



Politechnika Wrocławska

MECHANIKA BUDOWLI

Wykład 8: STATECZNOŚĆ USTROJÓW PRĘTOWYCH

Prowadzący: dr inż. Olga Szyłko-Bigus



1. Wprowadzenie
2. Równanie różniczkowe
3. Wzory transformacyjne
4. Założenia MP w analizie stateczności
5. Równania kanoniczne w analizie stateczności
6. Wyznaczenie długości wyboczeniowej
7. Przykład obliczeniowy



Stateczność ustrojów prętowych.

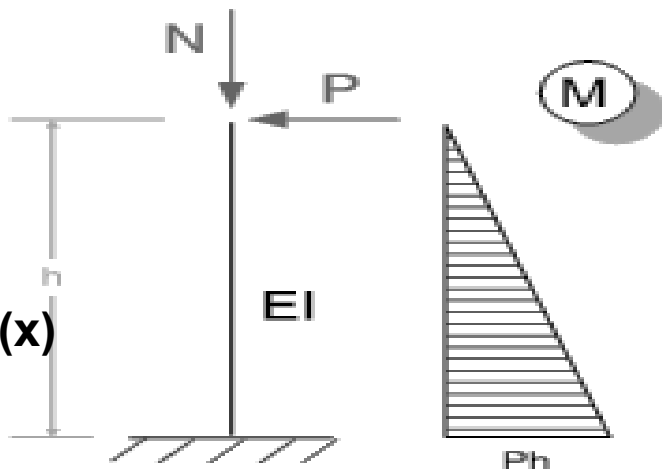
Wprowadzenie

- ❑ Zazwyczaj przy rozwiązywaniu układów prętowych rozpatrujemy układ w stanie nieodkształconym, czyli stosujemy zasadę zeszywnienia, która zakłada, że obciążenie nie powoduje przemieszczeń (odkształceń) ustroju.
- ❑ W takim przypadku siły osiowe nie mają wpływu na momenty zginające - zachodzi to dla prętów sztywnych i relatywnie małych sił osiowych.
- ❑ Jeżeli siły osiowe są znaczne a pręt jest wiotki, to należy odrzucić zasadę zeszywnienia i uwzględnić wpływ sił osiowych na powstawanie momentów zginających.
- ❑ W takim przypadku rozwiązujemy układ prętowy według teorii II-go rzędu.

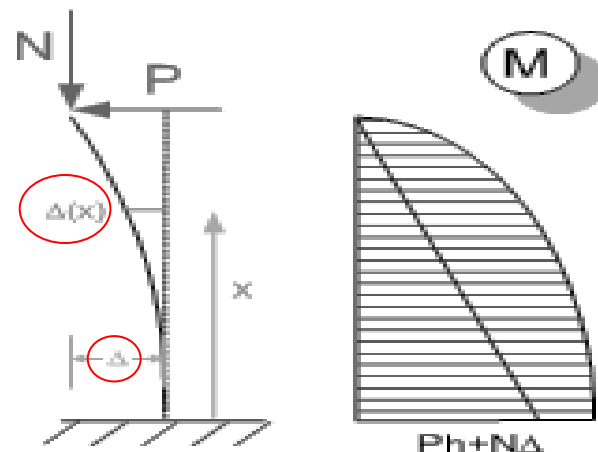
Według teorii I-go rzędu

I.
 $M(x) = P \cdot x$
 $M = P \cdot h$

II.
 $M(x) = P \cdot x + N \cdot \Delta(x)$
 $M = P \cdot h + N \cdot \Delta$



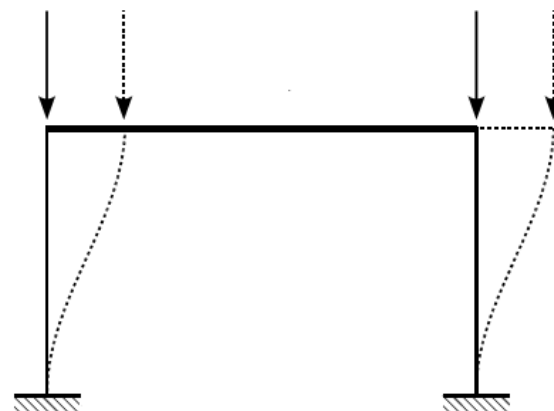
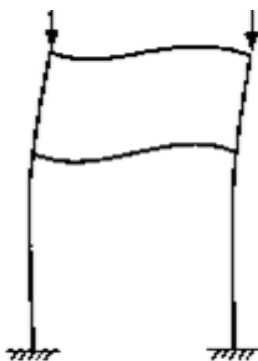
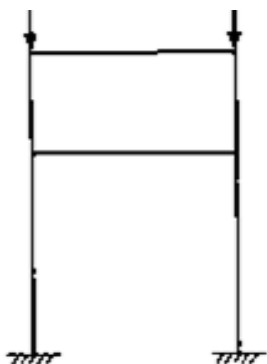
Według teorii II-go rzędu



Stateczność ustrojów prętowych.

Wprowadzenie

- ❑ Stan równowagi konstrukcji prętowych nazywamy statecznym, gdy konstrukcja powraca do pierwotnego stanu po usunięciu przyczyny, która spowodowała małe wychylenia ze stanu wyjściowego.
- ❑ Jeśli układ nie powraca po usunięciu przyczyny do stanu 0, to taki stan nazywamy niestatecznym stanem równowagi.



- ❑ Pręt ściskany przy pewnej wartości siły może się wyboczyć, a więc przyjąć postać zakrzywioną i wówczas w tym pręcie obok ściskania wystąpi również zginanie.
- ❑ Ponieważ dla wyboczonej konstrukcji oprócz naprężeń ściskających siła osiowa będzie powodować również zginanie, a więc naprężenia zginające, nastąpi szybciej zniszczenie konstrukcji poprzez wyczerpanie nośności ze względu nie tylko na ściskanie ale i zginanie.

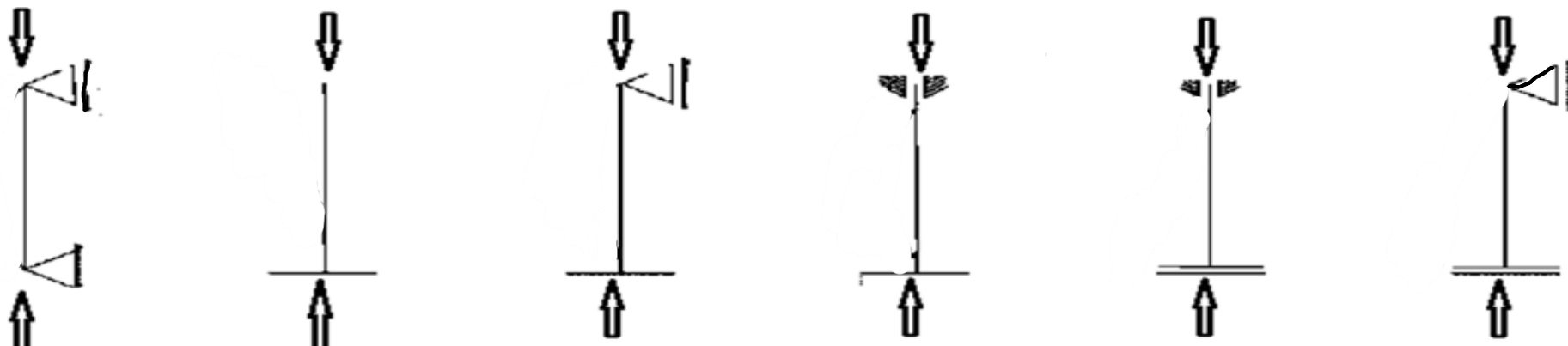


Założenia w analizie stateczności dla konstrukcji liniowo - sprężystych:

- ❖ małe przemieszczenia w stosunku do rozmiarów pręta tj. jego długości,
- ❖ liniowa zależność pomiędzy obciążeniem a przemieszczeniami,
- ❖ odrzucenie zasady zeszywnienia.

❑ Utrata stateczności ustroju prętowego następuje wtedy, kiedy siła ściskająca osiągnie taką wartość, że przemieszczenia konstrukcji będą narastały w sposób nieograniczony przy praktycznie niezmieniającej się wartości obciążenia.

❑ W analizie stateczności poszukujemy minimalnej wartości siły osiowej, przy której nastąpi utrata stateczności ustroju prętowego - jest ona nazywana siłą krytyczną P_{kr} (lub N_{kr}).

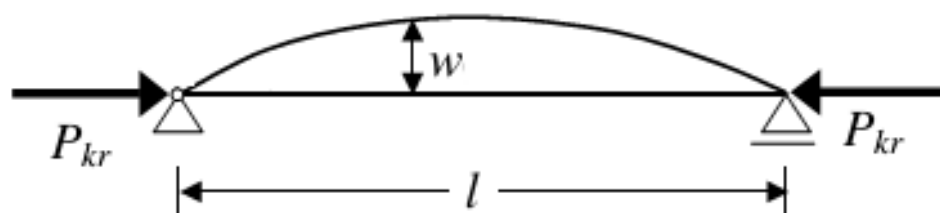




Stateczność ustrojów prętowych.

Wprowadzenie

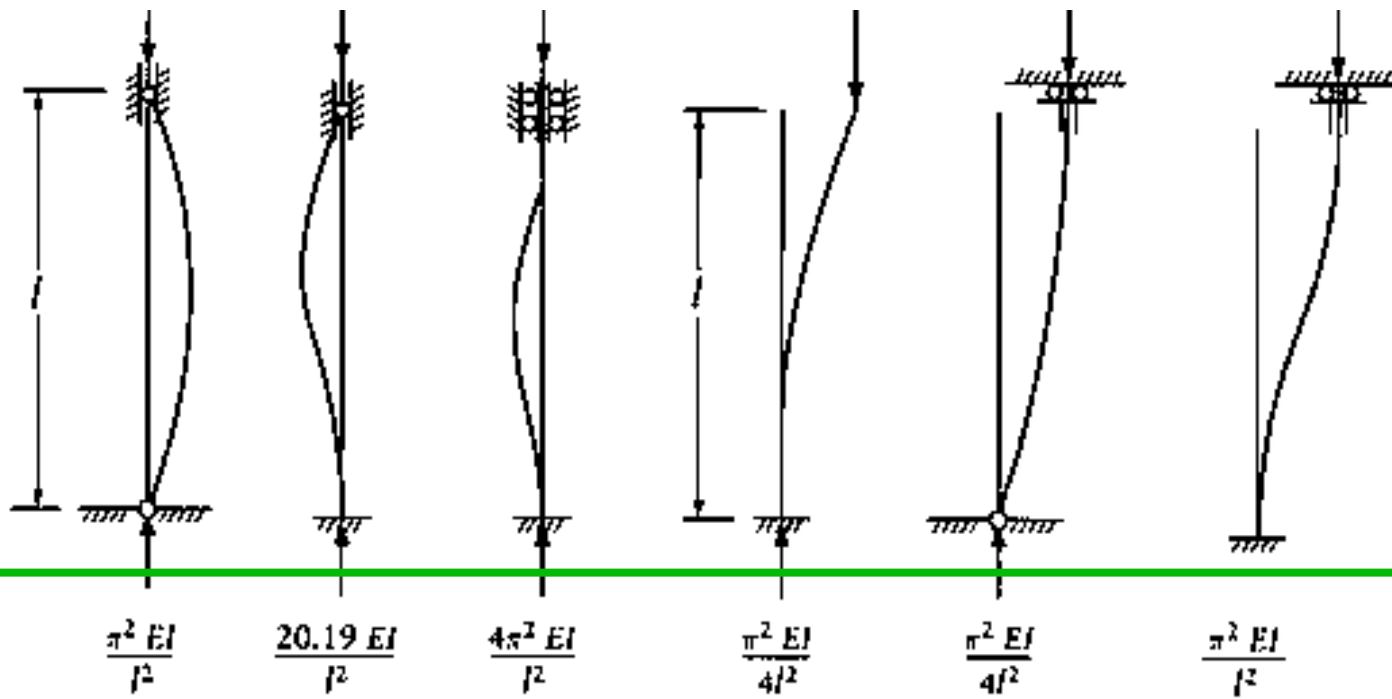
- Siła krytyczna P_{kr} to siła, przy której osiowo ściskany pręt znajduje się w **stanie równowagi obojętnej**, czyli po usunięciu siły ściskającej pręt pozostanie krzywoliniowy.
- Jeżeli siła ściskająca jest mniejsza niż siła krytyczna dla danego pręta, to pręt powraca do swojej pierwotnej postaci tj. do **stanu równowagi statecznej**.



- Siła krytyczna

$$N^{kr} = \frac{\pi^2 \cdot EJ}{(L^w)^2}$$

gdzie EJ (sztywność)
i L^w (długość
wyboczeniowa)





Stateczność ustrojów prętowych.

Wprowadzenie

- ❑ W projektowaniu konstrukcji nieodzowna jest znajomość wielkości siły krytycznej, przy której nastąpi wyboczenie konstrukcji jak i długości wyboczeniowych prętów L_w , z których zbudowana jest konstrukcja.
- ❑ Schematy prętów o różnych warunkach brzegowych, dla których wyznaczono długości wyboczeniowe prętów L_w pokazano poniżej:

typ pręta

μ

0.5

0.7

1

2

1

$$L^w = \mu \cdot L$$



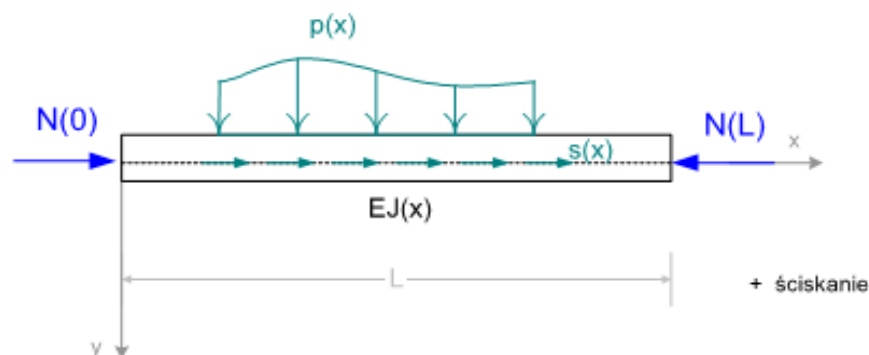


Stateczność ustrojów prętowych.

Równanie różniczkowe pręta

Jak wyznacza się siłę krytyczną w pręcie podanemu obciążeniu osiowemu?

- Rozpatrujemy pręt prosty o sztywności EJ ściskany siłą N i obciążony obciążeniem $p(x)$ jak poniżej. Jego równanie różniczkowe jest postaci:



$$EJ \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + N \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = p(x)$$

- Dalej będziemy zajmować się problemem stateczności tj. gdy $p(x)=0$ jak poniżej. Jego równanie różniczkowe jest postaci:



$$EJ \frac{d^4 w(x)}{dx^4} + N \frac{d^2 w(x)}{dx^2} = 0$$

- Rozwiązanie równania pręta w postaci równania różniczkowego:


$$w(\xi) = C_0 + C_1 \xi + C_2 \sin \lambda \xi + C_3 \cos \lambda \xi$$




Stateczność ustrojów prętowych.

Równanie różniczkowe pręta


gdzie stałe C_0 , C_1 , C_2 i C_3 są wyliczane dla różnych warunków brzegowych



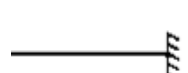
$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0, \quad (M = 0)$$



$$\frac{dw}{d\xi} = 0, \quad \frac{d^3 w}{d\xi^3} = 0, \quad (\varphi = 0, T = 0)$$

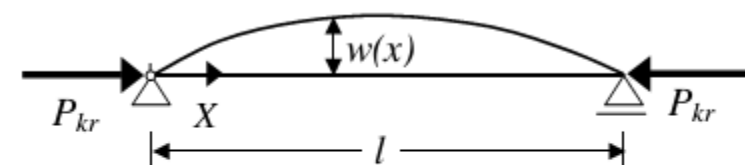


$$w = 0, \quad \frac{dw}{d\xi} = 0, \quad (\varphi = 0)$$



$$\frac{d^2 w}{d\xi^2} = 0, \quad \frac{d^3 w}{d\xi^3} + \lambda^2 \frac{dw}{d\xi} = 0, \quad (M = 0, T = 0)$$

□ Dla belki swobodnie podpartej mamy:

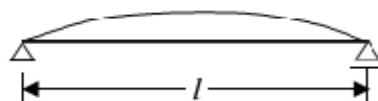


$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} + \frac{P_{kr}}{EJ_{min}} w(x) = 0$$

Każdej wartości siły krytycznej odpowiada inna forma deformacji pręta, inna postać wyboczonego pręta.

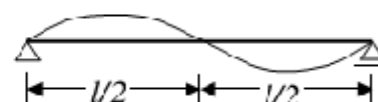
$$k^2 = \frac{P_{kr}}{EJ_{min}} \quad w(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad w(0) = 0 \quad \text{oraz} \quad w(l) = 0$$

$$n = 1 \quad P_{kr,1} = \frac{\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad w(x) = A \sin \frac{\pi}{l} x$$

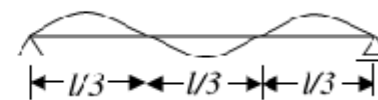


Za siłę krytyczną P_{kr} uznamy tę najmniejszą, odpowiadającą $n=1$.

$$n = 2 \quad P_{kr,2} = \frac{4\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad w(x) = A \sin \frac{2\pi}{l} x$$



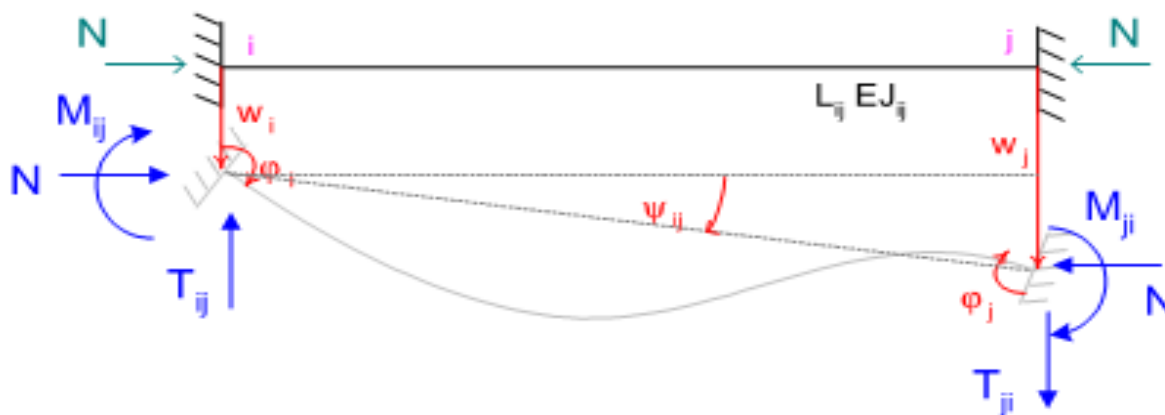
$$n = 3 \quad P_{kr,3} = \frac{9\pi^2 EJ_{min}}{l^2} \quad w(x) = A \sin \frac{3\pi}{l} x$$



Stateczność ustrojów prętowych.

Wzory transformacyjne

- ❑ Problem stateczności złożonych układów prętowych może być rozpatrywany tylko przy zastosowaniu odpowiednich metod obliczeniowych jak np. **metoda przemieszczeń**.
- ❑ Aby zastosować metodę przemieszczeń w zakresie stateczności zachodzi potrzeba wyprowadzenia wzorów transformacyjnych podobnie jak dla zadania statycznego z uwzględnieniem tylko siły osiowej.
- ❑ Rozpatrzmy przemieszczenie końców pręta ij o sztywności EJ_{ij} oraz długości L_{ij} . Rozpatrujemy przemieszczenia końca pręta ściskanego.





Stateczność ustrojów prętowych.

Wzory transformacyjne

❑ Wzory transformacyjne dla pręta prostego wg teorii rzędu 2-go

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o, \quad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o, \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o$$

gdzie a_{ij} , a_{ji} , $b_{ii} = b_{jj}$, $c_{ii} = a_{ii} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji} - \lambda_{ij}^2$ (lub $+\bar{\lambda}_{ij}^2$) są funkcjami parametrów $\lambda_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{ij}|}{EI_{ij}}}$ (dla prętów ściskanych) lub $\bar{\lambda}_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} N_{ij}}{EI_{ij}}}$ (dla prętów rozciąganych),

$$\lambda_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{ij}|}{EI_{ij}}} \quad \bar{\lambda}_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} N_{ij}}{EI_{ij}}}$$

Parametry

pręta ij zależą od siły osiowej N_{ij} w pręcie, sztywności na zginanie EJ_{ij} pręta oraz długości pręta L_{ij} .

❑ Powyższe parametry dla wybranych typów prętów o stałej sztywności EJ i stałej wartości siły wewnętrznej w pręcie są zgrupowane ze względu na:

- efekt wywołany siłą osiową tj. ściskanie, rozciąganie (lub siła zerowa),
- typ podparcia pręta (warunki brzegowe).



Stateczność ustrojów prętowych.

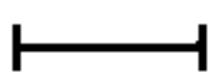
Wzory transformacyjne

- Współczynniki do wzorów transformacyjnych dla pręta prostego wg teorii rzędu 1-go (pręty zerowe) i 2-go (ściskane i rozciągane)

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	c_{ij}	c_{ji}	$d_{ij} = d_{ji}$
		$\alpha(\lambda)$	$\alpha(\lambda)$	$\beta(\lambda)$	$\vartheta(\lambda)$	$\vartheta(\lambda)$	$\delta(\lambda)$
		4	4	2	6	6	12
		$\alpha(\bar{\lambda})$	$\alpha(\bar{\lambda})$	$\beta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\delta(\bar{\lambda})$
		$\alpha'(\lambda)$	0	0	$\alpha'(\lambda)$	0	$\delta'(\lambda)$
		3	0	0	3	0	3
		$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	0	$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	$\delta'(\bar{\lambda})$
		$\alpha''(\lambda)$	$\alpha''(\lambda)$	$\beta''(\lambda)$	0	0	0
		1	1	-1	0	0	0
		$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\beta''(\bar{\lambda})$	0	0	0
		$\alpha'''(\lambda)$	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		$\alpha'''(\bar{\lambda})$	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	$-\lambda^2$
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	λ^2



□ Wzory transformacyjne w szczegółowej postaci dla prętów ściskanych:



$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\alpha(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} + \beta(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ji} - v(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o(\lambda_{ij}),$$

$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\alpha(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ji} + \beta(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} - v(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o(\lambda_{ij}),$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-v(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} - v(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ji} + \delta(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o(\lambda_{ij}),$$

$$V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-v(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} - v(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ji} + \delta(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o(\lambda_{ij}),$$



$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\alpha^*(\lambda_{ij}) \varphi_{ij} - \beta^*(\lambda_{ij}) \varphi_{ji}) + M_{ij}^o(\lambda_{ij}),$$

$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\alpha^*(\lambda_{ij}) \varphi_{ji} - \beta^*(\lambda_{ij}) \varphi_{ij}) + M_{ji}^o(\lambda_{ij}), \quad V_{ij} = V_{ij}^o, \quad V_{ji} = 0,$$



$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \alpha^*(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} + M_{ij}^o(\lambda_{ij}), \quad M_{ji} = 0, \quad V_{ij} = V_{ij}^o(\lambda_{ij}), \quad V_{ji} = 0$$




$$M_{ij} = 0, \quad M_{ji} = 0, \quad V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-\lambda_{ij}^2 \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o(\lambda_{ij}), \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-\lambda_{ij}^2 \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o(\lambda_{ij}).$$



Stateczność ustrojów prętowych.

Wzory transformacyjne

□ Wzory transformacyjne w szczegółowej postaci dla prętów ściskanych:




$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\alpha'(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} - \alpha'(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o(\lambda_{ij}), \quad M_{ji} = 0,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-\alpha'(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} + \delta'(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o(\lambda_{ij}), \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-\alpha'(\lambda_{ij}) \cdot \varphi_{ij} + \delta'(\lambda_{ij}) \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o(\lambda_{ij})$$


□ Funkcje określające parametry we wzorach transformacyjnych:

- dla pręta "sztywno-przegubowego"

- ściskanego 


$$\alpha'(\lambda) = \alpha(\lambda) - \frac{\beta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \lambda^2 \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},$$

$$\delta'(\lambda) = \delta(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \alpha'(\lambda) - \lambda^2 = \lambda^3 \cdot \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},$$


- rozciąganego 

$$\alpha'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{sh \bar{\lambda}}{\bar{\lambda} \cdot ch \bar{\lambda} - sh \bar{\lambda}}, \quad \delta'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{ch \bar{\lambda}}{\bar{\lambda} \cdot ch \bar{\lambda} - sh \bar{\lambda}},$$

- dla wspornika

- ściskanego 

$$\alpha''(\lambda) = -\lambda \cdot \operatorname{tg} \lambda,$$

- rozciąganego 

$$\alpha''(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \operatorname{th} \bar{\lambda}.$$

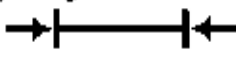


Stateczność ustrojów prętowych.

Wzory transformacyjne

□ Funkcje określające parametry we wzorach transformacyjnych:


- dla pręta "sztywno-sztywnego"

- ściskanego 

$$\alpha(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda}, \quad \beta(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\lambda - \sin \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

$$\vartheta(\lambda) = \alpha(\lambda) + \beta(\lambda) = \lambda^2 \cdot \frac{1 - \cos \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$


$$\delta(\lambda) = 2 \cdot \vartheta(\lambda) - \lambda^2 = \lambda^3 \cdot \frac{\sin \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

- rozciąganego 

$$\alpha(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \frac{\operatorname{sh} \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \cdot \operatorname{ch} \bar{\lambda}}{2 \cdot (\operatorname{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \operatorname{sh} \bar{\lambda}}, \quad \beta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \frac{\bar{\lambda} - \operatorname{sh} \bar{\lambda}}{2 \cdot (\operatorname{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \operatorname{sh} \bar{\lambda}},$$


$$\vartheta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{1 - \operatorname{ch} \bar{\lambda}}{2 \cdot (\operatorname{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \operatorname{sh} \bar{\lambda}}, \quad \delta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{-\operatorname{sh} \bar{\lambda}}{2 \cdot (\operatorname{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \operatorname{sh} \bar{\lambda}},$$

- dla pręta "sztywno-łyżwowego"

- ściskanego 

$$\alpha^*(\lambda) = \alpha(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\delta(\lambda)} = \alpha(\lambda) \cdot \frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} = \lambda \cdot \operatorname{ctg} \lambda,$$

$$\beta^*(\lambda) = \beta(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\delta(\lambda)} = -\frac{\lambda}{\sin \lambda},$$

- rozciąganego 

$$\alpha^*(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \operatorname{cth} \bar{\lambda},$$



Stateczność ustrojów prętowych.

Wzory transformacyjne

□ Podsumowanie

Wzory transformacyjne dla dowolnego pręta prostego można przedstawić w postaci :

$$M_{ij} = \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o$$

$$M_{ji} = \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o$$

$$T_{ij} = \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ij} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + T_{ij}^o$$

$$T_{ji} = \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ij} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + T_{ji}^o$$

gdzie $a_{ij}, a_{ji}, b_{ij} = b_{ji}, c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}, c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}, d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji} - \lambda_{ij}^2$ (lub $\bar{\lambda}_{ij}^2$) **sa funkcjami** parametrów λ_{ij} lub $\bar{\lambda}_{ij}$ zależnymi od typu pręta. W teorii I-go rzędu są to liczby.

Oznaczenia tych funkcji dla wybranych typów prętów o stałej sztywności

ściskanych - teoria II-go rzędu

nie obciążonych - teoria I-go rzędu

rozciąganych - teoria II-go rzędu

zestawiono w tabeli , a określenie tych funkcji stanowią związki .



Stateczność ustrojów prętowych.

Wzory transformacyjne

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	c_{ij}	c_{ji}	$d_{ij} = d_{ji}$
		$\alpha(\lambda)$	$\alpha(\bar{\lambda})$	$\beta(\lambda)$	$\vartheta(\lambda)$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\delta(\lambda)$
		4	4	2	6	6	12
		$\alpha(\bar{\lambda})$	$\alpha(\bar{\lambda})$	$\beta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\delta(\bar{\lambda})$
		$\alpha'(\lambda)$	0	0	$\alpha'(\lambda)$	0	$\delta'(\lambda)$
		3	0	0	3	0	3
		$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	0	$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	$\delta'(\bar{\lambda})$
		$\alpha''(\lambda)$	$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\beta''(\lambda)$	0	0	0
		1	1	-1	0	0	0
		$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\beta''(\bar{\lambda})$	0	0	0
		$\alpha'''(\lambda)$	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		$\alpha'''(\bar{\lambda})$	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	$-\lambda^2$
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	$\bar{\lambda}^2$

Z przedstawionych związków wpływ rzędu 2-go może być wyeliminowany przez przyjęcie $N_{ij} = \lambda_{,ij} = \bar{\lambda}_{,ij} = 0$ co sprowadza parametry a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ do współczynników liczbowych. Wartości tych współczynników dla wybranych typów prętów zestawiono także w tabeli.

- dla pręta "sztywno-sztywnego"

- ściskanego

$$\alpha(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda}, \quad \beta(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\lambda - \sin \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

$$\vartheta(\lambda) = \alpha(\lambda) + \beta(\lambda) = \lambda^2 \cdot \frac{1 - \cos \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

$$\delta(\lambda) = 2 \cdot \vartheta(\lambda) - \lambda^2 = \lambda^3 \cdot \frac{\sin \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda}$$

- rozciąganego

$$\alpha(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \frac{\text{sh} \bar{\lambda} - \bar{\lambda} \cdot \text{ch} \bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh} \bar{\lambda}}, \quad \beta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \frac{\bar{\lambda} - \text{sh} \bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh} \bar{\lambda}},$$

$$\vartheta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{1 - \text{ch} \bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh} \bar{\lambda}}, \quad \delta(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{\sin \bar{\lambda}}{2 \cdot (\text{ch} \bar{\lambda} - 1) - \bar{\lambda} \cdot \text{sh} \bar{\lambda}},$$

- dla pręta "sztywno-przegubowego"

- ściskanego

$$\alpha'(\lambda) = \alpha(\lambda) - \frac{\beta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \lambda^2 \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},$$

$$\delta'(\lambda) = \delta(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \alpha'(\lambda) - \lambda^2 = \lambda^3 \cdot \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},$$

- rozciąganego

$$\alpha'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^2 \cdot \frac{\text{sh} \bar{\lambda}}{\bar{\lambda} \cdot \text{ch} \bar{\lambda} - \text{sh} \bar{\lambda}}, \quad \delta'(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda}^3 \cdot \frac{\text{ch} \bar{\lambda}}{\bar{\lambda} \cdot \text{ch} \bar{\lambda} - \text{sh} \bar{\lambda}}$$

- dla pręta "sztywno-łyżwowego"

- ściskanego

$$\alpha''(\lambda) = \alpha(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\delta(\lambda)} = \alpha(\lambda) \cdot \frac{\delta'(\lambda)}{\delta(\lambda)} = \lambda \cdot \text{ctg} \lambda,$$

$$\beta''(\lambda) = \beta(\lambda) - \frac{\vartheta^2(\lambda)}{\delta(\lambda)} = -\frac{\lambda}{\sin \lambda},$$

- rozciąganego

$$\alpha''(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \text{cth} \bar{\lambda}, \quad \beta''(\bar{\lambda}) = -\frac{\bar{\lambda}}{\text{sh} \bar{\lambda}},$$

- dla wspornika

- ściskanego

$$\alpha'''(\lambda) = -\lambda \cdot \text{tg} \lambda,$$

- rozciąganego






$$\alpha'''(\bar{\lambda}) = \bar{\lambda} \cdot \text{th} \bar{\lambda}.$$



Stateczność ustrojów prętowych.

Założenia MP w analizie stateczności

- ❑ W analizie stateczności obciążenie konstrukcji, jakie rozpatruje się ze względu na stateczność, stanowią tylko siły osiowe.
- ❑ Aby przeprowadzić analizę stateczności dowolnie obciążonego układu konstrukcyjnego musimy wyznaczyć siły osiowe np. Metodą Elementów Skończonych albo Metodą Przemieszczeń.
- ❑ Pręty w układzie konstrukcyjnym obciążamy siłami osiowymi, a każdemu prętowi w układzie przyporządkowujemy typ obliczeniowy pręta, dla którego dysponujemy wzorami transformacyjnymi wg teorii II-go rzędu.

-  **pręt sztywno - sztywny**
-  **pręt sztywno - przegubowy**
-  **pręt sztywno - łożwa**
-  **pręt sztywno - swobodny**
-  **pręt przegubowo - przegubowy**



Stateczność ustrojów prętowych.

Założenia MP w analizie stateczności

- ❑ Założenia w analizie stateczności przy wykorzystaniu metody przemieszczeń MP:
- ❖ Dysponujemy wzorami transformacyjnymi dla prętów prostych, pryzmatycznych o stałej sztywności na całej długości pręta i stałej sile osiowej. Przynajmniej jeden pręt musi być ściskany.
- ❖ Pręty o zmiennej sztywności będziemy dzielić na odcinki o stałej sztywności (można wyprowadzić wzory transformacyjne i dla niektórych przypadków istnieją takie wzory).
- ❖ Jeżeli siła osiowa jest zmienna na długości pręta, to dzielimy pręt na odcinki, gdzie siła osiowa jest stała na długości.
- ❖ Dla siły osiowej równej zero ($N=0$) obowiązują wzory transformacyjne klasycznej metody przemieszczeń w zadaniach statycznych (podane na wykładzie nt. metody przemieszczeń).
- ❖ Dla prętów rozciąganych można przyjmować, że siła osiowa jest równa zero ($N=0$), co prowadzi do rozwiązań przybliżonych, ale daje bezpieczniejsze oszacowanie rozwiązania.



Stateczność ustrojów prętowych.

Założenia MP w analizie stateczności

☐ Zadanie analizy stateczności:

- określenie mnożnika obciążenia krytycznego, przy której następuje utrata stateczności tj. wyboczenie układu prętowego
- określenie długości wyboczeniowych wszystkich prętów.

☐ Przyjmuje się założenie o nieodkształcalności osiowej prętów, ale należy pamiętać, że układ podstawowy metody przemieszczeń w przypadku badania stateczności może się różnić od układu podstawowego metody przemieszczeń w zagadnieniu statycznym.

☐ Ocena stateczności konstrukcji:

- Lokalna utrata stateczności dla pojedynczego pręta,
- Globalna utrata stateczności dla całego ustroju konstrukcyjnego.



❖ Algorytm przeprowadzenia analizy stateczności konstrukcji Metodą Przemieszczeń

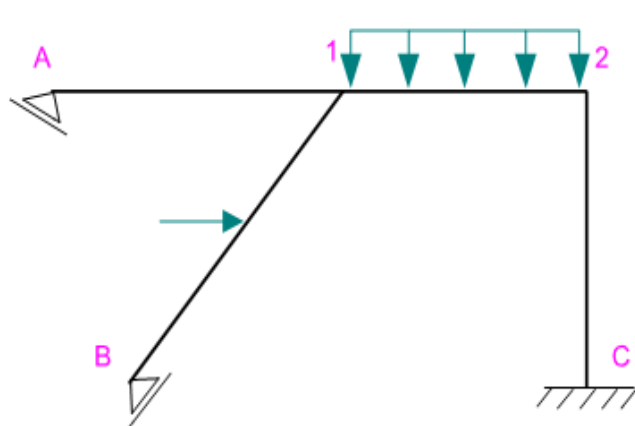
1. Określenie sił osiowych w prętach oraz wyznaczenie mnożnika krytycznego obciążenia i parametru λ ,
2. Wyznaczenie SGN układu i przyjęcie układu podstawowego z uwzględnieniem rozkładu sił osiowych na prętach i sztywności prętów,
3. Ułożenie równań kanonicznych MP dla analizy stateczności,
4. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążeń w postaci wymuszeń kinematycznych obrotów i przesuwów na kierunkach zadanych więzi w zależności od wyznaczonego SGN i przyjętego układu podstawowego,
5. Wyznaczenie współczynników macierzy sztywności,
6. Rozwiązanie równania stateczności i wyznaczenie krytycznego mnożnika obciążenia α_{cr} ,
7. Obliczenie współczynników długości wyboczeniowych i długości wyboczeniowych dla wszystkich prętów,
8. Wyznaczenie wektora własnego odpowiadającego pierwszej formie wyboczeniowej

Stateczność ustrojów prętowych.

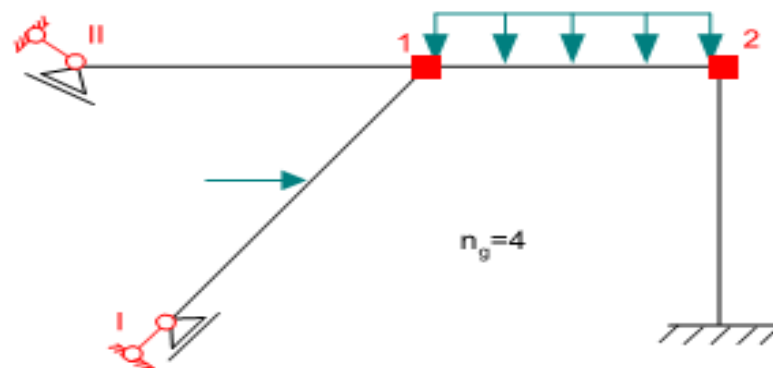
Założenia MP w analizie stateczności

□ Analiza stateczności w ujęciu metody przemieszczeń

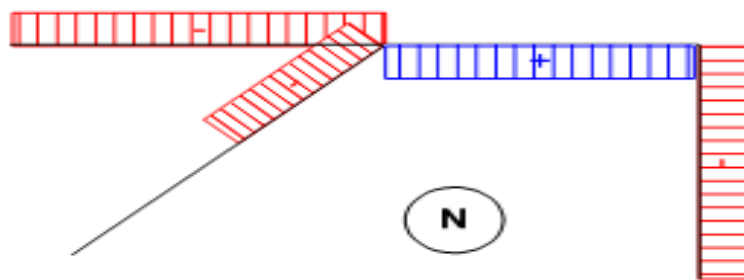
1. Układ rzeczywisty i podstawowy metody przemieszczeń konstrukcji obciążonej zadanymi siłami, dla której chcemy przeprowadzić analizę stateczności. Sztywność prętów EI .



$$n_g = 2 + 2 = 4!$$



2. Wykres sił osiowych w układzie rzeczywistym uzyskany z rozwiązania statycznego układu rzeczywistego np. metodą przemieszczeń lub za pomocą MES



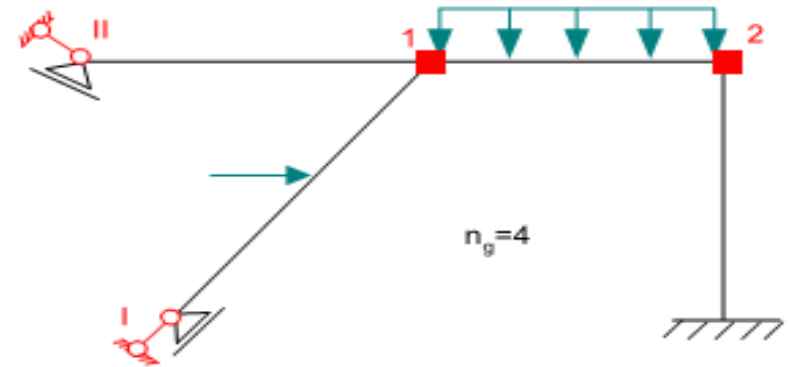
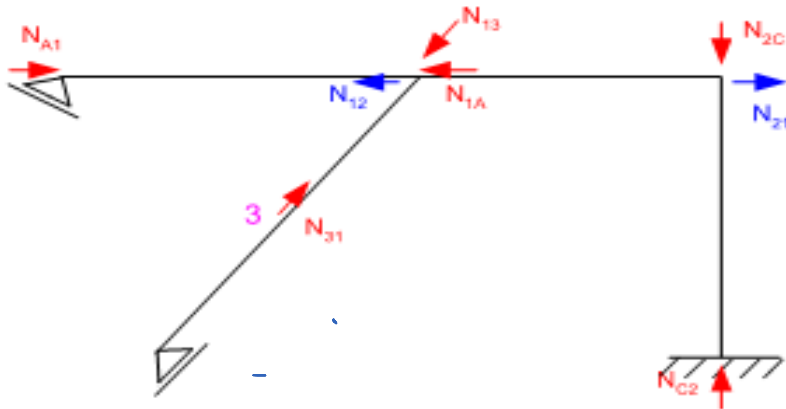
- w kolorze czerwonym
siły ściskające

+ w kolorze niebieskim
siły rozciągające

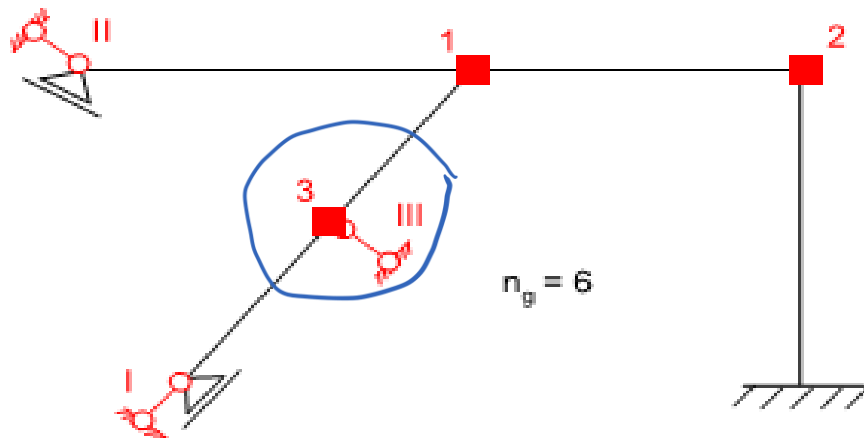
Stateczność ustrojów prętowych.

Założenia MP w analizie stateczności

3. Układ obliczeniowy rzeczywisty dla analizy stateczności z oznaczeniem sił osiowych



4. Zaktualizowany układ podstawowy z uwzględnieniem sił osiowych



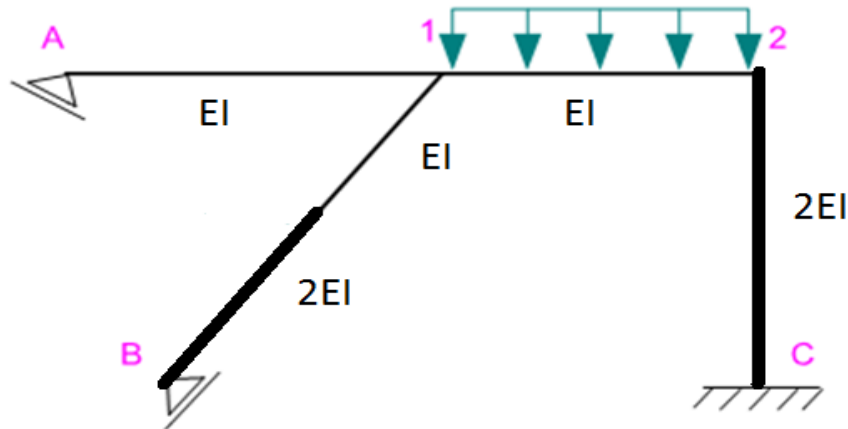
$$ng=3+3=6!$$

Stateczność ustrojów prętowych.

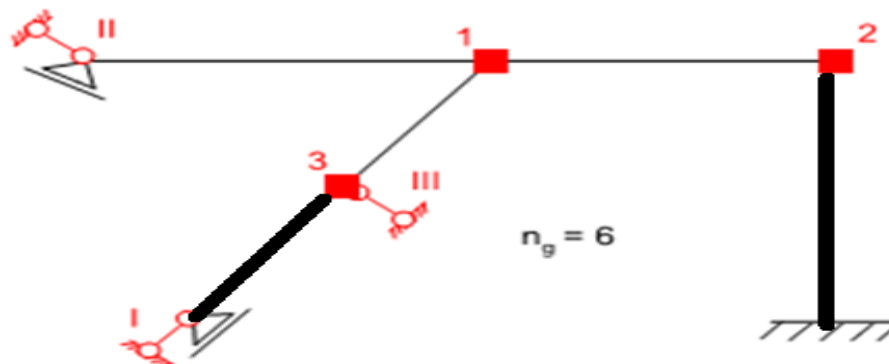
Założenia MP w analizie stateczności

□ Analiza stateczności w ujęciu metody przemieszczeń

1. Układ rzeczywisty konstrukcji obciążonej zadanymi siłami, dla której chcemy przeprowadzić analizę stateczności. Sztywność prętów zmienna.



2. Układ podstawowy z uwzględnieniem sił osiowych



$$n_g = 3 + 3 = 6!$$



Stateczność ustrojów prętowych.

Równania kanoniczne w analizie stateczności

- Budowanie równań kanonicznych metody przemieszczeń w zagadnieniu stateczności wygląda jak w zagadnieniu statycznym. Budujemy układ równań (w formie macierzowej):

$$\begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1n} & \dots \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2n} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{in} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \\ \vdots \\ \Delta_1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{0}}$$

W skróconej formie zapisu mamy:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi} & \mathbf{K}_{\varphi\Delta} \\ \mathbf{K}_{\Delta\varphi} & \mathbf{K}_{\Delta\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\Phi} \\ \bar{\Delta} \end{bmatrix} = \mathbf{K}\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{0}$$

- Po lewej stronie mamy współczynniki sztywności układu konstrukcyjnego i wektor przemieszczeń, a po prawej stronie zerowy wektor obciążeń.



Stateczność ustrojów prętowych.

Równania kanoniczne w analizie stateczności

❑ Współczynniki układu równań (macierzy) mają postać:

$$k_{ii} = \sum_j \left(a(\lambda) \frac{EJ}{L} \right)_{ij} + k_{\varphi_i}$$

Sumowanie po wszystkich prętach schodzących się w węźle „ i ”.
 k_{φ} - jest sztywnością sprężyny w węźle „ i ”.

$$k_{ij} = k_{ji} = \left(b(\lambda) \frac{EJ}{L} \right)_{ij}$$

k_{ij} - jest momentem w węźle „ i ”, który powstał od obrotu węzła „ j ” o kąt $\varphi_j=1$ w układzie podstawowym. Gdy węzły „ i ” i „ j ” nie są połączone prętem wówczas $k_{ij} = k_{ji} = 0$.

$$k_{ii} = k_{ii} = - \sum_j \left(c(\lambda) \frac{EJ}{L} \right)_{ij} \psi_{ij}^I$$

Sumowanie po wszystkich prętach schodzących się w węźle „ i ”.
 k_{ii} - jest momentem w węźle „ i ” wywołany przesunięciem $\Delta_I=1$ w układzie podstawowym.

$$k_{IJ} = k_{JI} = \sum_{(ij)} [d(\lambda)] \psi_{ij}^I \psi_{ij}^J \left(\frac{EJ}{L} \right)_{ij} + \sum_s k_{\Delta s} \delta_s^I \delta_s^J$$

Sumowanie po wszystkich prętach ij i wszystkich sprężynach translacyjnych s .
 k_{IJ} - jest siłą w więzi I wywołaną przemieszczeniem $\Delta_J=1$ w układzie podstawowym.

gdzie: EI jest sztywnością danego pręta, L jest długością pręta, a k_s sztywnością więzi sprężystej. **Parametry a , b , c i d należy wyliczyć.**



Stateczność ustrojów prętowych.

Równania kanoniczne w analizie stateczności

RÓWNANIE STATECZNOŚCI

$$\det \mathbf{K}(\lambda_{ij}(\lambda)) = 0$$

gdzie

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}, & \dots & k_{1n_\varphi}, & k_{1I}, & \dots & k_{1n_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\varphi 1}, & \dots & k_{n_\varphi n_\varphi}, & k_{n_\varphi I}, & \dots & k_{n_\varphi n_\delta} \\ k_{I1}, & \dots & k_{In_\varphi}, & k_{II}, & \dots & k_{In_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\delta 1}, & \dots & k_{n_\delta n_\varphi}, & k_{n_\delta I}, & \dots & k_{n_\delta n_\delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}, & \mathbf{K}_{\varphi\delta} \\ \mathbf{K}_{\delta\varphi}, & \mathbf{K}_{\delta\delta} \end{bmatrix}$$

jest macierzą sztywności, której

współczynniki są funkcjami parametrów $\lambda_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{ij}|}{EI_{ij}}}$ (dla prętów ściskanych) lub

$$\bar{\lambda}_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} N_{ij}}{EI_{ij}}} \quad (\text{dla prętów rozciąganych})$$

$k_{ij}, k_{i\beta}$ są momentami w rotacyjnej więzi "i" wywołanymi odpowiednio:

- obrotem rotacyjnej więzi "j" o kąt $\varphi_j = 1$,
- przesunięciem w miejscu i kierunku translacyjnej więzi " β " o $\delta_\beta = 1$,

$k_{\alpha j}, k_{\alpha\beta}$ są siłami w rotacyjnej więzi "i" wywołanymi odpowiednio:

- obrotem rotacyjnej więzi "j" o kąt $\varphi_j = 1$,
- przesunięciem w miejscu i kierunku translacyjnej więzi " β " o $\delta_\beta = 1$,



Stateczność ustrojów prętowych.

Równania kanoniczne w analizie stateczności

Z powyższych określeń wynika, że współczynniki macierzy sztywności mogą być podzielone na 4 grupy to jest:

- momenty w dodanych więziach rotacyjnych wywołane:

- obrotami $(\mathbf{K}_{\varphi\varphi} = [k_{ij}])$,

- przesunięciami $(\mathbf{K}_{\varphi\delta} = [k_{i\beta}])$,

- reakcje w dodanych więziach translacyjnych wywołane:

- obrotami $(\mathbf{K}_{\delta\varphi} = \mathbf{K}_{\varphi\delta}^T = [k_{\alpha j}])$,

- przesunięciami $(\mathbf{K}_{\delta\delta} = [k_{\alpha\beta}])$,

WZORY OKREŚLAJĄCE WSPÓŁCZYNNIKI MACIERZY SZTYWNOŚCI

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi}; \quad k_{ii} = \sum_j M_{ij}^i + k_i^\varphi = \sum_j a_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} + k_i^\varphi, \quad k_{ij} = M_{ij}^j = b_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}}, \quad j \neq i,$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\delta}; \quad k_{i\beta} = \sum_j M_{ij}^\beta = -\sum_j c_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \psi_{ij}^\beta,$$

$$\mathbf{K}_{\delta\varphi}; \quad k_{\alpha j} = -\sum_{ij} (M_{ij}^j + M_{ji}^j) \cdot \psi_{ij}^\alpha = \sum_{ij} V_{ij}^j \cdot \Delta_{ij}^\alpha = -\sum_{ij} c_{ji}^j \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \psi_{ij}^\alpha$$

$$\mathbf{K}_{\delta\delta}; \quad k_{\alpha\beta} = -\sum_{ij} (M_{ij}^\beta + M_{ji}^\beta \left\{ \begin{matrix} + \lambda_{ij}^2 \\ - \bar{\lambda}_{ij}^2 \end{matrix} \right\} \cdot \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \psi_{ij}^\beta) \cdot \psi_{ij}^\alpha + \sum_s k_i^\delta \cdot \Delta L_i^\alpha \cdot \Delta L_i^\beta =$$

$$= \sum_{ij} V_{ij}^\beta \cdot \Delta_{ij}^\alpha + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^\beta = \sum_{ij} d_{ij} \cdot \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \psi_{ij}^\alpha \cdot \psi_{ij}^\beta + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^\beta$$

Uwaga: Do wzoru powyższego wstawia się $+\lambda_{ij}^2$ dla prętów ściskanych

$-\bar{\lambda}_{ij}^2$ dla prętów rozciąganych.

Momenty M_{ij} i siły poprzeczne V_{ij} w powyższych wzorach określone są przez wzory transformacyjne według teorii rzędu 2-go.



Stateczność ustrojów prętowych.

Równania kanoniczne w analizie stateczności

- ❖ Układ równań (macierzowy) jest jednorodny i aby istniało jego niezerowe rozwiązanie:

$$\bar{\mathbf{q}} = [\bar{\mathbf{\Phi}} \quad \bar{\mathbf{\Delta}}]^T \neq 0$$

warunkiem koniecznym jest **zerowanie się wyznacznika** $\det K(\lambda)=0$.

układu równań (macierzy sztywności). Równanie ma nieskończenie wiele rozwiązań, szukamy rozwiązania dla najmniejszego parametru λ_{kr}

- ❖ Z warunku $\det K(\lambda)=0$ otrzymamy α_{cr} , a dalej siłę krytyczną N_{kr} .
- ❖ Każdy pręt ma własny parametr λ , natomiast w wyznaczniku musi występować tylko jeden krytyczny mnożnik obciążeń obliczeniowych α_{cr}

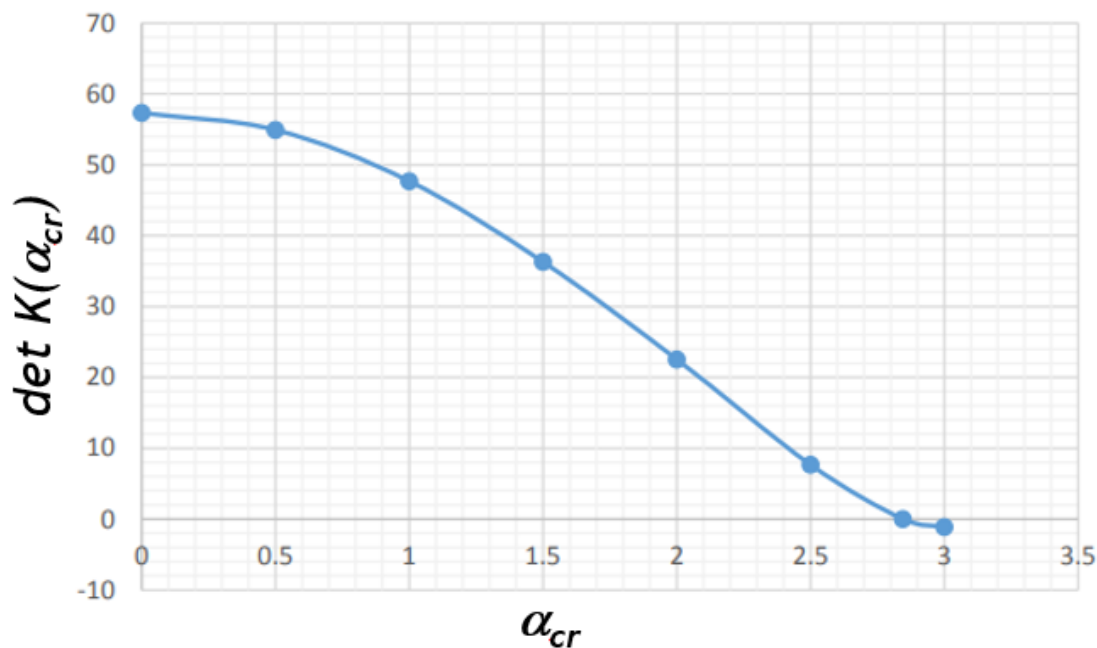


Stateczność ustrojów prętowych.

Równania kanoniczne w analizie stateczności

- ❑ równanie $\det K(\alpha_{cr})=0$ rozwiązujemy korzystając z programu komputerowego np. Mathematica.
- ❑ Dla kolejnych wartości α_{cr} obliczamy wartości funkcji .
- ❑ Gdy funkcja $\det K(\alpha_{cr})$ zmienia znak, to zagęszczamy α_{cr} , aż z wystarczającym przybliżeniem znajdziemy $\det K(\alpha_{cr})=0$.

- **Graficzne badanie**
wartości wyznacznika
pokazano na rysunku





Stateczność ustrojów prętowych.

Wyznaczenie długości wyboczeniowej

- Współczynniki długości wyboczeniowej poszczególnych elementów odpowiadające pierwszej formie utraty stateczności ramy wynoszą

$$\mu_{ij} = \frac{\pi}{L_{ij}} \sqrt{\frac{EI_{ij}}{\alpha_{cr} |N_{ij}|}}$$

- Przyrównywane są wszystkie obliczone współczynniki długości wyboczeniowych do lokalnych współczynników długości wyboczeniowych prętów,

typ pręta						μ
						0.5
						0.7
						1
						2
						1



Stateczność ustrojów prętowych.

Wyznaczenie długości wyboczeniowej

- ❖ o nośności układu decyduje utrata stateczności w bazie globalnej gdy:

$$\mu_{ij} \geq \mu_{ijlok}$$

- ❖ **Wektor własny** opisujący pierwszą postać wyboczenia ramy opisuje dowolna liniowa kombinacja kolumn macierzy dołączonej do K, w tym także każda niezerowa kolumna tejże macierzy



Stateczność ustrojów prętowych.

Wyznaczenie długości wyboczeniowej

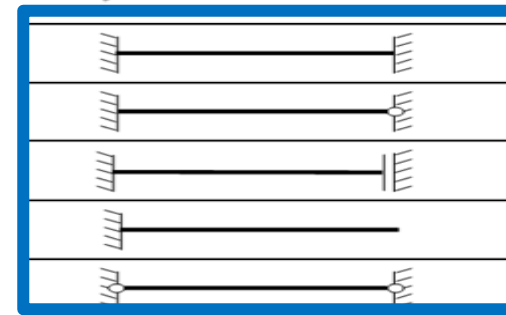
❖ Interpretacja wyników, stateczność globalna i lokalna.

Uzyskane wyniki powinny spełniać warunki $\lambda_{ij} \leq \lambda_{ijlok}$, $\mu_{ij} \geq \mu_{ijlok}$. Jeśli okazałoby się, że dla któregoś pręta warunki te nie są spełnione to zależnie od typu tego pręta może to oznaczać, że rozwiązanie jest błędne lub o nośności decyduje możliwość lokalnej utraty stateczności pręta.

Jeśli w wyniku poprawnego rozwiązania "globalnego" otrzyma się dla któregoś pręta wartość krytyczną λ_{ij}^{lok} większą od podanej w zestawieniu to jako krytyczną należy przyjąć podaną w zestawieniu i na tej podstawie określić pozostałe parametry.

Nadmienić tu trzeba, że jest to mało prawdopodobne by możliwa postać globalnej utraty stateczności była taka, że któryś z pierwszych czterech typów prętów nie doznał odkształceń.

Otrzymanie dla któregoś z tych prętów wartości λ_{ij}^{lok} większej od podanej w zestawieniu na ogół świadczy o błędnym rozwiązaniu. Dla pręta typu piątego to czy nastąpi globalna czy lokalna utrata stateczności zależy od rozkładu sił osiowych w układzie.



Przykład

Dany jest płaski ustrój ramowy o schemacie statycznym jak na rysunku. Pręty układu są zabezpieczone przed wyboczeniem z płaszczyzny i zwichrzeniem. Należy:

1. Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
2. Korzystając z programu komputerowego wyznaczyć siły osiowe w prętach.
3. Stosując metodę przemieszczeń zbudować równanie stateczności,
4. Rozwiązać równanie stateczności, obliczyć mnożnik obciążenia krytycznego i współczynniki długości wyboczeniowych prętów ściskanych.
5. Skomentować uzyskane wyniki.
6. Wyznaczyć wektor własny odpowiadający 1 postaci wyboczenia.

Dane:

$$L_1 = 10,0 \text{ m}; L_2 = 7,0 \text{ m}$$

$$L_3 = 2,0 \text{ m}$$

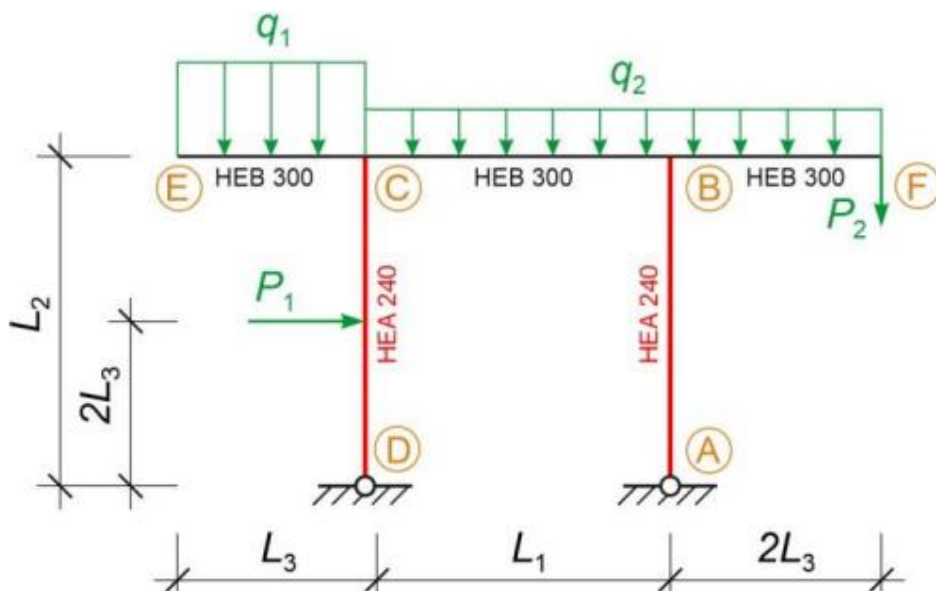
$$P_1 = 25 \text{ kN}$$

$$P_2 = 15 \text{ kN/m}$$

$$q_1 = 40 \text{ kN/m}$$

$$q_2 = 23 \text{ kN/m}$$

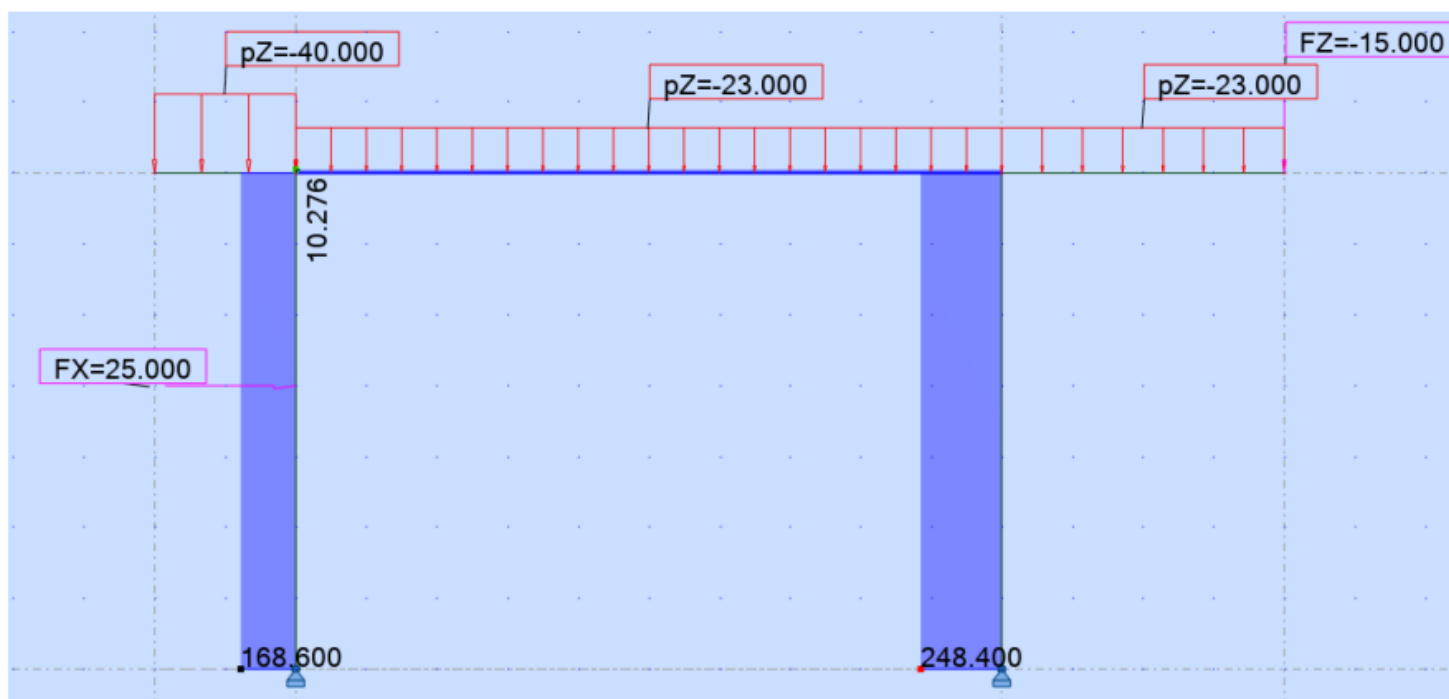
stal: S 235



Przykład

1. ROZWIĄZANIE RAMY WG TEORII RZĘDU I. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH

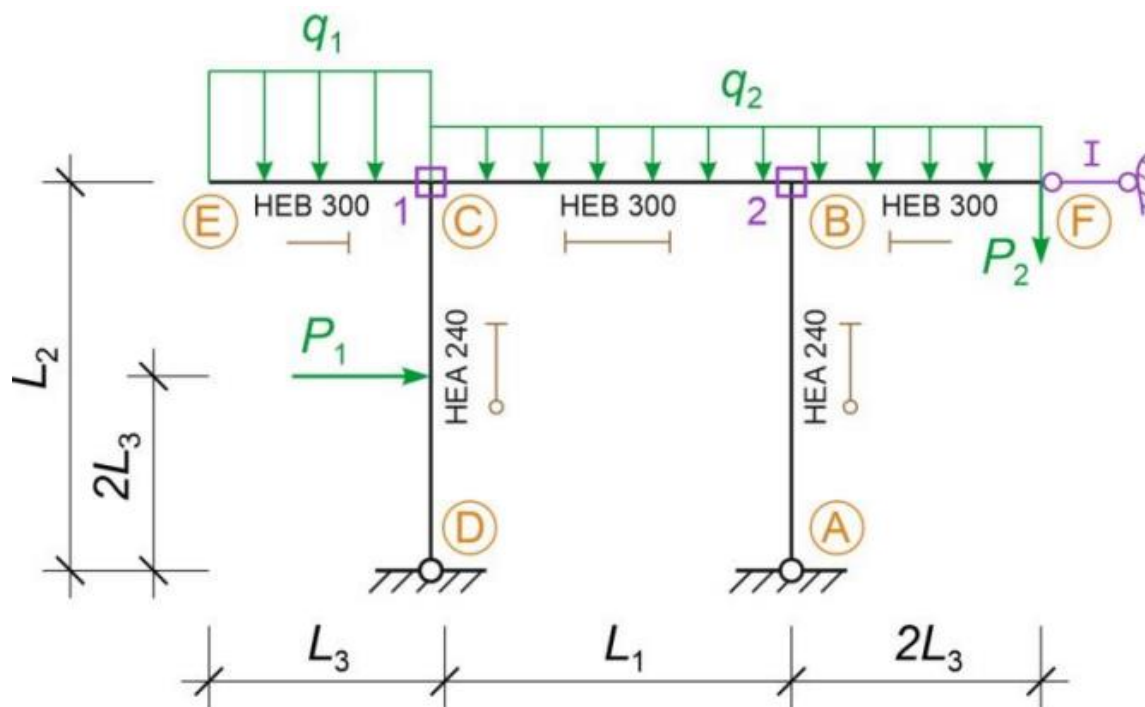
Korzystając z programu komputerowego ROBOT rozwiązano ramę o zadanych przekrojach od obciążenia danego. Obliczone wartości sił osiowych zestawiono poniżej.



Przykład

2. UKŁAD PODSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ

Układ podstawowy tworzymy z układu zadanego poprzez dodanie n_φ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych





Przykład

3. OGÓLNA POSTAĆ RÓWNANIA STATECZNOŚCI

$$\det K(\alpha_{cr}) = 0$$

$$\det \begin{bmatrix} k_{11}(\alpha_{cr}) & k_{12}(\alpha_{cr}) & k_{1I}(\alpha_{cr}) \\ k_{21}(\alpha_{cr}) & k_{22}(\alpha_{cr}) & k_{2I}(\alpha_{cr}) \\ k_{I1}(\alpha_{cr}) & k_{I2}(\alpha_{cr}) & k_{II}(\alpha_{cr}) \end{bmatrix} = 0$$

gdzie α_{cr} to globalny, krytyczny mnożnik obciążenia.

4. OBLICZENIE ELEMENTÓW MACIERZY SZTYWNOŚCI WG TEORII II RZĘDU. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ RÓWNANIA STATECZNOŚCI

W obliczeniach założono profile podane w temacie. Przekrojowe sztywności giętne prętów wynoszą:

$$EI_{AB} = EI_{CD} = 210 \text{ GPa} \cdot 7\,760 \text{ cm}^4 = 16\,296,00 \text{ kNm}^2,$$

$$EI_{EC} = EI_{BC} = EI_{BF} = 210 \text{ GPa} \cdot 25\,170 \text{ cm}^4 = 52\,857,00 \text{ kNm}^2.$$

Wartości sił osiowych obliczonych według teorii I rzędu z pominięciem imperfekcji

$$N_{AB} = -248,40 \text{ kN}, N_{CD} = -168,60 \text{ kN}, N_{CE} = 0, N_{BC} = -10,28 \text{ kN}, N_{BF} = 0.$$



Przykład

Parametry stateczności prętów wynoszą:

$$\lambda_{ij} = L_{ij} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{ij}|}{EI_{ij}}}$$

$$\lambda_{AB} = L_{AB} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{AB}|}{EI_{AB}}} = 7,0\text{m} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |-248,40\text{kN}|}{16296,00\text{kNm}^2}} = 0,864 \sqrt{\alpha_{cr}}$$

$$\lambda_{CD} = L_{CD} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{CD}|}{EI_{CD}}} = 7,0\text{m} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |-168,60\text{kN}|}{16296,00\text{kNm}^2}} = 0,712 \sqrt{\alpha_{cr}}$$

$$\lambda_{CE} = L_{CE} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{CE}|}{EI_{CE}}} = 2,0\text{m} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |0\text{kN}|}{52857,00\text{kNm}^2}} = 0$$

$$\lambda_{BC} = L_{BC} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{BC}|}{EI_{BC}}} = 10,0\text{m} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |-10,28\text{kN}|}{52857,00\text{kNm}^2}} = 0,139 \sqrt{\alpha_{cr}}$$

$$\lambda_{BF} = L_{BF} \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |N_{BF}|}{EI_{BF}}} = 4,0\text{m} \cdot \sqrt{\frac{\alpha_{cr} |0\text{kN}|}{52857,00\text{kNm}^2}} = 0$$



Przykład

Współczynniki macierzy sztywności w ujęciu teorii II rzędu

$$\begin{aligned}
 k_{11}(\alpha_{cr}) &= a_{BC}(\lambda_{BC}) \frac{EI_{BC}}{L_{BC}} + a_{CD}(\lambda_{CD}) \frac{EI_{CD}}{L_{CD}} + a_{CE}(\lambda_{CE}) \frac{EI_{CE}}{L_{CE}} \\
 &= \lambda_{BC} \frac{\sin \lambda_{BC} - \lambda_{BC} \cos \lambda_{BC}}{2(1 - \cos \lambda_{BC}) - \lambda_{BC} \sin \lambda_{BC}} \cdot \frac{EI_{BC}}{L_{BC}} + (\lambda_{CD})^2 \frac{\sin \lambda_{CD}}{\sin \lambda_{CD} - \lambda_{CD} \cos \lambda_{CD}} \\
 &\quad \cdot \frac{EI_{CD}}{L_{CD}} - \lambda_{CE} \operatorname{tg} \lambda_{CE} \cdot \frac{EI_{CE}}{L_{CE}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{22}(\alpha_{cr}) &= a_{BC}(\lambda_{BC}) \frac{EI_{BC}}{L_{BC}} + a_{AB}(\lambda_{AB}) \frac{EI_{AB}}{L_{AB}} + a_{BF}(\lambda_{BF}) \frac{EI_{BF}}{L_{BF}} \\
 &= \lambda_{BC} \frac{\sin \lambda_{BC} - \lambda_{BC} \cos \lambda_{BC}}{2(1 - \cos \lambda_{BC}) - \lambda_{BC} \sin \lambda_{BC}} \cdot \frac{EI_{BC}}{L_{BC}} + (\lambda_{AB})^2 \frac{\sin \lambda_{AB}}{\sin \lambda_{AB} - \lambda_{AB} \cos \lambda_{AB}} \\
 &\quad \cdot \frac{EI_{AB}}{L_{AB}} - \lambda_{BF} \cdot \operatorname{tg} \lambda_{BF} \cdot \frac{EI_{BF}}{L_{BF}}
 \end{aligned}$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi}; \quad k_{ii} = \sum M_{ij}^i + k_i^\varphi = \sum a_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} + k_i^\varphi, \quad k_{ij} = M_{ij}^j = b_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}}, \quad j \neq i,$$

- dla pręta "sztywno-sztywnego"

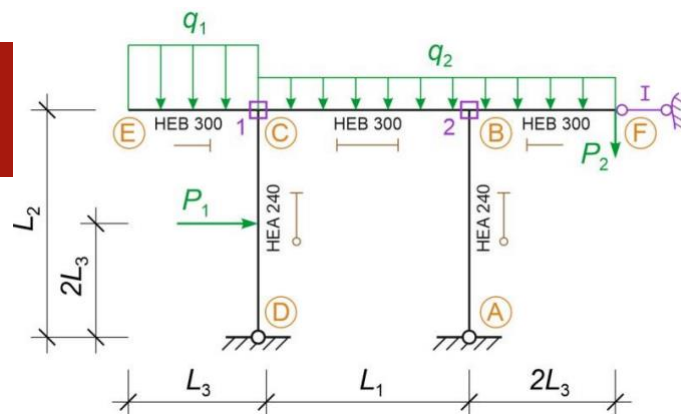
- dla pręta "sztywno-przegubowego"

- ściskanego

- ściskanego

$$\alpha(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

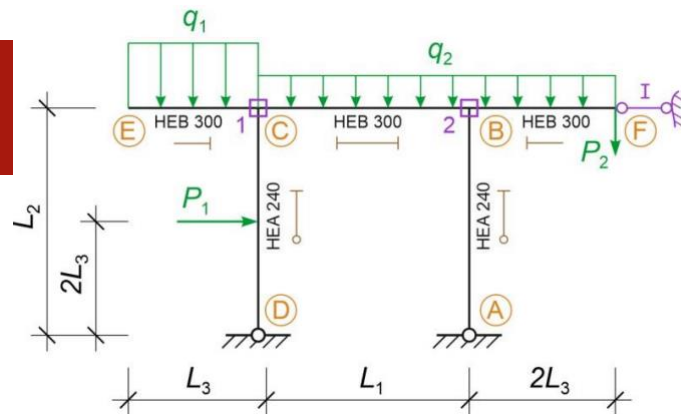
$$\alpha'(\lambda) = \alpha(\lambda) - \frac{\beta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \lambda^2 \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},$$





Przykład

Współczynniki macierzy sztywności w ujęciu teorii II rzędu



$$k_{12}(\alpha_{cr}) = k_{21}(\alpha_{cr}) = b_{BC}(\lambda_{BC}) \frac{EI_{BC}}{L_{BC}} = \lambda_{BC} \frac{\lambda_{BC} - \sin \lambda_{BC}}{2(1 - \cos \lambda_{BC}) - \lambda_{BC} \sin \lambda_{BC}} \cdot \frac{EI_{BC}}{L_{BC}}$$

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi}; \quad k_{ij} = M_{ij}^j = b_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}}, \quad j \neq i,$$

- dla pręta "sztywno-sztywnego"

$$\beta(\lambda) = \lambda \cdot \frac{\lambda - \sin \lambda}{2 \cdot (1 - \cos \lambda) - \lambda \cdot \sin \lambda},$$

$$k_{1I}(\alpha_{cr}) = k_{I1}(\alpha_{cr}) = -c_{CD}(\lambda_{CD}) \frac{EI_{BC}}{L_{BC}} \cdot \Psi_{CD}^I = -(\lambda_{CD})^2 \frac{\sin \lambda_{CD}}{\sin \lambda_{CD} - \lambda_{CD} \cos \lambda_{CD}} \cdot \frac{EI_{CD}}{L_{CD}} \cdot \Psi_{CD}^I$$

$$k_{2I}(\alpha_{cr}) = k_{I2}(\alpha_{cr}) = -c_{AB}(\lambda_{AB}) \frac{EI_{AB}}{L_{AB}} \cdot \Psi_{AB}^I = -(\lambda_{AB})^2 \frac{\sin \lambda_{AB}}{\sin \lambda_{AB} - \lambda_{AB} \cos \lambda_{AB}} \cdot \frac{EI_{AB}}{L_{AB}} \cdot \Psi_{AB}^I$$

- dla pręta "sztywno-przegubowego"

$$\mathbf{K}_{\varphi\delta}; \quad k_{i\beta} = \sum_j M_{ij}^\beta = -\sum_j c_{ij} \cdot \frac{EJ_{ij}}{L_{ij}} \cdot \psi_{ij}^\beta,$$

$$\alpha'(\lambda) = \alpha(\lambda) - \frac{\beta^2(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \lambda^2 \cdot \frac{\sin \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},$$



Przykład

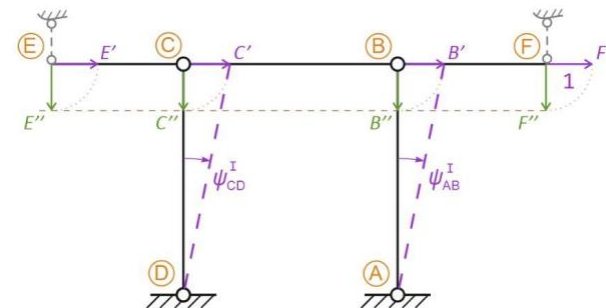
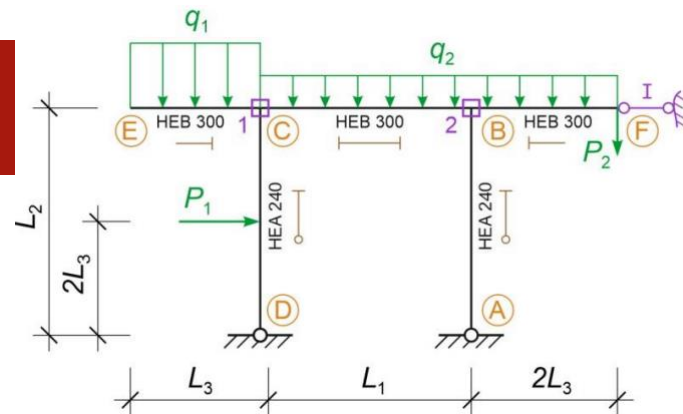
Współczynniki macierzy sztywności w ujęciu teorii II rzędu

$$\begin{aligned}
 k_{II}(\alpha_{cr}) &= d_{AB}(\lambda_{AB}) \frac{EI_{AB}}{L_{AB}} \cdot \Psi_{AB}^I \cdot \Psi_{AB}^I + d_{CD}(\lambda_{CD}) \frac{EI_{CD}}{L_{CD}} \cdot \Psi_{CD}^I \cdot \Psi_{CD}^I \\
 &= (\lambda_{AB})^3 \frac{\cos \lambda_{AB}}{\sin \lambda_{AB} - \lambda_{AB} \cos \lambda_{AB}} \cdot \frac{EI_{AB}}{L_{AB}} \cdot (\Psi_{AB}^I)^2 + (\lambda_{CD})^3 \frac{\cos \lambda_{CD}}{\sin \lambda_{CD} - \lambda_{CD} \cos \lambda_{CD}} \\
 &\quad \cdot \frac{EI_{CD}}{L_{CD}} \cdot (\Psi_{CD}^I)^2
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_{\delta\delta}; \quad k_{\alpha\beta} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^{\beta} + M_{ji}^{\beta} \left\{ \begin{array}{l} +\lambda_{ij}^2 \\ -\lambda_{ij}^2 \end{array} \right\} \cdot \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \psi_{ij}^{\beta}) \cdot \psi_{ij}^{\alpha} + \sum_s k_i^{\delta} \cdot \Delta L_i^{\alpha} \cdot \Delta L_i^{\beta} = \\
 &= \sum_{ij} V_{ij}^{\beta} \cdot \Delta_{ij}^{\alpha} + \sum_s k_s^{\delta} \cdot \Delta L_s^{\alpha} \cdot \Delta L_s^{\beta} = \sum_{ij} d_{ij} \cdot \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \psi_{ij}^{\alpha} \cdot \psi_{ij}^{\beta} + \sum_s k_s^{\delta} \cdot \Delta L_s^{\alpha} \cdot \Delta L_s^{\beta}
 \end{aligned}$$

- dla pręta "sztywno-przegubowego"

$$\delta'(\lambda) = \delta(\lambda) - \frac{\vartheta'(\lambda)}{\alpha(\lambda)} = \alpha'(\lambda) - \lambda^2 = \lambda^3 \cdot \frac{\cos \lambda}{\sin \lambda - \lambda \cdot \cos \lambda},$$



$$\Psi_{AB}^I = \Psi_{CD}^I = \frac{1}{7m}$$



Przykład

Szczegółowa postać równanie stateczności i jego rozwiązanie

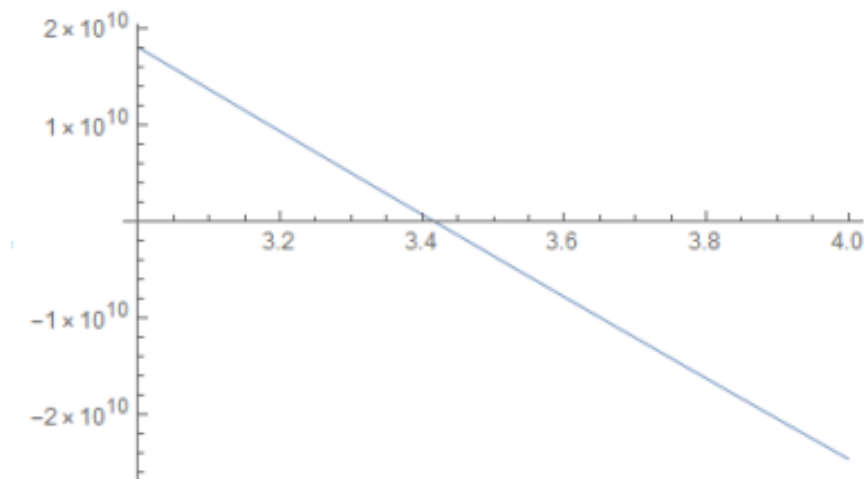
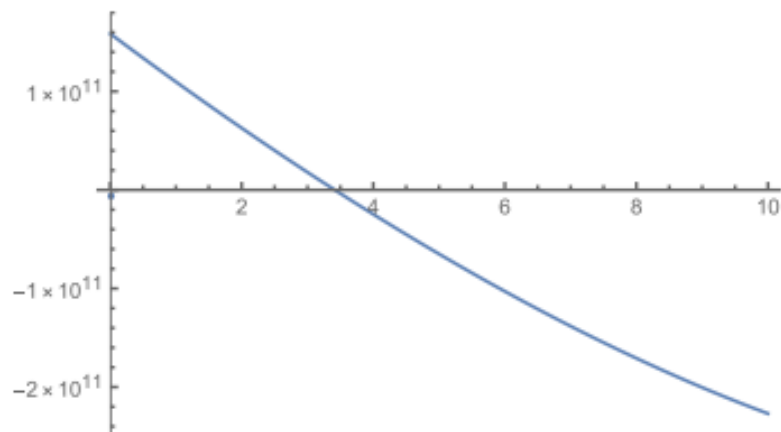
$$\begin{aligned}
 k_{11}(\alpha_{cr}) &= 0,139\sqrt{\alpha_{cr}} \frac{\sin(0,139\sqrt{\alpha_{cr}}) - 0,139\sqrt{\alpha_{cr}}\cos(0,139\sqrt{\alpha_{cr}})}{2(1 - \cos(0,139\sqrt{\alpha_{cr}})) - 0,139\sqrt{\alpha_{cr}}\sin(0,139\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{52\,857,00\text{kNm}^2}{10,0\text{m}} \\
 &\quad + (0,712\sqrt{\alpha_{cr}})^2 \frac{\sin(0,712\sqrt{\alpha_{cr}})}{\sin(0,712\sqrt{\alpha_{cr}}) - (0,712\sqrt{\alpha_{cr}})\cos(0,712\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{16\,296,00\text{kNm}^2}{7,0\text{m}} \\
 k_{12}(\alpha_{cr}) &= k_{21}(\alpha_{cr}) \\
 &= 0,139\sqrt{\alpha_{cr}} \frac{0,139\sqrt{\alpha_{cr}} - \sin(0,139\sqrt{\alpha_{cr}})}{2(1 - \cos(0,139\sqrt{\alpha_{cr}})) - 0,139\sqrt{\alpha_{cr}}\sin(0,139\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{52\,857,00\text{kNm}^2}{10,0\text{m}} \\
 k_{1I}(\alpha_{cr}) &= k_{I1}(\alpha_{cr}) \\
 &= -(0,712\sqrt{\alpha_{cr}})^2 \frac{\sin(0,712\sqrt{\alpha_{cr}})}{\sin(0,712\sqrt{\alpha_{cr}}) - 0,712\sqrt{\alpha_{cr}}\cos(0,712\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{16\,296,00\text{kNm}^2}{7,0\text{m}} \cdot \frac{1}{7\text{m}} \\
 k_{22}(\alpha_{cr}) &= 0,139\sqrt{\alpha_{cr}} \frac{\sin(0,139\sqrt{\alpha_{cr}}) - 0,139\sqrt{\alpha_{cr}}\cos(0,139\sqrt{\alpha_{cr}})}{2(1 - \cos(0,139\sqrt{\alpha_{cr}})) - 0,139\sqrt{\alpha_{cr}}\sin(0,139\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{52\,857,00\text{kNm}^2}{10,0\text{m}} \\
 &\quad + (0,864\sqrt{\alpha_{cr}})^2 \frac{\sin(0,864\sqrt{\alpha_{cr}})}{\sin(0,864\sqrt{\alpha_{cr}}) - 0,864\sqrt{\alpha_{cr}}\cos(0,864\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{16\,296,00\text{kNm}^2}{7,0\text{m}} \\
 k_{2I}(\alpha_{cr}) &= k_{I2}(\alpha_{cr}) \\
 &= -(0,864\sqrt{\alpha_{cr}})^2 \frac{\sin(0,864\sqrt{\alpha_{cr}})}{\sin(0,864\sqrt{\alpha_{cr}}) - 0,864\sqrt{\alpha_{cr}}\cos(0,864\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{16\,296,00\text{kNm}^2}{7,0\text{m}} \cdot \frac{1}{7\text{m}} \\
 k_{II}(\alpha_{cr}) &= (0,864\sqrt{\alpha_{cr}})^3 \frac{\cos(0,864\sqrt{\alpha_{cr}})}{\sin(0,864\sqrt{\alpha_{cr}}) - 0,864\sqrt{\alpha_{cr}}\cos(0,864\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{16\,296,00\text{kNm}^2}{7,0\text{m}} \cdot \left(\frac{1}{7\text{m}}\right)^2 \\
 &\quad + (0,712\sqrt{\alpha_{cr}})^3 \frac{\cos(0,712\sqrt{\alpha_{cr}})}{\sin(0,712\sqrt{\alpha_{cr}}) - 0,712\sqrt{\alpha_{cr}}\cos(0,712\sqrt{\alpha_{cr}})} \cdot \frac{16\,296,00\text{kNm}^2}{7,0\text{m}} \cdot \left(\frac{1}{7\text{m}}\right)^2
 \end{aligned}$$



Przykład

$$\det \begin{bmatrix} k_{11}(\alpha_{cr}) & k_{12}(\alpha_{cr}) & k_{1I}(\alpha_{cr}) \\ \boxed{} & k_{22}(\alpha_{cr}) & k_{2I}(\alpha_{cr}) \\ sym & \boxed{} & k_{II}(\alpha_{cr}) \end{bmatrix} = 0$$

Pierwszy dodatni pierwiastek równania stateczności wyznaczono korzystając z programu *Mathematica*. Krytyczny mnożnik obciążeń obliczeniowych $\alpha_{cr,1} = 3,416$.



```

1 alal = FindRoot[det[z], {z, 1, 10}, Method -> "Brent"]
   [znajdź pierwiastek] [metoda]
2 {z -> 3.41575}

```



Przykład

5. WSPÓŁCZYNNIKI DŁUGOŚCI WYBOCZENIOWYCH PRĘTÓW ŚCISKANYCH

Współczynniki długości wyboczeniowej poszczególnych elementów odpowiadające pierwszej formie utraty stateczności ramy wynoszą

$$\mu_{ij} = \frac{\pi}{L_{ij}} \sqrt{\frac{EI_{ij}}{\alpha_{cr}|N_{ij}|}}$$

$$\mu_{AB} = \frac{\pi}{L_{AB}} \sqrt{\frac{EI_{AB}}{\alpha_{cr}|N_{AB}|}} = \frac{\pi}{7,0\text{m}} \sqrt{\frac{16296\text{kNm}^2}{3,416 \cdot |-248,40\text{kN}|}} = 1,967$$

$$\mu_{CD} = \frac{\pi}{L_{CD}} \sqrt{\frac{EI_{CD}}{\alpha_{cr}|N_{CD}|}} = \frac{\pi}{10,0\text{m}} \sqrt{\frac{16296\text{kNm}^2}{3,416 \cdot |168,60\text{kN}|}} = 2,387$$

$$\mu_{BC} = \frac{\pi}{L_{BC}} \sqrt{\frac{EI_{BC}}{\alpha_{cr}|N_{BC}|}} = \frac{\pi}{7,0\text{m}} \sqrt{\frac{52857\text{kNm}^2}{3,416 \cdot |-10,28\text{kN}|}} = 12,188$$

Pręt	μ_{ij}		$\mu_{ij,lok}$	Typ pręta
AB	1,967	>	0,7	Szt-przeg
CD	2,387	>	0,7	Szt-przeg
BC	12,188	>	0,5	Szt-szt

Komentarz: Wszystkie obliczone współczynniki długości wyboczeniowych są większe niż lokalne współczynniki długości wyboczeniowych prętów, więc o nośności układu decyduje utrata stateczności w bazie globalnej.



Przykład

6. WEKTOR WŁASNY

Wektor własny opisujący pierwszą postać wyboczenia ramy opisuje dowolna liniowa kombinacja kolumn macierzy dołączonej do K , w tym także każda niezerowa kolumna tejże macierzy. W celu uproszczenia zapisu, pominięto jednostki współczynników, przy czym obliczając wartości skorzystano z następującego zestawu jednostek: rad, m, MN.

$$K(\alpha_{cr,1}) = \begin{bmatrix} 27,231 & 10,583 & -0,876 \\ 10,583 & 26,795 & -0,814 \\ -0,876 & -0,814 & 0,0381 \end{bmatrix}$$

$$\text{adj } K(\alpha_{cr,1}) = \begin{bmatrix} 0,358 & 0,310 & 14,866 \\ 0,310 & 0,269 & 12,896 \\ 14,866 & 12,896 & 617,659 \end{bmatrix}$$

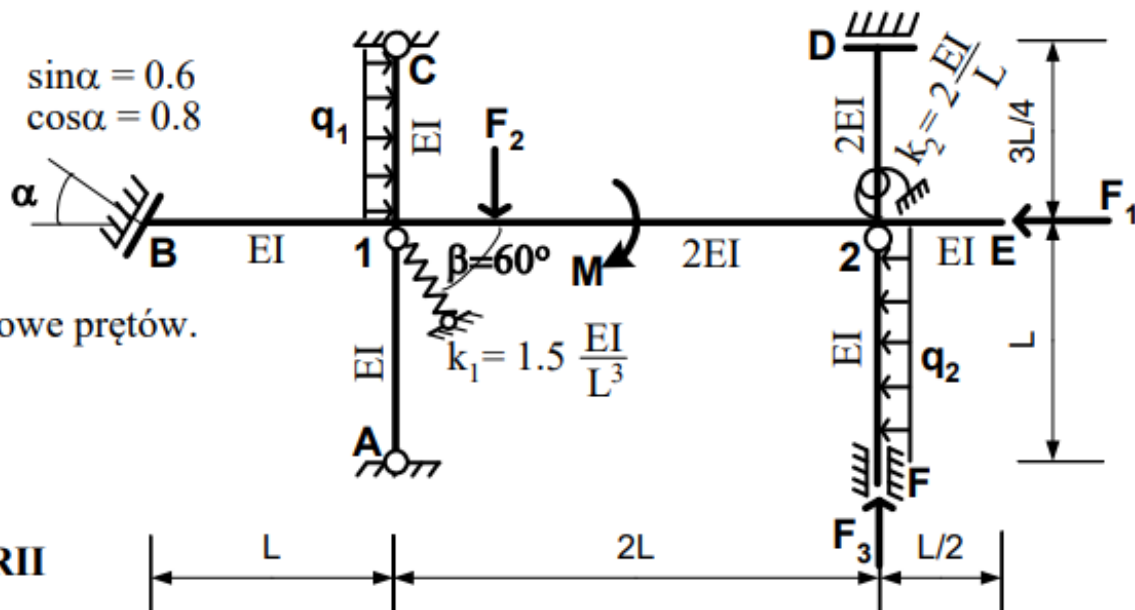
Unormowany wektor własny

$$w_1 = \begin{bmatrix} \varphi_{1,1} \\ \varphi_{2,1} \\ \delta_{I,1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0241 \text{ rad} \\ 0,0209 \text{ rad} \\ 1 \text{ m} \end{bmatrix}$$

Przykład 2: lokalna utrata stateczności

WYZNACZENIE DŁUGOŚCI WYBOCZENIOWYCH PRETÓW

Dla ramy pokazanej na rysunku
wyznaczyć długości wybočeníowe prętów.



0.. SIŁY OSIOWE WG TEORII 1-GO RZEDU

Przyjmijmy, że przedstawione symbolicznie na rysunku powyżej obciążenia mają takie wartości, że siły osiowe w prętach uzyskane w wyniku rozwiązania ramy od tych obciążeń wg teorii rzędu 1-go są następujące: $N_{12} = -100kN$, $N_{14} = -180kN$, $N_{1B} = +36kN$,

$$N_{1C} = 0, \quad N_{2D} = -128kN, \quad N_{2E} = -64kN, \quad N_{2F} = -64kN.$$

Jak widać, w stosunku do przykładu 1 większa jest siła ściskająca pręt 1-A.

Obliczenia i ich wyniki w punktach 1 do 4.3, to jest do postaci szczegółowej równania stateczności, są identyczne jak w przykładzie 1, więc nie będziemy ich powtarzać. Różnice zaczną się od punktu 4.4, więc wykorzystamy te wyniki z przykładu 1 zaczniemy rozwiązanie od punktu 4.4.



Przykład 2: lokalna utrata stateczności

4.4..ROZWIĄZANIE RÓWNANIA STATECZNOŚCI

Równanie stateczności rozwiążemy zakładając proporcjonalny wzrost wszystkich obciążeń do wartości krytycznych, co odpowiada wprowadzeniu mnożnika obciążenia i sił osiowych γ .

Poniżej zestawiono siły osiowe otrzymane w wyniku rozwiązania ramy wg teorii rzędu I-go

pomnożone przez mnożnik obciążenia γ oraz wyrażono parametry $\lambda_{ij} = L_{ij} \cdot \sqrt{\frac{|N_{ij}|}{EI_{ij}}}$ (dla prętów

ściskanych) i $\bar{\lambda}_{ij} = L_{ij} \cdot \sqrt{\frac{N_{ij}}{EI_{ij}}}$ (dla prętów rozciąganych) przez parametr porównawczy λ .

$$N_{12} = -100kN \cdot \gamma \quad \Rightarrow \quad \lambda_{12} = L_{12} \cdot \sqrt{\frac{|N_{12}|}{EI_{12}}} = 2 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{100kN \cdot \gamma}{2EI}} = 14.1421 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{kN \cdot \gamma}{EI}},$$

$$N_{1A} = -180kN \cdot \gamma \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1A} = L_{1A} \cdot \sqrt{\frac{|N_{1A}|}{EI_{1A}}} = L \cdot \sqrt{\frac{180kN \cdot \gamma}{EI}} = 13.4164 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{kN \cdot \gamma}{EI}},$$

$$N_{1B} = +36kN \cdot \gamma \quad \Rightarrow \quad \bar{\lambda}_{1B} = L_{1B} \cdot \sqrt{\frac{N_{1B}}{EI_{1B}}} = L \cdot \sqrt{\frac{36kN \cdot \gamma}{EI}} = 6 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{kN \cdot \gamma}{EI}},$$

$$N_{1C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{1C} = 0$$

$$N_{2D} = -128kN \cdot \gamma \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2D} = L_{2D} \cdot \sqrt{\frac{|N_{2D}|}{EI_{2D}}} = \frac{3L}{4} \cdot \sqrt{\frac{128kN \cdot \gamma}{2EI}} = 6 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{kN \cdot \gamma}{EI}},$$

$$N_{2E} = -64kN \cdot \gamma \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2E} = L_{2E} \cdot \sqrt{\frac{|N_{2E}|}{EI_{2E}}} = \frac{L}{2} \cdot \sqrt{\frac{64kN \cdot \gamma}{EI}} = 4 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{kN \cdot \gamma}{EI}},$$

$$N_{2F} = -64kN \cdot \gamma \quad \Rightarrow \quad \lambda_{2F} = L_{2F} \cdot \sqrt{\frac{|N_{2F}|}{EI_{2F}}} = L \cdot \sqrt{\frac{64kN \cdot \gamma}{EI}} = 8 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{kN \cdot \gamma}{EI}}.$$



Przykład 2: lokalna utrata stateczności

Jak widać największą wartość ma $\lambda_{12} = 14.1421 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{kN \cdot \gamma}{EI}}$, przyjmujemy ją jako porównawczą.

$$\lambda = \lambda_{12} = 14.1421 \cdot L \cdot \sqrt{\frac{kN \cdot \gamma}{EI}} \Rightarrow L \cdot \sqrt{\frac{kN \cdot \gamma}{EI}} = \frac{\lambda}{14.1421}.$$

Podstawiając $\frac{\lambda}{14.1421}$ za $L \cdot \sqrt{\frac{kN \cdot \gamma}{EI}}$ do powyższych wyrażeń na λ_{ij} otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \lambda_{12} &= \lambda, & \lambda_{1A} &= \frac{13.4164}{14.1421} \cdot \lambda = 0.9487 \cdot \lambda, & \bar{\lambda}_{1B} &= \frac{6}{14.1421} \cdot \lambda = 0.4243 \cdot \lambda, & \lambda_{1C} &= 0, \\ \lambda_{2D} &= \frac{6}{14.1421} \cdot \lambda = 0.4243 \cdot \lambda, & \lambda_{2E} &= \frac{4}{14.1421} \cdot \lambda = 0.2828 \cdot \lambda, & \lambda_{2F} &= \frac{8}{14.1421} \cdot \lambda = 0.5657 \cdot \lambda \end{aligned}$$

W wyniku rozwiązania równania stateczności otrzymano wartość krytyczną parametru $\lambda = 3.5978$, dla której $\det K(\lambda) = 0.032$

5..WSPÓŁCZYNNIKI DŁUGOŚCI WYBOCZENIOWYCH PRĘTÓW

Znając wartość krytyczną parametru λ obliczamy dla prętów ściskanych, wykorzystując związki określone w punkcie 4.4 wartości krytyczne parametrów λ_{ij} i współczynniki długości wyboczeniowych $\mu_{ij} = \pi / \lambda_{ij}$. Obliczenia te wykonano w poniższej tabeli. W tabeli tej przytoczono też znane z wytrzymałości materiałów wartości parametrów $\lambda_{ij \text{ lok}}$ oraz $\mu_{ij \text{ lok}}$ odpowiadające lokalnej utracie stateczności poszczególnych prętów.



Przykład 2: lokalna utrata stateczności

	λ_{ij}		$\lambda_{ij \text{ lok}}$		μ_{ij}		$\mu_{ij \text{ lok}}$	Uwagi
$\lambda_{12} = \lambda$	3.5978	<	6.2832		0.8732	>	0.5	
$\lambda_{1A} = 0.9487\lambda$	3.4132	>	3.1416		0.92042	<	1	
$\lambda_{1B} = 0.4243\lambda$	<u>1.5265</u>							pręt rozciągnany
$\lambda_{1C} = 0$	0							N=0
$\lambda_{2D} = 0.4243\lambda$	1.5265	<	3.1416		2.05798	>	1	
$\lambda_{2E} = 0.2828\lambda$	1.0175	<	1.5708		3.0877	>	2	
$\lambda_{2F} = 0.5657\lambda$	2.0353	<	4.488		1.54357	>	0.7	

Uzyskane wyniki powinny spełniać warunki $\lambda_{ij} \leq \lambda_{ij \text{ lok}}$, $\mu_{ij} \geq \mu_{ij \text{ lok}}$. Okazuje się jednak, że dla pręta 1A (pręt przegubowo-przegubowy) warunki te nie są spełnione. Ponieważ przedstawione rozwiązanie w przyjętej bazie nie uwzględnia możliwości utraty stateczności tego pręta przez jego wygięcie, której to utracie stateczności odpowiada, w rozwiązywanym zadaniu, większy współczynnik długości wyboczeniowej $\mu_{1Alok} = 1$, o nośności układu decyduje możliwość lokalnej utraty stateczności tego pręta. Zatem należy przyjąć: $\mu_{1A} = 1$. Stąd $\lambda_{1A} = \mu_{1A} \cdot \pi = 3.1415 = 0.9487 \cdot \lambda$ a stąd wartość krytyczna parametru $\lambda = 3.1416 / 0.9487 = 3.3115$

$$\text{i krytyczny mnożnik obciążenia } \gamma = \frac{EI \cdot \lambda^2}{200kN \cdot L^2} = \frac{3.3115^2}{200} \cdot \frac{EI}{kN \cdot L^2} = 0.05483 \cdot \frac{EI}{kN \cdot L^2}.$$

Uwzględniając tę wartość parametru λ obliczamy parametry λ_{ij} i $\mu_{ij} = \pi / \lambda_{ij}$ analogicznie jak powyżej



Przykład 2: lokalna utrata stateczności

	λ_{ij}		$\lambda_{ij \text{ lok}}$		μ_{ij}		$\mu_{ij \text{ lok}}$	Uwagi
$\lambda_{12} = \lambda$	3.3115	<	2π		0.9487	>	0.5	
$\lambda_{1A} = 0.9487\lambda$	3.1416	=	π		1	=	1	
$\lambda_{1B} = 0.4243\lambda$	1.4051							pręt rozciągany
$\lambda_{1C} = 0$	0							N=0
$\lambda_{2D} = 0.4243\lambda$	1.4051	<	π		2.2359	>	1	
$\lambda_{2E} = 0.2828\lambda$	0.9365	<	$\pi/2$		3.3546	>	2	
$\lambda_{2F} = 0.5657\lambda$	1.8733	<	4.488		1.6770	>	0.7	

Tak uzyskane wyniki spełniają już warunki $\lambda_{ij} \leq \lambda_{ij \text{ lok}}$, $\mu_{ij} \geq \mu_{ij \text{ lok}}$ dla wszystkich prętów.

Uwaga: Przedstawiony w tym zadaniu problem (lokalnej utraty stateczności) można „ominać” przez przyjęcie dla tego pręta elementu, w którym występuje stopień swobody obrotu, co uwzględni możliwość utraty stateczności w postaci jego wygięcia się w rozwiązaniu globalnym.