

# 6

## LINIE WPŁYWU I OBWIEDNIE

### 6.1. Definicje i zastosowanie linii wpływu oraz obwiedni

Obciążenie, którego działaniu zostały poddane płaskie układy prętowe, przedstawione w rozdziałach 4 i 5 ma niezmienną w czasie wartość i położenie na rozpatrywanym układzie. Tego rodzaju obciążenie występuje we wszystkich rodzajach konstrukcji, najczęściej jako jej ciężar własny. Reakcje podporowe i siły wewnętrzne przy obciążeniu stałym nie zmieniają się, a ich wartości i znaki możemy wyznaczyć, rozwiązując układ równań równowagi, zapisany dla konkretnego, ściśle określonego położenia obciążenia.

Zadaniem konstrukcji mostowych jest przeniesienie obciążeń zmiennych (patrz punkt 3.2), poruszających się po zadanym torze na konstrukcji. We wstępie do rozdziału poświęconego kratownicom wspomniano o wydzieleniu takiego właśnie toru przemieszczania się obciążeń (kratownice z jazdą górą lub dołem).

Obciążenie zmieniające swoje położenie na konstrukcji wywołuje zmianę reakcji podporowych i sił wewnętrznych w przekrojach układu. Niniejszy rozdział prezentuje ideę tzw. **linii wpływu**, której zadaniem jest przedstawienie zależności między wybraną wielkością statyczną a położeniem na konstrukcji jednostkowej siły pionowej. Zakładamy, że zmiana położenia siły odbywa się bardzo powoli, można więc pominąć efekty dynamiczne wywołane tą zmianą. Inaczej mówiąc, wyobrażamy sobie pionową siłę  $P = 1$  ustawianą w różnych miejscach na konstrukcji, a tym samym związki łączące wybraną wielkość z położeniem przesuwanego obciążenia możemy wyprowadzać, wykorzystując metody statyki poznane w poprzednich rozdziałach.

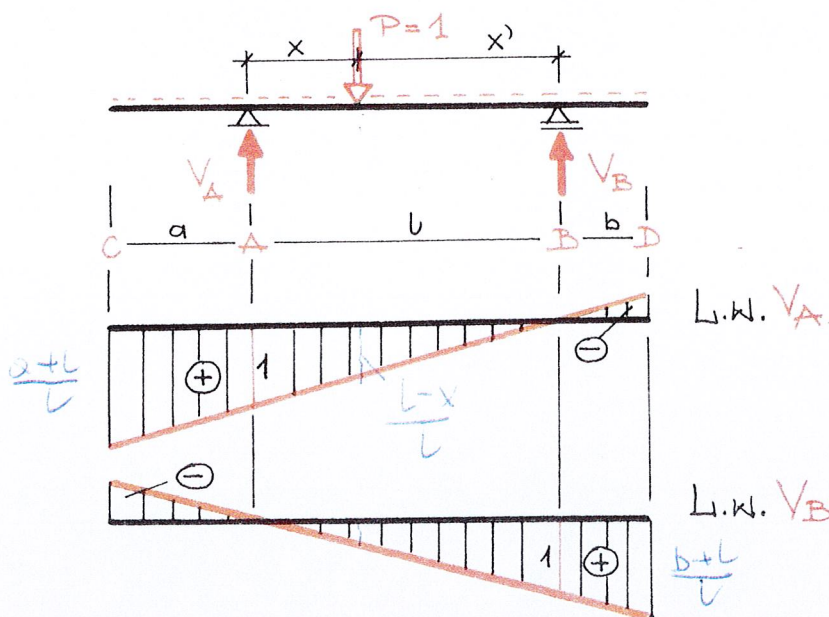
Linie wpływu znajdują zastosowanie w zagadnieniu wyznaczania ekstremalnych wartości, jakie mogą osiągnąć wybrane wielkości statyczne w czasie przejazdu obciążenia – pozwalają tym samym na budowanie tzw. **obwiedni sił wewnętrznych**. Są to wykresy, których każda rzędna odpowiada ekstremalnej wartości siły wewnętrznej, powstającej w przekroju pręta znajdującym się w miejscu odczytywanej rzędnej.

W prezentowanym rozdziale przedstawiono linie wpływu reakcji podporowych i sił wewnętrznych sporządzone dla belki swobodnie podpartej ze wspornikami, belki wspornikowej, przegubowej belki ciągłej i kratownicy oraz zamieszczono przykład obciążania linii wpływu i wyznaczania obwiedni.

### 6.2. Linie wpływu dla swobodnie podpartej belki ze wspornikami

Stosując zasady statyki objaśnimy pojęcia linii wpływu reakcji podporowych oraz sił tnących i momentów zginających w wybranych przekrojach belki swobodnie podpartej ze wspornikami. Założmy, że po analizowanej belce (rys. 6.1) porusza się pionowa siła  $P = 1$ , zwana dalej siłą jednostkową.

Rys. 6.1





Formułując równania równowagi

$$\sum M_B = 0 \qquad \sum M_A = 0 \qquad (6.1)$$

wyrazimy reakcje podporowe  $V_A$  i  $V_B$  jako funkcje położenia tej siły, a mianowicie:

$$V_A \cdot l - l \cdot x' = 0 \qquad \rightarrow V_A = \frac{x'}{l} \qquad (6.2)$$

$$V_B \cdot l - l \cdot x = 0 \qquad \rightarrow V_B = \frac{x}{l} \qquad (6.3)$$

Obie te funkcje są prawdziwe także wówczas, gdy siła  $P = 1$  znajduje się na jednym ze wsporników. Należy tylko pamiętać, że  $x$  oznacza zawsze odległość siły jednostkowej od podpory A, a  $x'$  – odległość tej siły od podpory B, niezależnie od położenia siły po prawej lub lewej stronie danej podpory. Moment siły jednostkowej względem podpory A lub B zmienia znak właśnie z powodu ustawienia tej siły w stosunku do odpowiedniej podpory. Funkcje (6.2), (6.3) są liniowe – ich wykresy (rys. 6.1) nazywamy liniami wpływu reakcji podporowych. Z wykresów tych można natychmiast odczytać wartość i zwrot reakcji  $V_A$  lub  $V_B$  przy dowolnym ustawieniu siły jednostkowej.

Zauważmy, że reakcja  $V_A$  jest równa jedności (w całości przejmuje obciążenie  $P = 1$ ), a reakcja  $V_B$  ma wartość zero, gdy siła jednostkowa jest ustawiona na podporze A ( $x' = l$ ,  $x = 0$ ). Wraz z przesuwaniem się obciążenia w kierunku podpory B maleje wartość reakcji  $V_A$  i rośnie wartość reakcji  $V_B$ . Gdy siła jednostkowa znajdzie się na podporze B, wartość reakcji  $V_A$  jest równa zero, a reakcja  $V_B$  jest równa jedności ( $x = l$ ,  $x' = 0$ ). W czasie przejazdu siły jednostkowej przez lewy wspornik zwrot reakcji  $V_B$  zmienia się na przeciwny do założonego na rys. 6.1. Podobnie zmienia się zwrot reakcji  $V_A$ , gdy siła jednostkowa obciąża prawy wspornik. Jak widać, każda rzędna linii wpływu wyraża wartość reakcji podporowej, która powstanie, gdy siła jednostkowa znajdzie się w miejscu układu odpowiadającym tej rzędnej. Dalej używać będziemy zwyczajowego określenia: „gdy siła znajduje się nad daną rzędną”.

Rzędne linii wpływu reakcji podporowych przy zapisie (6.2), (6.3) są wielkościami bezwymiarowymi (np.  $x'/l$ ,  $[m]/[m]$ ) ze względu na pominięcie jednostki siły  $P = 1$  w równaniach równowagi. **Należy jednak pamiętać o tym, aby obliczenia statyczne prowadzone były w jednym układzie jednostek.**

Linie wpływu siły tnącej w dowolnym przekroju  $\alpha - \alpha$  w obrębie przęsła wyznaczmy, rozpatrując dwa przypadki: gdy siła jednostkowa znajduje się na lewo od tego przekroju, a następnie – gdy działa po jego prawej stronie (rys. 6.2). Pamiętajając o umowie znakowania sił tnących (punkt 3.3), otrzymamy w pierwszym położeniu obciążenia:

$$T_\alpha = V_A - l = \frac{x'}{l} - l = \frac{x' - l}{l} = -\frac{x}{l}$$

sumując wszystkie siły prostopadłe do osi pręta po lewej stronie przekroju lub:

$$T_\alpha = -V_B = -\frac{x}{l} \qquad (6.4)$$

gdy obliczamy siłę tnącą po prawej stronie przekroju  $\alpha - \alpha$ .

Gdy siła jednostkowa porusza się po prawej stronie przekroju, siłę tnącą opisuje funkcja

$$T_\alpha = V_A = \frac{x'}{l}$$

obliczona dla lewej strony przekroju lub:

$$T_\alpha = l - V_B = l - \frac{x}{l} = \frac{l - x}{l} = \frac{x'}{l} \qquad (6.5)$$

otrzymana w wyniku sumowania sił poprzecznych po prawej stronie przekroju. Widzimy, że dla każdej części belki, myślowo przeciętej przekrojem  $\alpha - \alpha$  obowiązuje inna, liniowa funkcja sił tnących, a mianowicie funkcja (6.4) po lewej stronie przekroju  $\alpha - \alpha$  i funkcja (6.5) po jego prawej stronie. Pod przekrojem  $\alpha - \alpha$  występuje na wykresie skok o wartości 1 – w tym miejscu siła  $P = 1$  zmienia swoje położenie, przechodząc z lewej na prawą stronę przekroju. Linia wpływu siły tnącej w belce swobodnie podpartej ze wspornikami będzie mieć taki sam charakter (dwie liniowe funkcje ze skokiem o wartości 1 pod rozpatrywanym przekrojem) niezależnie od położenia przekroju w obrębie przęsła (patrz linia wpływu  $T_\beta$ ).

Wyznamy linię wpływu siły tnącej w przekroju  $\gamma - \gamma$  leżącym na lewym wsporniku. Rozpatrzmy znowu dwa przypadki. Gdy siła jednostkowa znajduje się po lewej stronie przekroju, siła tnąca w tym przekroju, obliczana jako suma wszystkich sił prostopadłych do osi pręta po lewej stronie przekroju, ma wartość 1 i znak (-),

$$T_\gamma = -1 \qquad (6.6)$$

wynikający z umowy znakowania sił tnących, gdyż przy takim położeniu siły tylko ona tworzy siłę tnącą  $T_\gamma$ . Z kolei, gdy siła jednostkowa znajdzie się po prawej stronie przekroju  $\gamma - \gamma$ , siła tnąca w tym przekroju, obliczana jako suma wszystkich sił



prostopadłych do osi pręta po prawej stronie przekroju, jest równa:

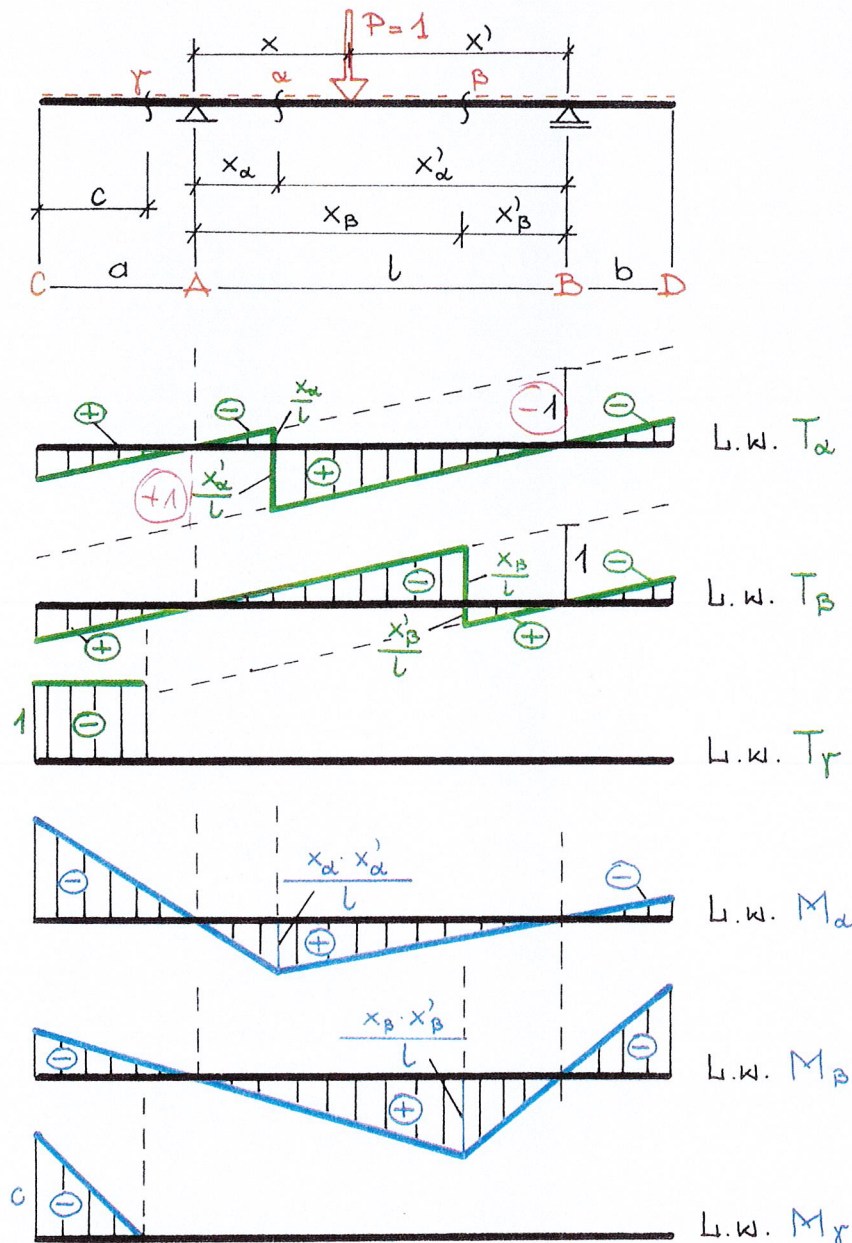
$$T_\gamma = I - V_A - V_B = 0 \quad (6.7)$$

Siła tnąca  $T_\gamma$  jest oczywiście równa zero, ponieważ (6.7) jest jednym z równań równowagi, a mianowicie  $\sum Y = 0$ .

Przedstawimy teraz analityczny sposób sporządzania linii wpływu momentu zginającego w przekroju  $\alpha - \alpha$ , leżącym pomiędzy podporami A oraz B. Tor poruszania się siły  $P = 1$  znów dzielimy na dwa odcinki:  $C - \alpha$  i  $\alpha - D$  (rys. 6.2). Jeżeli siła jednostkowa znajduje się na lewo od przekroju, łatwiej jest obliczyć moment w tym przekroju, rozpatrując prawą część układu:

$$M_\alpha = V_B \cdot x'_\alpha \quad (6.8)$$

Rys. 6.2



Podstawiając (6.3) do (6.8) otrzymamy:

$$M_\alpha = \frac{x}{l} \cdot x'_\alpha \quad (6.9)$$

Jest to liniowa funkcja zmiennej  $x$ , tzn. położenia siły jednostkowej na odcinku  $C - \alpha$ .

Gdy siła jednostkowa porusza się po prawej części układu, moment w przekroju  $\alpha - \alpha$  obliczymy prościej, sumując momenty tworzone przez siły znajdujące się po lewej stronie przekroju. Jest to tylko jedna siła – reakcja  $V_A$ .

$$M_\alpha = V_A \cdot x_\alpha \quad (6.10)$$



Po podstawieniu (6.2) do (6.10) mamy:

$$M_{\alpha} = \frac{x'}{l} \cdot x_{\alpha} \quad (6.11)$$

Funkcja (6.11) jest także liniowa. Jej wartość dla położenia siły jednostkowej dokładnie w przekroju  $\alpha - \alpha$  ( $x' = x'_{\alpha}$ ) jest równa:

$$M_{\alpha} = \frac{x'_{\alpha} \cdot x_{\alpha}}{l} \quad (6.12)$$

tak, jak wartość funkcji (6.9) dla takiego samego położenia siły ( $x = x_{\alpha}$ ). Gdy siła jednostkowa znajdzie się na podporze A ( $x = 0$ ) lub na podporze B ( $x' = 0$ ), wartość momentu zginającego w przekroju  $\alpha - \alpha$  (wzory (6.9), (6.11)) będzie równa zero. Na rys. 6.2 przedstawiono linie wpływu momentu zginającego w przekroju  $\alpha - \alpha$  oraz w dowolnym, innym przekroju  $\beta - \beta$  znajdującym się także w obrębie przęsła. Linie wpływu  $M_{\beta}$  tworzymy jak linie wpływu  $M_{\alpha}$ ; maksymalną wartość dodatnią moment  $M_{\beta}$  osiąga wówczas, gdy siła jednostkowa znajduje się dokładnie nad przekrojem  $\beta - \beta$  i wartość ta wynosi:

$$M_{\beta} = \frac{x'_{\beta} \cdot x_{\beta}}{l} \quad (6.13)$$

Moment zginający w każdym przekroju znajdującym się między podporami A i B belki ze wspornikami przyjmuje największą ujemną wartość wówczas, gdy siła jednostkowa obciąża koniec jednego ze wsporników.

Rozważmy teraz, jaki wpływ ma położenie siły  $P = 1$  na wartość momentu w dowolnym przekroju  $\gamma - \gamma$  leżącym na wsporniku. Gdy siła jednostkowa porusza się po odcinku C -  $\gamma$ , moment  $M_{\gamma}$  obliczany z lewej strony przekroju, tworzony jest tylko przez tę siłę i przyjmuje wartość  $M_{\gamma} = -1 \cdot c$ , jeśli siła stoi w punkcie C oraz wartość zero, gdy siła znajdzie się dokładnie w przekroju  $\gamma - \gamma$  (rys. 6.2). Jeśli siła jednostkowa porusza się po odcinku  $\gamma - D$ , siła tnąca (p. linia wpływu  $T_{\gamma}$ ) w przekroju  $\gamma - \gamma$  jest zawsze równa zero, tym samym dla takiego położenia siły moment  $M_{\gamma}$  przyjmuje zawsze wartość zero.

Jednostką linii wpływu momentu zginającego jest jednostka długości, zwykle [m], gdyż znów w zapisach (6.8) i (6.10) występuje niemianowana siła  $P = 1$ .

W przypadku belki swobodnie podpartej bez wsporników odpowiednim liniom wpływu odpowiadają wykresy pokazane na rys. 6.1 i 6.2 na odcinku A - B.

### 6.3. Linie wpływu dla belki wspornikowej

Linie wpływu sił wewnętrznych w dowolnym przekroju belki wspornikowej można wyznaczyć, nie znając linii wpływu reakcji podporowych. Podzielmy tor poruszania się siły jednostkowej na dwa odcinki (rys. 6.3): A -  $\alpha$  i  $\alpha$  - B. Gdy siła porusza się po odcinku A -  $\alpha$  ( $0 \leq x \leq x_{\alpha}$ ), siła tnąca i moment zginający w przekroju  $\alpha - \alpha$  mają zawsze wartość 0, co zauważymy, rozpatrując część układu znajdującą się po prawej stronie przekroju. Część ta jest w takim przypadku nie obciążona.

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &= 0 \\ M_{\alpha} &= 0 \end{aligned} \quad (6.14)$$

Jeśli siła jednostkowa znajduje się po prawej stronie przekroju  $\alpha - \alpha$  ( $x_{\alpha} \leq x \leq l$ ), jest jedynym obciążeniem tej części belki. Możemy więc zapisać, rozpatrując w dalszym ciągu odcinek  $\alpha - B$ :

$$\begin{aligned} T_{\alpha} &= 1 \\ M_{\alpha} &= -l \cdot (x - x_{\alpha}) = x_{\alpha} - x \end{aligned} \quad (6.15)$$

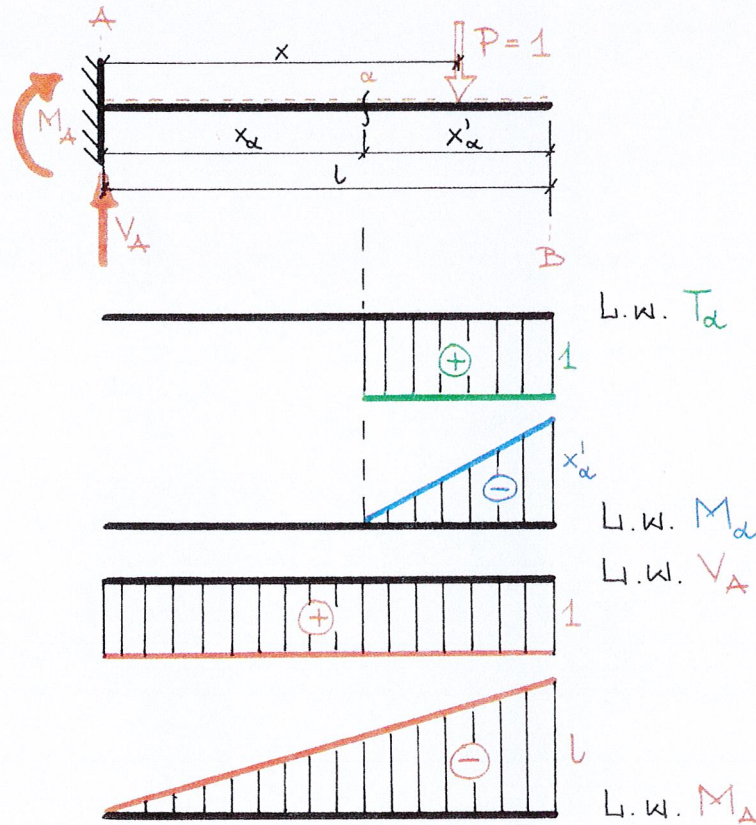
Linie wpływu sił wewnętrznych w przekroju  $\alpha - \alpha$  belki wspornikowej mają rzędne różne od zera tylko wówczas, gdy siła jednostkowa znajduje się na odcinku pomiędzy analizowanym przekrojem a swobodnym końcem wspornika, przy czym linia wpływu siły tnącej ma dla takiego położenia siły zawsze stałą wartość 1, a linia wpływu momentu zmienia się liniowo od wartości 0 pod przekrojem  $\alpha - \alpha$  do wartości  $-x'_{\alpha}$  na swobodnym końcu wspornika (rys. 6.3).

Linie wpływu reakcji podporowych otrzymamy przesuwając przekrój  $\alpha - \alpha$  do podparcia (utwierdzenia) wspornika. Znaki obu tych linii wpływu zależą od przyjętych zwrotów reakcji podporowych. Jeśli zwroty te są takie, jak na rys. 6.3, linia wpływu reakcji  $V_A$  ma stałą dodatnią wartość 1, a linia wpływu momentu podporowego zmienia się liniowo i jej rzędne są ujemne.

Znajomość sposobów wyznaczania linii wpływu różnych wielkości statycznych dla belki swobodnie podpartej i belki wspornikowej pozwala sporządzić linie wpływu w innych statycznie wyznaczalnych układach prętowych. Sposób konstruowania linii wpływu, przedstawionych na rys. 6.1, 6.2 i 6.3, wykorzystamy w następnych punktach do wyznaczenia linii wpływu reakcji podporowych i sił wewnętrznych w przegubowej belce ciągłej i kratownicy.



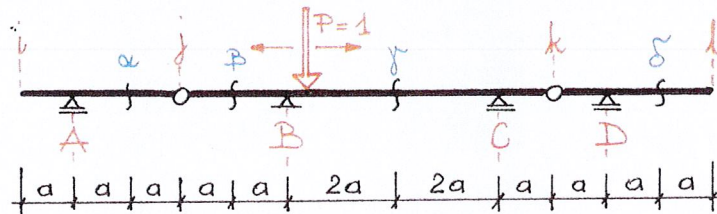
Rys. 6.3



### 6.4. Linie wpływu dla swobodnie podpartej belki ciągłej z przegubami

Wyznamy linie wpływu następujących wielkości statycznych:  $V_A, V_B, V_C, V_D, M_A, M_C, T_\alpha, M_\alpha, T_\beta, M_\beta, T_\gamma, M_\gamma, T_\delta, M_\delta$  w przykładowej przegubowej belce ciągłej, przedstawionej na rys. 6.4.

Rys. 6.4



sposob  
rozdechy  
dla belki przegubowej

Jako pierwsze sporządzimy linie wpływu reakcji podporowych. Naturalnie, można zapisać formalne funkcje zależności wartości i znaku tych reakcji od położenia siły jednostkowej, jak w poprzednich punktach, lub przeprowadzić następujące rozumowanie.

Zauważmy, że reakcja  $V_A$  równa się jedności, gdy siła  $P=1$  znajdzie się dokładnie w punkcie  $A$  belki  $i-j$  oraz równa się zero, gdy obciąża belkę zasadniczą  $j-k$  oraz opartą częściowo na niej belkę  $k-l$ . Linie wpływu wielkości statycznych w układach statycznie wyznaczalnych mają liniowy przebieg (np. (6.2), (6.13), (6.15)). Łącząc więc rzędną o wartości 1 w przekroju podporowym  $A$  z rzędną 0 w przegubie  $j$ , otrzymujemy linię wpływu  $V_A$  (rys. 6.5). Podobnie można zbudować linię wpływu  $V_D$  (rys. 6.5).

Reakcja  $V_B$  ma wartość 1, jeśli siła jednostkowa stanie w punkcie  $B$  oraz wartość 0, gdy siła ta znajdzie się nad podporą  $C$ . Łącząc obie te rzędne i przedłużając tak otrzymaną liniową funkcję na wsporniki  $j-B$  i  $C-k$  dostajemy w punktach  $j$  oraz  $k$  wartości, jakie reakcja  $V_B$  przyjmie, gdy siła jednostkowa znajdzie się w przegubach  $j$  oraz  $k$ . Są to jednocześnie rzędne linii wpływu  $V_B$  dla położenia  $P=1$  w punktach: końcowym i początkowym belek  $i-j$  oraz  $k-l$ , połączonych z belką zasadniczą  $j-k$ . Gdy siła jednostkowa stanie nad podporą  $A$  lub podporą  $D$ , reakcja  $V_B$  osiąga wartość 0. Łączymy liniowo rzędne otrzymane w punktach  $j$  oraz  $k$  z rzędną 0 w punktach  $A$  i  $D$ . W ten sposób otrzymujemy linię wpływu reakcji  $V_B$  dla całej ciągłej belki przegubowej (rys. 6.5). Analogicznie sporządzono linię wpływu  $V_C$  - rzędna 1 występuje tu w przekroju podporowym  $C$ , a rzędna 0 w przekroju podporowym  $B$  (rys. 6.5).

Budując linię wpływu momentu podporowego  $M_A$  zauważmy, że gdy siła jednostkowa znajdzie się w dowolnym punkcie toru  $A-l$  (na prawo od podpory  $A$ ), na odcinku  $i-A$  nie ma żadnego obciążenia lub reakcji tworzących moment w przekroju  $A$ . Rzędne linii wpływu  $M_A$  na odcinku  $A-l$  są więc zawsze równe zero. Jeśli siła  $P=1$  stanie w punkcie  $i$  wspornika  $i-A$ , moment



$M_A$  ma, zgodnie z umową znakowania sił wewnętrznych, znak (-) i wartość  $M_A = 1 \cdot a = a$ . Łącząc tę rzędną z rzędną 0 na podporze A, otrzymamy linię wpływu momentu podporowego  $M_A$  (rys. 6.5).

Linia wpływu momentu  $M_C$  ma zerowe rzędne dla wszystkich ustawień siły  $P = 1$  na odcinku  $i - C$ , gdyż reakcja  $V_D$  (patrz linia wpływu  $V_D$ ), tworząca moment  $M_C$  z prawej strony podpory C, przyjmuje wówczas wartość 0. Niezerowe rzędne linii wpływu  $M_C$  powstaną tylko wtedy, gdy siła jednostkowa porusza się po torze  $C - l$ . Postawmy siłę  $P = 1$  na prawym końcu belki  $k - l$  (punkt  $l$ ). Dla takiego ustawienia siły wartość reakcji  $V_D$  wynosi 3 (patrz linia wpływu  $V_D$ ), a wartość momentu  $M_C$  obliczona z prawej strony tej podpory jest równa:

$$M_C = -P \cdot 4a + V_D \cdot 2a = -1 \cdot 4a + 3 \cdot 2a = 2a$$

Gdy siła jednostkowa znajdzie się nad podporą D, moment  $M_C$  osiąga wartość 0, gdyż:

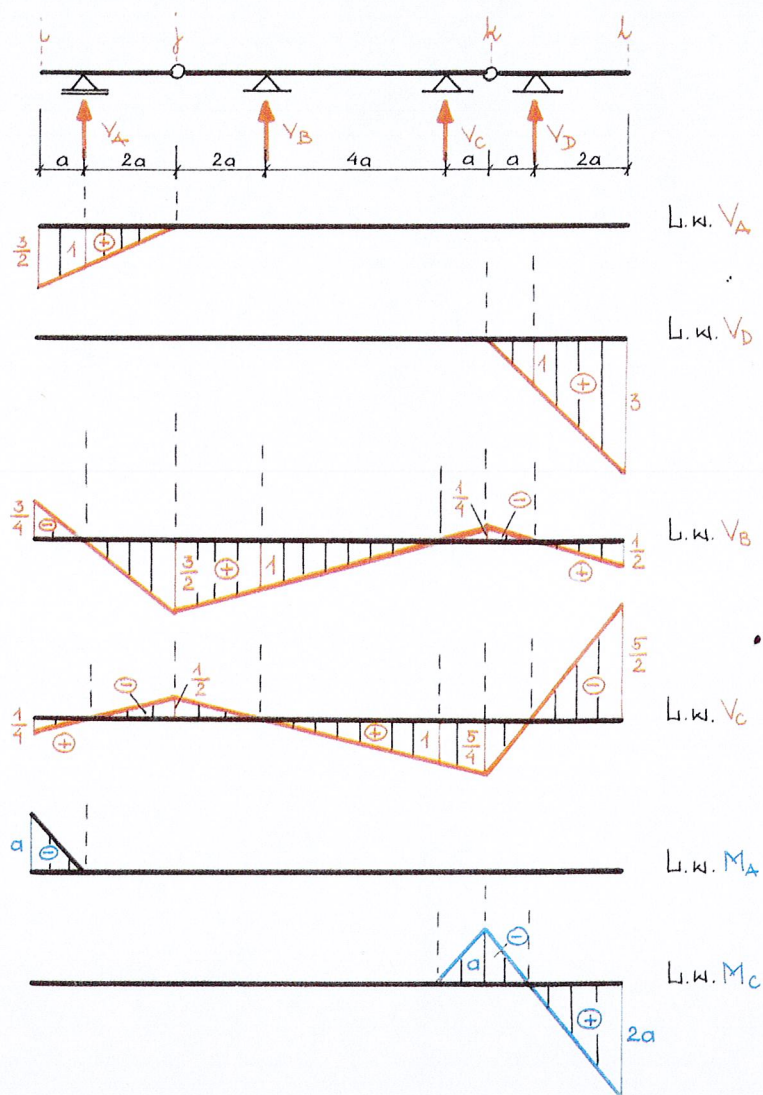
$$M_C = -P \cdot 2a + V_D \cdot 2a = -1 \cdot 2a + 1 \cdot 2a = 0$$

Łącząc obie te rzędne i przedłużając wykres na odcinku  $k - D$ , otrzymamy rzędną linii wpływu  $M_C$  dla ustawienia siły w przegubie  $k$ . Następnie łączymy tę rzędną z ustaloną wcześniej wartością 0 na podporze C. W ten sposób otrzymaliśmy linię wpływu momentu podporowego  $M_C$  w całej belce  $i - l$  (rys. 6.5).

Charakterystyczne rzędne linii wpływu przedstawionych na rys. 6.5 i 6.6 zostały obliczone proporcjonalnie do wymiarów belki.

Linie wpływu siły tnącej i momentu zginającego w wybranych przekrojach sporządzimy, stosując metodykę wyznaczania linii wpływu tych wielkości dla belki wspornikowej i swobodnie podpartej ze wspornikami (patrz punkty 6.2, 6.3).

Rys. 6.5



Rozpatrując zmianę sił wewnętrznych w przekroju  $\alpha - \alpha$  w zależności od położenia siły  $P = 1$  na belce  $i - l$  (rys. 6.6) zauważmy, że siła tnąca  $T_\alpha$  i moment zginający  $M_\alpha$  przyjmują zerowe wartości, gdy siła jednostkowa porusza się po belce zasadniczej  $j - k$  oraz połączonej z nią belce  $k - l$ . Reakcja  $V_A$  (patrz linia wpływu  $V_A$  na rys. 6.5) jest wówczas równa zero, tym samym obliczone z lewej strony przekroju  $\alpha - \alpha$  siły wewnętrzne w tym przekroju także mają wartości zerowe. Linie wpływu  $T_\alpha$  i  $M_\alpha$  sporządza się jak dla belki swobodnie podpartej w punktach A oraz j z lewostronnym wspornikiem  $i - A$ .



Sily wewnętrzne w przekroju  $\delta - \delta$  przyjmują niezerowe wartości tylko wtedy, gdy siła  $P = 1$  obciąża odcinek  $\delta - l$  prawego wspornika belki  $k - l$ . Gdy siła jednostkowa znajduje się w dowolnym miejscu odcinka  $i - \delta$ , część  $\delta - l$  belki jest nieobciążona i sily wewnętrzne w przekroju  $\delta - \delta$  obliczone z jego prawej strony mają wartości 0. Linie wpływu  $T_\delta$  i  $M_\delta$  zbudowano, wykorzystując znane już linie wpływu tych wielkości w belce wspornikowej (patrz punkt 6.3).

Analogicznie można sporządzić linie wpływu  $T_\beta$  i  $M_\beta$ . Przekrój  $\beta - \beta$  znajduje się na lewym wsporniku zasadniczej belki  $j - k$ . Wyznaczamy linie wpływu  $T_\beta$  i  $M_\beta$  dla belki swobodnie podpartej ze wspornikami (belka  $j - k$ , patrz punkt 6.2). Rzędna w punkcie  $j$  jest wspólną rzędną dla belek  $i - j$  oraz  $j - k$ . Drugą rzędną dla belki  $i - j$  otrzymamy, ustawiając siłę  $P = 1$  na podporze A. Reakcja  $V_A$  jest wówczas równa jedności, obliczając więc  $T_\beta$  i  $M_\beta$  z lewej strony przekroju  $\beta - \beta$  dostaniemy:

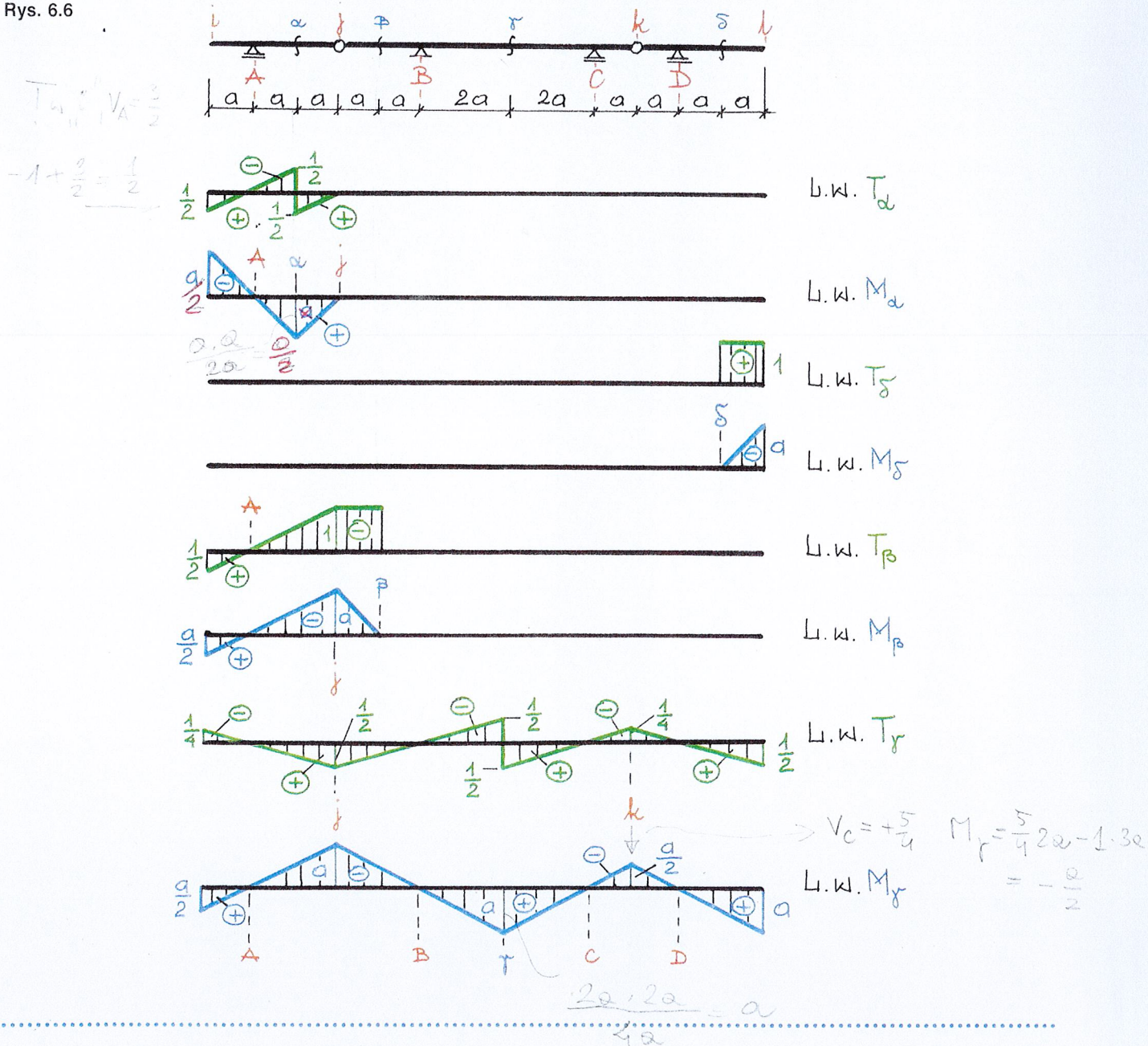
$$T_\beta = V_A - P = 1 - 1 = 0$$

$$M_\beta = V_A \cdot 3a - P \cdot 3a = 1 \cdot 3a - 1 \cdot 3a = 0$$

Łącząc rzędną 0 w punkcie A z rzędną  $-1$  ( $T_\beta$ ) lub rzędną  $-a$  ( $M_\beta$ ) w punkcie  $j$  otrzymujemy linie wpływu tych wielkości statycznych dla rozpatrywanej belki.

Linie wpływu siły tnącej i momentu zginającego w przekroju  $\gamma - \gamma$ , znajdującym się w obrębie przęsła zasadniczej belki  $j - k$ , sporządzamy jak dla belki swobodnie podpartej ze wspornikami. Rzędne tych linii otrzymane w punktach  $j$  oraz  $k$  są jednocześnie ważne dla belek  $i - j$  oraz  $k - l$ . Gdy siła  $P = 1$  stanie na podporze A ( $V_B = V_C = V_D = 0$  - rys. 6.5),  $T_\gamma$  i  $M_\gamma$  mają wartość 0, co zauważamy, rozpatrując część  $\gamma - l$  belki (na prawo od przekroju  $\gamma - \gamma$ ). Łączymy rzędną 0 z rzędną  $1/2$  ( $T_\gamma$ ) lub  $-a$  ( $M_\gamma$ ). Jeśli siła jednostkowa znajdzie się nad podporą D, część  $i - \gamma$  belki na lewo od przekroju  $\gamma - \gamma$  jest nieobciążona, reakcje podporowe, a także sily wewnętrzne w tym przekroju przyjmują zerowe wartości. Łącząc rzędne o wartości 0 z rzędnymi  $T_\gamma$  i  $M_\gamma$  w punkcie  $k$  otrzymujemy linie wpływu siły tnącej i momentu zginającego w przekroju  $\gamma - \gamma$  dla całej belki  $i - l$  (rys. 6.6).

Rys. 6.6





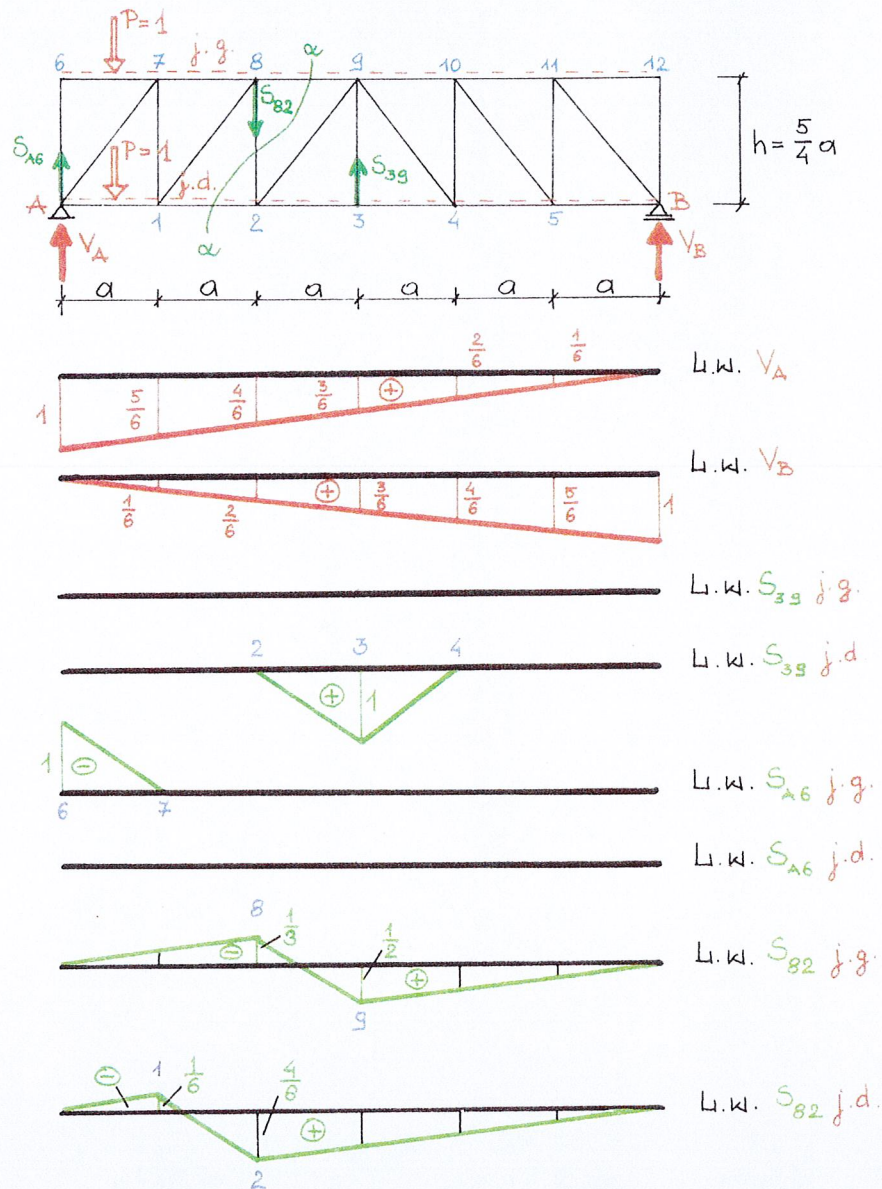
Przedstawione przykłady pozwalają zrozumieć ogólną zasadę konstruowania linii wpływu określonych wielkości statycznych w ciągłych belkach przegubowych. W zakończeniu punktu 4.5 wspomniano o wykonywanej często analizie pracy takiej belki jako całości składającej się z belek prostych, opartych tylko na podłożu oraz belek prostych, zawieszonych jednostronnie i dwustronnie. Taka analiza jest także przydatna w sporządzaniu linii wpływu wybranych wielkości statycznych w ciągłych belkach przegubowych. Pracę rozpoczynamy od zbudowania linii wpływu dla tej belki prostej, na której znajduje się analizowany przekrój, stosując znane sposoby podane dla belki swobodnie podpartej lub wspornikowej. Następnie kontynuujemy rozbudowę linii wpływu na pozostałych belkach układu w zależności od charakteru ich wzajemnego przyporządkowania.

### 6.5. Linie wpływu dla kratownic

W rozdziale 5. przedstawiono metody obliczania sił osiowych w kratownicach, opierające się na założeniu przenoszenia przez te układy obciążeń działających wyłącznie w węzłach. W kratowych konstrukcjach mostów kolejowych założenie to jest zazwyczaj spełnione. System szyn, podkładów, podłużnic równoległych do osi podłużnej mostu oraz prostopadłych do nich poprzecznic zapewnia przekazywanie obciążenia taborem kolejowym na węzły kratownic stanowiących konstrukcję nośną obiektu.

Budowa linii wpływu reakcji podporowych w układach kratowych zależy od ich kształtu zewnętrznego i sposobu podparcia (np. kratownica o schemacie belki swobodnie podpartej, ciągłej belki przegubowej, układu trójprzegubowego). Natomiast wyznaczanie linii wpływu sił osiowych w prętach układu polega na wykorzystaniu prezentowanych w rozdziale 5. metod: równoważenia węzłów i przekrojów. Siła jednostkowa w kratownicy porusza się zawsze po określonym pasie (kratownice z jazdą dołem lub jazdą górą), przy czym linie wpływu siły w wybranym pręcie mogą być różne dla każdego z tych torów.

Rys. 6.7



Na rys. 6.7 pokazano kratownicę pracującą w schemacie belki swobodnie podpartej. Linie wpływu reakcji podporowych sporządzono dla takiego właśnie schematu. Kształt i rzędne linii wpływu  $V_A$  i  $V_B$  nie zależą od sposobu poruszania się siły



jednostkowej. Natomiast linie wpływu sił osiowych w wybranych prętach, przedstawione na rys. 6.7 i 6.8, sporządzono oddzielnie dla jazdy górą i dla jazdy dołem.

Zauważmy, że gdy siła jednostkowa porusza się po górnym pasie kratownicy, **pręt 3 – 9** jest zawsze zerowy ( $S_{39} = 0$ ). Jeśli mamy do czynienia z kratownicą z jazdą dołem, pręt 3 – 9 jest zerowy wówczas, gdy  $P = 1$  obciąża węzły: A, 1, 2, 4, 5 i B. Siła osiowa w tym pręcie przyjmuje wartość 1 tylko wtedy, gdy siła jednostkowa stanie w węźle 3. Podobnie **siła w pręcie A – 6** (lub B – 12) w kratownicy z jazdą dołem ma zawsze wartość 0, natomiast w kratownicy z jazdą górą przyjmuje wartość  $-1$ , gdy siła jednostkowa znajdzie się w węźle 6 (lub w węźle 12).

**Linie wpływu siły osiowej w słupku 2 – 8** sporządzimy, prowadząc myślowo przekrój  $\alpha - \alpha$  i rzutując wszystkie siły po lewej (lub prawej) stronie tego przekroju na oś pionową  $y$ . Wykorzystamy wartości reakcji podporowych odczytane z linii wpływu  $V_A$  (lub  $V_B$ ).

### Jazda dołem

**P = 1 w węźle A:**

$$\begin{aligned} \sum Y_{\alpha}^L = 0 & & V_A^A - 1 - S_{82} = 0 \\ & & 1 - 1 - S_{82} = 0 & \rightarrow & S_{82} = 0 \end{aligned}$$

**P = 1 w węźle 1:**

$$\begin{aligned} \sum Y_{\alpha}^L = 0 & & V_A^1 - 1 - S_{82} = 0 \\ & & \frac{5}{6} - 1 - S_{82} = 0 & \rightarrow & S_{82} = -\frac{1}{6} \end{aligned}$$

**P = 1 w węźle 2:**

$$\begin{aligned} \sum Y_{\alpha}^L = 0 & & V_A^2 - 1 - S_{82} = 0 \\ & & \frac{4}{6} - S_{82} = 0 & \rightarrow & S_{82} = \frac{4}{6} \end{aligned}$$

**P = 1 w węźle B:**

$$\begin{aligned} \sum Y_{\alpha}^L = 0 & & V_A^B - 1 - S_{82} = 0 \\ & & 0 - S_{82} = 0 & \rightarrow & S_{82} = 0 \end{aligned}$$

### Jazda górą

**P = 1 w węźle 6:** jak dla P = 1 w węźle A

**P = 1 w węźle 7:** jak dla P = 1 w węźle 1

**P = 1 w węźle 8:**

$$\begin{aligned} \sum Y_{\alpha}^L = 0 & & V_A^8 - 1 - S_{82} = 0 \\ & & \frac{4}{6} - 1 - S_{82} = 0 & \rightarrow & S_{82} = -\frac{1}{3} \end{aligned}$$

**P = 1 w węźle 9:**

$$\begin{aligned} \sum Y_{\alpha}^L = 0 & & V_A^9 - S_{82} = 0 \\ & & \frac{3}{6} - S_{82} = 0 & \rightarrow & S_{82} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

**P = 1 w węźle 12:** jak dla P = 1 w węźle B

Wykresy linii wpływu przedstawiono na rys. 6.7.



Budując **linię wpływu siły w poziomym przecię 4 – 5** wykorzystamy przekrój  $\beta - \beta$  oraz równanie sumy momentów wszystkich sił z lewej (lub prawej) strony tego przekroju względem węzła 10. Potrzebne wartości reakcji podporowych odczytujemy z linii wpływu tych wielkości.

**Jazda dołem**

**P = 1 w węźle A:**

$$\begin{aligned} \sum M_{10}^p &= 0 & V_B^A \cdot 2a - D_{54} \cdot \frac{5}{4}a &= 0 \\ 0 \cdot 2a - D_{54} \cdot \frac{5}{4}a &= 0 & \rightarrow D_{54} &= 0 \end{aligned}$$

**P = 1 w węźle 2:**

$$\begin{aligned} \sum M_{10}^p &= 0 & V_B^2 \cdot 2a - D_{54} \cdot \frac{5}{4}a &= 0 \\ \frac{2}{6} \cdot 2a - D_{54} \cdot \frac{5}{4}a &= 0 & \rightarrow D_{54} &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

**P = 1 w węźle 4:**

$$\begin{aligned} \sum M_{10}^p &= 0 & V_B^4 \cdot 2a - D_{54} \cdot \frac{5}{4}a &= 0 \\ \frac{4}{6} \cdot 2a - D_{54} \cdot \frac{5}{4}a &= 0 & \rightarrow D_{54} &= \frac{16}{15} \end{aligned}$$

**P = 1 w węźle 5:**

$$\begin{aligned} \sum M_{10}^p &= 0 & V_B^5 \cdot 2a - 1 \cdot a - D_{54} \cdot \frac{5}{4}a &= 0 \\ \frac{5}{6} \cdot 2a - 1 \cdot a - D_{54} \cdot \frac{5}{4}a &= 0 & \rightarrow D_{54} &= \frac{8}{15} \end{aligned}$$

**P = 1 w węźle B:**

$$\begin{aligned} \sum M_{10}^p &= 0 & V_B^B \cdot 2a - 1 \cdot 2a - D_{54} \cdot \frac{5}{4}a &= 0 \\ 1 \cdot 2a - 1 \cdot 2a - D_{54} \cdot \frac{5}{4}a &= 0 & \rightarrow D_{54} &= 0 \end{aligned}$$

Wszystkie równania  $\sum M_{10}^p = 0$ , zapisane dla siły poruszającej się po pasie dolnym kratownicy, mają taką samą postać, gdy mamy do czynienia z jazdą górą. Rzędne linii wpływu siły  $D_{45}$  nie zależą więc od tego, po którym pasie przemieszcza się obciążenie  $P = 1$  (rys. 6.8).

Przekrój  $\beta - \beta$  wykorzystamy także do sporządzenia **linii wpływu siły osiowej w przecię 10 – 11**, układając np. równania  $\sum M_5^p = 0$ . Także w tym przypadku linia wpływu  $G_{10,11}$  jest taka sama dla jazdy dołem i górą.

**Linie wpływu siły osiowej w przecię 9 – 10** można zbudować, dokonując myślowego przecięcia  $\gamma - \gamma$  i zapisując równanie sumy momentów wszystkich sił po prawej stronie tego przekroju względem punktu 4 ( $\sum M_4^p = 0$ ). Niezależnie od jazdy siły jednostkowej, linia wpływu  $G_{9,10}$  ma taką samą postać, jaką przedstawiono na rys. 6.8.

**Linie wpływu siły w krzyżulcu 5 – 10** otrzymamy, układając równanie sumy rzutów wszystkich sił po prawej stronie przekroju  $\beta - \beta$  na pionową oś  $y$  dla różnych ustawień  $P = 1$ . Z wymiarów kratownicy podanych na rys. 6.7 obliczymy:  $\sin \alpha = 0,78$

**Jazda dołem**

**P = 1 w węźle 4:**

$$\begin{aligned} \sum Y_{\beta}^p &= 0 & V_B^4 + K_{5,10} \cdot \sin \alpha &= 0 \\ \frac{4}{6} + K_{5,10} \cdot 0,78 &= 0 & \rightarrow K_{5,10} &= -0,853 \end{aligned}$$

**P = 1 w węźle 5:**

$$\begin{aligned} \sum Y_{\beta}^p &= 0 & V_B^5 - 1 + K_{5,10} \cdot \sin \alpha &= 0 \\ \frac{5}{6} - 1 + K_{5,10} \cdot 0,78 &= 0 & \rightarrow K_{5,10} &= 0,213 \end{aligned}$$



Jazda górą

 $P = 1$  w węźle 10:

$$\sum Y_{\beta}^P = 0 \quad V_B^{10} + K_{5\ 10} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\frac{4}{6} + K_{5\ 10} \cdot 0,78 = 0 \quad \rightarrow \quad K_{5\ 10} = -0,853$$

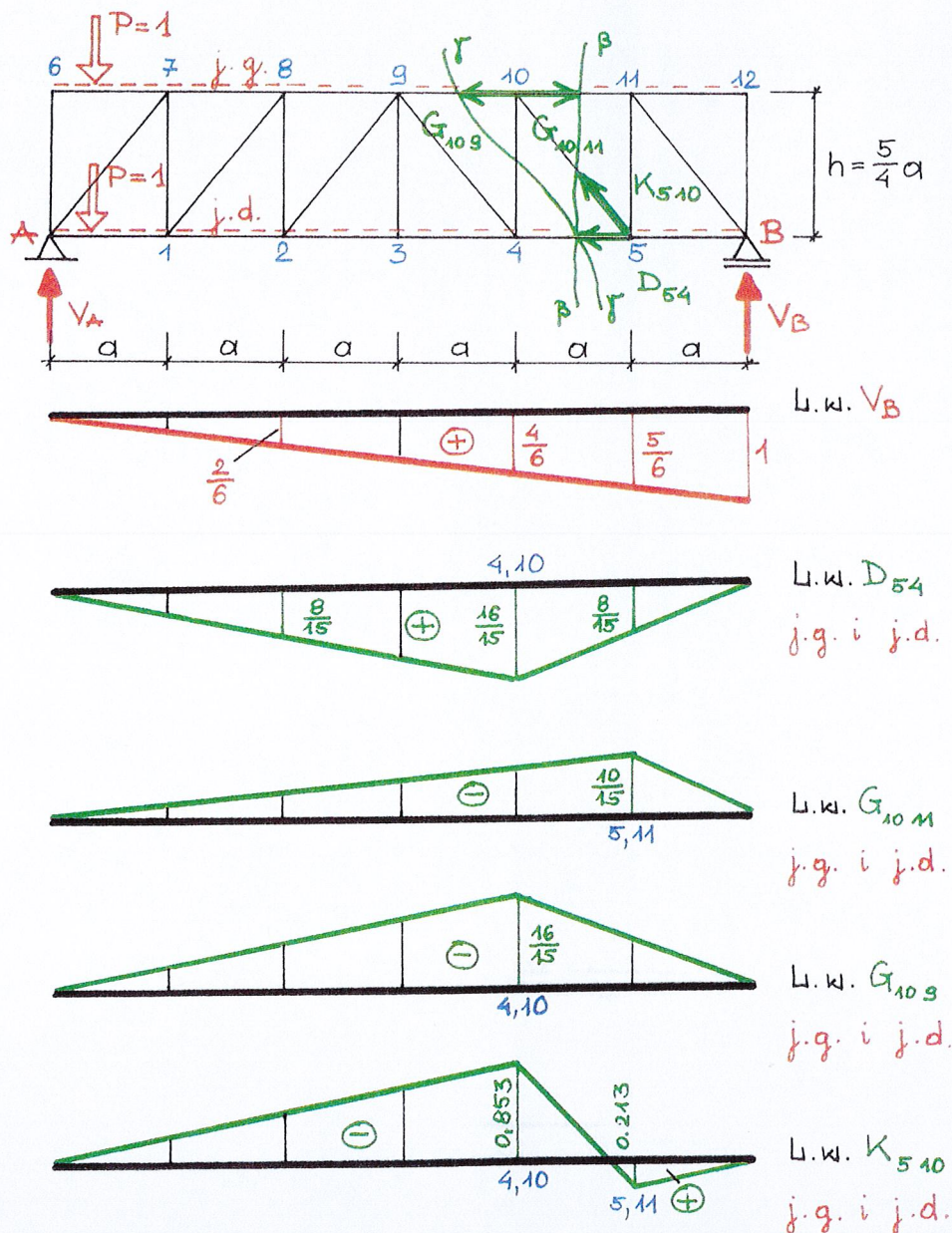
 $P = 1$  w węźle 11:

$$\sum Y_{\beta}^P = 0 \quad V_B^{11} - 1 + K_{5\ 10} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$\frac{5}{6} - 1 + K_{5\ 10} \cdot 0,78 = 0 \quad \rightarrow \quad K_{5\ 10} = 0,213$$

Jak widać, rzędne linii wpływu  $K_{5\ 10}$  nie zależą od tego, po którym pasie porusza się siła jednostkowa. W podobny sposób można zbudować linie wpływu sił osiowych w pozostałych prętach kratownicy.

Rys. 6.8





### 6.6. Obciążanie linii wpływu

Linie wpływu dla układów statycznie wyznaczalnych są ograniczone liniami prostymi, co wynika z liniowych związków łączących wielkości statyczne w tych układach z położeniem siły jednostkowej na jej torze poruszania się. W układach statycznie niewyznaczalnych linie wpływu są zawsze krzywoliniowe. Niezależnie od kształtu linii wpływu, postępując w sposób zwany **obciążaniem linii wpływu**, możemy obliczyć wartość wybranej wielkości statycznej, powstałej na skutek działania dowolnego obciążenia, a także określić położenia obciążenia, przy których wielkości statyczne w analizowanych przekrojach osiągają wartości ekstremalne.

Rzeczywiste obciążenie stałe lub zmienne stanowią zwykle siły skupione  $P$  oraz obciążenie rozłożone  $p(x)$ . Daną wielkość statyczną  $K$  otrzymuje się, odczytując z jej linii wpływu odpowiednie rzędne  $\eta$  i korzystając z następującego wzoru:

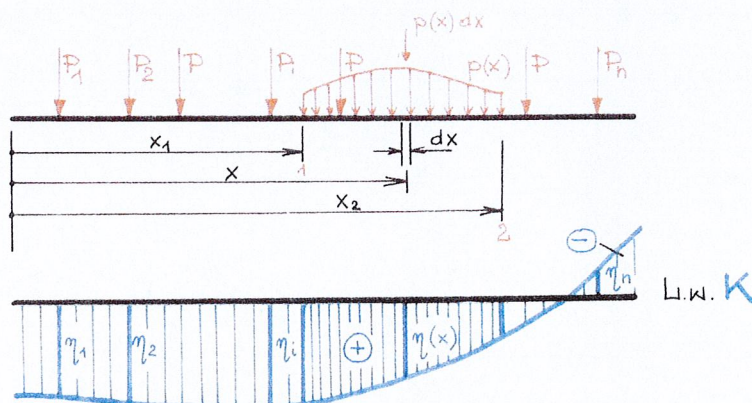
$$K = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i + \int_{x_1}^{x_2} p(x) \cdot \eta(x) dx \tag{6.16}$$

Ilustracją wzoru (6.16) jest rys. 6.9.

Wzór (6.16) i rys. 6.9 odnoszą się do najbardziej ogólnego przypadku wyznaczania wielkości  $K$  w układzie statycznie niewyznaczalnym (krzywoliniowa linia wpływu  $K$ ), powstałej wskutek działania m.in. obciążenia o zmiennej intensywności.

W praktyce, zamiast całki we wzorze (6.16) stosuje się uproszczoną metodę, polegającą na podziale linii wpływu i jej obciążenia  $p(x)$  na paski ograniczone liniami prostymi.

Rys. 6.9

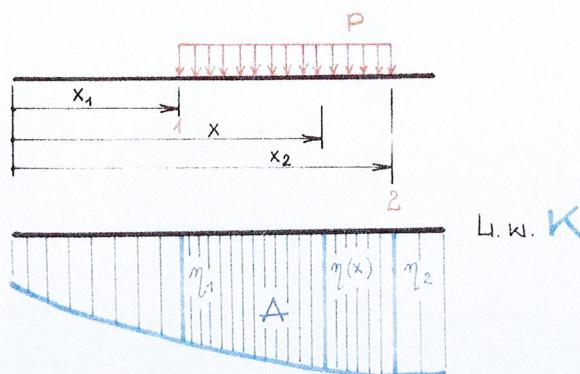


W przypadku, gdy mamy do czynienia z obciążeniem o stałej intensywności ( $p(x) = p$ ), wzór (6.16) przyjmuje postać:

$$K = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i + p \cdot A \tag{6.17}$$

w którym  $A$  oznacza pole wykresu linii wpływu ograniczone rzędnymi, odpowiadającymi początkowi i końcowi odcinka, na którym działa obciążenie równomiernie rozłożone (rys. 6.10). W układach statycznie wyznaczalnych linie wpływu dowolnych wielkości  $K$  są prostoliniowe, obliczanie ich rzędnych  $\eta_i$  pod siłami skupionymi oraz pól  $A$  pod obciążeniem równomiernie rozłożonym nie sprawia więc trudności.

Rys. 6.10



W praktyce podstawowe znaczenie ma wyznaczanie ekstremalnych wartości wielkości statycznych, jakie mogą powstać w czasie przejazdu obciążenia przez konstrukcję. Takie szczególne położenie obciążenia zmiennego, wywołujące największe



wartości wybranej wielkości  $K$  nosi nazwę położenia najniekorzystniejszego. Jeśli linia wpływu wielkości  $K$  zmienia znak, poszukiwać można dwóch najniekorzystniejszych położen obciążenia: jedno z nich powoduje powstanie największej dodatniej wartości  $K$ , drugie – największej ujemnej wartości tej wielkości. Gdy rzeczywiste obciążenie zmienne stanowią jedna lub dwie siły skupione oraz obciążenie równomiernie rozłożone, określenie najniekorzystniejszego położenia obciążenia jest na ogół oczywiste. W przypadku obciążenia złożonego z kilku sprzężonych sił skupionych, tzn. grupy sił o ściśle określonych wzajemnych odległościach (np. schematy ruchomych obciążeń taborem kolejowym i samochodowym), ekstremalne położenie tego obciążenia ustala się zwykle metodą kolejnych prób. Można tu także wykorzystać wskazówki i twierdzenia przedstawione w polecanej literaturze, a odnoszące się tylko do linii wpływu ograniczonych odcinkami prostymi.

Sposób praktycznego zastosowania wzoru (6.17) w układzie statycznie wyznaczalnym (prostoliniowa linia wpływu) pokażemy na następującym przykładzie. Wyznamy ekstremalne wartości siły tnącej w przekroju  $\alpha - \alpha$  belki swobodnie podpartej o rozpiętości  $l = 20,0$  m (rys. 6.11). Belka ta stanowi schemat statyczny każdego z dwóch stalowych dźwigarów jednotorowego mostu kolejowego. Na układ działają następujące obciążenia:  $g_1 = 6,5$  kN/m – ciężar własny konstrukcji,  $g_2 = 3,5$  kN/m – nałożony na konstrukcję ciężar nawierzchni typu S 60 oraz ruchome obciążenie taborem kolejowym klasy  $k = 1$  ( $\alpha_k = 1,1$ ). Współczynnik dynamiczny, obliczony zgodnie z normą PN-85/S-10030 „Obiekty mostowe. Obciążenia”, wynosi:

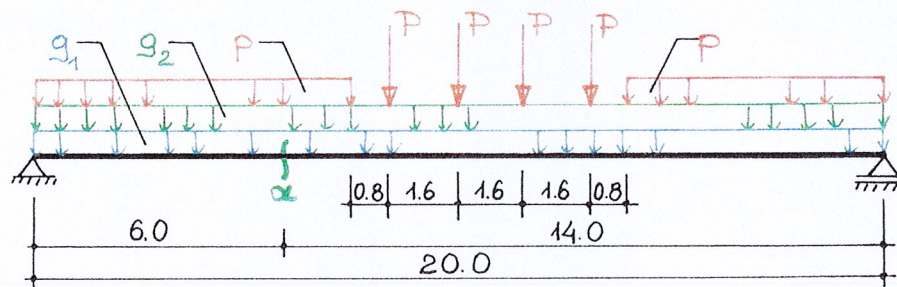
$$\varphi = \frac{1,44}{\sqrt{20,0} - 0,2} + 0,82 = 1,16$$

tym samym każdy z czterech nacisków osi  $P$  o rozstawie  $1,60$  m, położonych symetrycznie na odcinku  $6,40$  m oraz obciążenie równomiernie rozłożone  $p$  (rys. 6.11) mają wartość:

$$P = 1,1 \cdot 1,16 \cdot 250 \text{ kN} = 319 \text{ kN}$$

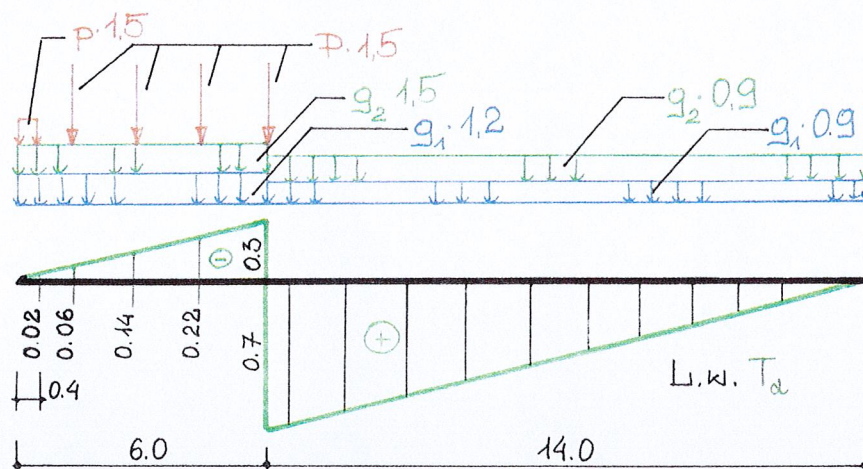
$$p = 1,1 \cdot 1,16 \cdot 80 \text{ kN/m} = 102 \text{ kN/m}$$

Rys. 6.11



W celu określenia największej ujemnej siły tnącej w przekroju  $\alpha - \alpha$ , oddalonym o  $6,0$  m od lewej podpory ustawiamy obciążenie tak, jak to pokazano na rys. 6.12, uwzględniając, zgodnie z normą, jego działanie obciążające lub odciążające poprzez zastosowanie współczynników obciążeń  $\gamma$ , których wartości podano na rys. 6.12 i 6.13 przy odpowiednich obciążeniach.

Rys. 6.12



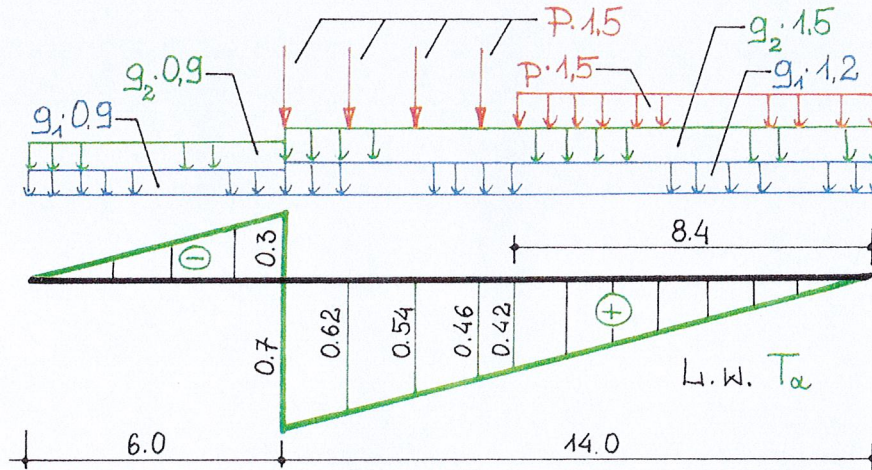
$$\max T^{(-)} = -1,5 \cdot 319 \cdot (0,3 + 0,22 + 0,14 + 0,06) - 1,5 \cdot 102 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,02 \cdot 0,4 -$$

$$- (1,2 \cdot 6,5 + 1,5 \cdot 3,5) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 6,0 + 0,9 \cdot (6,5 + 3,5) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 14,0 = -312,8 \text{ kN}$$



Natomiast największą dodatnią siłę tnącą w przekroju  $\alpha - \alpha$  otrzymamy, gdy belka zostanie obciążona w sposób przedstawiony na rys. 6.13.

Rys. 6.13



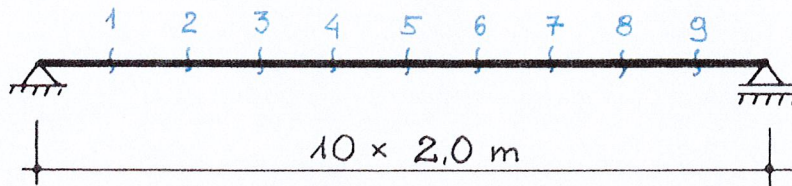
$$\begin{aligned} \max T^{(+)} &= 1,5 \cdot 319 \cdot (0,7 + 0,62 + 0,54 + 0,46) + 1,5 \cdot 102 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,42 \cdot 8,4 - \\ &- 0,9 \cdot (6,5 + 3,5) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,3 \cdot 6,0 + (1,2 \cdot 6,5 + 1,5 \cdot 3,5) \cdot \frac{1}{2} \cdot 0,7 \cdot 14,0 = 1435,9 \text{ kN} \end{aligned}$$

W obu przypadkach pierwszą z sił  $P$  ustawiamy nad największą dodatnią lub ujemną rzędną linii wpływu, tzn. nieskończenie blisko z prawej lub lewej strony przekroju  $\alpha - \alpha$ , a pozostałe siły oraz obciążenie  $p$  w odpowiednich odległościach nad dodatnią lub ujemną gałęzią linii wpływu.

### 6.7. Przykład obwiedni momentów zginających

W punkcie 6.1 przedstawiono pojęcie obwiedni siły wewnętrznej jako wykresu, którego rzędne otrzymujemy obliczając ekstremalną wartość siły wewnętrznej powstałej w przekroju odpowiadającym danej rzędnej. Wykorzystując wzór (6.17) i szukając najniekorzystniejszego położenia obciążenia (patrz przykład w punkcie 6.6) sporządzimy obwiednię momentów dla belki swobodnie podpartej (rys. 6.14), poddanej działaniu obciążenia przedstawionego na rys. 6.11. W tym celu wykorzystamy linie wpływu momentów w przekrojach 1, 2, 3, 4 i 5, obciążając je najniekorzystniej.

Rys. 6.14

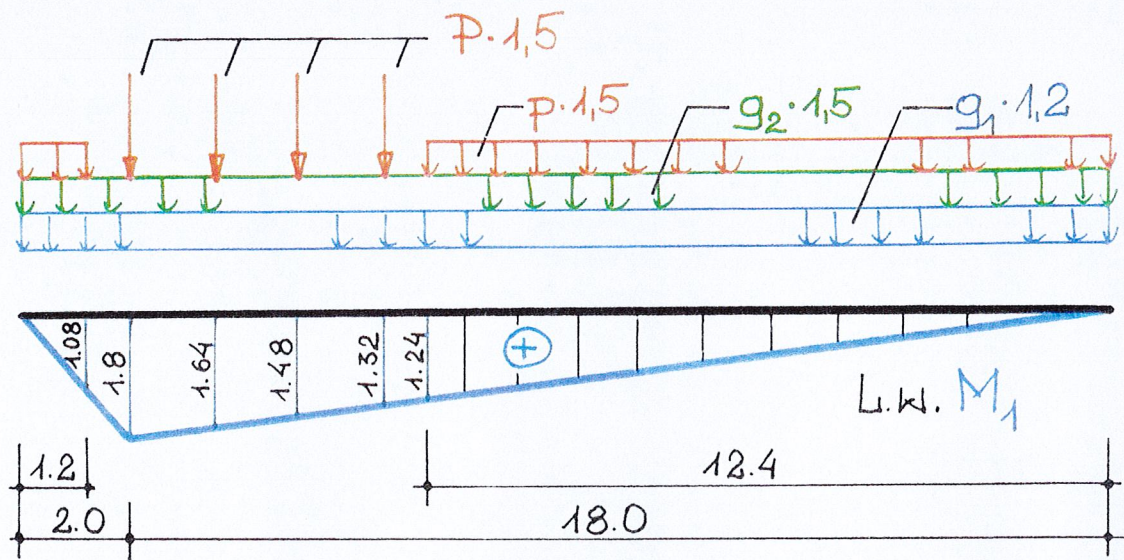


Układ jest symetryczny, nie ma więc potrzeby sporządzania linii wpływu dla pozostałych przekrojów 6, 7, 8 i 9. Linie wpływu momentów przekrojowych w belce swobodnie podpartej bez wsporników mają rzędne jednego znaku, określamy więc tylko największą dodatnią wartość momentu w danym przekroju. Sposób obciążania linii wpływu i wyznaczania rzędnych obwiedni ilustrują rys. 6.15 ÷ 6.19 oraz odnoszące się do nich obliczenia.

Linie wpływu momentów zginających obciążono najbardziej niekorzystnie, co Czytelnik może sam sprawdzić. W przypadku przekrojów 2, 3, 4 i 5 ekstremalną wartość momentu otrzymamy, ustawiając jedną z sił  $P$  nad największą rzędną, dwie siły  $P$  nad gałęzią o większych rzędnych, a czwartą siłę nacisku  $P$  nad drugą gałęzią linii wpływu. Największa wartość momentu  $M_1$  powstaje wtedy, gdy wszystkie cztery siły skupione  $P$  obciążają gałąź linii wpływu o większych rzędnych, przy czym pierwsza siła  $P$  stoi nad największą rzędną.

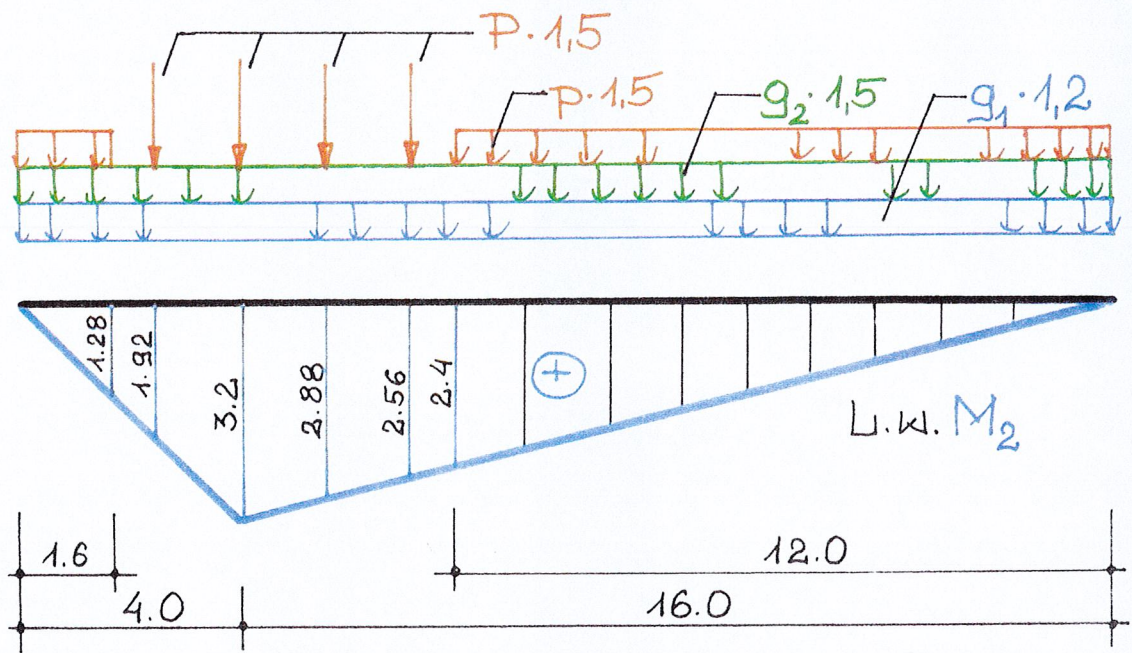


Rys. 6.15



$$\begin{aligned} \max M_1 &= 1,5 \cdot 319 \cdot (1,8 + 1,64 + 1,48 + 1,32) + 1,5 \cdot 102 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1,08 \cdot 1,2 + 1,24 \cdot 12,4) + \\ &+ (1,2 \cdot 6,5 + 1,5 \cdot 3,5) \cdot \frac{1}{2} \cdot 1,8 \cdot 20,0 = 4496,2 \text{ kNm} \end{aligned}$$

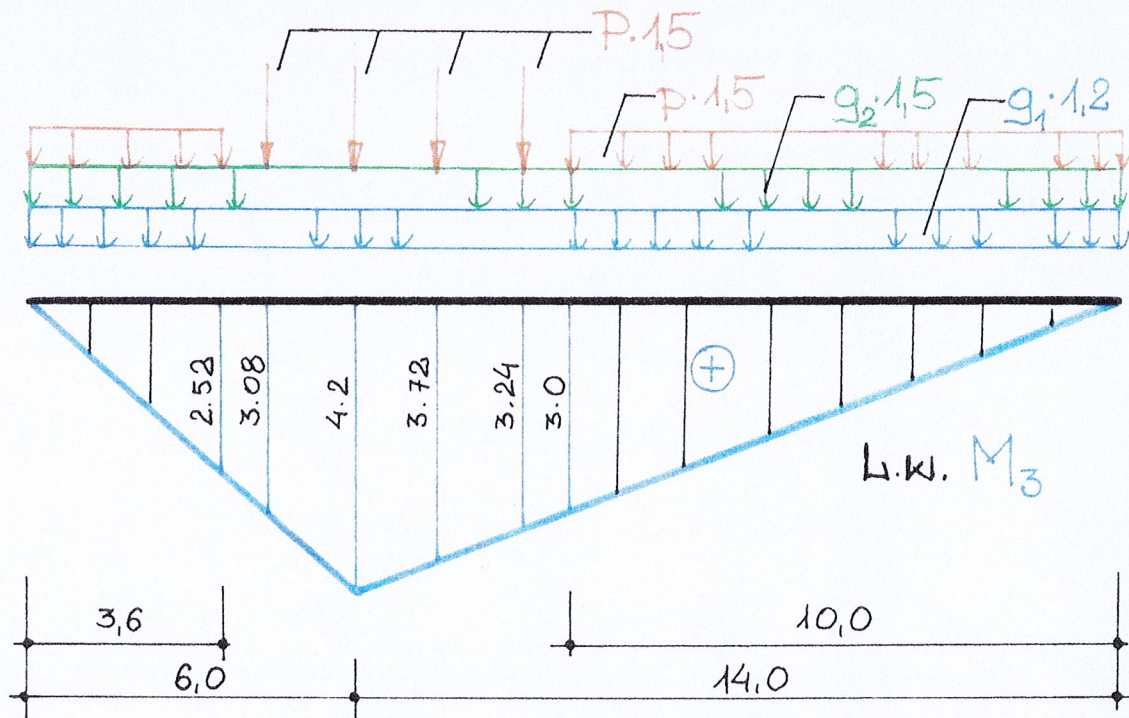
Rys. 6.16



$$\begin{aligned} \max M_2 &= 1,5 \cdot 319 \cdot (1,92 + 3,2 + 2,88 + 2,56) + 1,5 \cdot 102 \cdot \frac{1}{2} \cdot (1,28 \cdot 1,6 + 2,4 \cdot 12,0) + \\ &+ (1,2 \cdot 6,5 + 1,5 \cdot 3,5) \cdot \frac{1}{2} \cdot 3,2 \cdot 20,0 = 7830,5 \text{ kNm} \end{aligned}$$

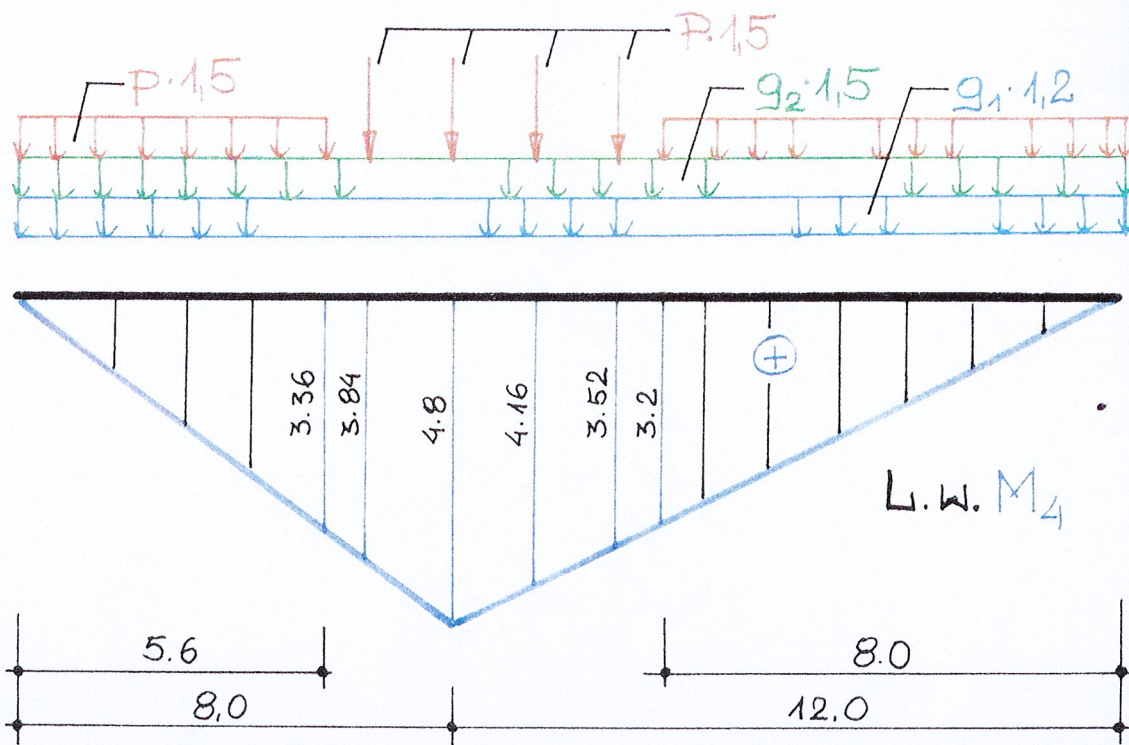


Rys. 6.17



$$\begin{aligned} \max M_3 &= 1,5 \cdot 319 \cdot (3,08 + 4,2 + 3,72 + 3,24) + 1,5 \cdot 102 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2,52 \cdot 3,6 + 3,0 \cdot 10,0) + \\ &+ (1,2 \cdot 6,5 + 1,5 \cdot 3,5) \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,2 \cdot 20,0 = 10351,0 \text{ kNm} \end{aligned}$$

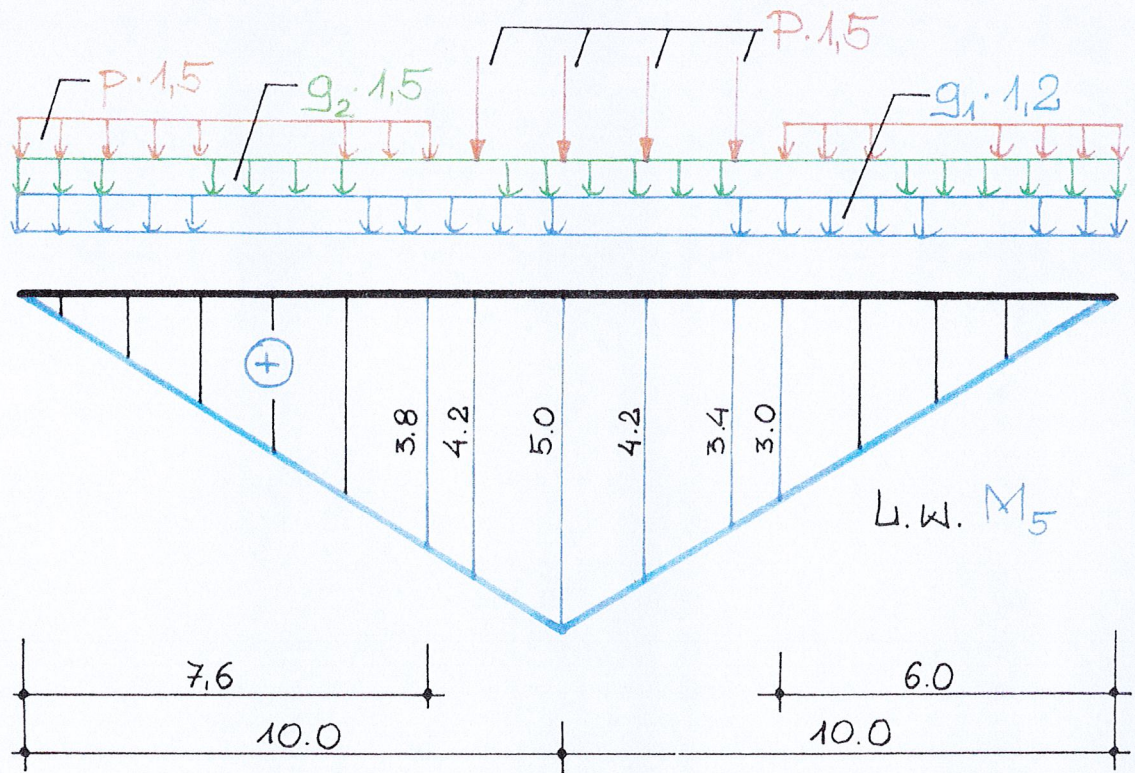
Rys. 6.18



$$\begin{aligned} \max M_4 &= 1,5 \cdot 319 \cdot (3,84 + 4,8 + 4,16 + 3,52) + 1,5 \cdot 102 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3,36 \cdot 5,6 + 3,2 \cdot 8,0) + \\ &+ (1,2 \cdot 6,5 + 1,5 \cdot 3,5) \cdot \frac{1}{2} \cdot 4,8 \cdot 20,0 = 11833,4 \text{ kNm} \end{aligned}$$



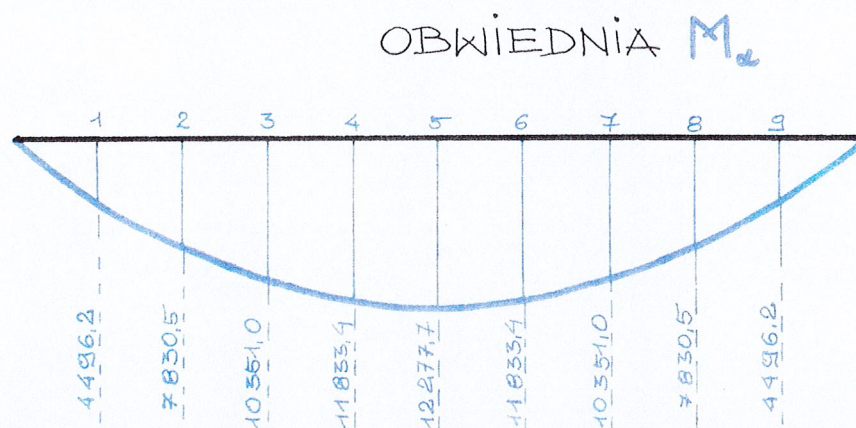
Rys. 6.19



$$\begin{aligned} \max M_5 &= 1,5 \cdot 319 \cdot (3,4 + 4,2 + 5,0 + 4,2) + 1,5 \cdot 102 \cdot \frac{1}{2} \cdot (3,0 \cdot 6,0 + 3,8 \cdot 7,6) + \\ &+ (1,2 \cdot 6,5 + 1,5 \cdot 3,5) \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,0 \cdot 20,0 = 12277,7 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Ekstremalne wartości  $\max M_1$  i  $\max M_5$ , odłożone jako dodatnie rzędne w odpowiednich przekrojach belki, pozwalają wykreślić w przybliżeniu obwiednię momentów zginających (rys. 6.20). Będzie to wykres tym dokładniejszy, im więcej linii wpływu momentów przekrojowych obciążymy. Oczywiście, można także zbudować równanie obwiedni, wykorzystując funkcję (6.9) lub (6.11) opisującą linię wpływu momentu w dowolnym przekroju. Otrzymamy wówczas funkcję zmiennej  $x_\alpha$  (lub  $x'_\alpha$ ). Sposób ten jest jednak pracochłonny i skomplikowany w przypadku kilku sił sprzężonych  $P$  oraz związanego z nimi obciążenia  $p$ , a także wówczas, gdy mamy do czynienia ze zmieniającymi znak liniami wpływu i konieczne jest uwzględnienie podanych w normie różnych współczynników  $\gamma_i$  – o charakterze obciążającym i odciążającym – dla ciężaru własnego i nałożonego.

Rys. 6.20



Ze względu na wyjątkowe znaczenie, jakie linie wpływu i obwiednie mają w mechanice obiektów inżynierskich, zalecamy Czytelnikowi zapoznanie się z innymi przykładami, które znaleźć można w podręcznikach: [3] (rozdział 3.) i [4] (rozdział 4.).