

Mechanika Budowli

Laboratorium nr 3

Opracowała: dr inż. Olga Szyłko-Bigus

olga.szylko@pwr.edu.pl



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Politechnika Wroclawska

METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu niemechanicznym jak na rysunku. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia niemechanicznego i sporządzić ich wykresy.
- Przeprowadzić stosowne kontrole rozwiązania w obu przypadkach.

Dane do obliczeń: $k_{\delta} = 8 EI/m^3$,

$T_1 = 20 \text{ }^{\circ}\text{C}$; $T_2 = 25 \text{ }^{\circ}\text{C}$;

$\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}$; $\Delta r_2 = 0,03 \text{ rad}$.

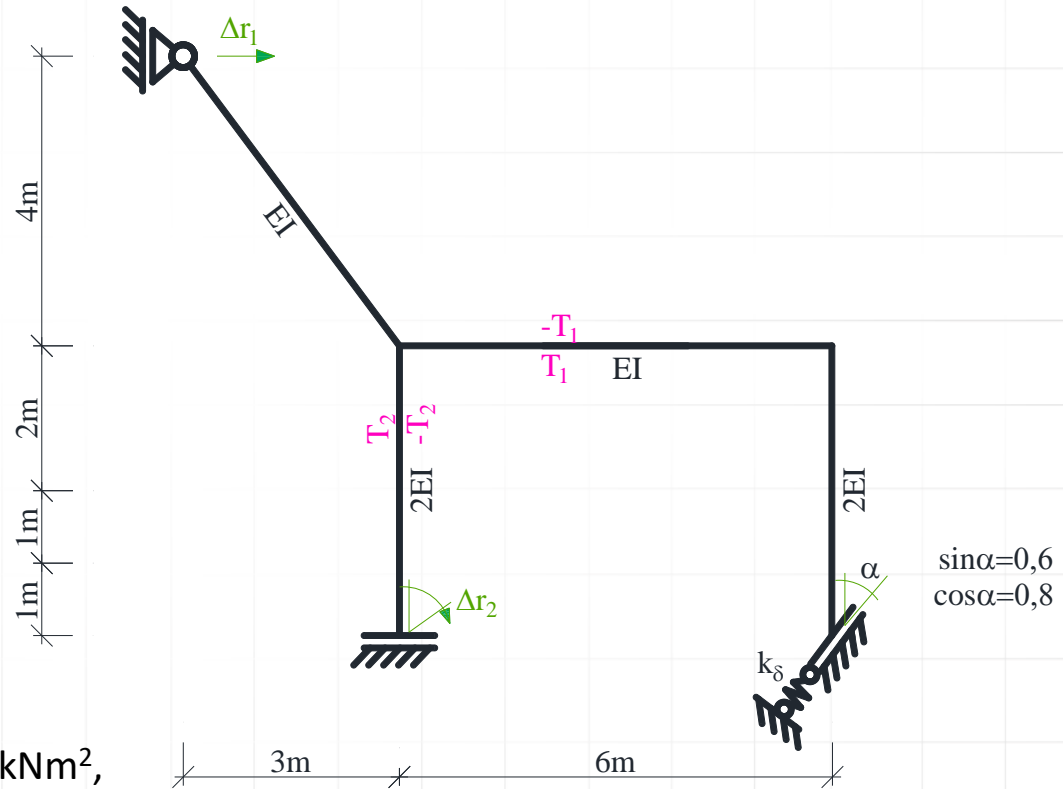
$EI \rightarrow$ IPE180

$2EI \rightarrow$ 2IPE180

$I_{\text{IPE 180}} = 1320 \text{ cm}^4$.

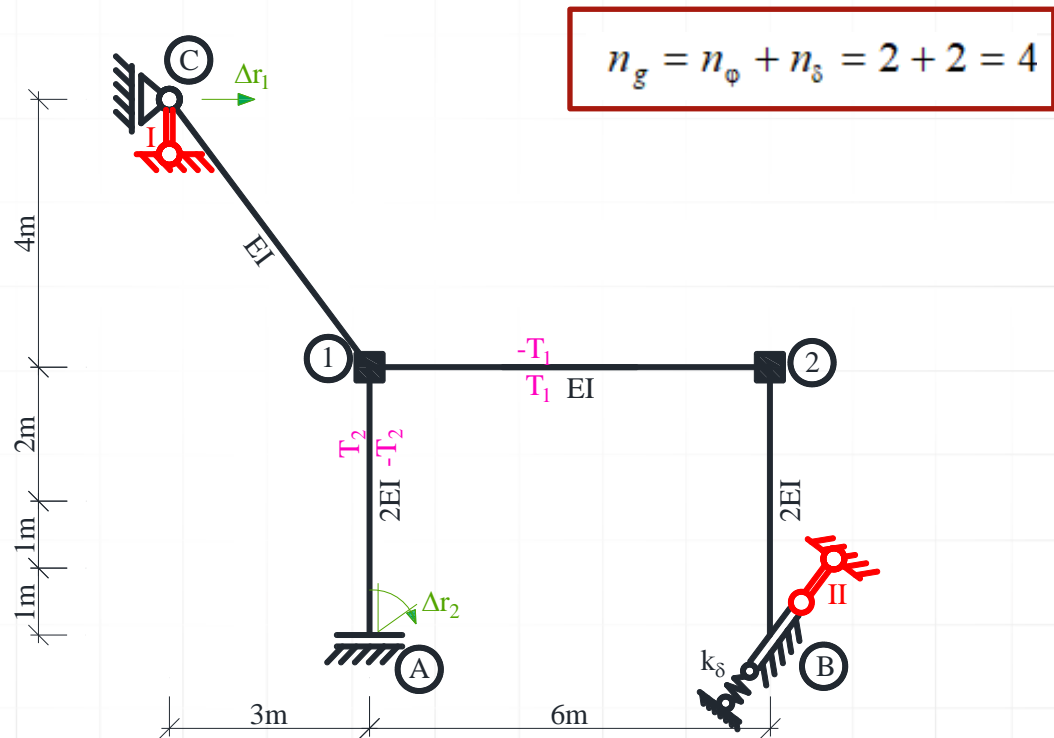
$EI = 210000000 \text{ kN/m}^2 * 1320 * 10^{-8} \text{ m}^4 = 2772 \text{ kNm}^2$,

$k_{\delta} = 8 EI/m^3 = 22176 \text{ kNm/m}^3$.



UKŁAD PODSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez dodanie n_ϕ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych (w tym przykładzie 2 więzi rotacyjne i 2 więzi translacyjne). Układ podstawowy metody przemieszczeń, pokazany na rysunku jest geometrycznie wyznaczalny.



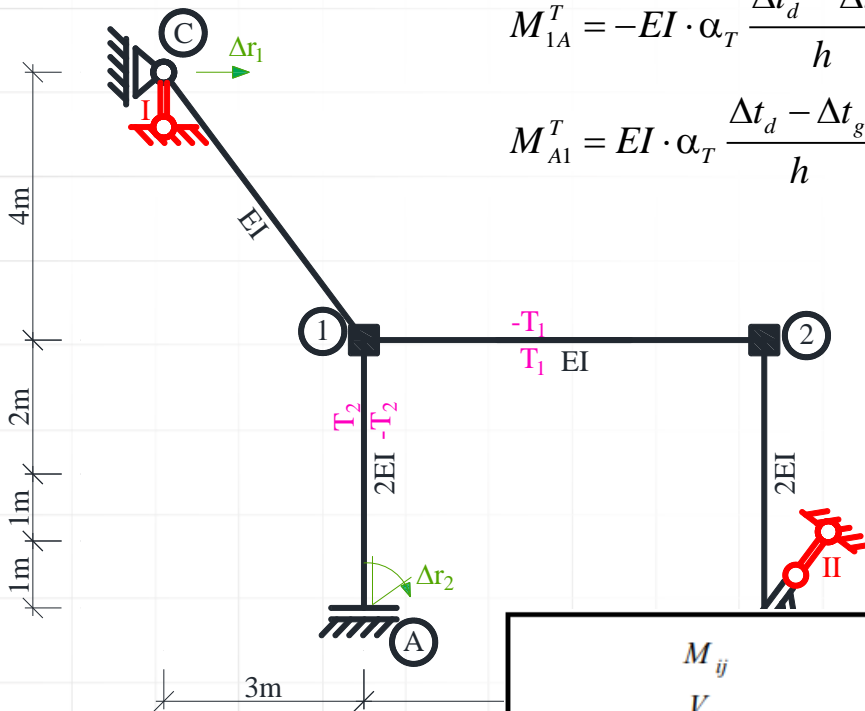
Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{1A}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ C - (-25^\circ C)}{0,18m} = -555,5556 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{A1}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = 2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ C - (-25^\circ C)}{0,18m} = 555,5556 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m},$$



M_{ij} V_{ij}		M_{ji}
$M_{ij} = -EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$		$M_{ji} = EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$
$V_{ij} = 0$		

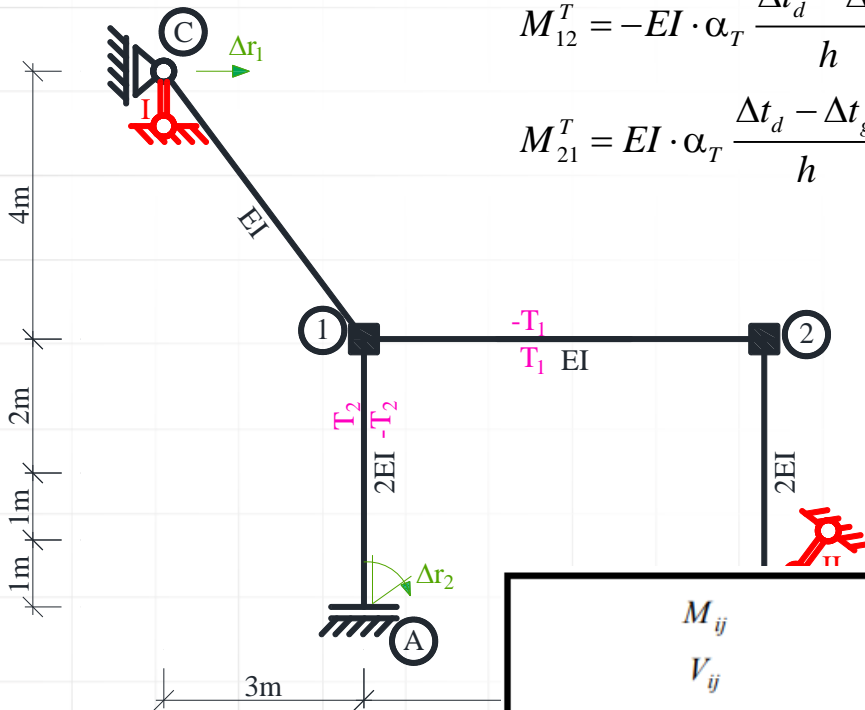
Rys. 2. Układ podstawowy

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{12}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20^\circ C)}{0,18m} = -222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{21}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20^\circ C)}{0,18m} = 222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m},$$



M_{ij} V_{ij}		M_{ji} V_{ji}
$M_{ij} = -EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$		$M_{ji} = EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$
$V_{ij} = 0$		$V_{ji} = 0$

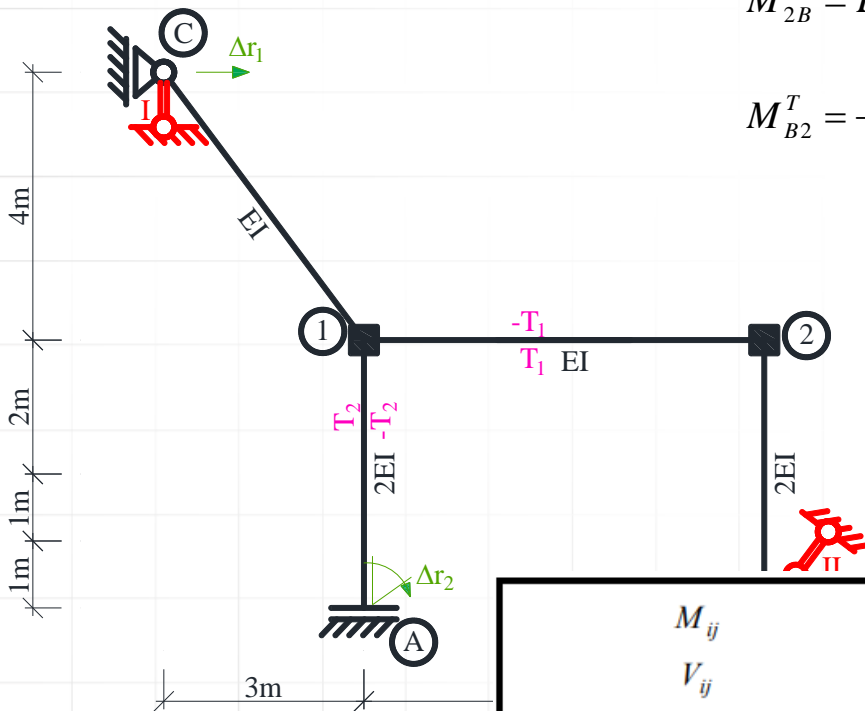
Rys. 2. Układ podstawowy

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{2B}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = 2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0,$$

$$M_{B2}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0,$$



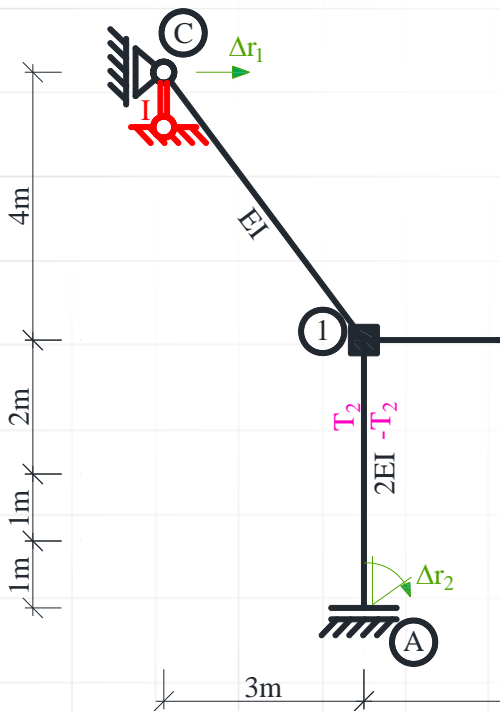
M_{ij} V_{ij}		M_{ji} V_{ji}
$M_{ij} = -EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$		$M_{ji} = EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$
$V_{ij} = 0$		$V_{ji} = 0$

Rys. 2. Układ podstawowy

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{1C}^0 = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0$$



M_{ij} V_{ij}		V_{ji}
$M_{ij} = -1.5EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$		$V_{ji} = 1.5EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/(Lh)$

Rys. 2. Układ podstawowy

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{1A}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ C - (-25^\circ C)}{0,18m} = -555,5556 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m}$$

$$M_{A1}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = 2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{25^\circ C - (-25^\circ C)}{0,18m} = 555,5556 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m}$$

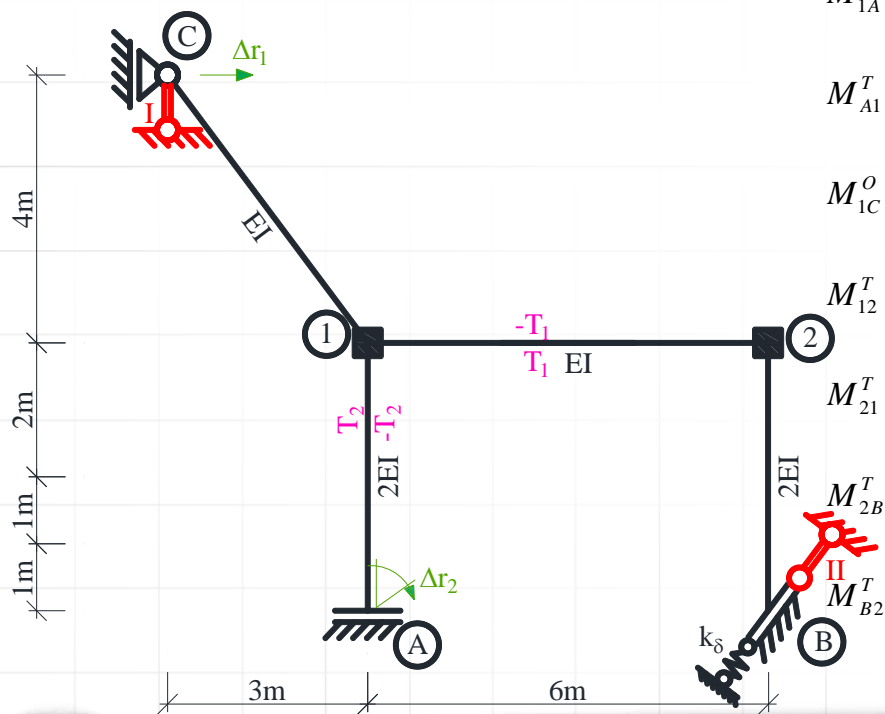
$$M_{1C}^O = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -1,5 \cdot EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0$$

$$M_{12}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20^\circ C)}{0,18m} = -222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m}$$

$$M_{21}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{20^\circ C - (-20^\circ C)}{0,18m} = 222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m}$$

$$M_{2B}^T = EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = 2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0,$$

$$M_{B2}^T = -EI \cdot \alpha_T \frac{\Delta t_d - \Delta t_g}{h} = -2EI \cdot \alpha_T \cdot \frac{0}{0,18m} = 0,$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OBCIĄŻENIA TEMPERATURA

$$M_{1A}^T = -555,5556 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{A1}^T = 555,5556 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m},$$

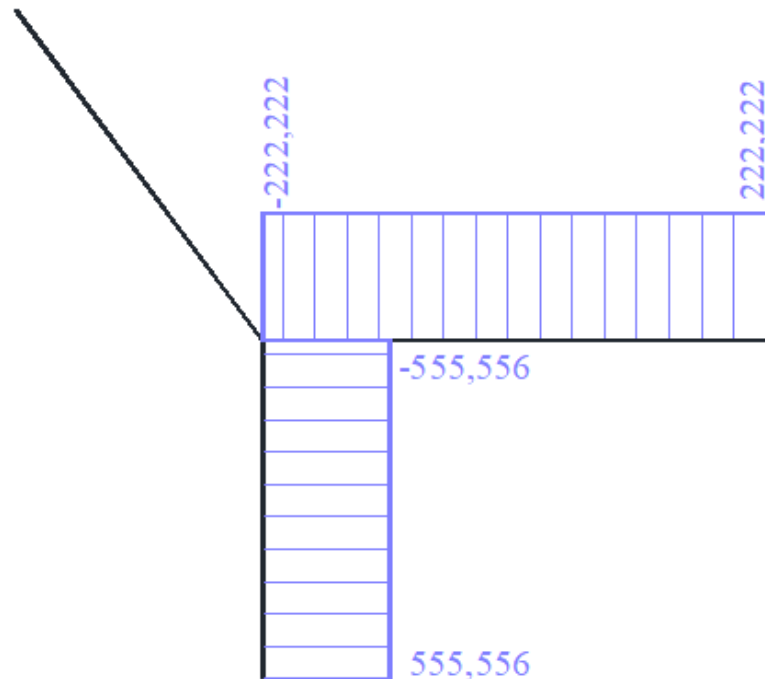
$$M_{1C}^O = 0$$

$$M_{12}^T = -222,2222 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{21}^T = 222,2222 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m},$$

$$M_{2B}^T = 0,$$

$$M_{B2}^T = 0,$$



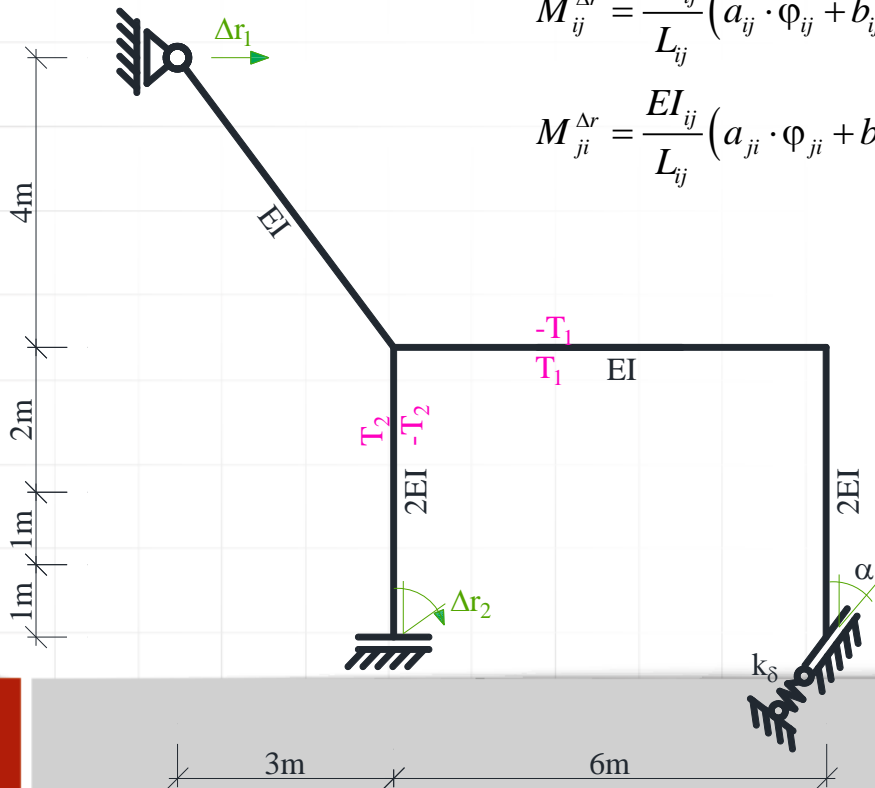
Rys. 3. Wykres momentów M^T w $\frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m}$

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OSIADANIA PODPÓR

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążenie danych towarzyszy $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ij} = 0$. Dla elementów przyjętych. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{ij}^{\Delta r} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij})$$

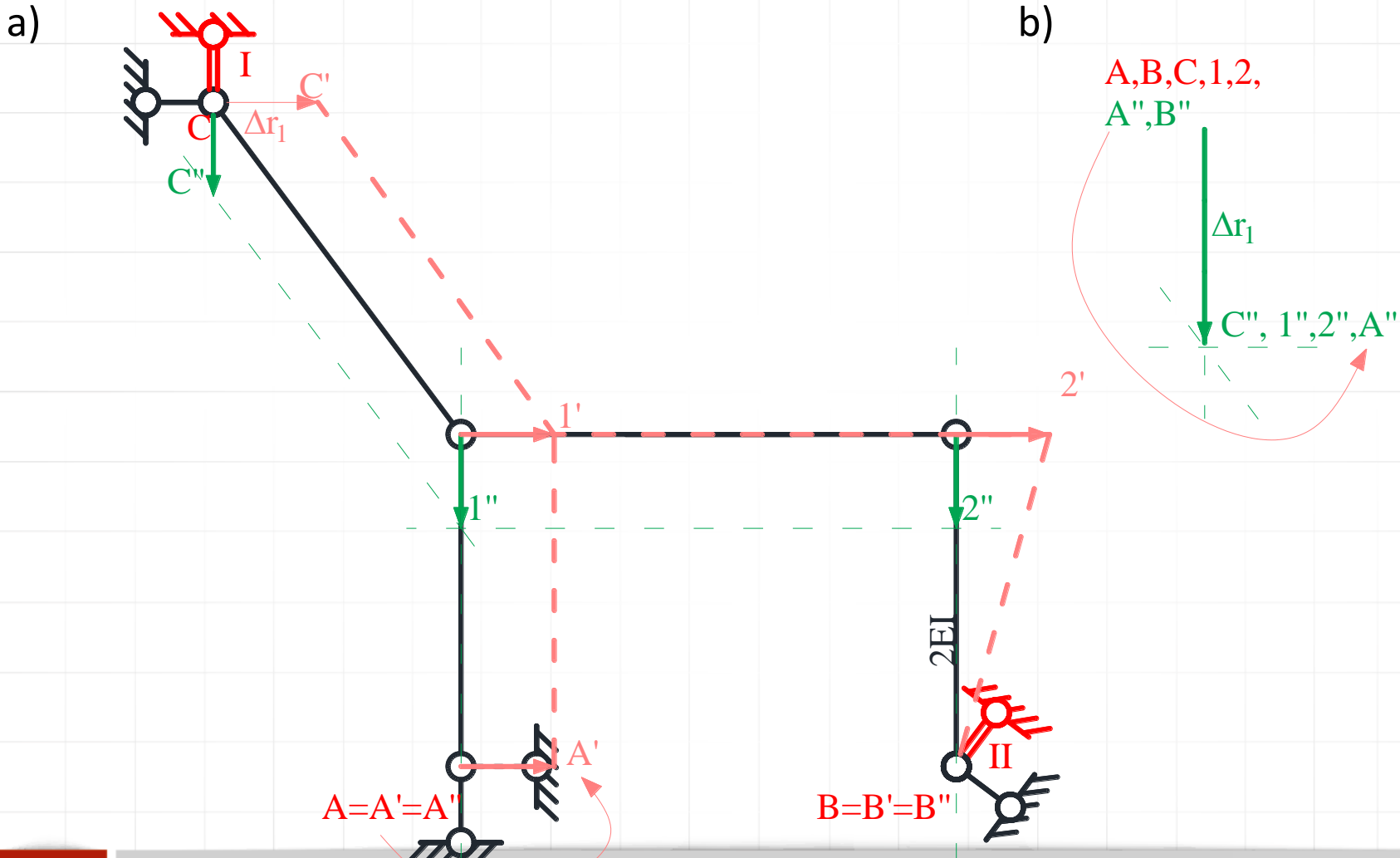
$$M_{ji}^{\Delta r} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij})$$



$$\sin \alpha = 0,6$$

$$\cos \alpha = 0,8$$

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OSIADANIA PODPÓR

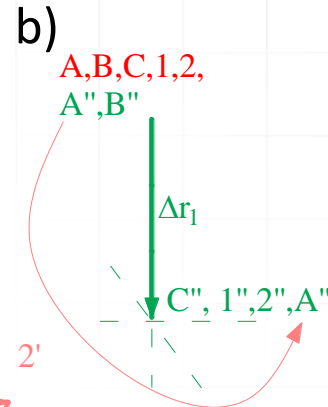
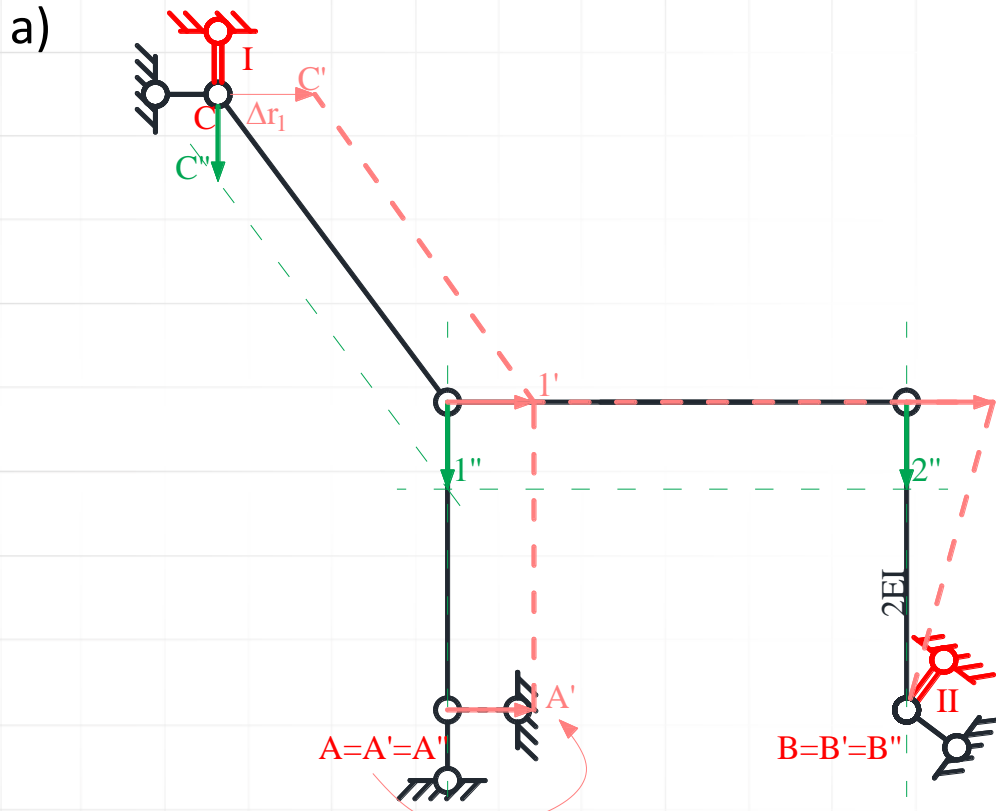


Rys. 4. a) Plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) B.P.P.O

$\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}; \Delta r_2 = 0,03 \text{ rad}$



ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OSIADANIA PODPÓR



Wartości wzajemnych przesunięć
końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{12}^{\Delta r_1} = -|1''2''| = 0$$

$$\Delta_{2B}^{\Delta r_1} = -|2''B''| = \Delta r_1 = 0,02m$$

$$\Delta_{1A}^{\Delta r_1} = |1''A''| = 0$$

$$\Delta_{1C}^{\Delta r_1} = |1''C''| = 0$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^{\Delta r_1} = \frac{\Delta_{ij}^{\Delta r_1}}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^{\Delta r_1} = 0,$$

$$\psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{\Delta r_1}}{L_{2B}} = \frac{0,02m}{4m} = 0,005$$

$$\psi_{1A}^{\Delta r_1} = \psi_{1C}^{\Delta r_1} = 0$$

$$\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}; \Delta r_2 = 0,03 \text{ rad}$$

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OSIADANIA PODPÓR

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^{\Delta r_i} = \frac{\Delta_{ij}^{\Delta r_i}}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^{\Delta r_1} = 0, \quad \psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{\Delta r_1}}{L_{2B}} = \frac{0,02m}{4m} = 0,005, \quad \psi_{1A}^{\Delta r_1} = \psi_{1C}^{\Delta r_1} = 0$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia Δr_i wynoszą:

$$M_{12}^{\Delta r} = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21} - c_{12} \cdot \psi_{12}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{21}^{\Delta r} = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12} - c_{21} \cdot \psi_{12}) = \frac{EI}{6m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{1A}^{\Delta r} = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}} (a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \Delta r_2 - c_{1A} \cdot \psi_{1A}) = \frac{2EI}{4m} (1 \cdot 0 - 1 \cdot 0,03 - 6 \cdot 0) = -0,015 \frac{EI}{m},$$

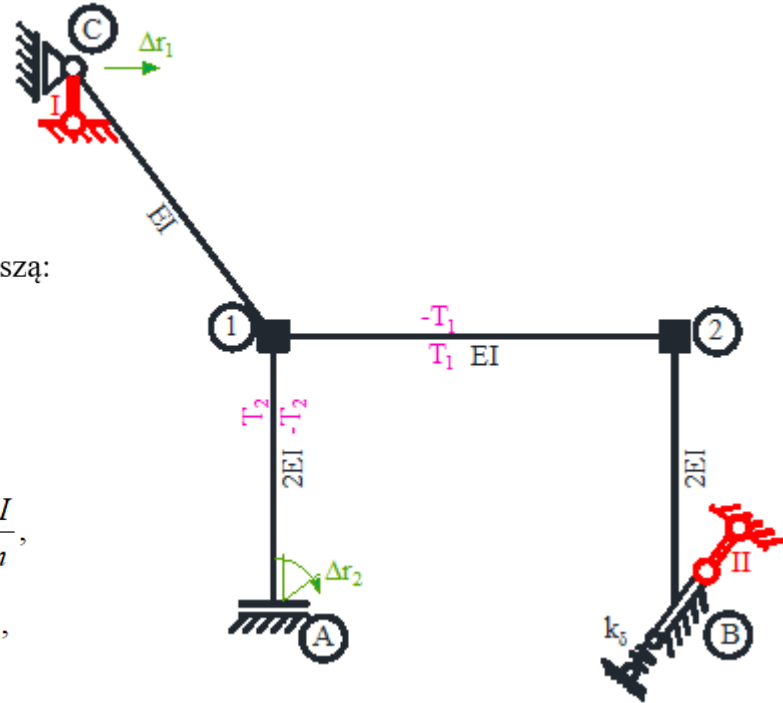
$$M_{A1}^{\Delta r} = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}} (a_{A1} \cdot \Delta r_2 + b_{A1} \cdot \varphi_{1A} - c_{A1} \cdot \psi_{1A}) = \frac{2EI}{4m} (1 \cdot 0,03 - 1 \cdot 0 - 6 \cdot 0) = 0,015 \frac{EI}{m},$$

$$M_{1C}^{\Delta r} = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{1C} - c_{1C} \cdot \psi_{1C}) = \frac{2EI}{4m} (3 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{C1}^{\Delta r} = \frac{EI_{C1}}{L_{C1}} (a_{C1} \cdot \varphi_{C1} + b_{C1} \cdot \varphi_{1C} - c_{C1} \cdot \psi_{1C}) = \frac{EI}{5m} (0 \cdot 0 + 0 - 3 \cdot 0) = 0,$$

$$M_{2B}^{\Delta r} = \frac{EI_{2B}}{L_{2B}} (a_{2B} \cdot \varphi_{2B} + b_{2B} \cdot \varphi_{B2} - c_{2B} \cdot \psi_{2B}^{\Delta r_1}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0,005) = -0,015 \frac{EI}{m},$$

$$M_{B2}^{\Delta r} = \frac{EI_{B2}}{L_{B2}} (a_{B2} \cdot \varphi_{B2} + b_{B2} \cdot \varphi_{2B} - c_{B2} \cdot \psi_{2B}^{\Delta r_1}) = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot 0,005) = -0,015 \frac{EI}{m}.$$



Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^{\Delta r_i} = \frac{\Delta_{ij}^{\Delta r_i}}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^{\Delta r_1} = 0,$$

$$\psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{\Delta r_1}}{L_{2B}} = \frac{0,02m}{4m} = 0,005$$

$$\psi_{1A}^{\Delta r_1} = \psi_{1C}^{\Delta r_1} = 0$$

$$\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}; \quad \Delta r_2 = 0,03 \text{ rad}$$

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD OSIADANIA PODPÓR

$$M_{12}^{\Delta r} = 0,$$

$$M_{21}^{\Delta r} = 0,$$

$$M_{1A}^{\Delta r} = -0,015 \frac{EI}{m},$$

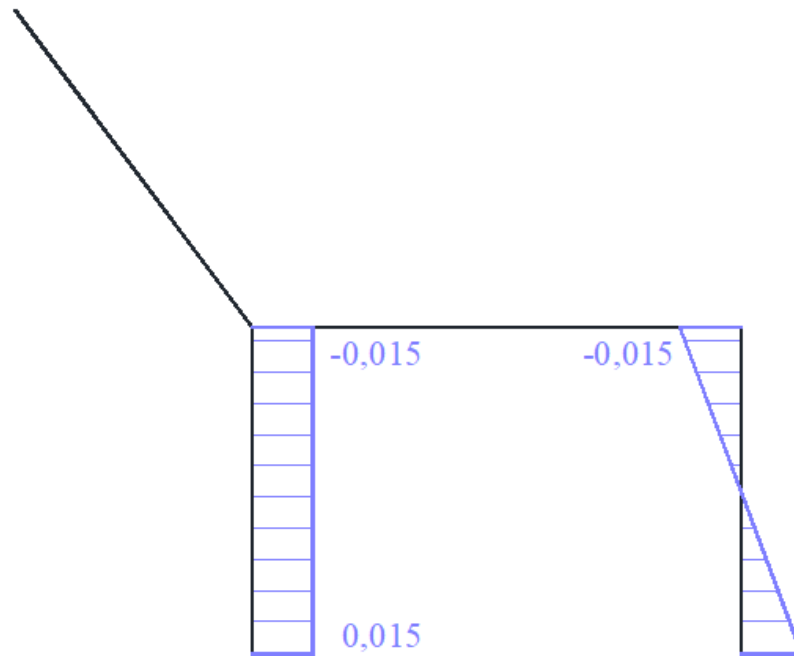
$$M_{A1}^{\Delta r} = 0,015 \frac{EI}{m},$$

$$M_{1C}^{\Delta r} = 0,$$

$$M_{C1}^{\Delta r} = 0,$$

$$M_{2B}^{\Delta r} = -0,015 \frac{EI}{m},$$

$$M_{B2}^{\Delta r} = -0,015 \frac{EI}{m}.$$

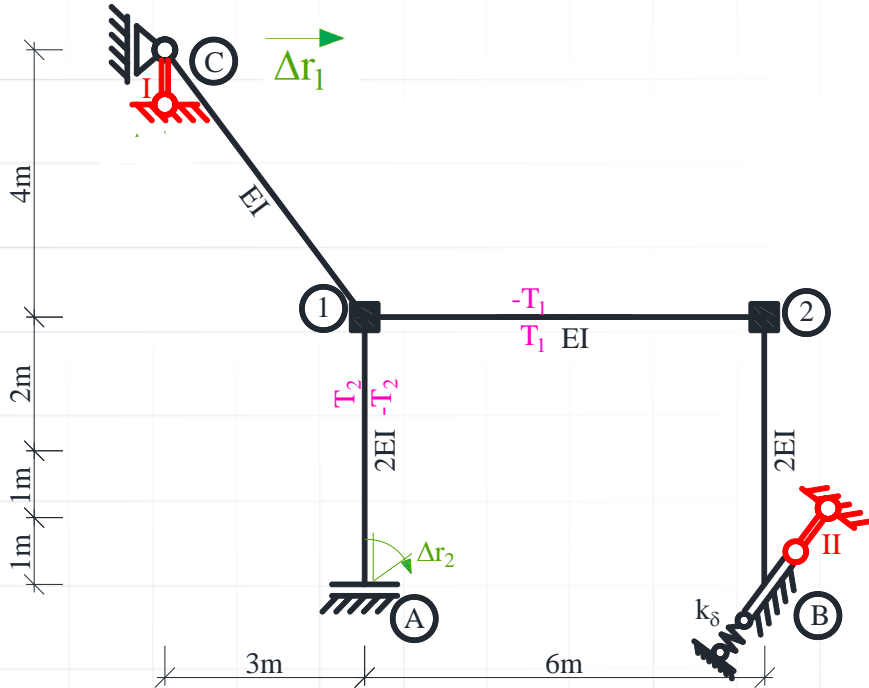


Rys. 5. Wykres momentów $M^{\delta r}$ w $\frac{EI}{m}$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$\begin{aligned}
 k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{10} &= 0 \\
 k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{20} &= 0 \\
 k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I I} \cdot \delta_I + k_{I II} \cdot \delta_{II} + k_{I0} &= 0 \\
 k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II I} \cdot \delta_I + k_{II II} \cdot \delta_{II} + k_{II0} &= 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{10} &= k_{1T} + k_{1\Delta r} \\
 k_{20} &= k_{2T} + k_{2\Delta r} \\
 k_{I0} &= k_{IT} + k_{I\Delta r} \\
 k_{II0} &= k_{IIT} + k_{II\Delta r}
 \end{aligned}$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Laboratorium nr 3

$$k_{11} = \sum_j M_{1j}^1 + k_1^\varphi = M_{12}^1 + M_{1A}^1 + M_{1C}^1 + k_1^\varphi = (0,6667 + 0,5 + 0,6 + 0) \frac{EI}{m} = \frac{53 EI}{30 m}$$
$$= 4897,2 \text{ kN m},$$

$$k_{12} = \sum_j M_{1j}^2 = M_{12}^2 + M_{1A}^2 + M_{1C}^2 = (0,3333 + 0 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m} = 924,0 \text{ kN m},$$

$$k_{1I} = \sum_j M_{1j}^I = M_{12}^I + M_{1A}^I + M_{1C}^I = 0 + 0 + \left(-\frac{1}{5}\right) \frac{EI}{m^2} = -554,4 \text{ kN},$$

$$k_{1II} = \sum_j M_{1j}^{II} = M_{12}^{II} + M_{1A}^{II} + M_{1C}^{II} = \frac{2 EI}{15 m^2} + 0 + 0 = 0,1333 \frac{EI}{m^2} = 369,6 \text{ kN},$$

$$k_{21} = \sum_j M_{2j}^1 = M_{21}^1 + M_{2B}^1 = (0,3333 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m} = 924,0 \text{ kN m},$$

$$k_{22} = \sum_j M_{2j}^2 + k_2^\varphi = M_{21}^2 + M_{2B}^2 + k_2^\varphi = \left(\frac{2}{3} + 2 + 0\right) \frac{EI}{m} = \frac{8 EI}{3 m} = 2,6667 \frac{EI}{m} = 7392 \text{ kN m},$$

$$k_{2I} = \sum_j M_{2j}^I = M_{21}^I + M_{2B}^I = 0 + 1 \frac{EI}{m^2} = 1 \frac{EI}{m^2} = 2772 \text{ kN m},$$

$$k_{2II} = \sum_j M_{2j}^{II} = M_{21}^{II} + M_{2B}^{II} = \left(\frac{2}{15}\right) \frac{EI}{m^2} + \left(\frac{9}{20}\right) \frac{EI}{m^2} = \frac{7 EI}{12 m^2} = 0,5833 \frac{EI}{m^2} = 1661,7 \text{ kN m},$$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

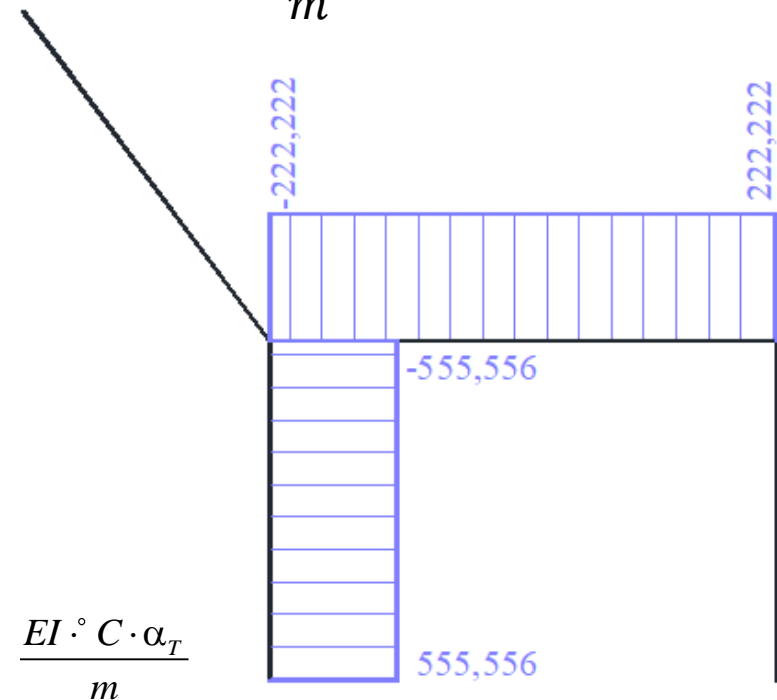
Wyrazy wolne od wpływu temperatury:

$$k_{1T} = \sum_j M_{1j}^T = M_{12}^T + M_{1A}^T + M_{1C}^T = -222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m} - 555,55556 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m} + 0$$

$$= -777,7778 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m} = -25,872 \text{ kN m},$$

$$k_{2T} = \sum_j M_{2j}^o - M_2^o = M_{21}^o + M_{2B}^o - (-M) = 222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m} + 0$$

$$= 222,2222 \frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m} = 7,392 \text{ kN m}.$$



Rys. 4. Wykres momentów M^T w $\frac{EI \cdot ^\circ C \cdot \alpha_T}{m}$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Wyrazy wolne od osiadania podpór:

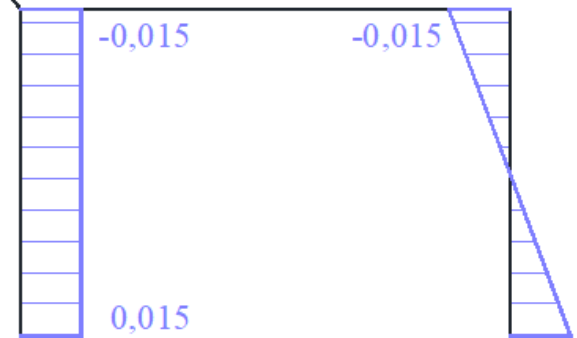
$$k_{1\Delta r} = \sum_j M_{1j}^{\Delta r} = M_{12}^{\Delta r} + M_{1A}^{\Delta r} + M_{1C}^{\Delta r} = 0 - 0,015 \frac{EI}{m} + 0 = -0,015 \frac{EI}{m} = -41,58 \text{ kN m},$$

$$k_{2\Delta r} = \sum_j M_{2j}^{\Delta r} = M_{21}^{\Delta r} + M_{2B}^{\Delta r} = 0 - 0,015 \frac{EI}{m} + 0 = -0,015 \frac{EI}{m} = -41,58 \text{ kN m}.$$

$$k_{10} = k_{1T} + k_{1\Delta r} = -25,872 \text{ N m} - 41,58 \text{ kN m} = -67,452 \text{ kN m}$$

$$k_{20} = k_{2T} + k_{2\Delta r} = 7,392 \text{ kN m} - 41,58 \text{ kN m} = -34,188 \text{ kN m}$$

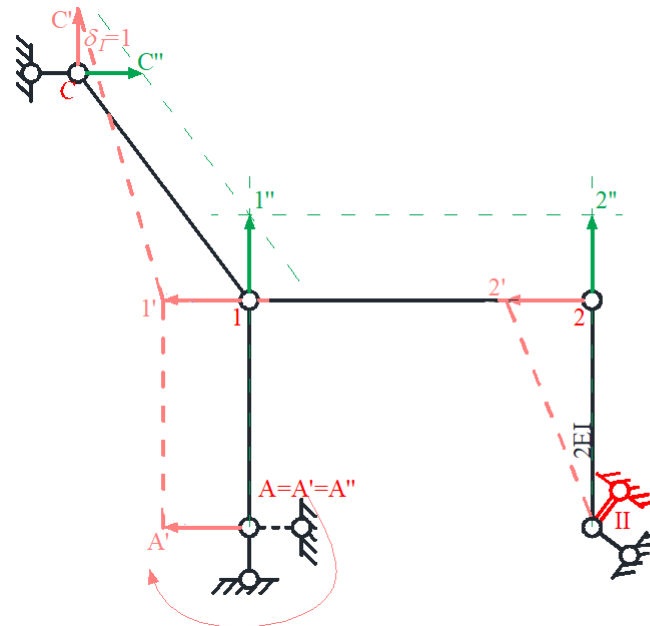
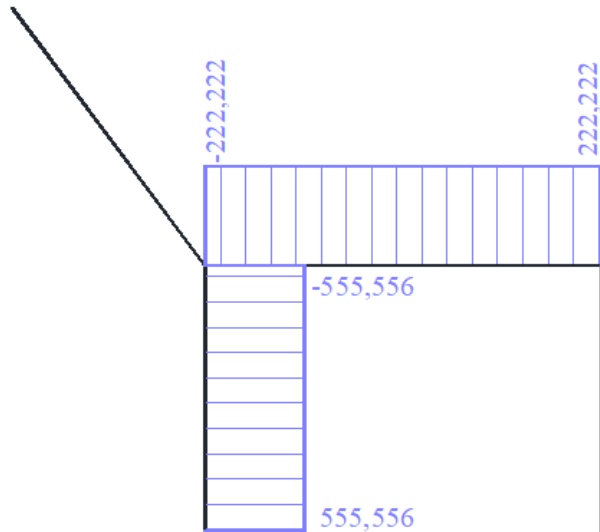
Rys. 5. Wykres momentów $M^{\Delta r}$ w $\frac{EI}{m}$



WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Wyrazy wolne od wpływu temperatury:

$$\begin{aligned}
 k_{IT} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^T + M_{ji}^T) \psi_{ij}^I \\
 &= -(M_{12}^T + M_{21}^T) \psi_{12}^I - (M_{1A}^T + M_{A1}^T) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^T + M_{C1}^T) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^T + M_{B2}^T) \psi_{2B}^I \\
 &= - \left(-555,5556 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m} + 555,5556 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot \frac{1}{3m} \\
 &\quad - \left(-222,2222 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m} + -222,2222 \frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot \left(-\frac{1}{3m} \right) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \psi_{2B}^I &= \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m} \\
 \psi_{1C}^I &= \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m} \\
 \psi_{1A}^I &= \psi_{12}^I = 0
 \end{aligned}$$

Rys. 4. Wykres momentów M^T w $\frac{EI \cdot \text{°C} \cdot \alpha_T}{m}$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$\begin{aligned}
 k_{I1} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi_{ij}^I \\
 &= -(M_{12}^1 + M_{21}^1) \psi_{12}^I - (M_{1A}^1 + M_{A1}^1) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^1 + M_{C1}^1) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^1 + M_{B2}^1) \psi_{2B}^I \\
 &= - \left(0,6667 \frac{EI}{m} + 0,3333 \frac{EI}{m} \right) \cdot 0 - \left(0,5 \frac{EI}{m} - 0,5 \frac{EI}{m} \right) \cdot 0 - \left(0,6 \frac{EI}{m} + 0 \right) \cdot \frac{1}{3m} - (0 + 0) \\
 &\cdot \left(-\frac{1}{3m} \right) = -0,2 \frac{EI}{m^2} = -554,4kN
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{I2} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^2 + M_{ji}^2) \psi_{ij}^I \\
 &= -(M_{12}^2 + M_{21}^2) \psi_{12}^I - (M_{1A}^2 + M_{A1}^2) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^2 + M_{C1}^2) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^2 + M_{B2}^2) \psi_{2B}^I \\
 &= - \left(0,3333 \frac{EI}{m} + 0,6667 \frac{EI}{m} \right) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot \frac{1}{3m} - \left(1 \frac{EI}{m^2} + 1 \frac{EI}{m^2} \right) \\
 &\cdot \left(-\frac{1}{3m} \right) = 1 \frac{EI}{m^2} = 2772kN,
 \end{aligned}$$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

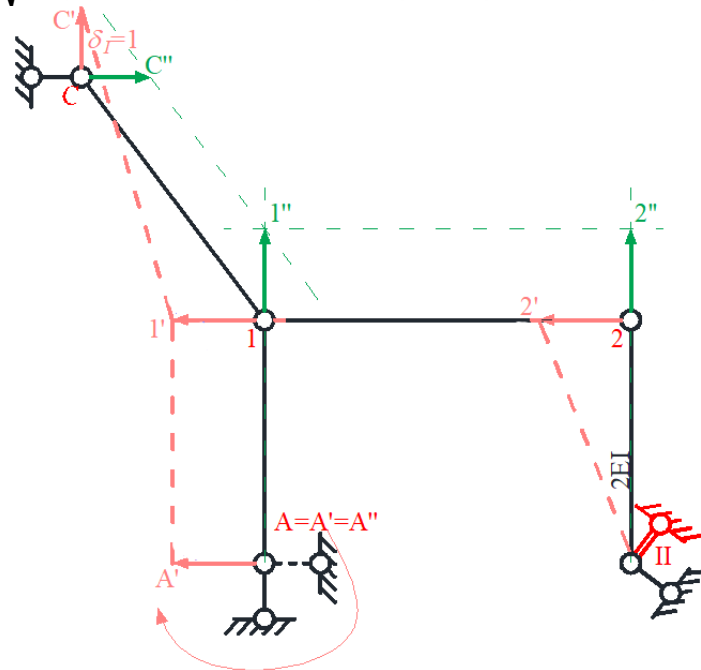
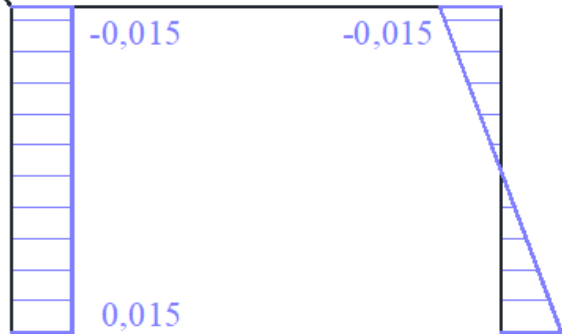
$$\begin{aligned}
 k_{II} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^I \\
 &= -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^I - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi_{2B}^I + k^\delta \cdot \delta^I \cdot \delta^I \\
 &= -(0 + 0) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot 0 - \left(-\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2} + 0 \right) \cdot \frac{1}{3m} - \left(1 \frac{EI}{m} + 2 \frac{EI}{m} \right) \cdot \left(-\frac{1}{3m} \right) + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0 \cdot 0 \\
 &= 0,7333333 \frac{EI}{m^3} = 2032,7991 \frac{kN}{m},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{III} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II}) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^{II} \\
 &= -(M_{12}^{II} + M_{21}^{II}) \psi_{12}^I - (M_{1A}^{II} + M_{A1}^{II}) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^{II} + M_{C1}^{II}) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^{II} + M_{B2}^{II}) \psi_{2B}^I + k^\delta \cdot \delta^I \cdot \delta^{II} \\
 &= - \left(\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} \right) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 - \left(\frac{9}{20} \frac{EI}{m^2} + \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2} \right) \cdot \left(-\frac{1}{3m} \right) \\
 &+ 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0 \cdot 1 = 0,3 \frac{EI}{m^3} = 831,6 \frac{kN}{m},
 \end{aligned}$$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Wyrazy wolne od osiadania podpór:

$$\begin{aligned}
 k_{I\Delta r} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^{\Delta r} + M_{ji}^{\Delta r}) \psi_{ij}^{\Delta r} \\
 &= -(M_{12}^{\Delta r} + M_{21}^{\Delta r}) \psi_{12}^I - (M_{1A}^{\Delta r} + M_{A1}^{\Delta r}) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^{\Delta r} + M_{C1}^{\Delta r}) \psi_{1C}^I - (M_{2B}^{\Delta r} + M_{B2}^{\Delta r}) \psi_{2B}^I \\
 &= -(0 + 0) \cdot \frac{1}{3m} - \left(-0,015 \frac{EI}{m} + 0,015 \frac{EI}{m} \right) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 - \left(-0,015 \frac{EI}{m} - 0,015 \frac{EI}{m} \right) \\
 &\cdot \left(-\frac{1}{3m} \right) = -0,01 \frac{EI}{m^2} = -27,72 kN
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \psi_{2B}^I &= \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m} \\
 \psi_{1C}^I &= \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m} \\
 \psi_{1A}^I &= \psi_{12}^I = 0
 \end{aligned}$$

Rys. 5. Wykres momentów $M^{\Delta r}$ w $\frac{EI}{m}$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$\begin{aligned}
 k_{II1} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi_{ij}^{II} \\
 &= -(M_{12}^1 + M_{21}^1) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^1 + M_{A1}^1) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^1 + M_{C1}^1) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^1 + M_{B2}^1) \psi_{2B}^{II} = \\
 &= - \left(0,6667 \frac{EI}{m} + 0,3333 \frac{EI}{m} \right) \cdot \left(-\frac{4}{30m} \right) - \left(0,5 \frac{EI}{m} - 0,5 \frac{EI}{m} \right) \cdot 0 - \left(0,6 \frac{EI}{m} + 0 \right) \\
 &\cdot 0 - (0 + 0) \cdot \left(-\frac{3}{20m} \right) = \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} = 369,6kN,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{II2} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^2 + M_{ji}^2) \psi_{ij}^{II} \\
 &= -(M_{12}^2 + M_{21}^2) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^2 + M_{A1}^2) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^2 + M_{C1}^2) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^2 + M_{B2}^2) \psi_{2B}^{II} = \\
 &= - \left(0,3333 \frac{EI}{m} + 0,6667 \frac{EI}{m} \right) \cdot \left(-\frac{4}{30m} \right) - (0 - 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 \\
 &- \left(1 \frac{EI}{m} + 2 \frac{EI}{m} \right) \cdot \left(-\frac{3}{20m} \right) = 0,5833 \frac{EI}{m^2} = 16617kN,
 \end{aligned}$$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

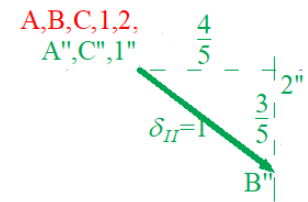
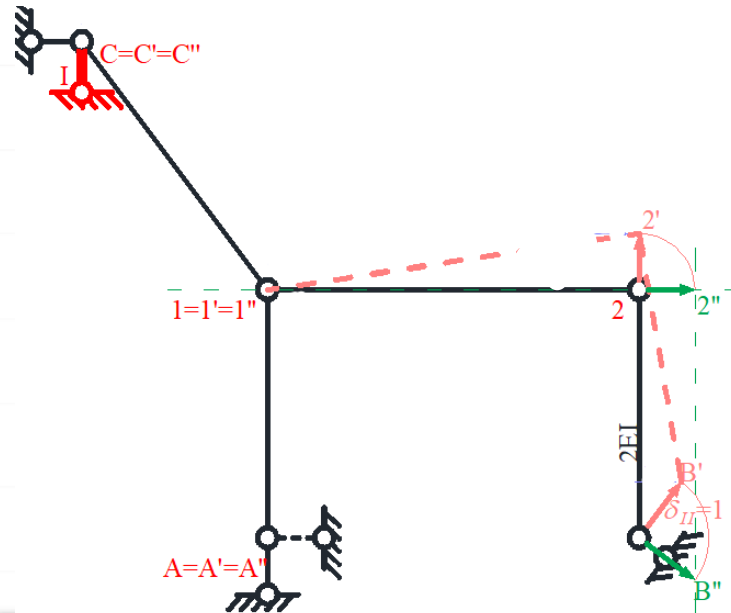
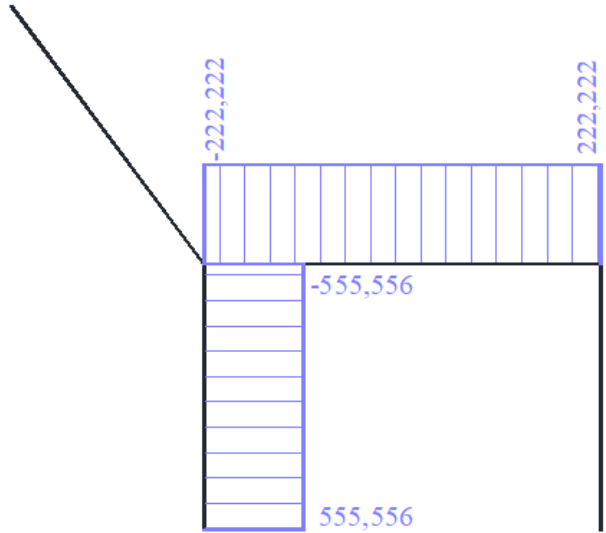
$$\begin{aligned}
 k_{III} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^{II} + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^{II} \cdot \delta_s^I \\
 &= -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^I + M_{C1}^I) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^I + M_{B2}^I) \psi_{2B}^{II} + k^\delta \cdot \delta^{II} \cdot \delta^I \\
 &= -(0 + 0) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - (0 - 0) \cdot 0 - \left(-\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2} + 0\right) \cdot 0 - \left(1 \frac{EI}{m^2} + 1 \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) \\
 &+ 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 0 = 0,3 \frac{EI}{m^3} = 831,6 \frac{kN}{m},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{III} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II}) \psi_{ij}^{II} + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^{II} \cdot \delta_s^{II} \\
 &= -(M_{12}^{II} + M_{21}^{II}) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^{II} + M_{A1}^{II}) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^{II} + M_{C1}^{II}) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^{II} + M_{B2}^{II}) \psi_{2B}^{II} + k^\delta \cdot \delta^{II} \cdot \delta^{II} \\
 &= - \left(\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - (0 + 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 - \left(\frac{9}{20} \frac{EI}{m^2} + \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) \\
 &+ 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 1 = 8,1705 \frac{EI}{m^3} = 22648,626 \frac{kN}{m},
 \end{aligned}$$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Wyrazy wolne od wpływu temperatury:

$$\begin{aligned}
 k_{IIT} = & - \sum_{ij} (M_{ij}^T + M_{ji}^T) \psi_{ij}^{II} = - (M_{12}^T + M_{21}^T) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^T + M_{A1}^T) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^T + M_{C1}^T) \psi_{1C}^{II} - \\
 & - (M_{2B}^T + M_{B2}^T) \psi_{2B}^{II} = - \left(-555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + 555,5556 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot \left(-\frac{2}{15m} \right) \\
 & - \left(-222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} + -222,2222 \frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m} \right) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot \left(-\frac{3}{20m} \right) \\
 = & 0
 \end{aligned}$$



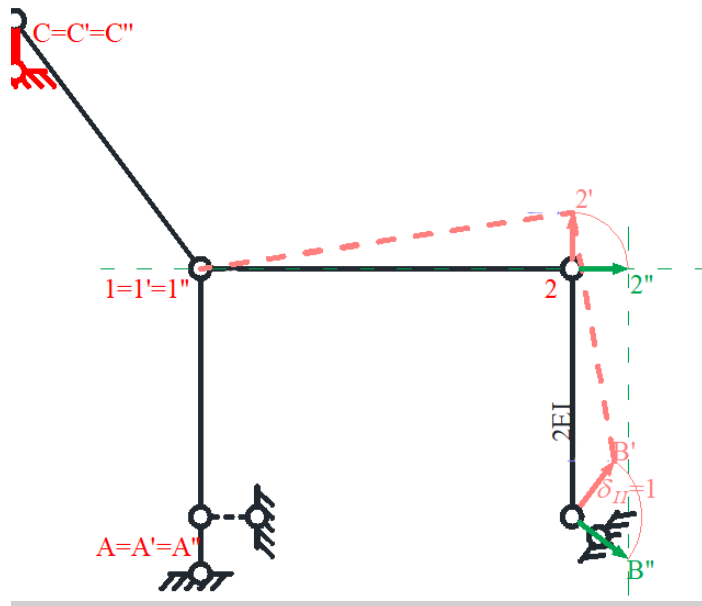
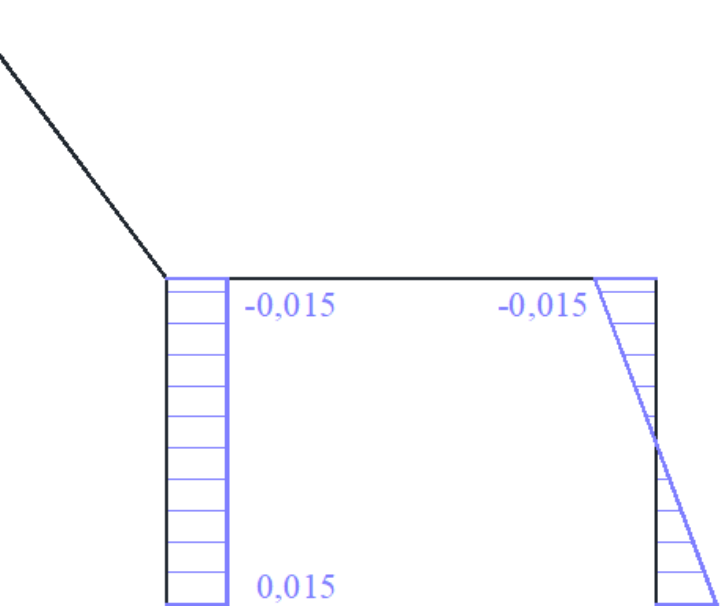
$$\begin{aligned}
 \psi_{12}^{II} &= \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m} \\
 \psi_{2B}^{II} &= \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m} \\
 \psi_{1A}^{II} &= \psi_{1C}^{II} = 0
 \end{aligned}$$

Rys. 4. Wykres momentów M^T w $\frac{EI \cdot C \cdot \alpha_T}{m}$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

Wyrazy wolne od wpływu temperatury:

$$\begin{aligned}
 k_{II\Delta r} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^{\Delta r} + M_{ji}^{\Delta r}) \psi_{ij}^{II} \\
 &= - (M_{12}^{\Delta r} + M_{21}^{\Delta r}) \psi_{12}^{II} - (M_{1A}^{\Delta r} + M_{A1}^{\Delta r}) \psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^{\Delta r} + M_{C1}^{\Delta r}) \psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^{\Delta r} + M_{B2}^{\Delta r}) \psi_{2B}^{II} \\
 &= - (0 + 0) \cdot \left(-\frac{2}{15m} \right) - \left(-0,015 \frac{EI}{m} + 0,015 \frac{EI}{m} \right) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 - \left(-0,015 \frac{EI}{m} - 0,015 \frac{EI}{m} \right) \\
 &\cdot \left(-\frac{3}{20m} \right) = -0,0045 \frac{EI}{m^2} = -12,474 kN,
 \end{aligned}$$



$\delta_{II}=1$
 $A, B, C, 1, 2, A'', C'', 1''$
 $\frac{4}{5}$
 $\frac{3}{5}$
 $2''$
 B''

$$\psi_{12}^{II} = \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m}$$

$$\psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m}$$

$$\psi_{1A}^{II} = \psi_{1C}^{II} = 0$$

Rys. 5. Wykres momentów $M^{\Delta r}$ w $\frac{EI}{m}$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{Io} = k_{IT} + k_{I\Delta r} = 0 - 27,72kN = -27,72kN$$

$$k_{IIo} = k_{IIT} + k_{II\Delta r} = 0 - 12,7575kN = -12,7575kN.$$

SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$4897,2kN \cdot m \cdot \varphi_1 + 924,0N \cdot m \cdot \varphi_2 - 554,4kN \cdot \delta_I + 369,6N \cdot \delta_{II} - 67,45kN \cdot m = 0$$

$$924,0kN \cdot m \cdot \varphi_1 + 7392kN \cdot m \cdot \varphi_2 + 2772kN \cdot \delta_I + 1661,7kN \cdot \delta_{II} - 34,188kN = 0$$

$$-554,4kN \cdot \varphi_1 + 2772kN \cdot \varphi_2 + 2032,7991 \frac{kN}{m} \cdot \delta_I + 831,6 \frac{kN}{m} \cdot \delta_{II} - 27,72kN = 0$$

$$369,6kN \cdot \varphi_1 + 1661,7kN \cdot \varphi_2 + 831,6 \frac{kN}{m} \cdot \delta_I + 22648,626 \frac{kN}{m} \cdot \delta_{II} - 12,7575kN = 0$$

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 0,01937 \\ \delta_I &= 0,03262m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\varphi_2 &= -0,00997 \\ \delta_{II} &= -0,00025m\end{aligned}$$

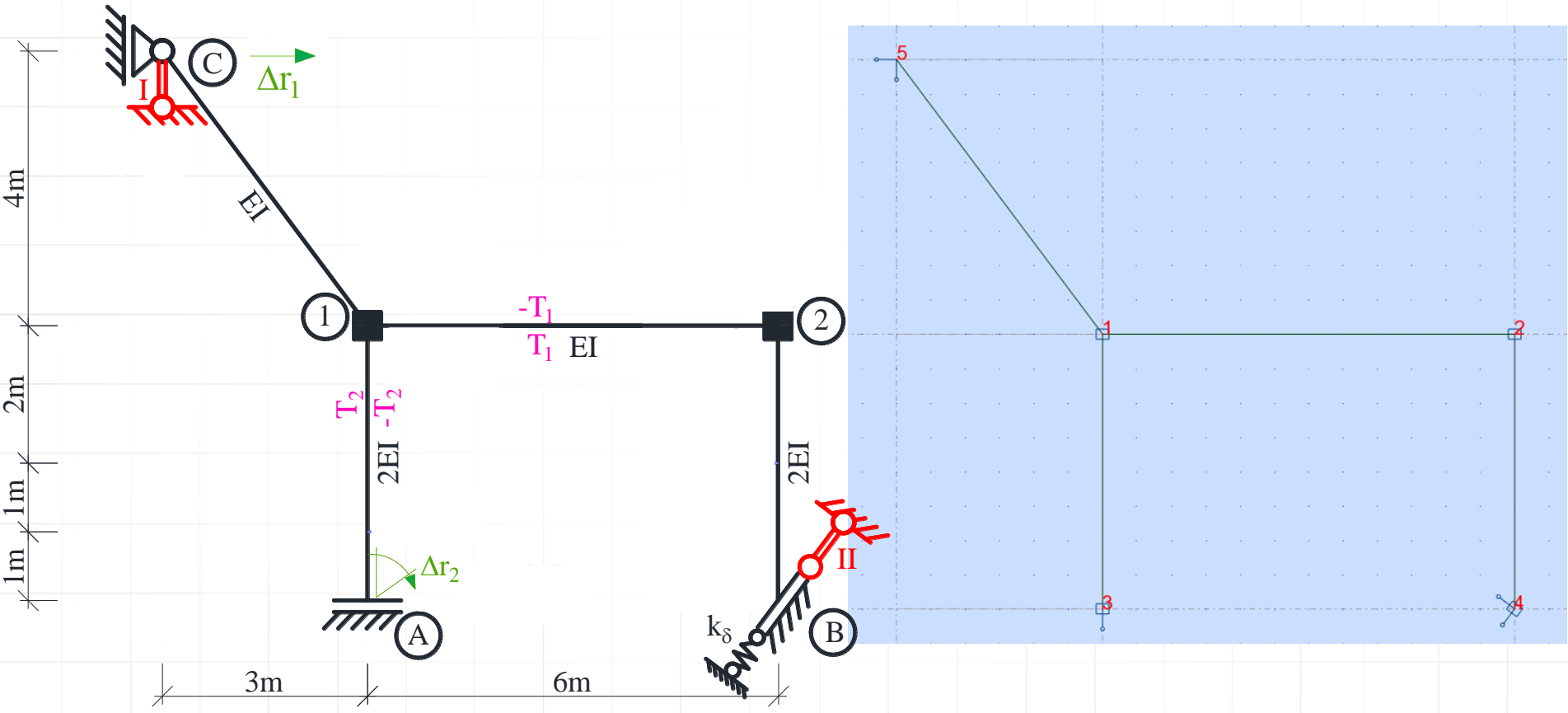
OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^2 \cdot \varphi_2 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{ij}^T + M_{ij}^{\Delta r}.$$

UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Do programu ROBOT wprowadzamy układ podstawowy metody przemieszczeń.



UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

należy nadać
wysokość
przekroju

Zdefiniowanie przekroju: $A_x = 1\ 000\ 000\ m^2$
 $I_y = 2772 \cdot 10^{-4}\ m^4 \leftarrow EI$
 $I_y = 2 \cdot 2772 \cdot 10^{-4}\ m^4 \leftarrow 2EI$
 $I_x, I_z = 0$

RM kNm
 RF kN
 Fx+c Fx-t 0.5kN
 Max=925193749,4106
 Min=-142659662,4538

Przypadki: 1 (c.wł)

UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Przypadki obciążenia:

1. Ciężar własny
2. Obciążenie dane (temp i osiadanie podpór)
3. φ_1
4. φ_2
5. δ_I
6. δ_{II}

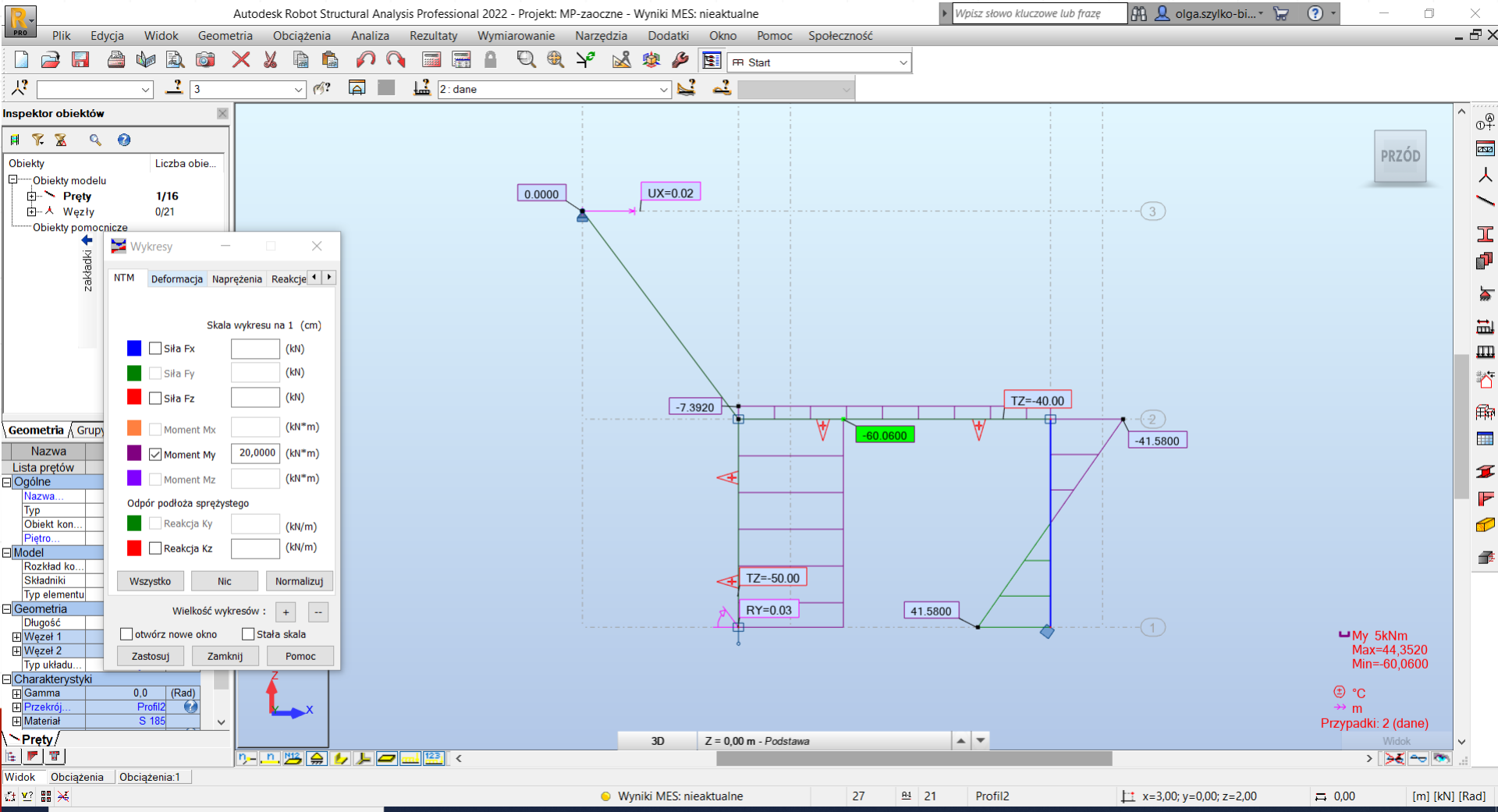
Przypadek obciążenia: 1 (c.wł)

Numer	Nazwa przypadku	Natura	Typ
1	c.wł	Konstrukcyjne	SI
2	dane	Konstrukcyjne	SI
3	fi1	Konstrukcyjne	SI
4	fi2	Konstrukcyjne	SI
5	dI	Konstrukcyjne	SI
6	dII	Konstrukcyjne	SI

Dane do obliczeń: $T_1 = 20 \text{ }^\circ\text{C}$; $T_2 = 25 \text{ }^\circ\text{C}$; $\Delta r_1 = 0,02 \text{ m}$; $\Delta r_2 = 0,03 \text{ rad}$.

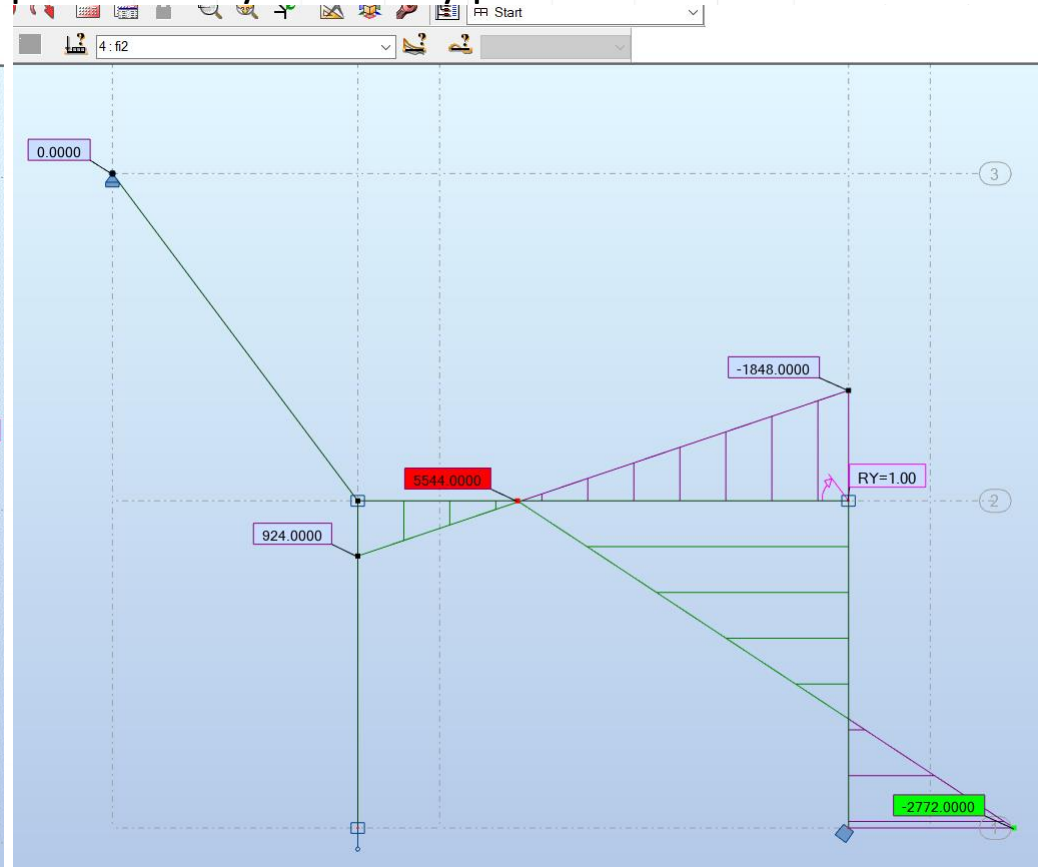
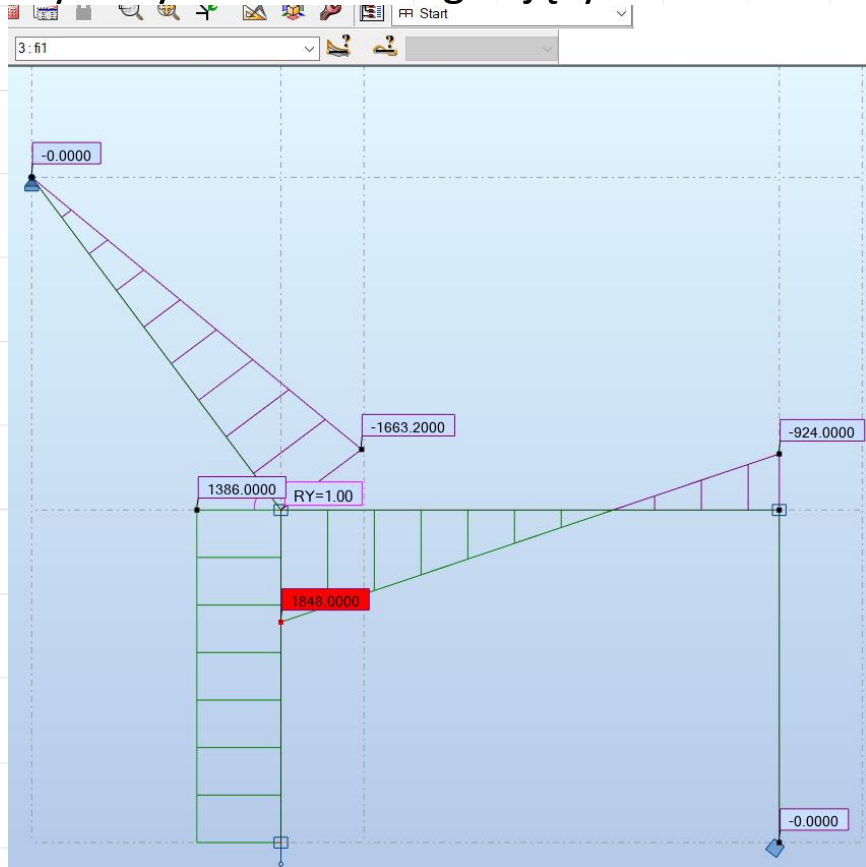
UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym metody przemieszczeń z uwzględnieniem sztywności $EI = 210000000 \text{ kN/m}^2 * 1320 * 10^{-8} \text{ m}^4 = 2772 \text{ kNm}^2$, $k_{\delta} = 8 EI/m^3 = 22176 \text{ kNm/m}^3$, oraz $\alpha_t = 0,000012 / ^\circ\text{C}$



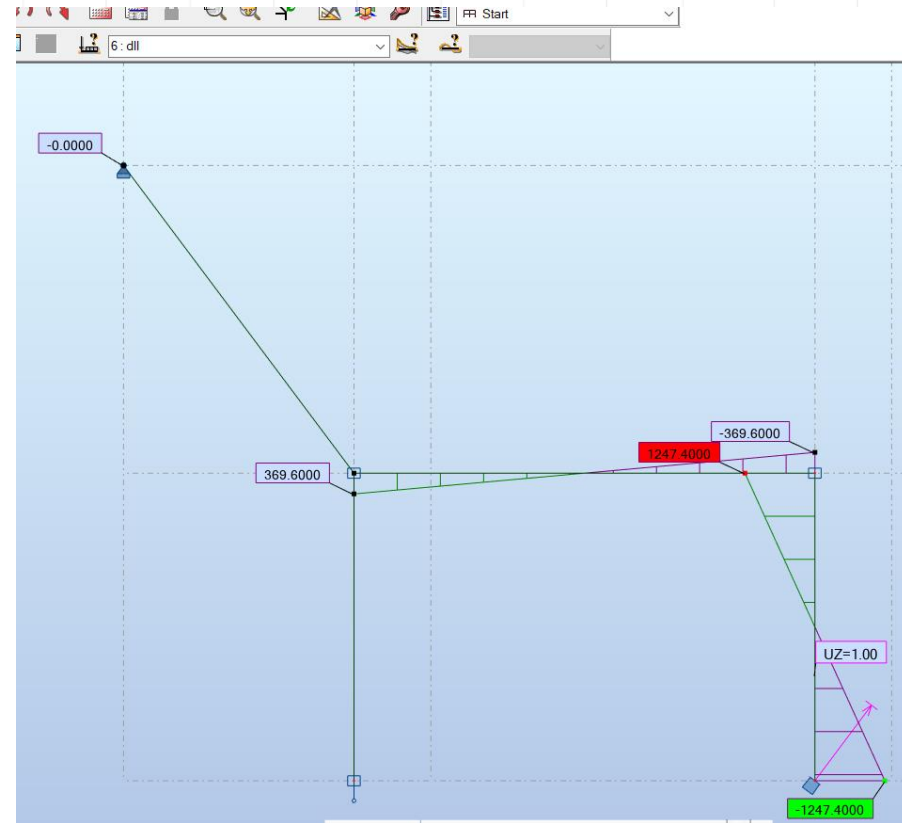
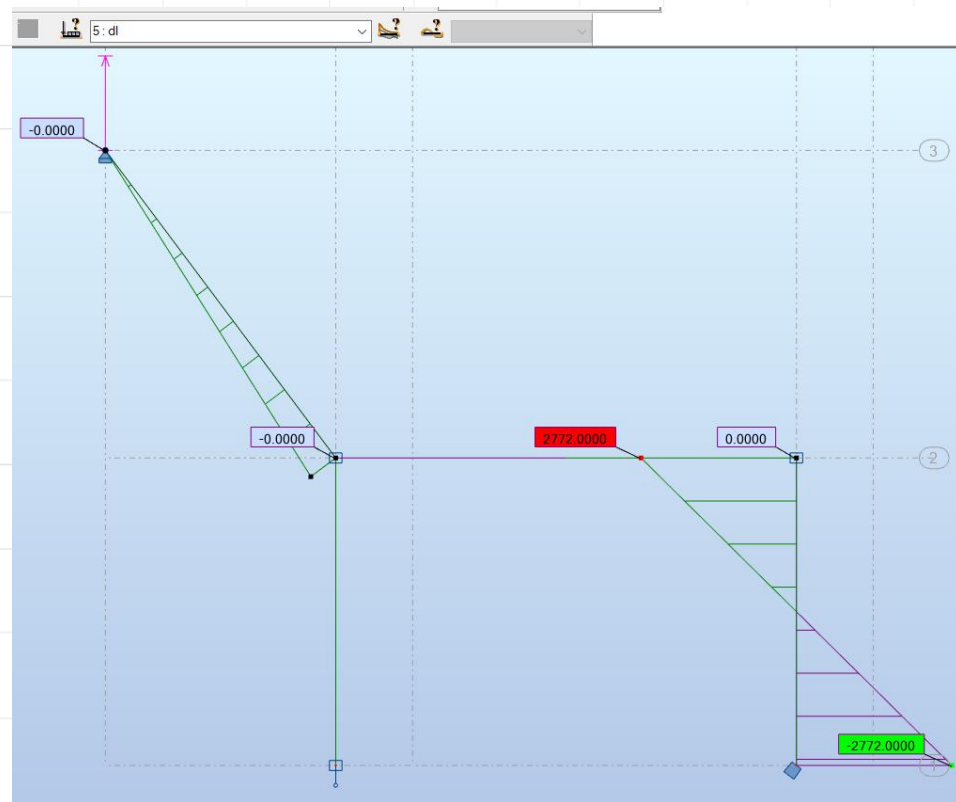
UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym metody przemieszczeń



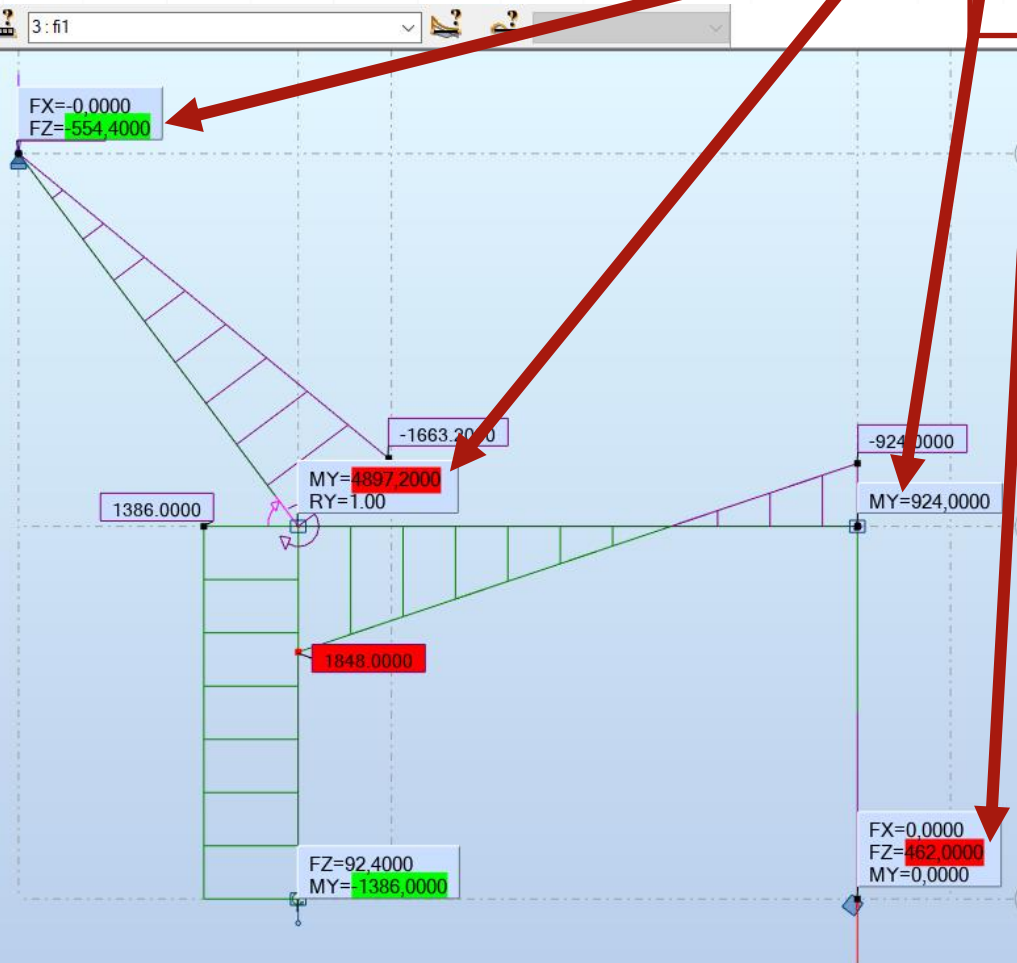
UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym metody przemieszczeń



KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

$$\begin{aligned}
 k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{10} &= 0 \\
 k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{20} &= 0 \\
 k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\ I} \cdot \delta_I + k_{I\ II} \cdot \delta_{II} + k_{I0} &= 0 \\
 k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\ I} \cdot \delta_I + k_{II\ II} \cdot \delta_{II} + k_{II0} &= 0
 \end{aligned}$$

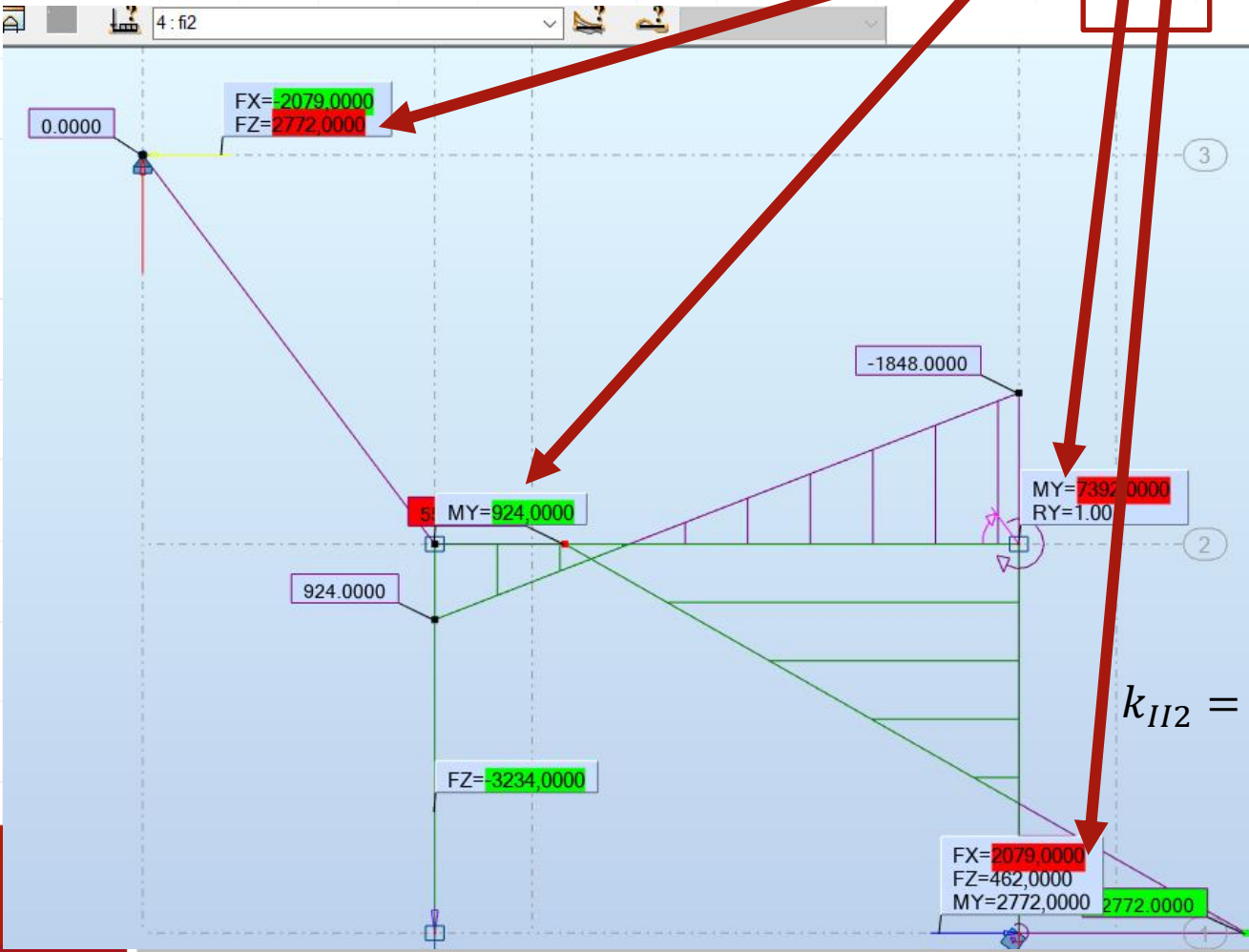


$$k_{II1} = FX \cdot \sin \alpha + FZ \cdot \cos \alpha$$



KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

$$\begin{aligned}
 k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{10} &= 0 \\
 k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{20} &= 0 \\
 k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\ I} \cdot \delta_I + k_{I\ II} \cdot \delta_{II} + k_{I0} &= 0 \\
 k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\ I} \cdot \delta_I + k_{II\ II} \cdot \delta_{II} + k_{II0} &= 0
 \end{aligned}$$

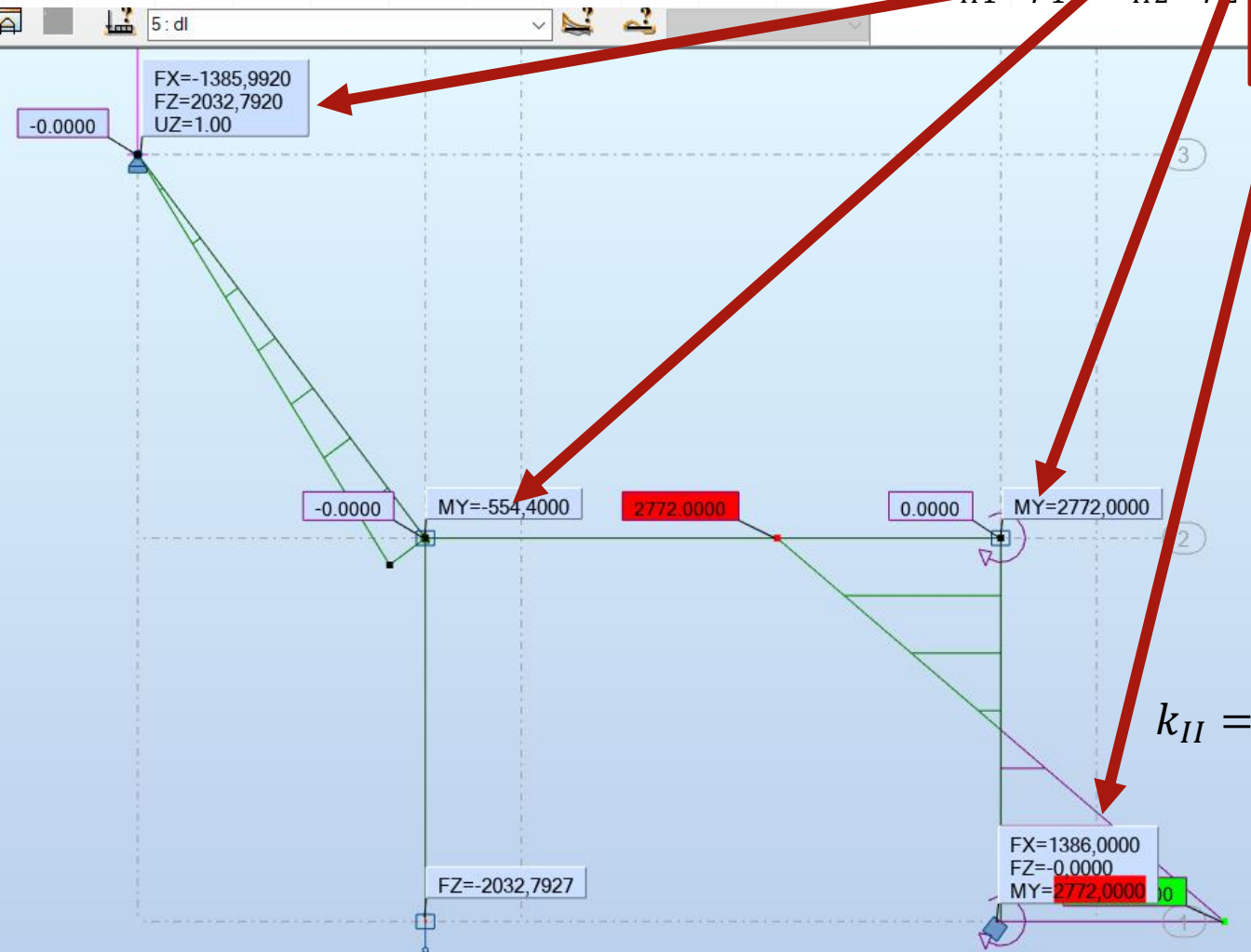


$$k_{II2} = FX \cdot \sin \alpha + FZ \cdot \cos \alpha$$



KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

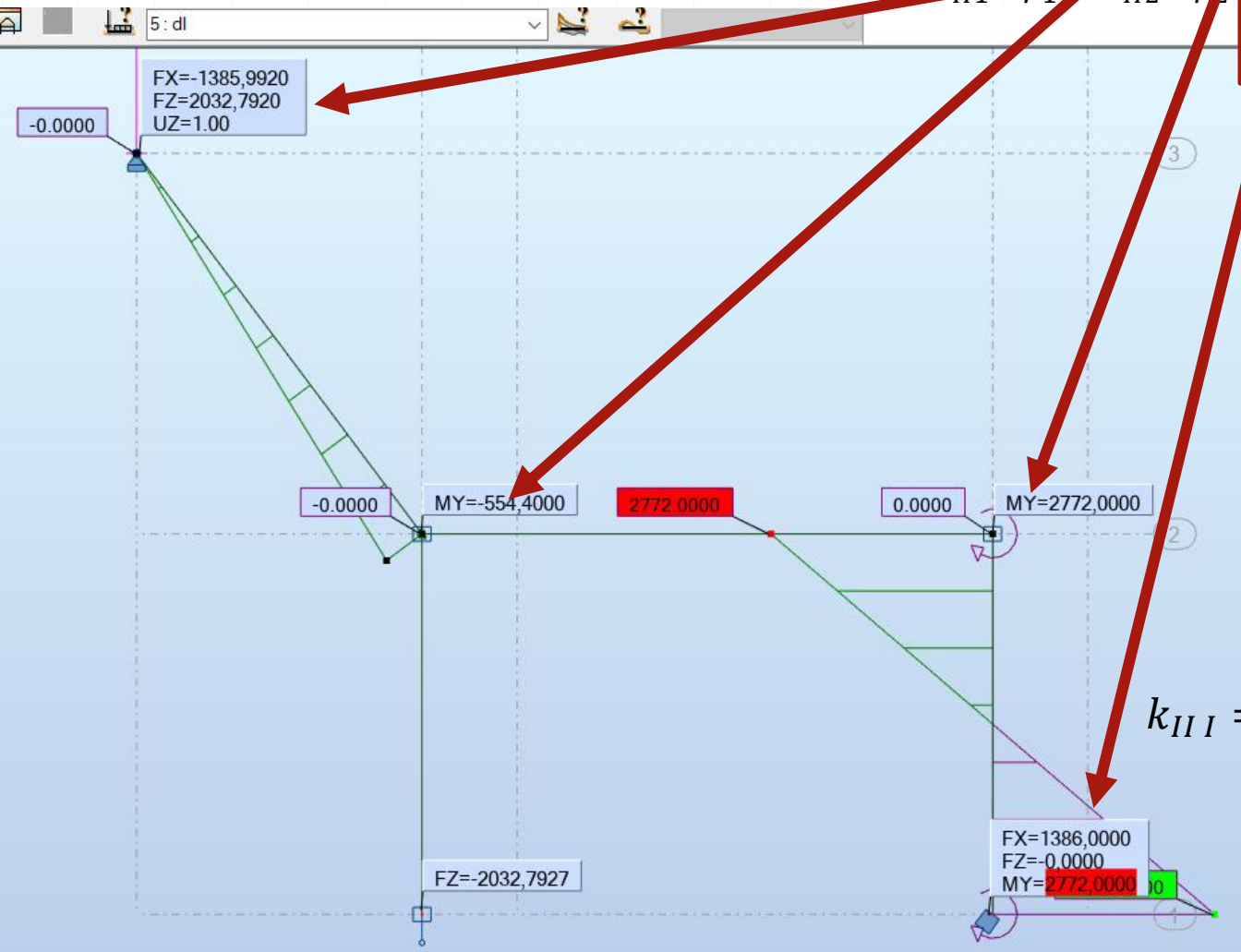
$$\begin{aligned}
 k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{10} &= 0 \\
 k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{20} &= 0 \\
 k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\ I} \cdot \delta_I + k_{I\ II} \cdot \delta_{II} + k_{I0} &= 0 \\
 k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\ I} \cdot \delta_I + k_{II\ II} \cdot \delta_{II} + k_{II0} &= 0
 \end{aligned}$$



$$k_{II} = FX \cdot \sin \alpha + FZ \cdot \cos \alpha$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

$$\begin{aligned}
 k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{10} &= 0 \\
 k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{20} &= 0 \\
 k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I I} \cdot \delta_I + k_{I II} \cdot \delta_{II} + k_{I0} &= 0 \\
 k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II I} \cdot \delta_I + k_{II II} \cdot \delta_{II} + k_{II0} &= 0
 \end{aligned}$$

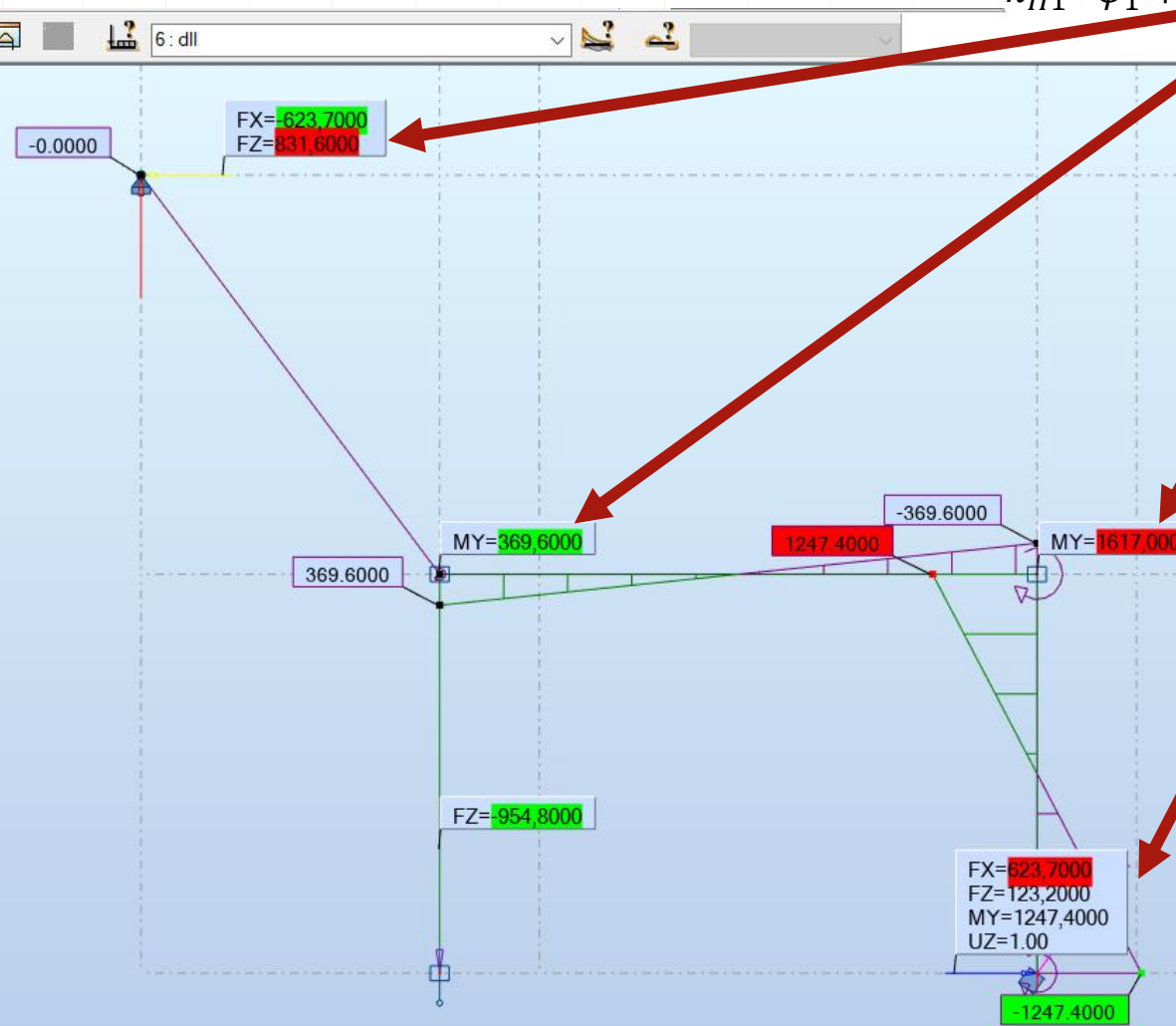


$$k_{III} = FX \cdot \sin \alpha + FZ \cdot \cos \alpha$$



KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

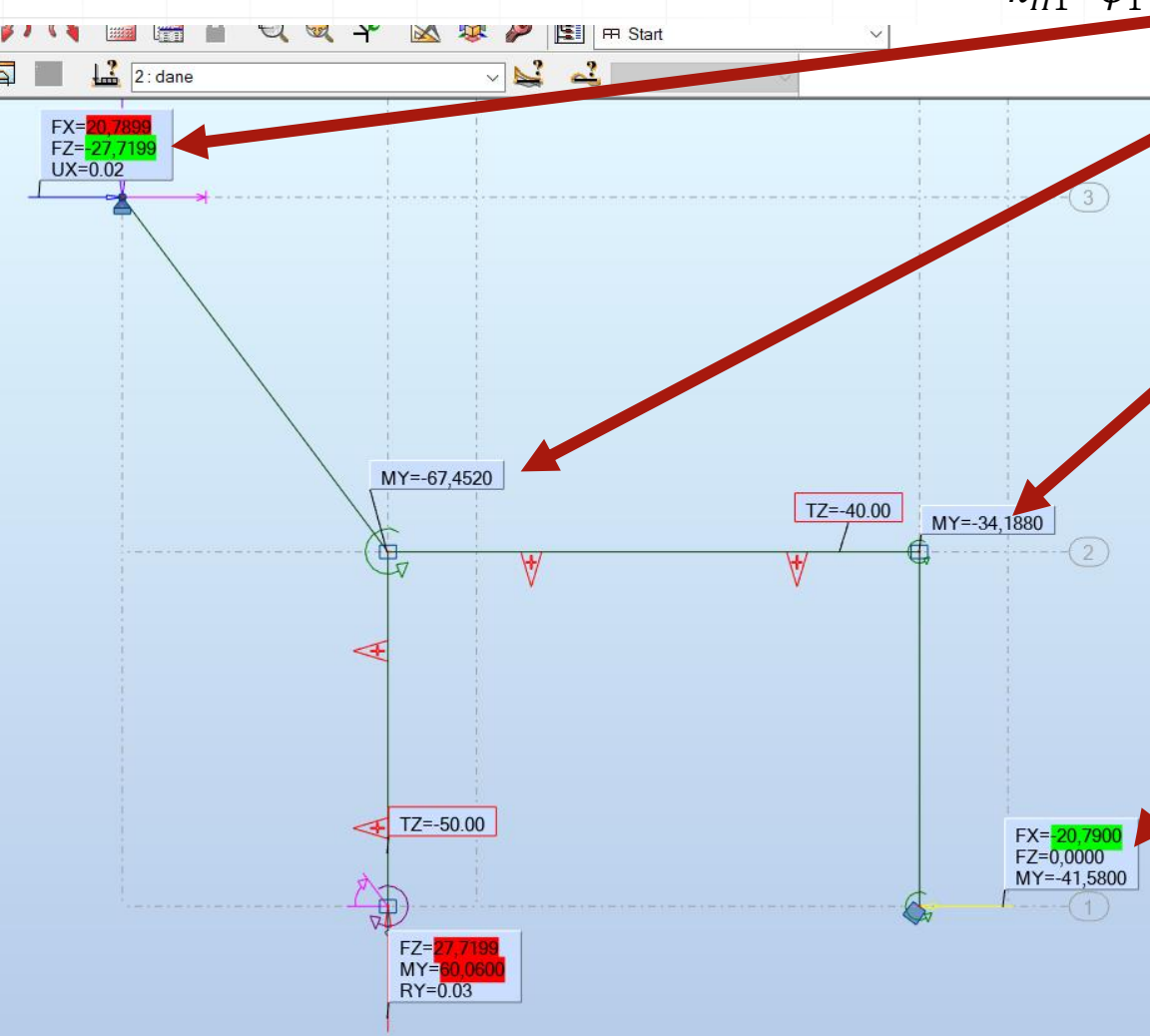
$$\begin{aligned}
 k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{10} &= 0 \\
 k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{20} &= 0 \\
 k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I I} \cdot \delta_I + k_{I II} \cdot \delta_{II} + k_{I0} &= 0 \\
 k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II I} \cdot \delta_I + k_{II II} \cdot \delta_{II} + k_{II0} &= 0
 \end{aligned}$$



$$k_{II II} = FX \cdot \sin \alpha + FZ \cdot \cos \alpha$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

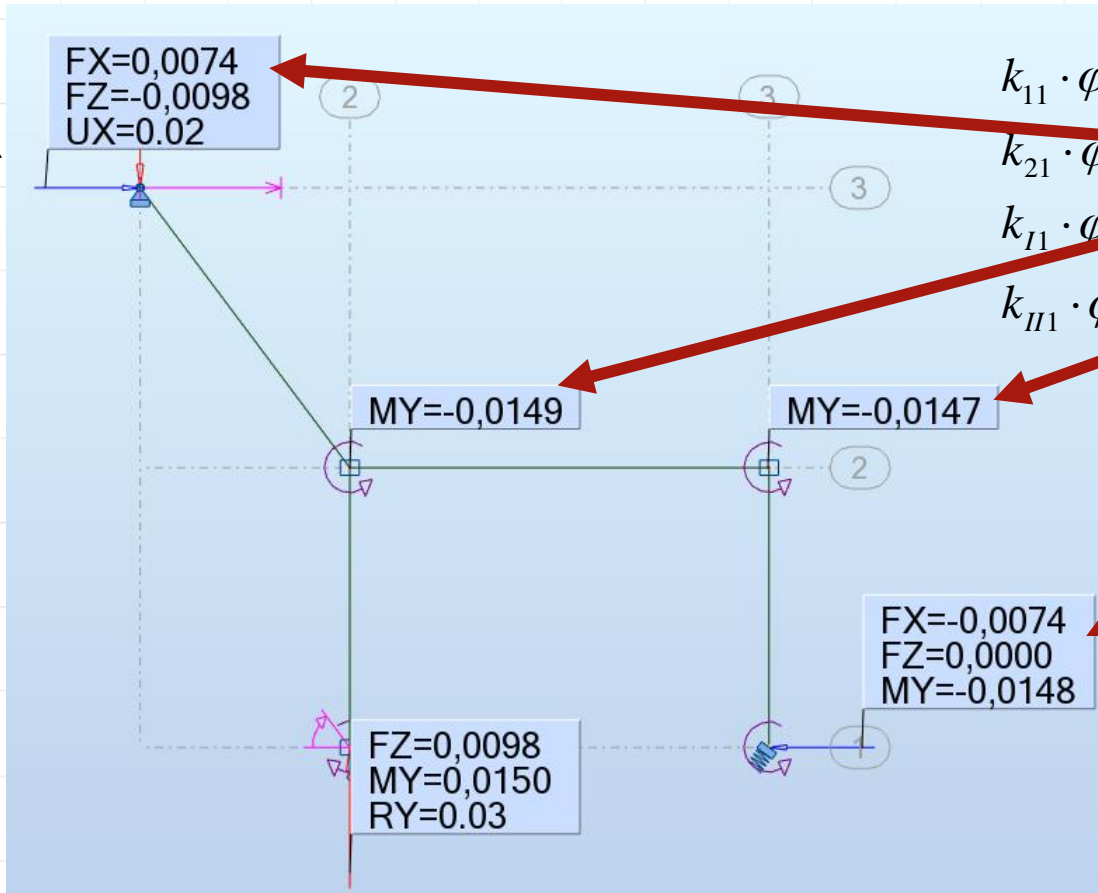
$$\begin{aligned}
 k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{10} &= 0 \\
 k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{20} &= 0 \\
 k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\ I} \cdot \delta_I + k_{I\ II} \cdot \delta_{II} + k_{I0} &= 0 \\
 k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\ I} \cdot \delta_I + k_{II\ II} \cdot \delta_{II} + k_{II0} &= 0
 \end{aligned}$$



$$k_{II0} = FX \cdot \sin \alpha + FZ \cdot \cos \alpha$$



KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1\Delta} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2\Delta} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{I\Delta} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{II\Delta} = 0$$

$$k_{II\Delta} = FX \cdot \sin \alpha + FZ \cdot \cos \alpha = 0,0074 \cdot 0,6 = 0,0044$$