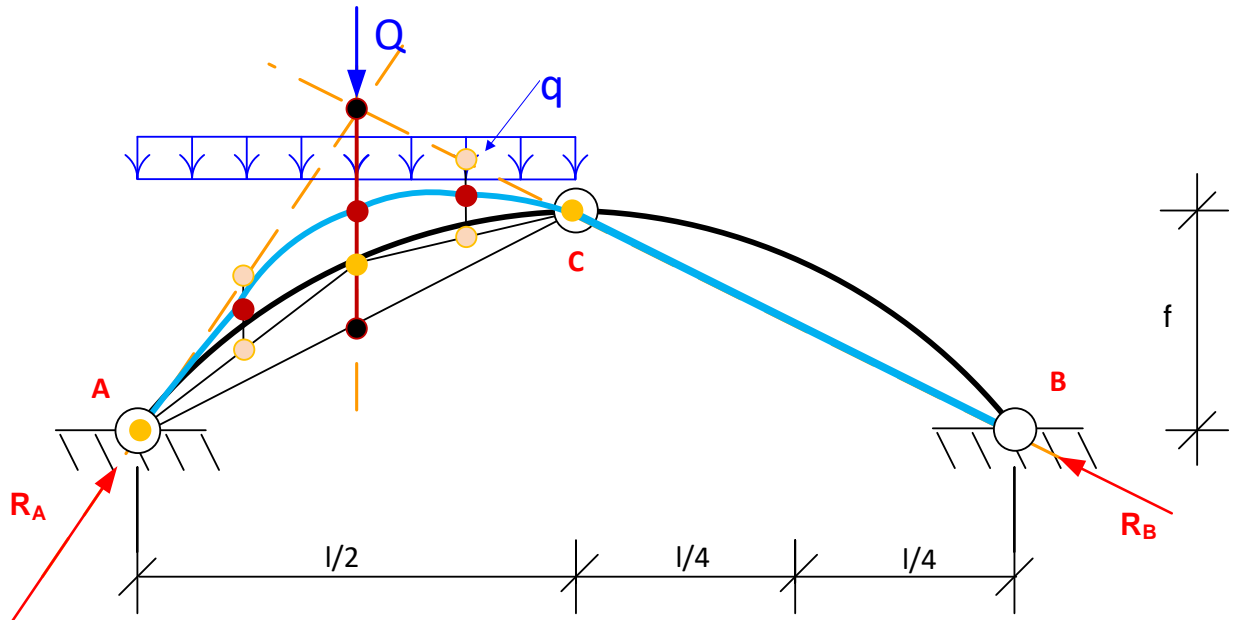
Wyznaczyć graficznie linię ciśnień dla łuku trójprzegubowego



Zadane obciążenie równomiernie rozłożone zastąpimy wypadkową $Q=q \cdot l$ przyłożoną w środku ciężkości tego obciążenia. Wstępnie postępujemy jak w przykładzie nr 1.



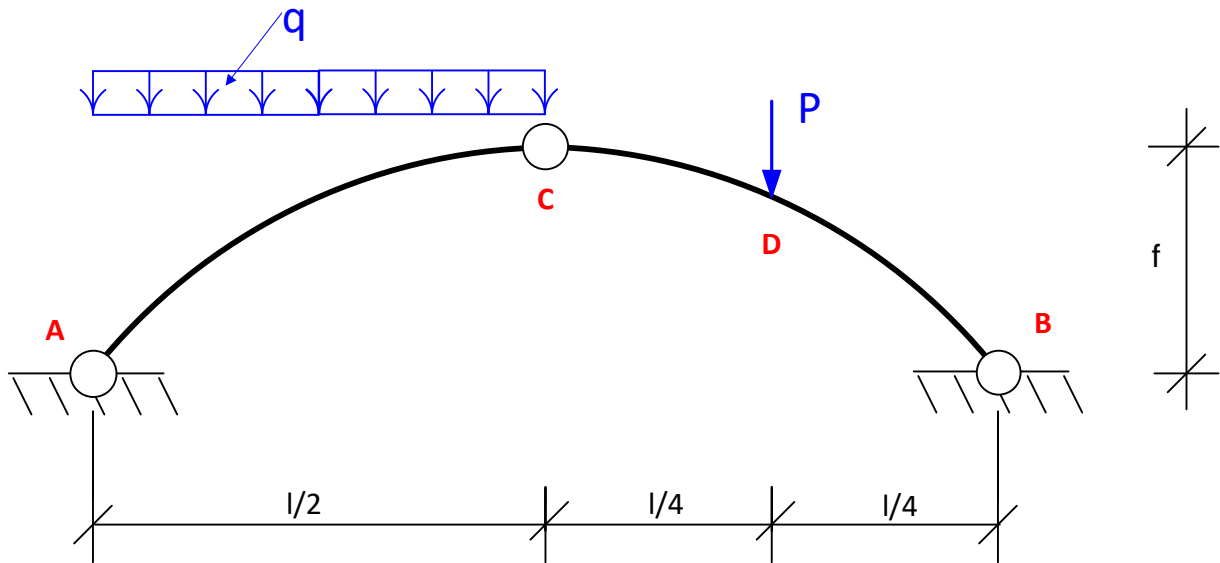
Linie ciśnień wyznaczamy, korygując wielobok sznurowy w strefie oddziaływania obciążenia równomiernie rozłożonego q . W tym celu prowadzimy pomocniczą prostą AC oraz pionowy odcinek, łączący tę prostą z punktem zbieżności układu sił. Środek tak wyznaczonego odcinka określa wierzchołek paraboli, zawierającej punkty A i C . Odcinek AC paraboli oraz odcinek CB prostej $2'$ stanowi linię ciśnień dla zadanego obciążenia.



Przykład nr 3.

(zob. przykład nr 6 Suplementu)

Wyznaczyć graficznie linię ciśnień łuku trójprzegubowego

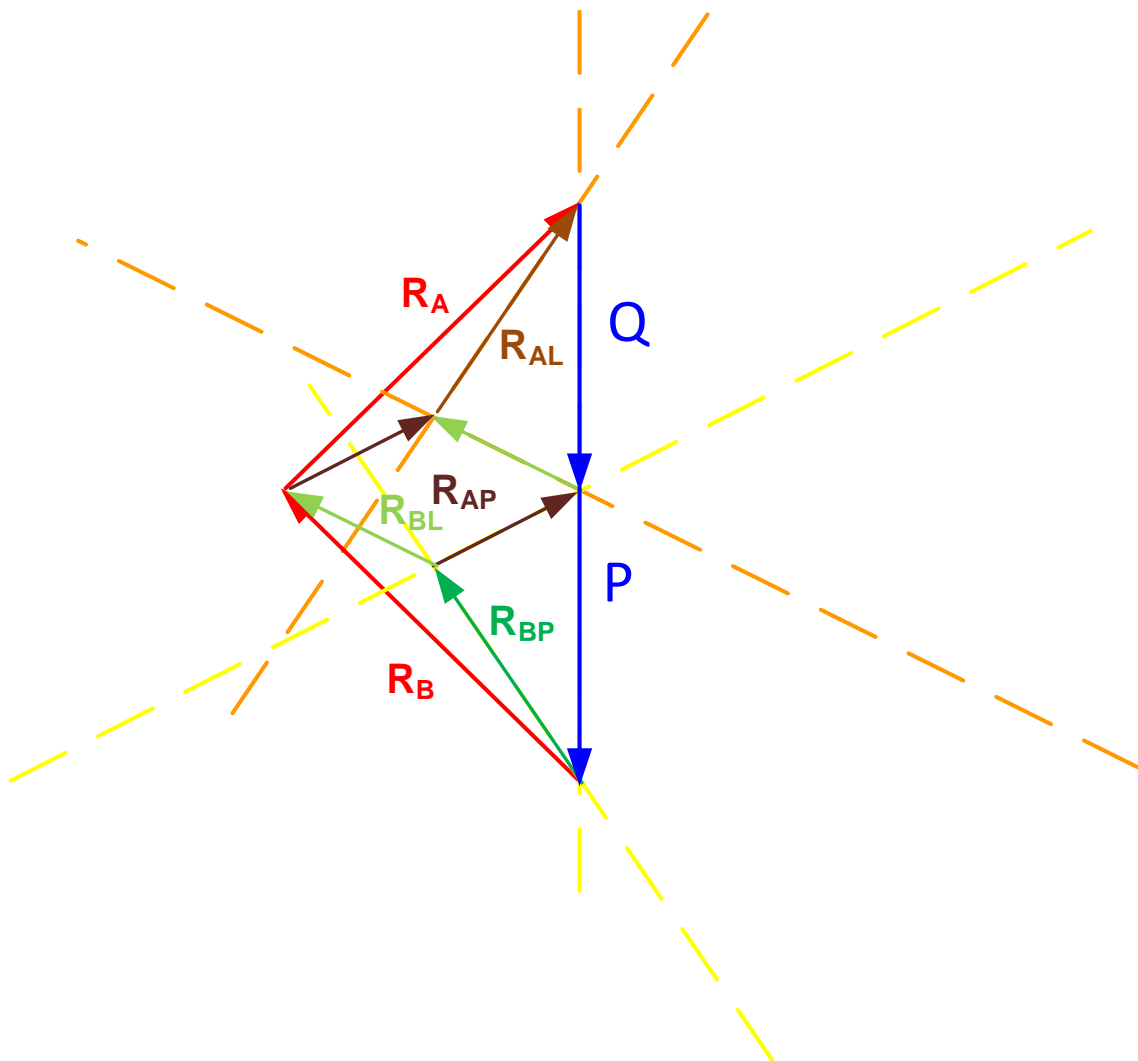
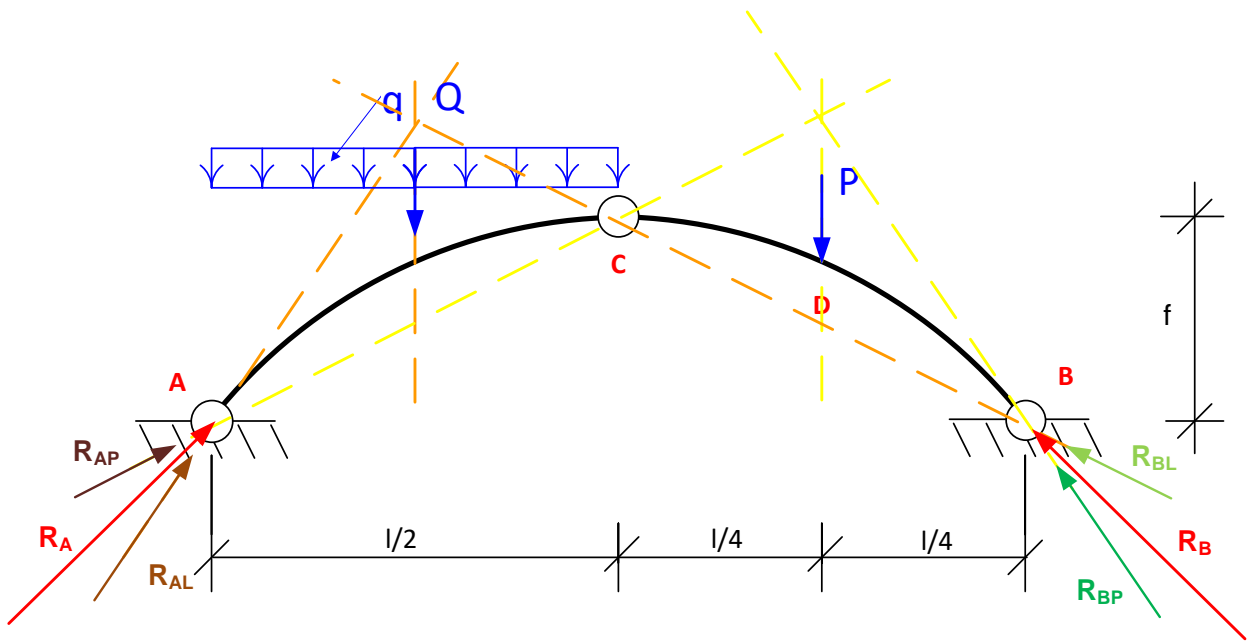


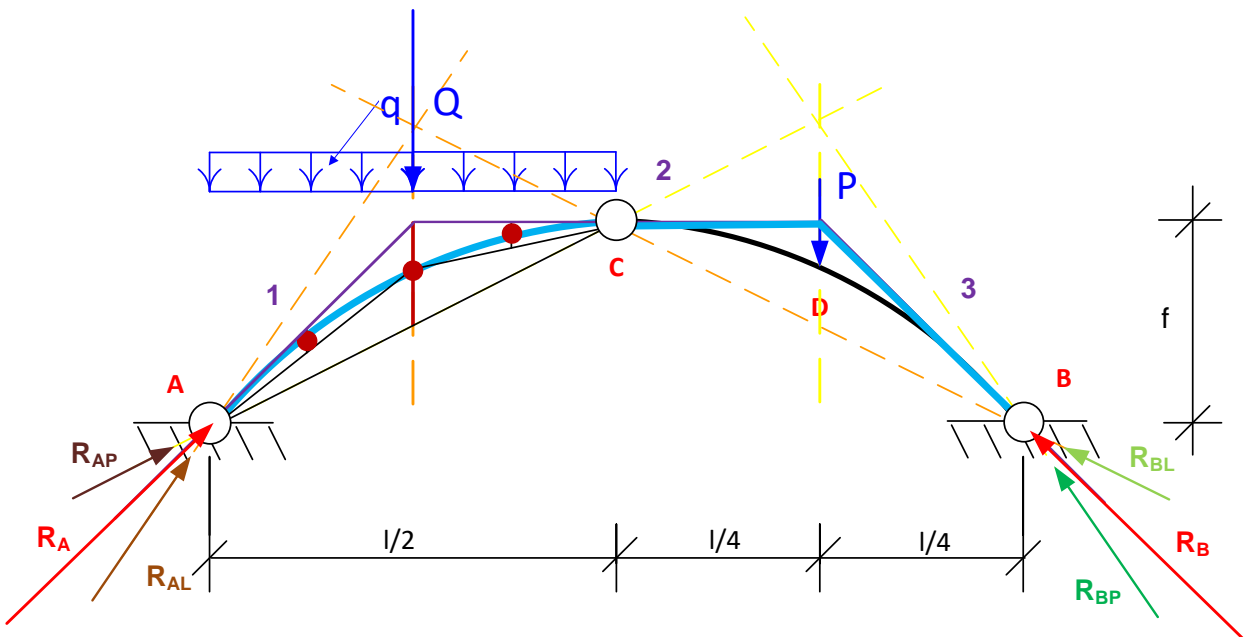
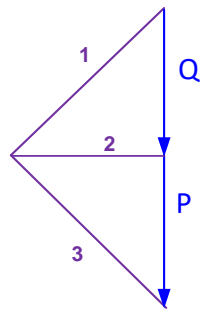
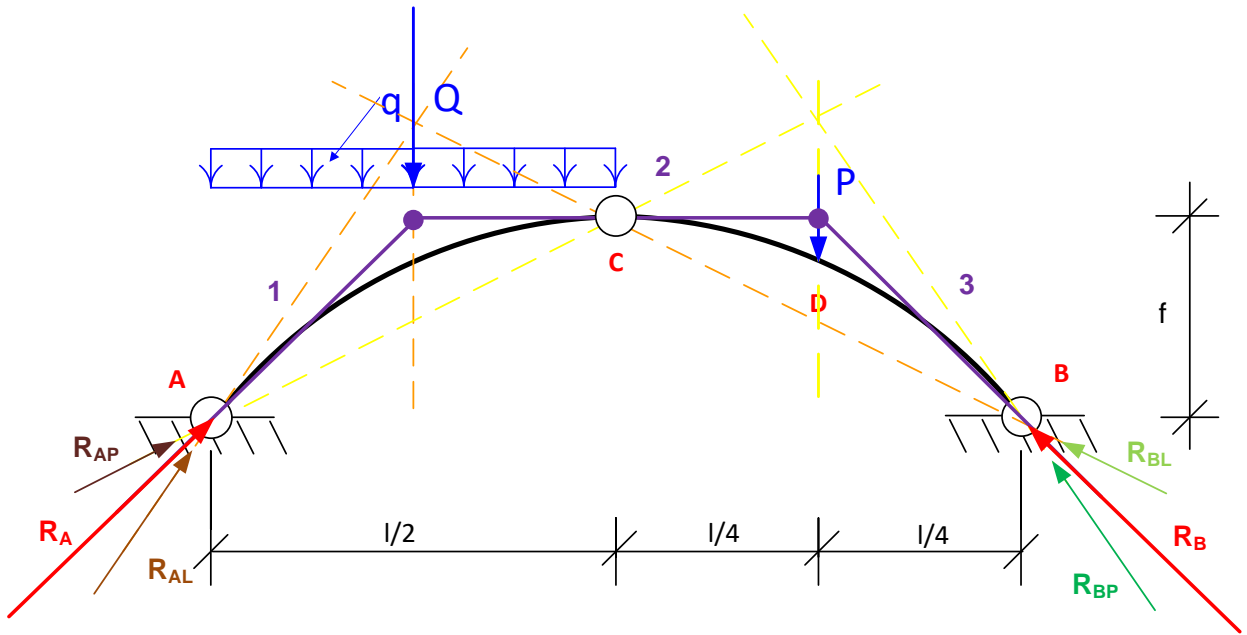
Jeśli mamy do czynienia z obciążeniem występującym po obu stronach przegubu, wyznaczenie reakcji podporowych przebiega w dwóch etapach.

W pierwszym, określamy reakcje podporowe R_{A1} i R_{B1} , wynikające z oddziaływania obciążenia po prawej stronie przegubu C siłą P (odrzucając myślowo obciążenie działające na prawo od przegubu). Postępujemy jak w przykładzie nr 1.

Następnie, w ten sam sposób, wyznaczamy reakcje R_{A2} i R_{B2} dla łuku obciążonego tylko obciążeniem równomiernie rozłożonym q . Postępujemy jak w przykładzie nr 2.

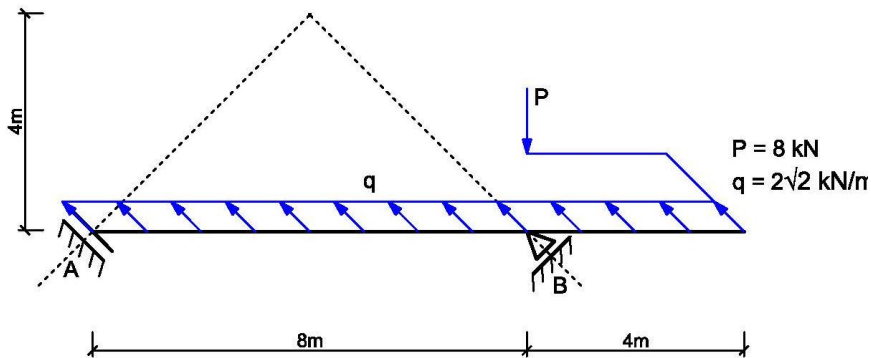
Wartości liczbowe oraz zwroty tak określonych reakcji odczytujemy z wieloboku sił, na którym następnie składamy reakcje R_{A1} i R_{A2} oraz R_{B1} i R_{B2} , otrzymując w ten sposób reakcje podporowe R_A i R_B .



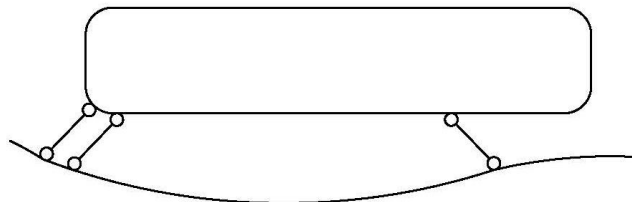


SUPLEMENT ROZWIĄZANE PRZYKŁADY

1. BELKA PROSTA



Schemat statyczny układu



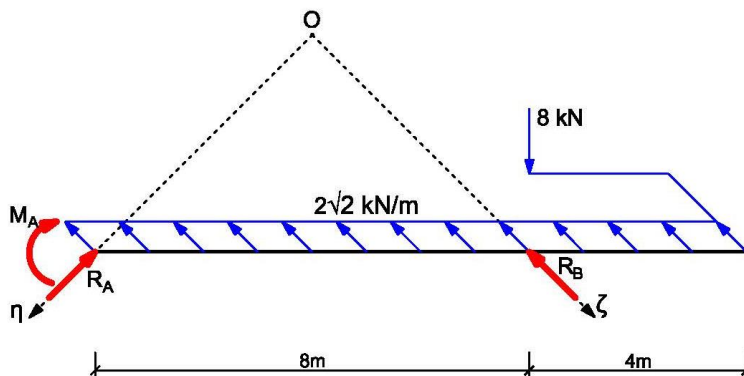
Sprawdzenie GN,
SW

$$t=1$$

$$e=3$$

$$e=3t$$

Na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach układ GN SW

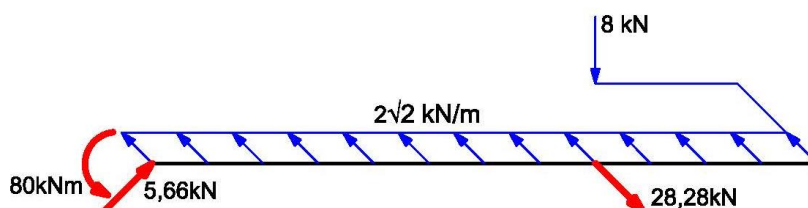


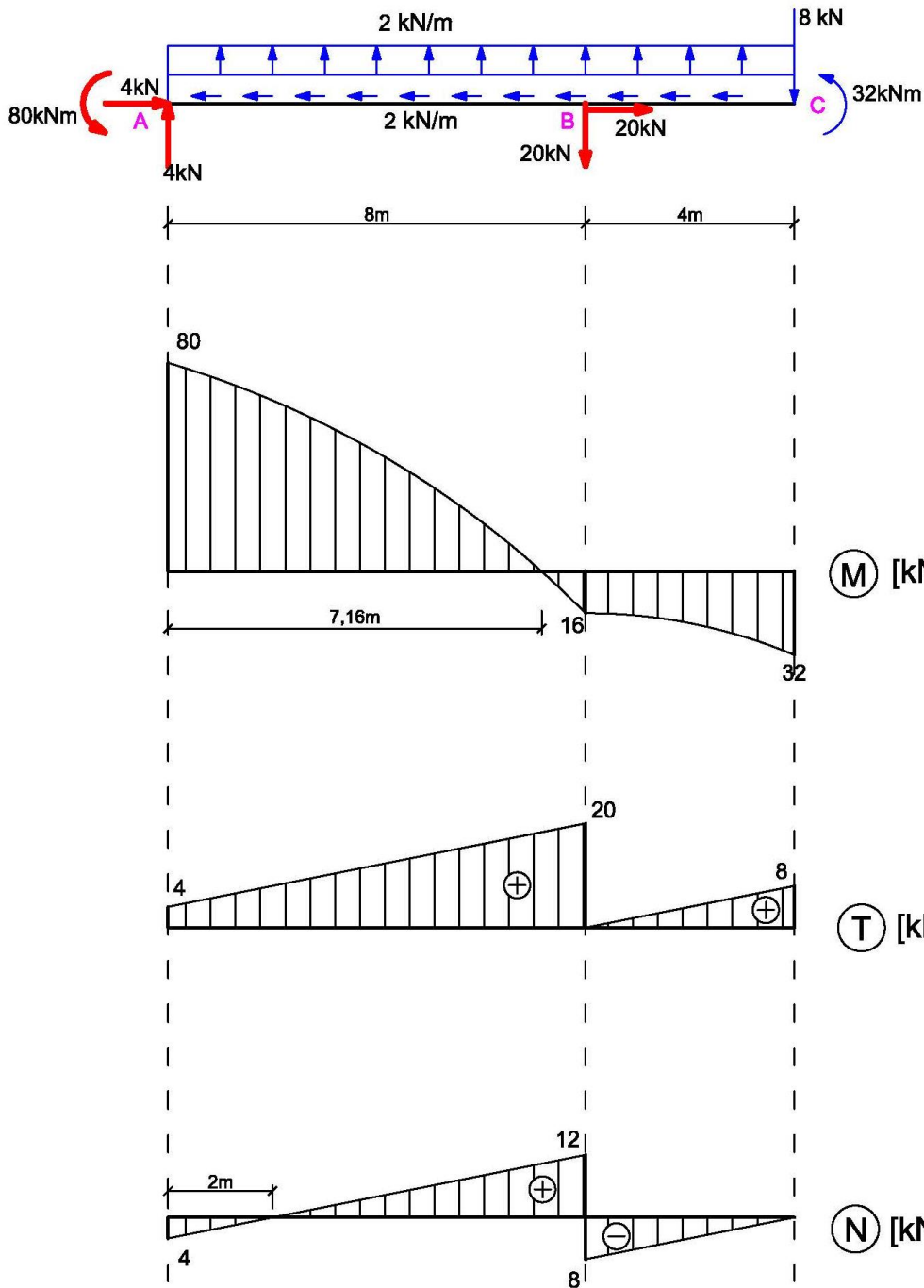
Wyznaczenie reakcji

$$\sum M_O = M_A + 2\sqrt{2} \cdot 12 \cdot \sqrt{2} + 8 \cdot 4 = 0 \rightarrow M_A = 80 \text{ kNm}$$

$$\sum P_\eta = -R_A + \frac{8}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow R_A = 4\sqrt{2} \text{ kN}$$

$$\sum P_\zeta = -R_B - 2\sqrt{2} \cdot 12 + \frac{8}{\sqrt{2}} = 0 \rightarrow R_B = 20\sqrt{2} \text{ kN}$$





Schemat obliczeniowy

Wykresy sił wewnętrznych

(M) [kNm] Momenty gnące

(T) [kN] Siły tnące

(N) [kN] Siły osiowe

$$M_{AB}(x) = -80 + 4 \cdot x + 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

$$T_{AB}(x) = \frac{dM}{dx} = 4 + 2 \cdot x$$

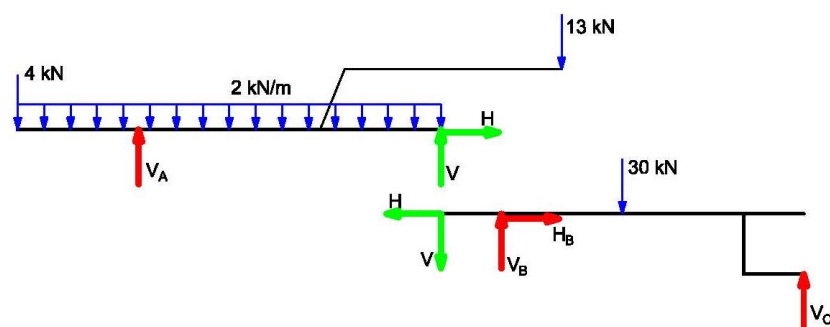
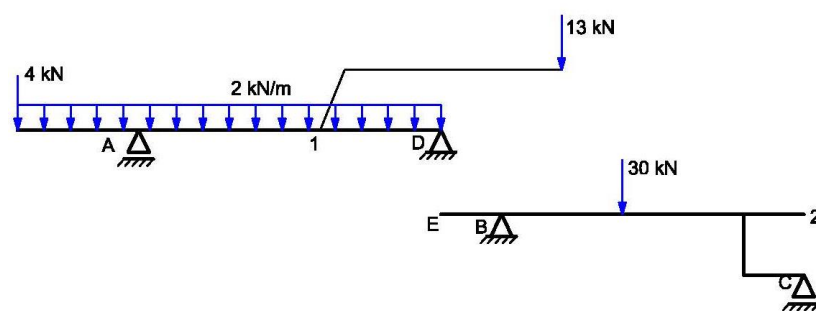
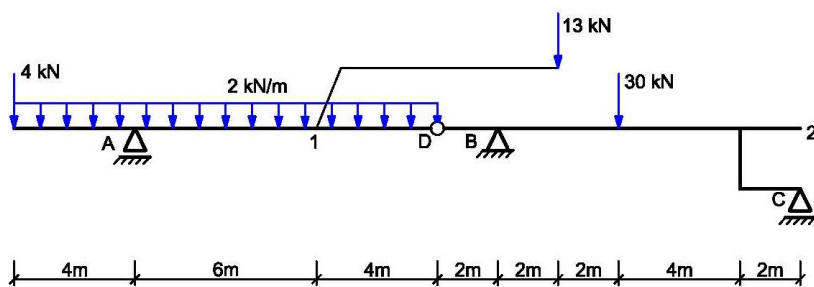
$$N_{AB}(x) = -4 + 2 \cdot x$$

$$M_{CA}(x) = 8 - 8 \cdot x + 2 \cdot x \cdot \frac{x}{2}$$

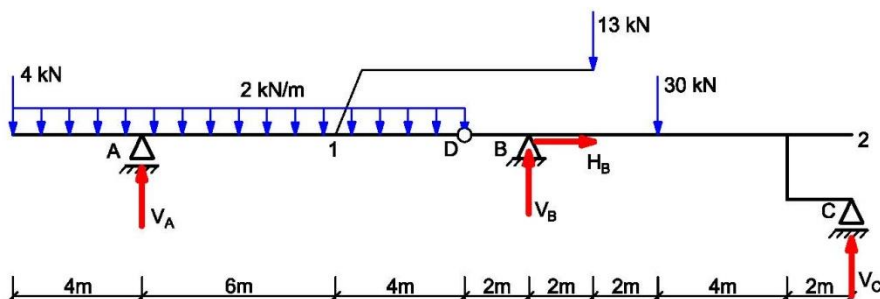
$$T_{CA}(x) = -\frac{dM}{dx} = 8 - 2 \cdot x$$

$$N_{CA}(x) = -2 \cdot x$$

2. BELKA WIELOPRZĘSŁOWA



Sposób bezpośredni



$$\sum M_D^L = 0 \rightarrow V_A = 20 \text{ kN}$$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow V_C = 7 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow V_B = 48 \text{ kN}$$

$$\sum X = 0 \rightarrow H_B = 0$$

Schemat statyczny układu

Sprawdzenie GN, SW

$$t=2$$

$$e=6$$

$$e=3t$$

Wykorzystując dwa razy twierdzenie o dwóch tarczach układ GN SW

Sposób pośredni

(globalnie $\sum X = 0$)

3 równania równowagi dla belki lewej

$$V_A = 20 \text{ kN}$$

$$V = 25 \text{ kN}$$

$$H = 0$$

3 równania równowagi dla belki prawej

$$V_B = 48 \text{ kN}$$

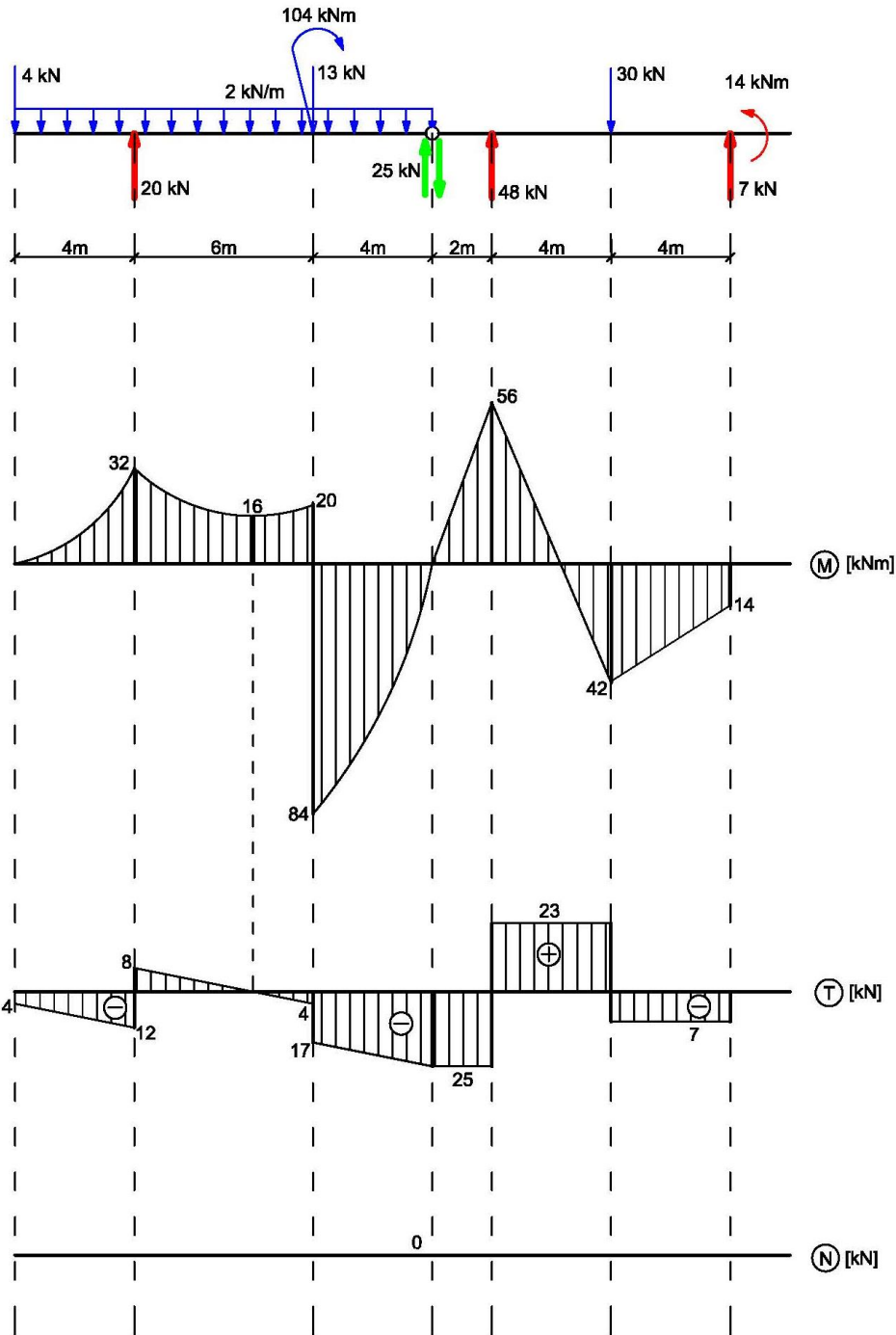
$$V_C = 7 \text{ kN}$$

$$H_B = 0$$

3 równania równowagi oraz

warunek konstrukcyjny

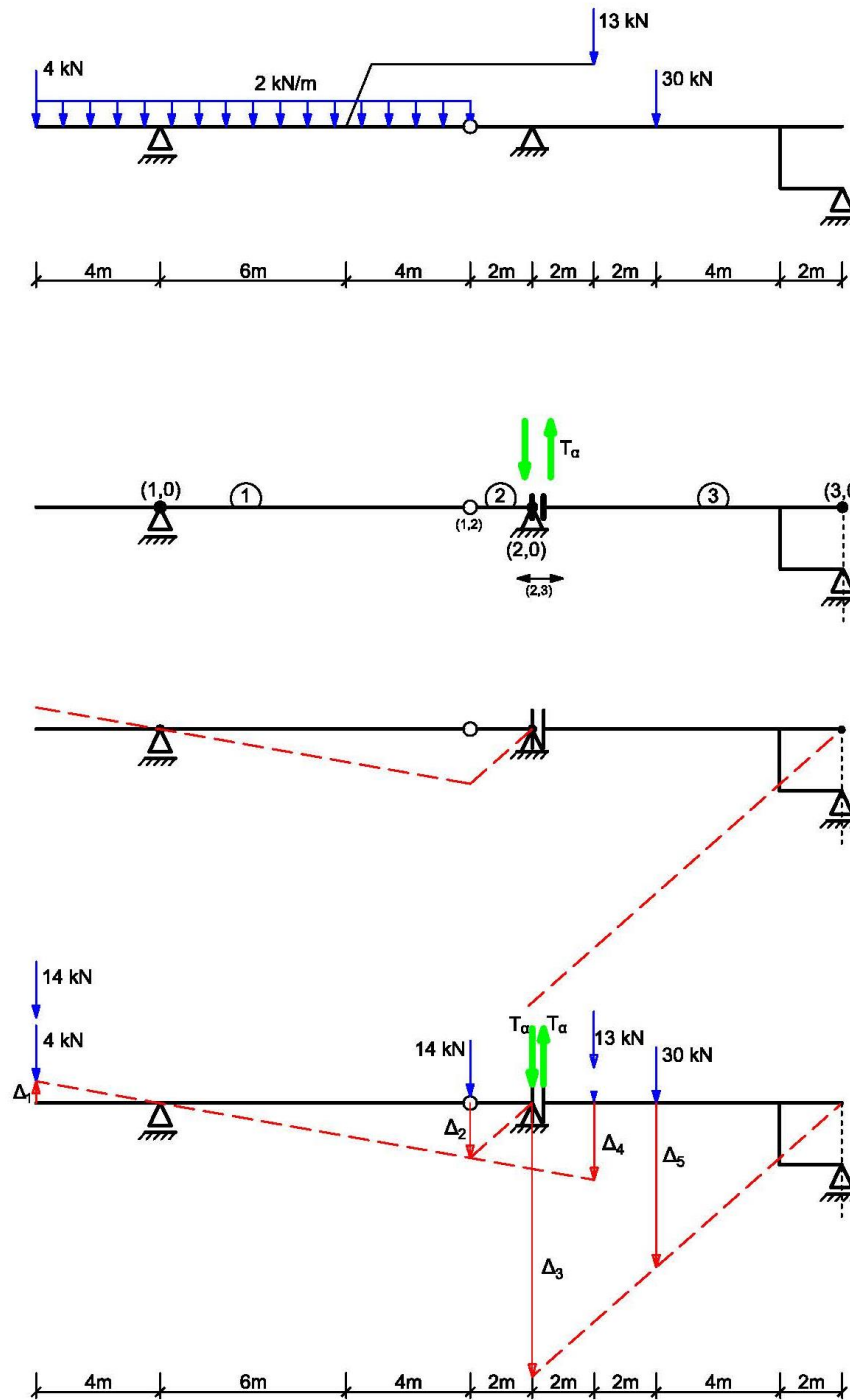
$$\sum M_D^L = \sum M_D^P = 0$$



Schemat obliczeniowy

Wykresy sił przekrojowych

Wyznaczenie siły tnącej w punkcie B z prawej strony T_B^P **metodą kinematyczną, z wykorzystaniem przemieszczeń rzeczywistych:**



W miejscu poszukiwanej siły wstawiamy „łyżwę pionową”, ze względu na to, że poszukiwana jest siła pionowa

Powstały 3 tarcze z zaznaczonymi środkami obrotu

Plan przemieszczeń rzeczywistych

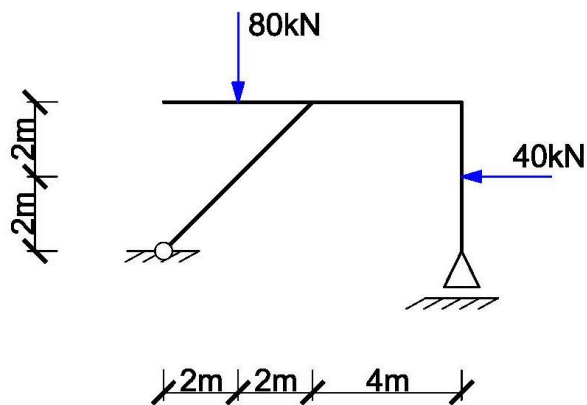
Obciążenie rozłożone (obciążające jedną tarczę) zostało zastąpione dwiema siłami skupionymi (na brzegach)

Siła przyłożona do tarczy 1 została na swojej prostej działania, ale przemieszczenie na kierunku siły jest przemieszczeniem tarczy 1.

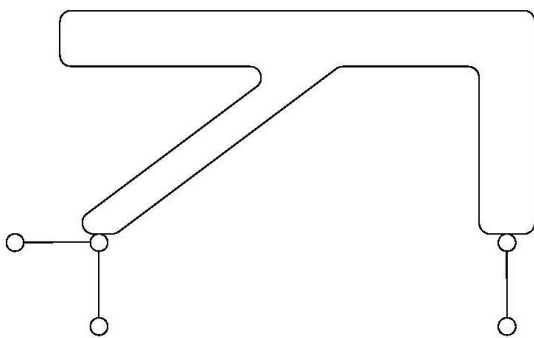
Równanie pracy przygotowanej: $-(4 + 14) \cdot \Delta_1 + 14 \cdot \Delta_2 + 13 \cdot \Delta_4 - T \cdot \Delta_3 + 30 \cdot \Delta_5 = 0$
 Przyjmując oznaczenia kątów obrotu tarcz odpowiednio $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$. Wiedząc, że $\varphi_2 = \varphi_3 = \varphi$ oraz pamiętając, że dla kątów bardzo małych $\tan \varphi \sim \varphi$, czyli $10\varphi_1 = 2\varphi = \Delta_2$, równanie można zapisać:

$$-(4 + 14) \cdot 4 \cdot \frac{2}{10} \varphi + 14 \cdot 2\varphi + 13 \cdot 14 \cdot \frac{2}{10} \varphi - T \cdot 10\varphi + 30 \cdot 6\varphi = 0 \rightarrow T = 23 \text{ kN}$$

3. RAMA PROSTA



Schemat statyczny układu



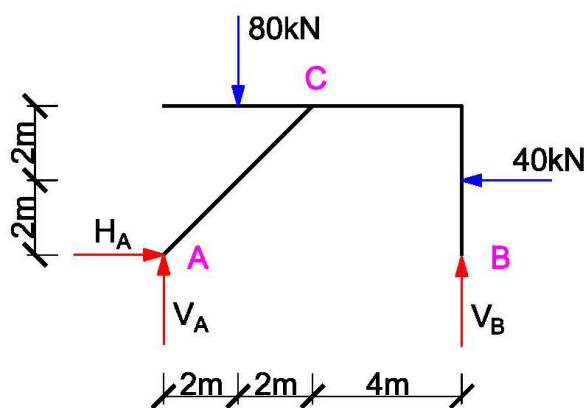
Sprawdzenie GN, SW

$$t=1$$

$$e=3$$

$$e=3t$$

Na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach układ GN SW



Wyznaczenie reakcji

$$\sum M_A = 80 \cdot 2 - 40 \cdot 2 - V_B \cdot 8 = 0$$

$$\rightarrow V_B = 10 \text{ kN}$$

$$\sum X = H_A - 40 = 0$$

$$\rightarrow H_A = 40 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 80 - V_A - V_B = 0$$

$$\rightarrow V_A = 70 \text{ kN}$$

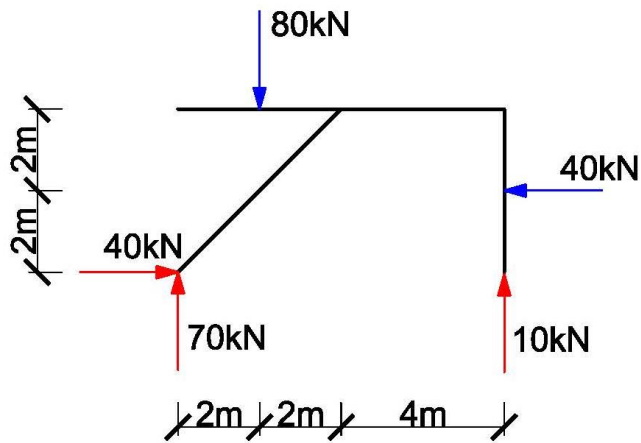
Sprawdzenie reakcji

$$\sum M_C = V_A \cdot 4 - V_B \cdot 4 - H_A \cdot 4 - 80 \cdot 2 + 40 \cdot 2 = 0$$

$$\sum M_C = 70 \cdot 4 - 10 \cdot 4 - 40 \cdot 4 - 80 \cdot 2 + 40 \cdot 2 = 0$$

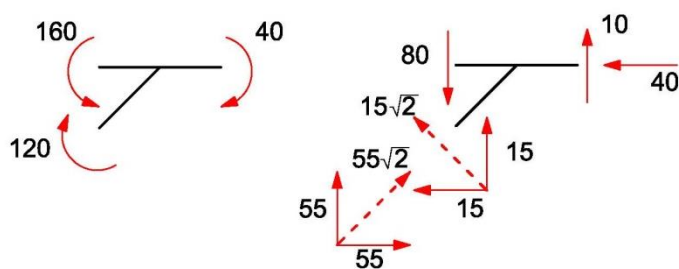
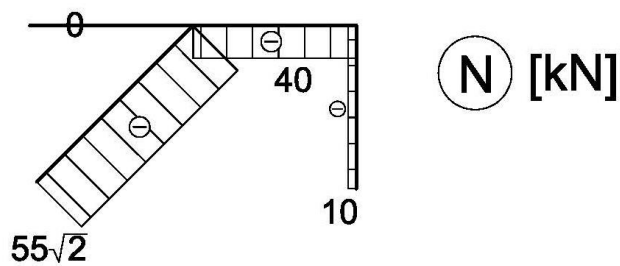
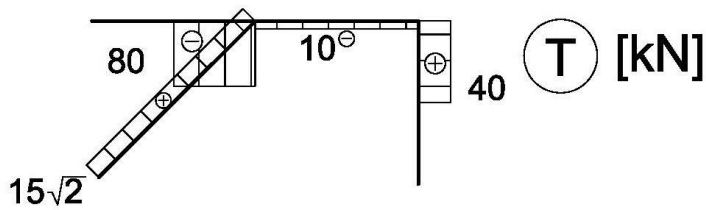
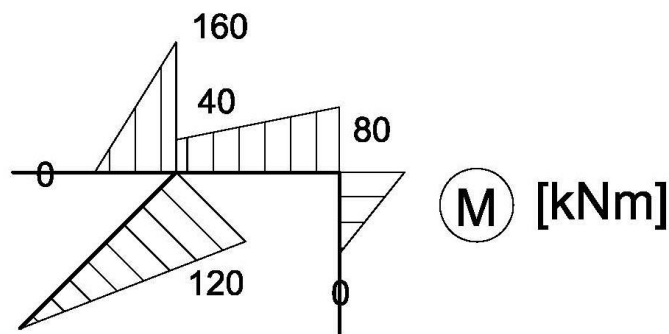
$$0 = 0$$

Reakcje są wyznaczone poprawnie.



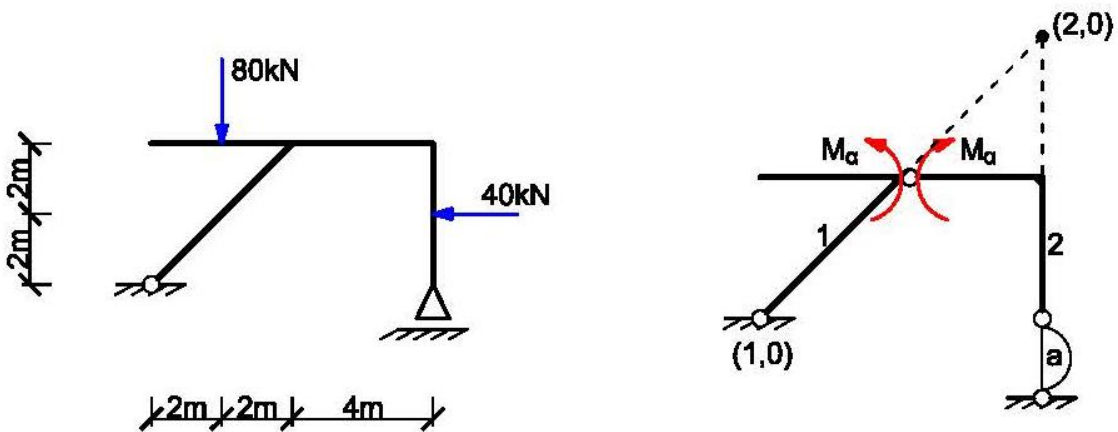
Schemat obliczeniowy

Wykresy sił przekrojowych



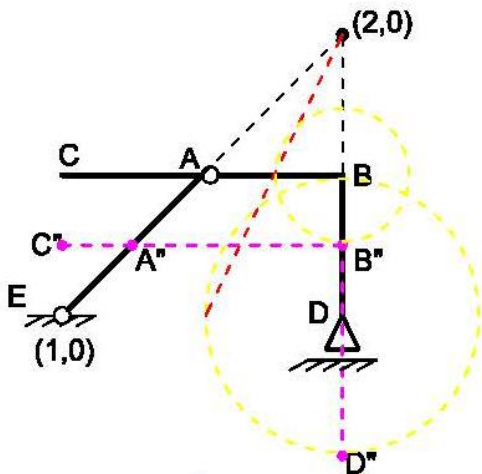
Sprawdzenie równowagi węzła sztywnego C.

Wyznaczenie momentu gnącego w punkcie C z prawej strony $M_B^P = M_\alpha$ **metodą kinematyczną**, z wykorzystaniem przemieszczeń obróconych:

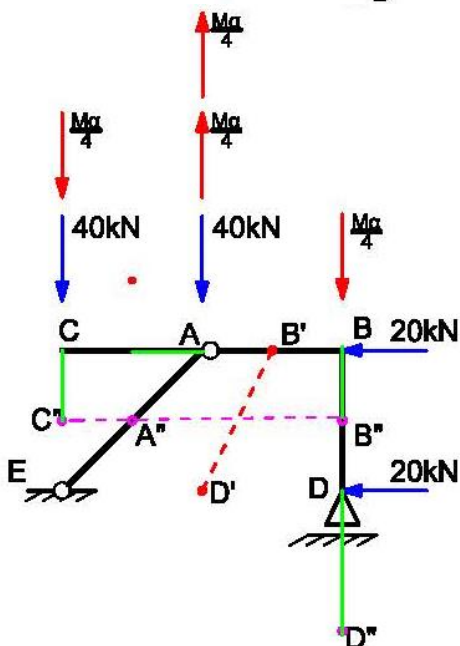
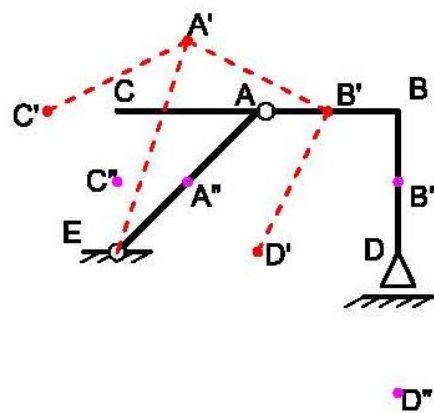


W miejscu poszukiwanej siły wstawiamy przegub, ze względu na to, że poszukiwany jest moment. Powstały 2 tarcze z zaznaczonymi środkami obrotu (środek obrotu tarczy 2 względem ostoi znaleziono za pomocą tarczy 1 i więzi elementarnej jako tarczy a).

Plan przemieszczeń obróconych:



Plan przemieszczeń rzeczywistych:



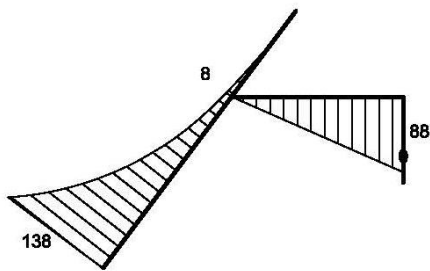
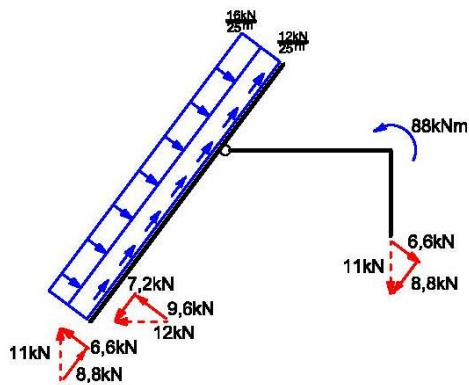
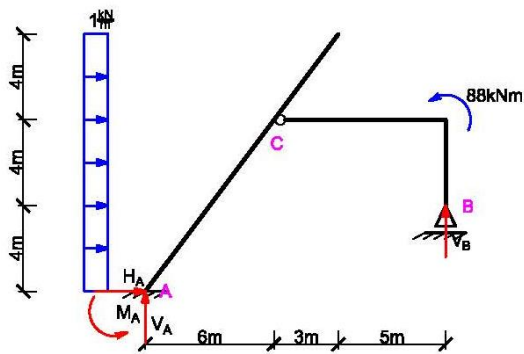
Równanie pracy przygotowanej

$$40 \cdot \Delta - 2 \cdot \frac{M_\alpha}{4} \cdot \Delta - 20 \cdot \Delta - 20 \cdot 2\Delta = 0$$

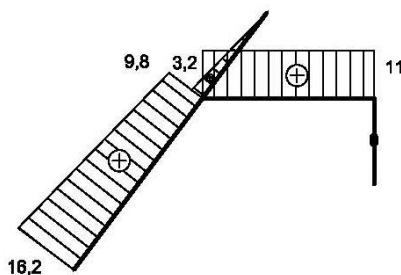
$$M_\alpha = -40$$

Przyjęto moment rozciągający włókna dolne, znak minus świadczy o tym, że moment rozciąga włókna górne – co potwierdza rozwiązanie analityczne.

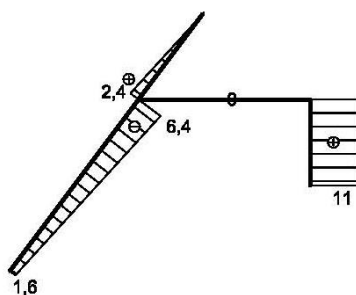
4. RAMA ZŁOŻONA



(M) [kNm]



(T) [kN]



(N) [kN]

Schemat statyczny układu

Sprawdzenie GN, SW

$$t=2$$

$$e=6$$

$$e=3t$$

Wykorzystując dwa razy twierdzenie o dwóch tarczach udowadniamy, że układ jest GN SW

Wyznaczenie reakcji:

Wykorzystując 3 równania równowagi oraz jeden warunek konstrukcyjny wyznaczamy siły bieerne.

$$\sum M_C^P = -V_B \cdot 8 - 88 = 0$$

$$\rightarrow V_B = -11 \text{ kN}$$

$$\sum X = H_A + 1 \cdot 12 = 0$$

$$\rightarrow H_A = -12 \text{ kN}$$

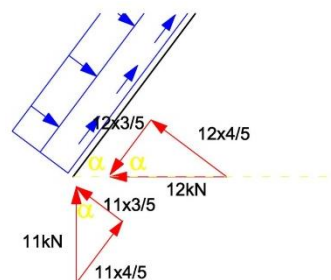
$$\sum Y = -V_A - V_B = 0$$

$$\rightarrow V_A = 11 \text{ kN}$$

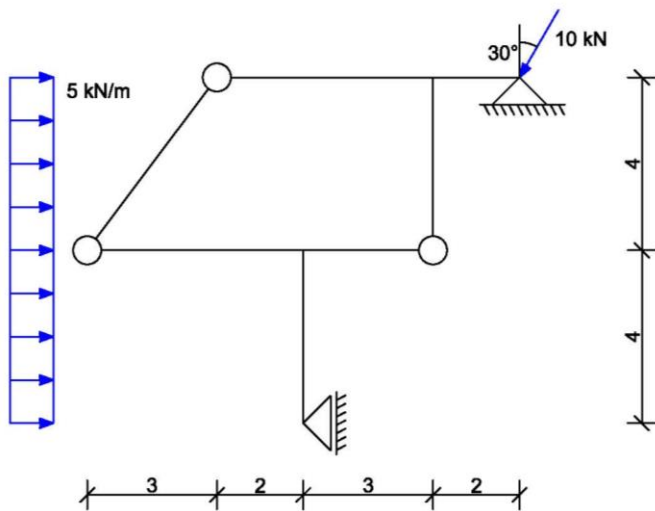
$$\sum M_C^L = -M_A + V_A \cdot 6$$

$$-H_A \cdot 8 - 1 \cdot 12 \cdot 2 = 0$$

$$\rightarrow M_A = 138 \text{ kN}$$

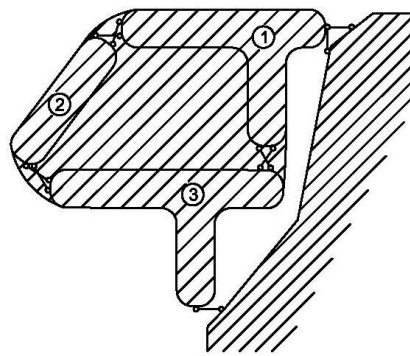
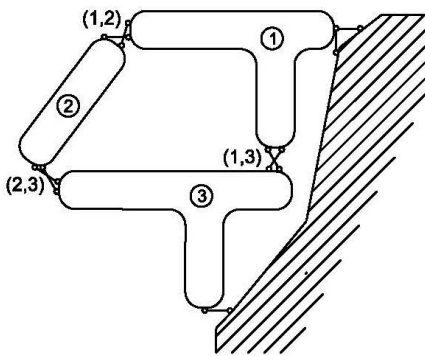


5. RAMA Z KOMORĄ



Schemat statyczny układu

Sprawdzenie GN, SW



$$t=3$$

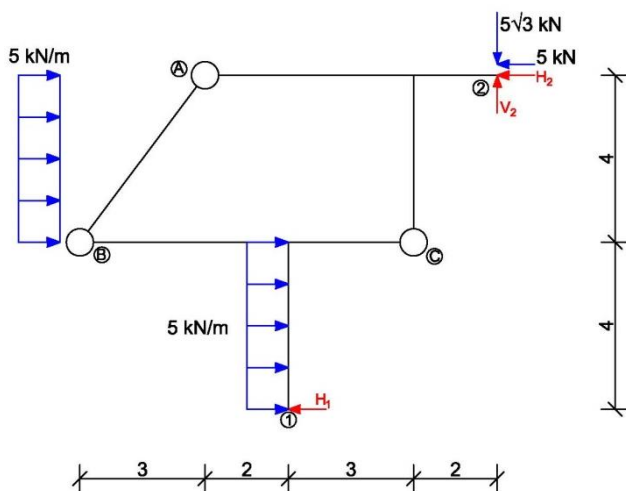
$$e=9$$

$$e=3t$$

Wykorzystując twierdzenie o trzech, a następnie o dwóch tarczach udowadniamy, że układ jest GN SW

$$[(1 + 2 + 3)_{3T} - 0]_{2T} = 0$$

Wyznaczenie reakcji



$$\sum M_2 = -5 \cdot 8 \cdot 4 + H_1 \cdot 8 = 0$$

$$\rightarrow H_1 = 20$$

$$\sum X = 5 \cdot 8 - H_1 - H_2 = 0$$

$$\rightarrow H_2 = 20$$

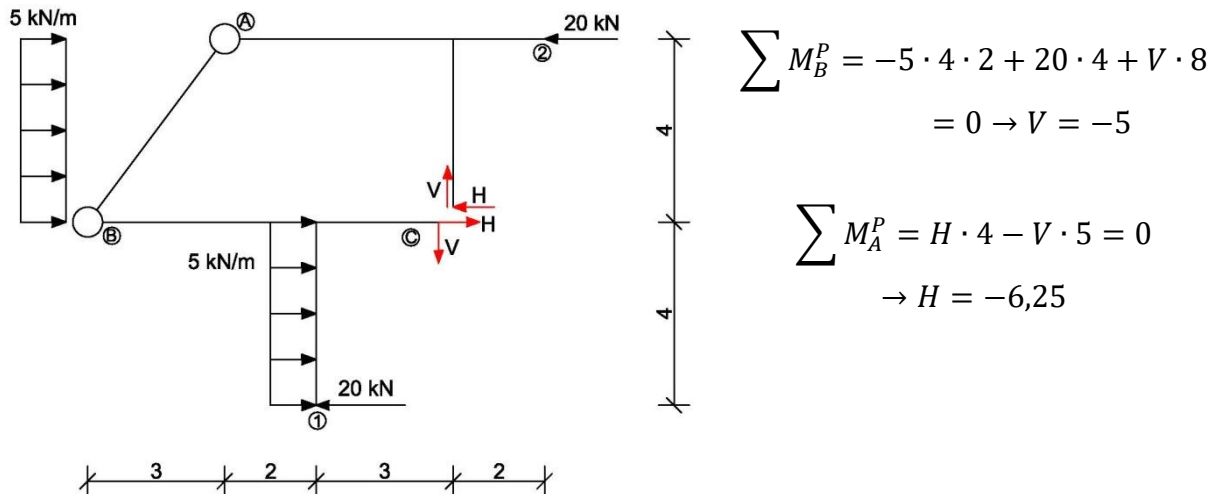
$$\sum Y = 5\sqrt{3} - V_2 = 0$$

$$\rightarrow V_2 = 5\sqrt{3}$$

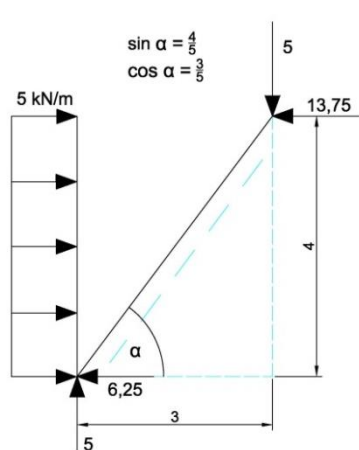
„Otwieramy komorę” w dowolnym miejscu, ale najwygodniejsze miejsca to

- nieobciążony pręt przegubowo-przegubowy, bo występuje tam tylko siła osiowa (tutaj brak)
- połączenie „łyżwą”, bo nie występuje tam siła na kierunku przesuwu (tutaj brak)
- połączenie przegubowe, bo nie występuje tam moment.

Wybrano punkt C:



Analizując siły wewnętrzne w pręcie ukośnym, przyjęto zmienną s wzdłuż osi pręta $s \in \langle 0, 5 \rangle$:



$$M(s) = 5 \cdot \frac{3}{5}s + 6,25 \cdot \frac{4}{5}s - 5 \cdot \frac{4}{5}s \cdot \frac{2}{5}s = 8s - \frac{8}{5}s^2$$

$$T(s) = \frac{dM}{ds} = 8 - 2 \cdot \frac{8}{5}s = 0 \rightarrow s = \frac{5}{2}m$$

czyli ekstremalny moment $M_{eks} \left(\frac{5}{2} \right) = 10kNm$ jest w połowie analizowanego przedziału.

Po rozłożeniu sił na składowe równoległe i prostopadłe do osi pręta, otrzymuje się:

$$N(s) = 6,25 \cdot \cos \alpha - 5 \cdot \sin \alpha - 5 \cdot \frac{4}{5}s \cdot \cos \alpha =$$

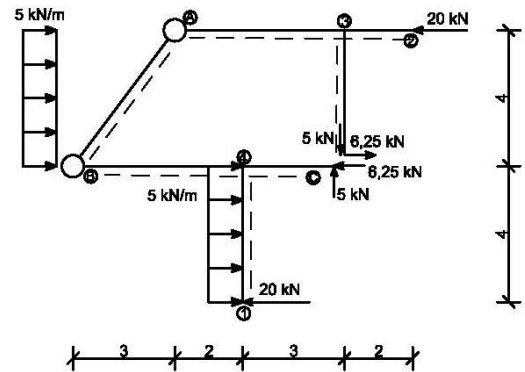
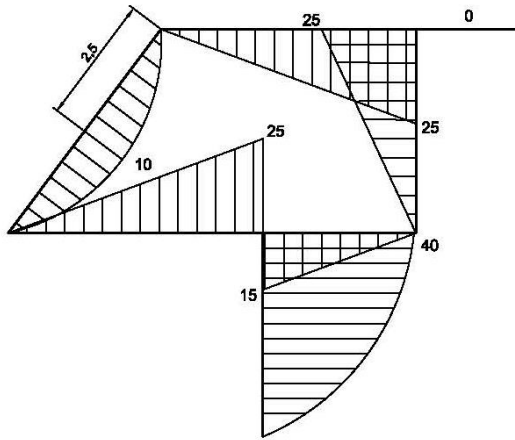
$$= 6,25 \cdot \frac{3}{5} - 5 \cdot \frac{4}{5} - 5 \cdot \frac{4}{5}s \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{5}s - \frac{1}{4}$$

$$T(s) = 6,25 \cdot \sin \alpha + 5 \cdot \cos \alpha - 5 \cdot \frac{4}{5}s \cdot \sin \alpha =$$

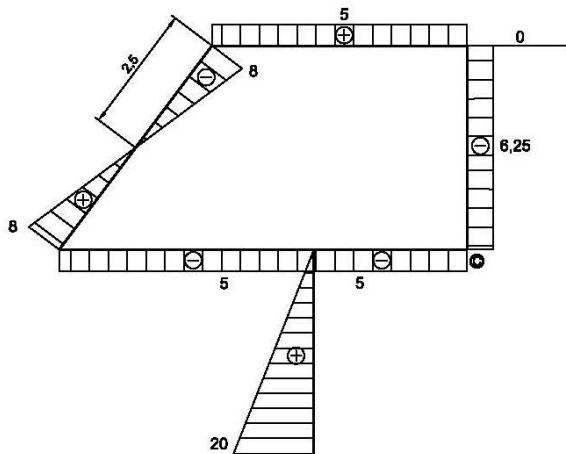
$$= 6,25 \cdot \frac{4}{5} + 5 \cdot \frac{3}{5} - 5 \cdot \frac{4}{5}s \cdot \frac{4}{5} = -\frac{16}{5}s + 8$$

Wykresy sił wewnętrznych:

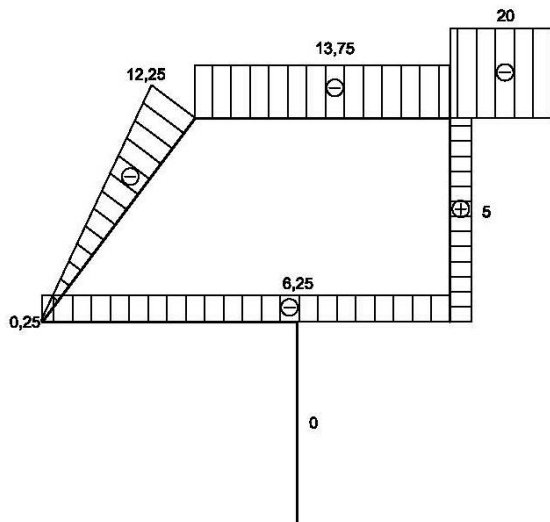
WYKRES MOMENTÓW



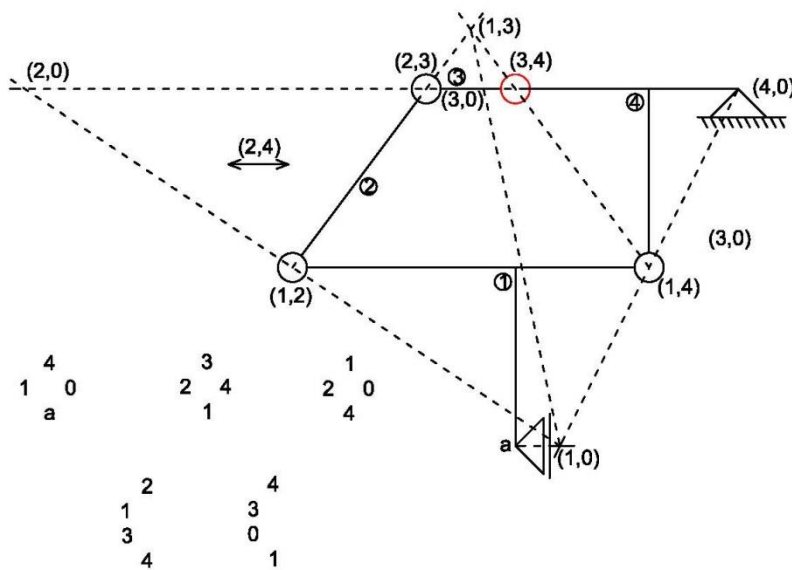
WYKRES SIŁ TNĄCYCH



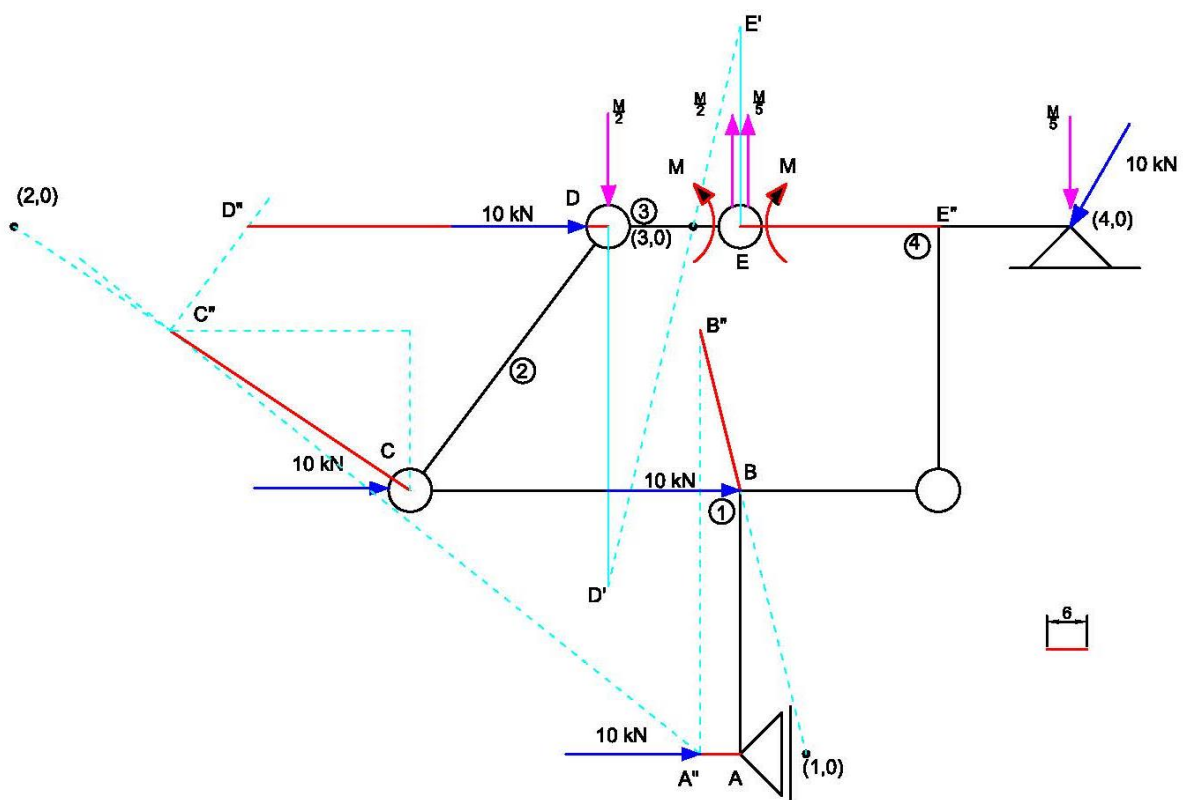
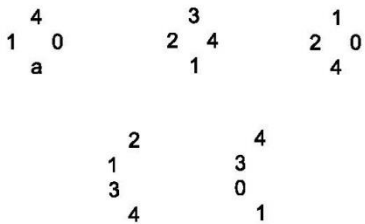
WYKRES SIŁ OSIOWYCH



Wyznaczenie momentu metodą kinematyczną, z wykorzystaniem przemieszczeń obróconych:



Poszukiwanie środków obrotu tarcz

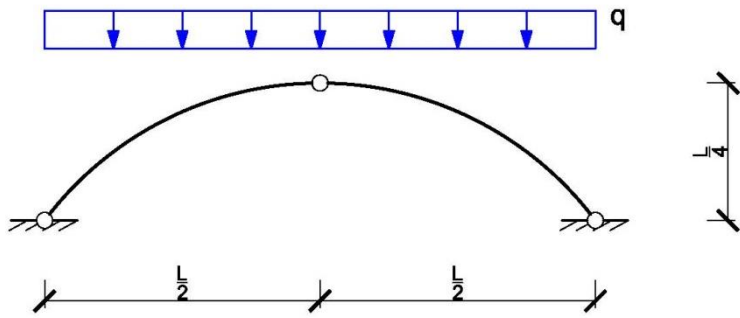


$$-10 \cdot 24 - 10 \cdot 24 + \frac{M}{2} \cdot 54 + 30 \cdot \frac{M}{2} + 30 \cdot \frac{M}{2} = -480 + 27M + 6M + 15M = 0$$

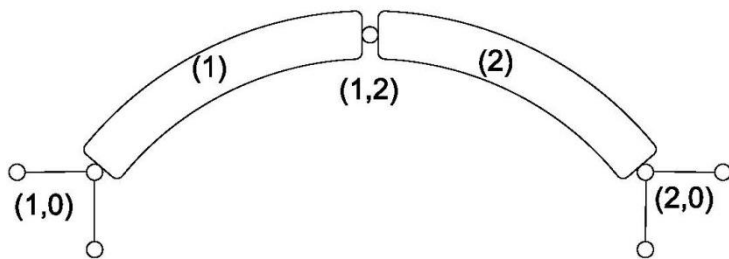
$$48M = 480$$

$$M = 10 \text{ kNm}$$

6. TRÓJPRZEGUB Z PRĘTEM PARABOLICZNYM



Schemat statyczny układu



Sprawdzenie GN, SW

$$t=2$$

$$e=6$$

$$e=3t$$

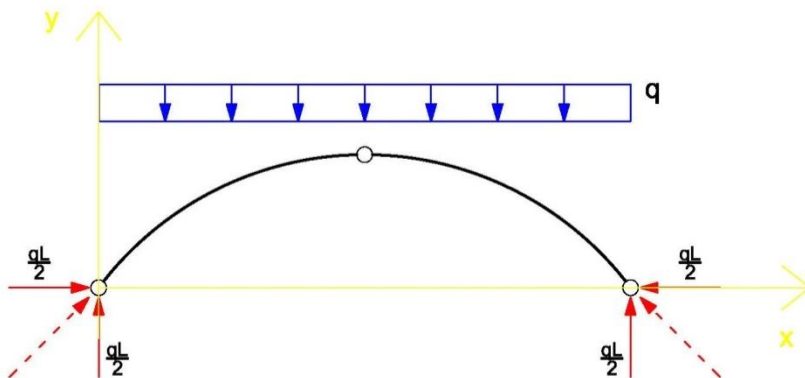
Twierdzenie o trzech tarczach układ jest GN SW
Wyznaczenie reakcji

Równanie pręta zakrzywionego (początek układu współrzędnych – osi xy – w lewej podporze):

$$y = x - \frac{x^2}{L}$$

$$y' = 1 - \frac{2x}{L} = \operatorname{tg} \varphi$$

Wykorzystując symetrię oraz warunek konstrukcyjny otrzymuje się reakcje – wszystkie o wartości $\frac{qL}{2}$.



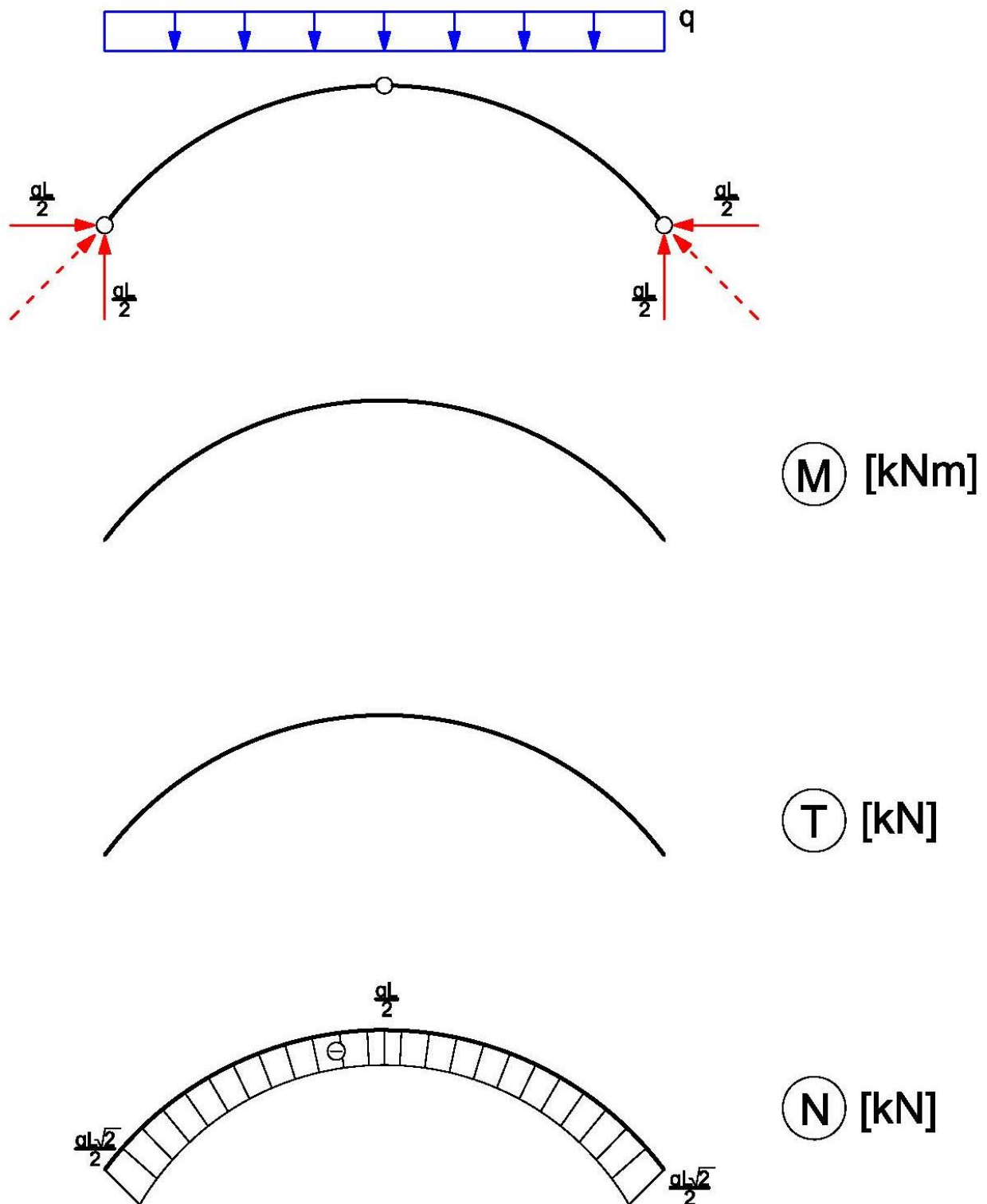
Moment :

$$M(x) = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{qL}{2} \cdot y - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = \frac{qL}{2} \cdot x - \frac{qL}{2} \cdot \left(x - \frac{x^2}{L}\right) - q \cdot x \cdot \frac{x}{2} = 0,$$

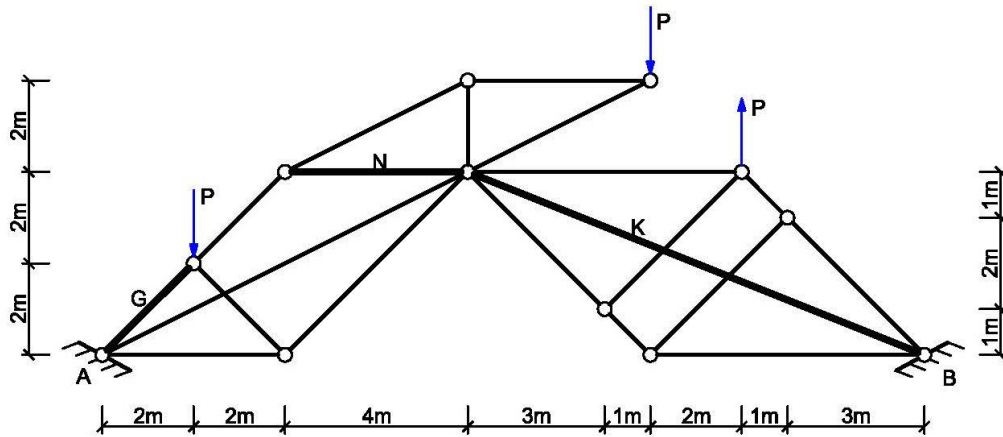
czyli siła tnąca również na całej długości pręta jest zerowa, tzn , że łuk przenosi tylko siły ściskające o wartości

$$N(x) = -\left(\frac{qL}{2} - qx\right) \cdot \sin \varphi - \frac{qL}{2} \cdot \cos \varphi.$$

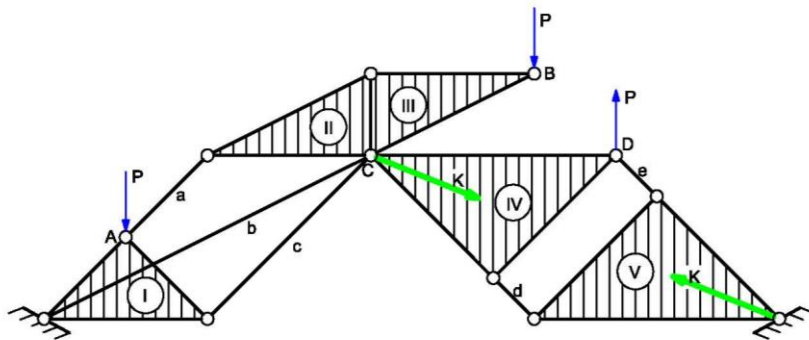
Wniosek: dla trójprzegubu z łukiem parabolicznym z wyniosłości $\frac{f}{l} = 2$ - oś łuku pokrywa się z linią ciśnień. (zob. część 5)



7. KRATOWNICA



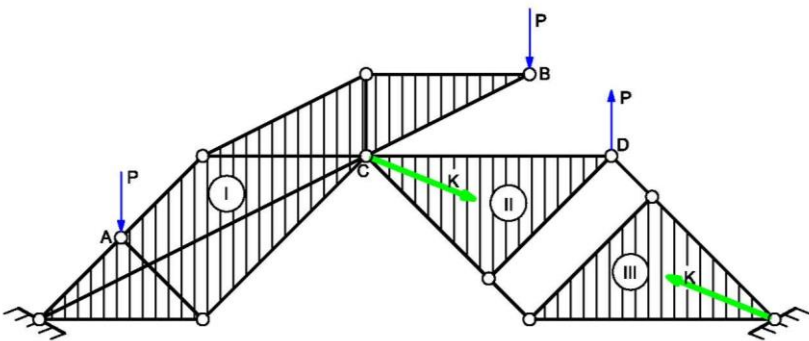
1. Wyznaczenie siły w pręcie K metodą kinematyczną:



Usuwamy pręt, którego siłę chcemy wyznaczyć. W węzłach pojawia się nieznaną siłę na kierunku usuniętego pręta – przyjęto siłę rozciągającą.

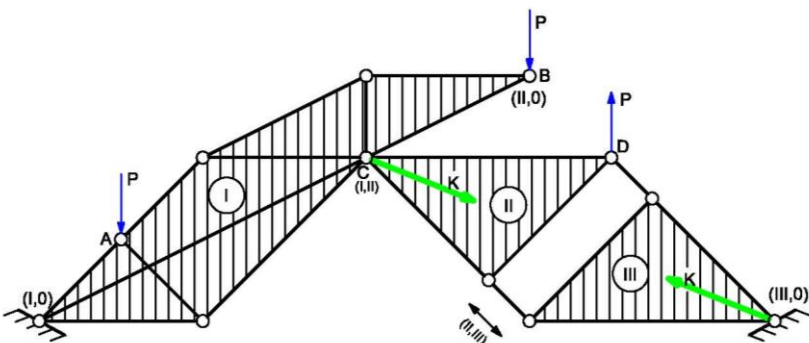
„Dzielimy” kratownicę na tarcze.

I – V klasyczna budowa trójkątna.



I + (II – III) na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach tworzy jedną tarczę.

Otrzymujemy 3 tarcze.



Środki obrotu tarcz:

I, 0 – lewa podpora przegubowa

III, 0 – prawa podpora przegubowa

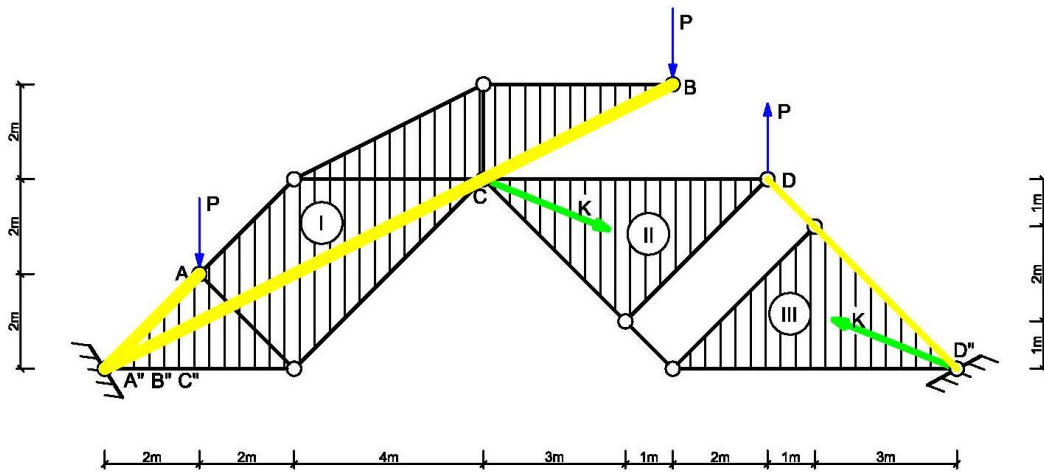
I, II – punkt C – przegub łączący dwie tarcze

II, III – w nieskończoności – dwie więzi równoległe

II, 0 – wykorzystując

(II,III) i (III,0) oraz (I,II) i

(I,0) – czyli w punkcie B



Narzucamy przemieszczenie obrócone punkt A na kierunku promienia wodzącego. Następnie punkty B i C należące do tej samej tarczy (tarcza I) – czyli odzwierciedlenie rzeczywistego połączenia punktów A i B oraz A i C wraz z przecinającymi je promieniami wodzącymi. Jeżeli przemieszczenie pierwszego punktu przyjęliśmy aż do środka obrotu tarczy, to punkty obrócone B i C znajdą się na planie przemieszczeń obróconych w tym samym miejscu co punkt A – też w miejscu środka obrotu (I,0).

Analogicznie postępujemy z punktem D (D i C należą do jednej tarczy II).

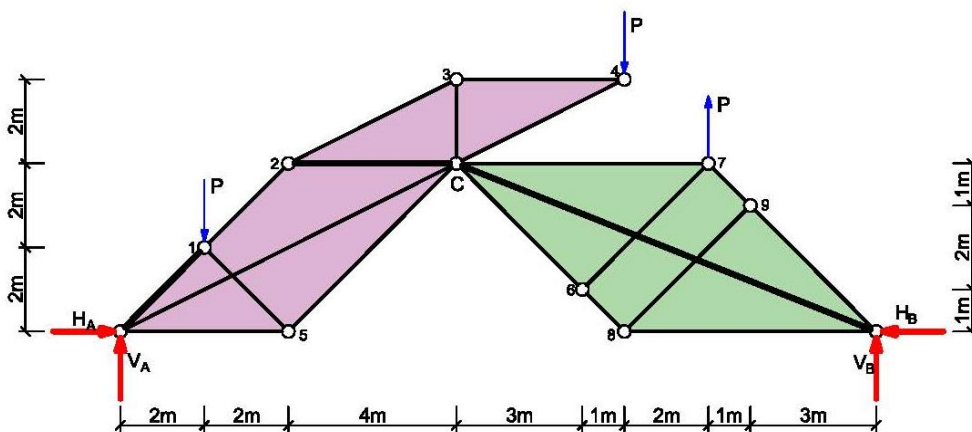
Jeżeli mamy znalezione przemieszczenia obrócone dla wszystkich obciążonych węzłów, możemy zapisać równanie pracy przygotowanej:

$$P \cdot 2 + P \cdot 12 + P \cdot 4 + K_x \cdot 4 + K_y \cdot 8 = 0$$

$$-18P = 4 \frac{5K}{\sqrt{29}} + 8 \frac{2K}{\sqrt{29}}$$

$$K = -\frac{P}{2} \sqrt{29}$$

2. Wyznaczenie reakcji w kratownicy:



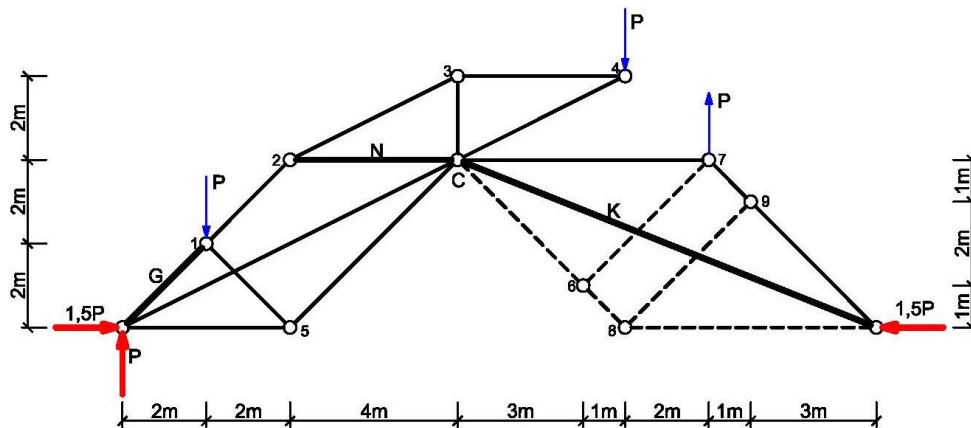
$$\sum M_A = P \cdot 2 + P \cdot 12 - P \cdot 14 - V_B \cdot 18 = 0, \rightarrow V_B = 0$$

$$\sum M_C^P = -P \cdot 6 - V_B \cdot 10 + H_B \cdot 4 = 0, \rightarrow H_B = \frac{3}{2} P$$

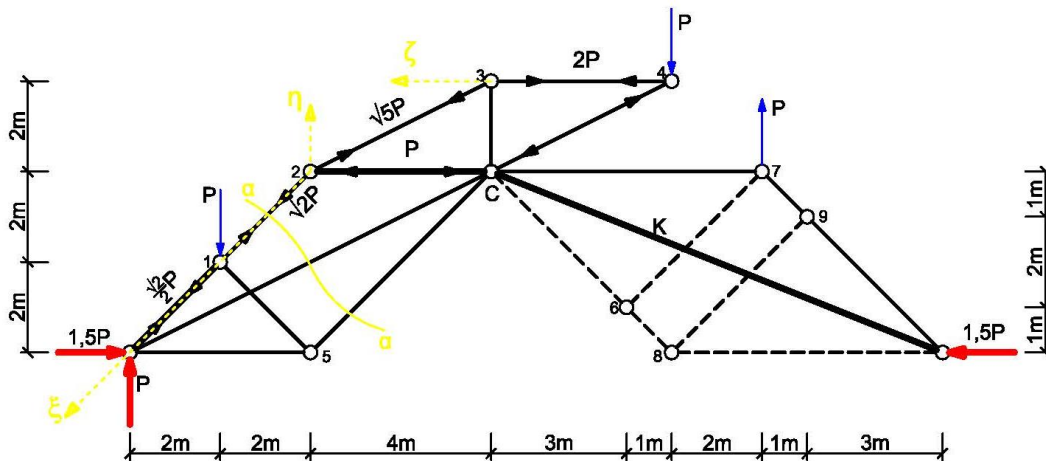
$$\sum X = H_A - H_B = 0, \rightarrow H_A = \frac{3}{2} P$$

$$\sum Y = P + P - P - V_A - V_B = 0, \rightarrow V_A = P$$

3. Wyznaczenie sił w prętach N, G, K metodą analityczną:



Na schemacie obliczeniowym zaznaczono pręty zerowe kratownicy. (Pręt 6-7 z węzła 6 oraz pręt 8-9 z węzła 9. Następnie węzeł 8: pręty 8-6 i 8-B, jeżeli zauważyliśmy pręt zerowy 8-9. Potem węzeł 6 – czyli pręt 6-C.).



Jest kilka możliwych rozwiązań.

1. Jedno z nich to wyznaczenie sił N i G bez znajomości reakcji: wyznaczenie siły N – równowaga węzła 4, potem 3, a następnie 2, wyznaczenie siły G – równowaga węzła 1,
2. Siłę w pręcie K, po wyznaczeniu reakcji i prętów zerowych można obliczyć z równowagi węzła przy prawej podporze lub z dowolnego cięcia prawej tarczy.
3. Wyznaczenie siły w pręcie 1-2 (cięcie $\alpha-\alpha$), a następnie z równowagi węzła 1 – siłę G, 2 – siłę N:

$$\text{cięcie } \alpha-\alpha: \sum M_C^L = -1,5P \cdot 4 + P \cdot 8 - P \cdot 6 + S_{12} \cdot 2\sqrt{2} = 0, \rightarrow S_{12} = P\sqrt{2}$$

$$\text{węzeł 1: } \sum P_1^\xi = S_{1A} + \frac{P}{\sqrt{2}} - S_{12} = 0, \rightarrow S_{1A} = \frac{P\sqrt{2}}{2} = G$$

$$\text{węzeł 2: } \sum P_2^\eta = S_{23y} - \frac{S_{21}}{\sqrt{2}} = 0, \rightarrow S_{23y} = P,$$

$$\sum P_2^\zeta = S_{23x} - S_{23x} + G = 2P - P + G = 0, \rightarrow G = -P$$

DODATKOWA LITERATURA KSIĄŻKOWA

1. M. Klasztorny, *Mechanika techniczna*. Wydanie III poprawione, DWE, Wrocław 2017.
2. J. Leyko, *Mechanika ogólna. Statyka i kinematyka*. PWN, Warszawa 2001.
3. W. Szcześniak, *Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej. Statyka*. OWPW, Warszawa 1999.
4. R. Chrobok *Zbiór zadań z podstaw statyki*. DWE, Wrocław 1999.
5. T. Niezgodziński, *Mechanika ogólna*. PWN, Warszawa 1999.
6. Z. Osiński, *Mechanika ogólna*. PWN, Warszawa 1994.
7. Z. Cywiński, *Mechanika budowli w zadaniach*, t.1. PWN, Warszawa 1983.
8. W. Nowacki, *Mechanika budowli*. PWN, Warszawa 1975.
9. Z. Dyląg, E. Krzemińska-Niemiec, F. Filip, *Mechanika budowli*, t. 1. PWN, Warszawa 1974.
10. A. Cybulski, *Statyka ustrojów prętowych*, t.1. (Statyka ciała sztywnego) PWr, Wrocław 1973.
11. A. Chudzikiewicz, *Statyka budowli*, cz.1. PWN, Warszawa 1973.
12. F. Janik, *Mechanika ogólna*. PWN Warszawa 1970.