



# Politechnika Wrocławska

## **MECHANIKA BUDOWLI**

### **Wykład 3: PRZESTRZENNE UKŁADY PRĘTOWE SW i SN. METODA SIŁ**

**Prowadzący:** dr inż. Olga Szyłko-Bigus



## 4. Dźwigary załamane w planie

- ❑ **RUSZTY I DŹWIGARY ZAŁAMANE W PLANIE**, jakie będziemy rozpatrywać, są układami płaskimi o obciążeniu działającym prostopadłe do płaszczyzny dźwigara skonstruowanymi tak, że obciążenia te nie wywołują sił w płaszczyźnie dźwigara.
- ❑ W układach tych do liczby  $e$  zalicza się tylko więzi translacyjne prostopadłe do płaszczyzny dźwigara i więzi rotacyjne usytuowane w płaszczyznach prostopadłych do płaszczyzny dźwigara.
- ❑ **Stopień statycznej niewyznaczalności (SSN)** dla układu załamanego w planie, gdzie występują tylko trzy rodzaje sił wewnętrznych tj.  $M_x, V_z, M_y$  wynosi:

$$n_h = e - 3t$$

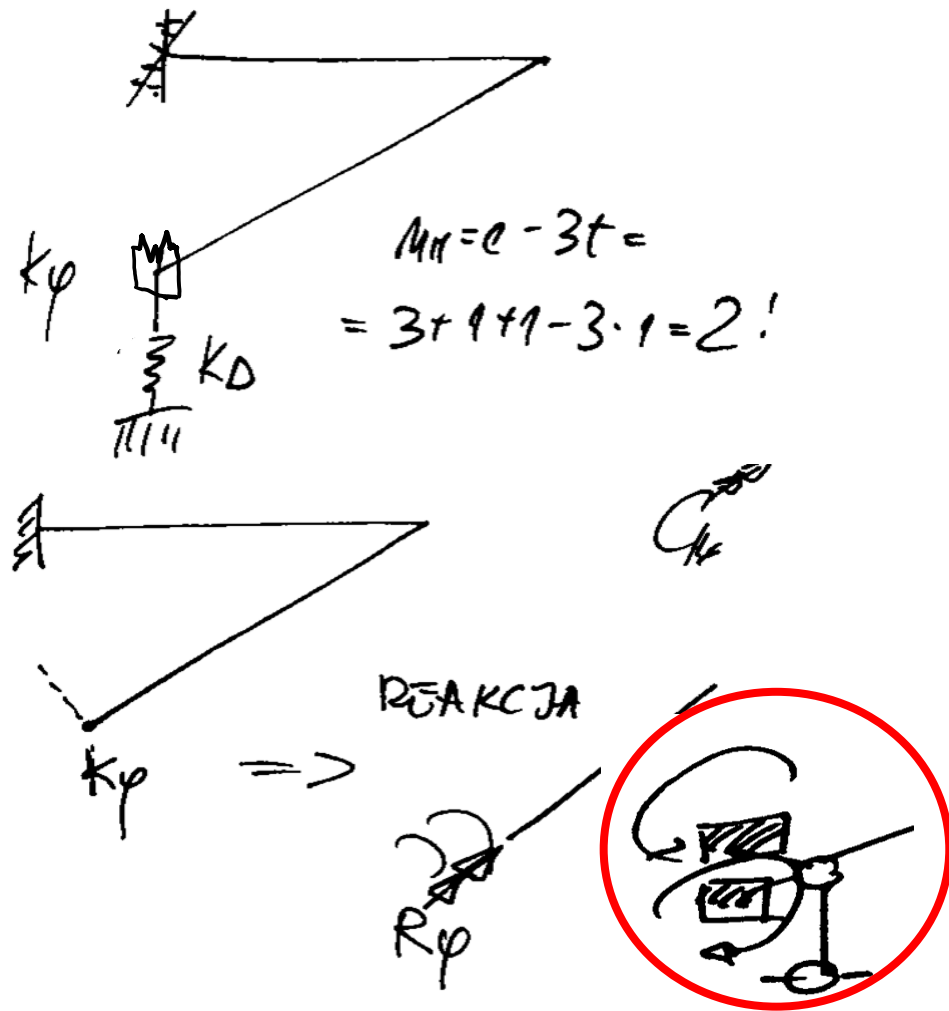
gdzie:  $e$  - liczb stopni swobody.

$t$  - liczba tarcz.

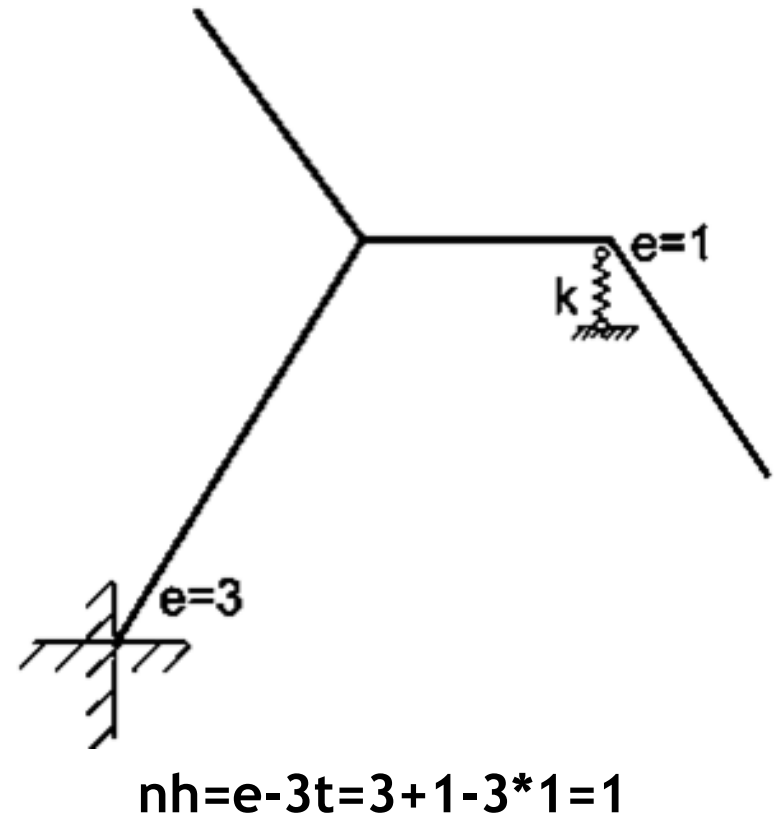
## 4. Dźwigary załamane w planie

### □ Stopień statycznej niewyznaczalności SSN

#### Przykład 1



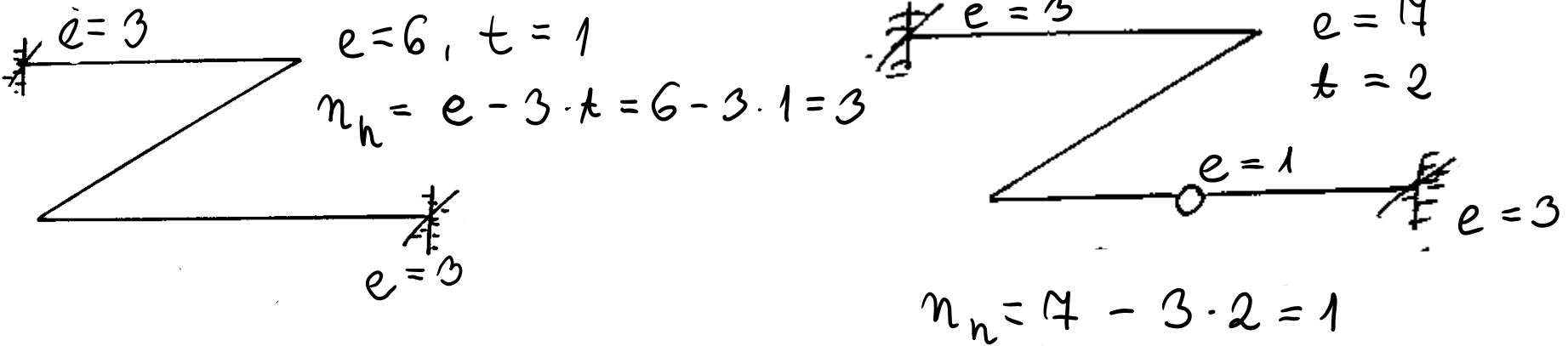
#### Przykład 2





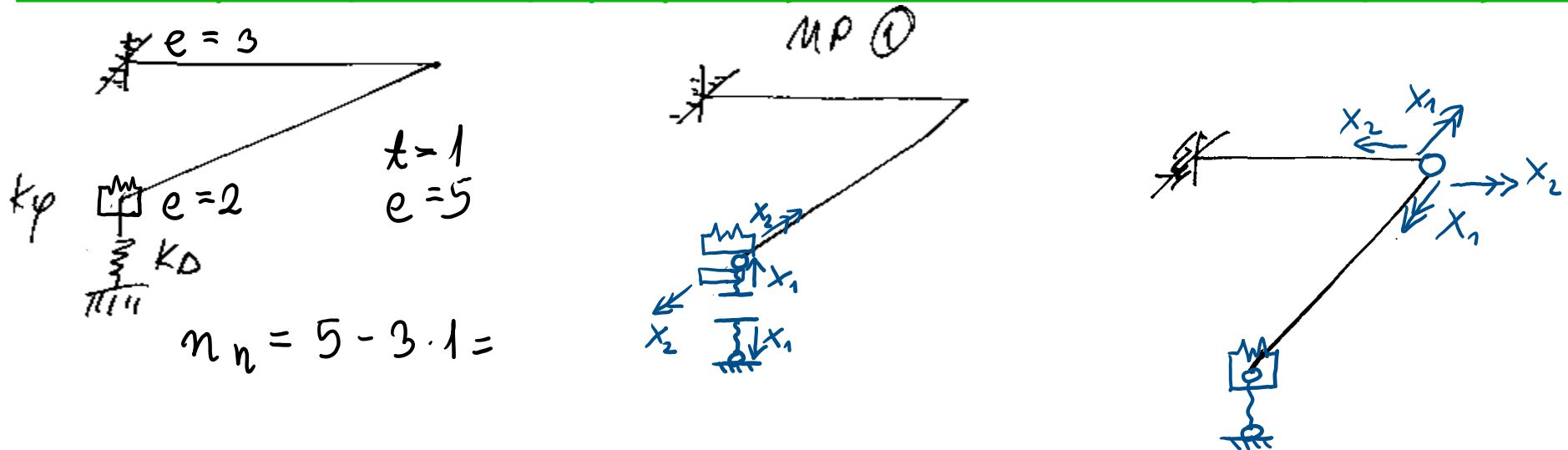
## 4. Dźwigary załamane w planie

□ Stopień statycznej niewyznaczalności SN:



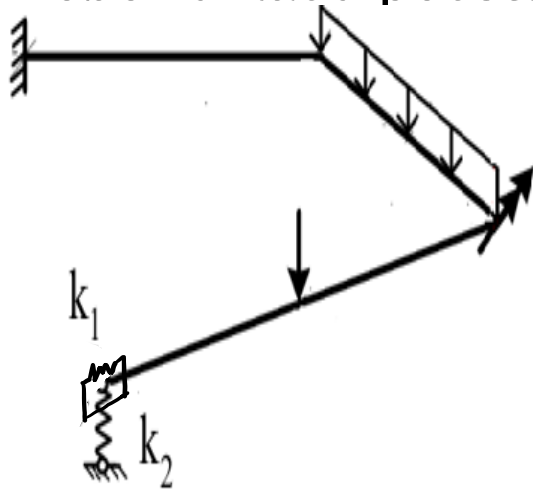
□ Warianty układów podstawowych dla schematów SN

Układ 1 z przecięciem więzi podporowych      Układ 2 z redukcją więzi sztywnej

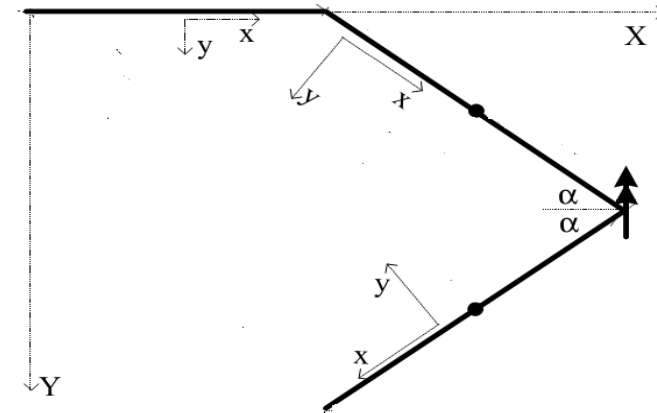


## 4. Dźwigary załamane w planie

- Dobór układu podstawowego MS dla układu załamane w planie

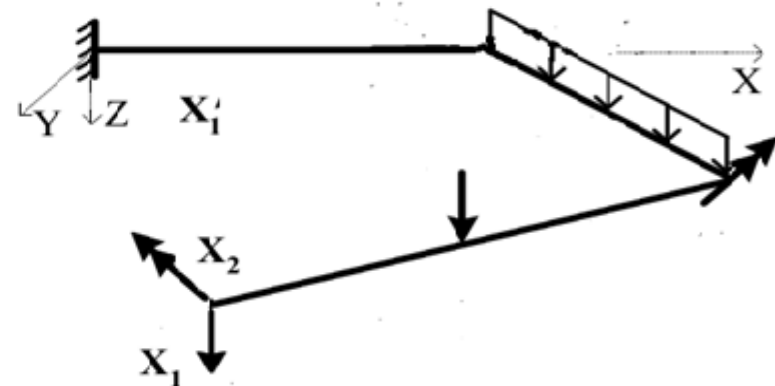
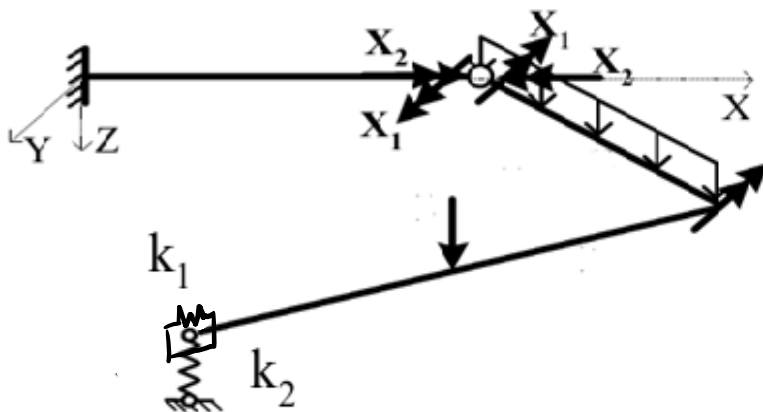


$$\begin{aligned}
 (e=3) \quad t=1 \\
 e=3+2=5 \\
 n_h=5-3 \cdot 1=2 \\
 (e=2)
 \end{aligned}$$



- Układ podstawowy nr1

- Układ podstawowy nr2



## 4. Dźwigary załamane w planie

□ Układ równań MS dla UP nr 1

Układ równań MS dla UP nr 2

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1F} = \Delta_{1R} = 0$$

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1F} = \Delta_{1R} = -\frac{X_1}{k_8}$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2F} = \Delta_{2R} = 0$$

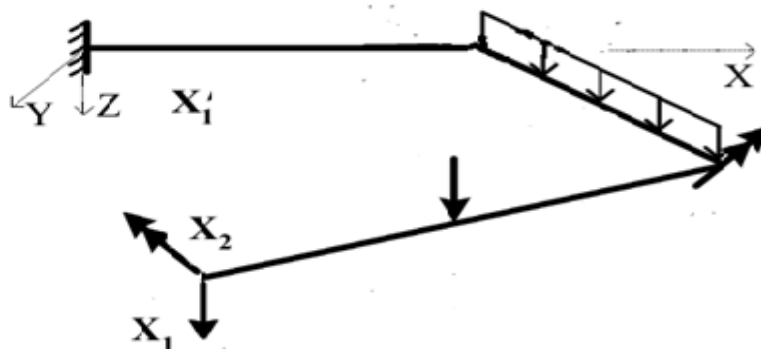
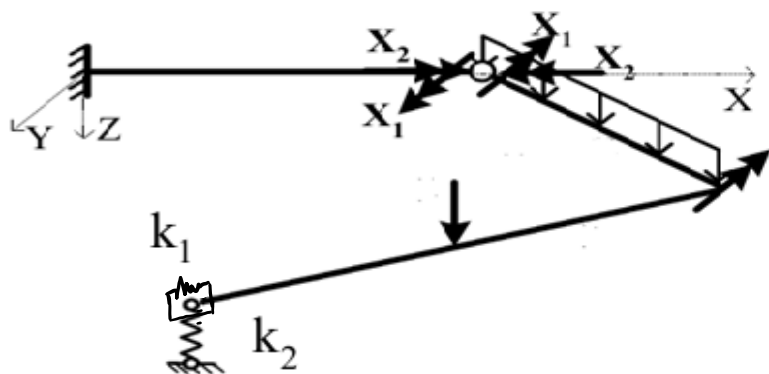
$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2F} = \Delta_{2R} = -\frac{X_2}{k_9}$$

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^j}{E J_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^j}{G J_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^j}{k_n}$$

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^j}{E J_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^j}{G J_x} dx$$

$$\delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^F}{E J_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^F}{G J_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^F}{k_n}$$

$$\delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^F}{E J_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^F}{G J_x} dx$$





## 4. Dźwigary załamane w planie

□ Układ równań MS dla UP nr2

(przecięcie więzi sprężystych)

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1F} = \Delta_{1R} = 0$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2F} = \Delta_{2R} = 0$$

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^j}{E J_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^j}{G J_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^j}{k_n}$$

$$\delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^F}{E J_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^F}{G J_x} dx$$

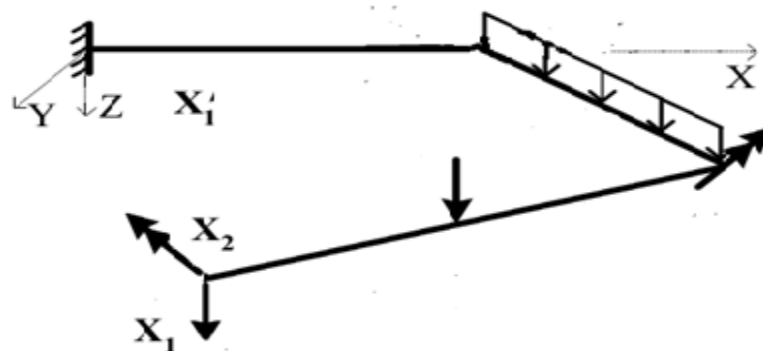
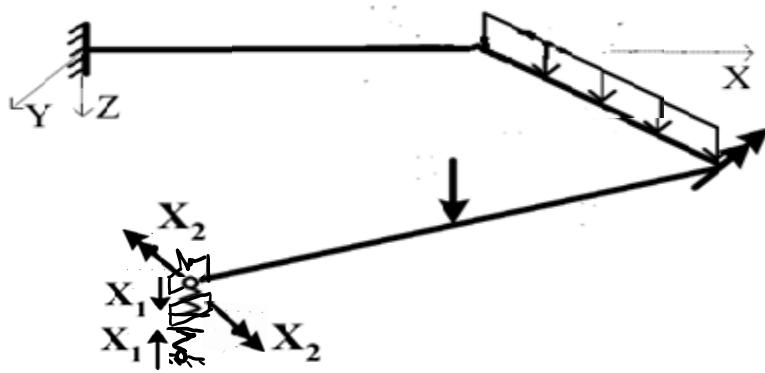
Układ równań MS dla UP nr2

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1F} = \Delta_{1R} = -\frac{X_1}{k_\delta}$$

$$\delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2F} = \Delta_{2R} = -\frac{X_2}{k_\theta}$$

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^j}{E J_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^j}{G J_x} dx$$

$$\delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^F}{E J_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^F}{G J_x} dx$$





## 4. Dźwigary załamane w planie

- ❑ Algorytm postępowania w celu wyznaczenia sił wewnętrznych i przemieszczeń dla SN układów załamanych w planie MS od obciążeń mechanicznych:
  - 1) Ustalenie SSN,
  - 2) Przyjęcie układu podstawowego MS (SW i GN) z zaznaczonymi niewiadomymi siłami hiperstatycznymi,
  - 3) Zapisanie układu równań kanonicznych,
  - 4) Rozwiązanie układu podstawowego od sił hiperstatycznych=1[.] i obciążeń danych mechanicznych,
  - 5) Rozwiązanie układu równań kanonicznych i wyznaczenie wartości niewiadomych sił hiperstatycznych,
  - 6) Wyznaczenie sił przekrojowych.
  - 7) Sprawdzenie poprawności rozwiązania,
  - 8) Obliczenie szukanego przemieszczenia od obciążeń mechanicznych.



## 4. Dźwigary załamane w planie

□ Po utworzeniu UP zapisujemy układ równań MS

Postać ogólna układu równań

$$\begin{aligned}\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1F} &= \Delta_{1rz} = 0 \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2F} &= \Delta_{2rz} = 0\end{aligned}$$

Obliczenie współczynników układu równań

Współczynniki układu równań obliczamy wykorzystując wzory

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_x^i \cdot \bar{M}_x^j}{GIs} dx + \int \frac{\bar{M}_y^i \cdot \bar{M}_y^j}{EI_y} dx + \sum \frac{\bar{S}_s^i \cdot \bar{S}_s^j}{k_s}, \quad \delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}_x^i \cdot \bar{M}_x^F}{GIs} dx + \int \frac{\bar{M}_y^i \cdot \bar{M}_y^F}{EI_y} dx + \sum \frac{\bar{S}_s^i \cdot \bar{S}_s^F}{k_s},$$

Do obliczenia całek w powyższych wzorach zastosowano wzór Simpsona lub Mohra. Ze względu na charakter wykresów momentów skręcających i zginających całki w powyższych wzorach przedstawiono w postaci sum całek dla przedziałów całkowania, w których funkcje podcałkowe spełniają założenia umożliwiające zastosowanie odpowiedniego wzoru.



## 4. Dźwigary załamane w planie

- Po wyznaczeniu wartości  $X_1$  i  $X_2$  obliczamy reakcje i siły wewnętrzne

$$R_r^F = \bar{R}_r^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_r^2 \cdot X_2^F + \bar{R}_r^F,$$

$$S_s^F = \bar{S}_s^1 \cdot X_1^F + \bar{S}_s^2 \cdot X_2^F + \bar{S}_s^F$$

$$M_\alpha^F = \bar{M}_\alpha^1 \cdot X_1^F + \bar{M}_\alpha^2 \cdot X_2^F + \bar{M}_\alpha^F,$$

$$V_\alpha^F = \bar{V}_\alpha^1 \cdot X_1^F + \bar{V}_\alpha^2 \cdot X_2^F + \bar{V}_\alpha^F$$

**Zasada superpozycji**-skutek działania na ciało kilku sił jest sumą skutków wywołanych przez poszczególne siły; inaczej mówiąc: skutek działania nie zależy od działania innej siły

## 4. Dźwigary załamane w planie

### ❑ Kontrola zgodności przemieszczeń

Kontrola zgodności przemieszczeń polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w tylu miejscach ile wynosi stopień statycznej niewyznaczalności. Można tego dokonać postępując analogicznie jak budowano układ równań kanonicznych, to jest: przyjąć układ podstawowy metody sił, sporządzić wykresy momentów zginających od jednostkowych wartości sił hiperstatycznych i policzyć przemieszczenia w układzie

danym ze wzoru 
$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}x^i \cdot Mx^F}{GIs} dx + \int \frac{\bar{M}y^i \cdot My^F}{EIy} \cdot dx + \sum \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^F}{k_s}$$
 w miejscach, w których usunięto

więzi tworząc układ podstawowy. Wartości tych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu i połączenia jego elementów. Można oczywiście sprawdzać te same przemieszczenia, które stanowiły podstawę układu równań kanonicznych. W tym przypadku wykresy momentów zginających od jednostkowych wartości sił hiperstatycznych są już określone i wystarczy skorzystać z podanego powyżej wzoru dla  $i = 1, \dots, n_h$ . W rozwiązywanym przykładzie  $n_h = 2$  sprawdzimy przemieszczenia  $\Delta_{1F}$  i  $\Delta_{2F}$

### ❑ Obliczenie szukanego przemieszczenia

Szukane przemieszczenie policzymy na podstawie wzoru

$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}x^i \cdot Mx^F}{GIs} dx + \int \frac{\bar{M}y^i \cdot My^F}{EIy} \cdot dx + \sum \frac{\bar{S}_s^i \cdot S_s^F}{k_s}.$$

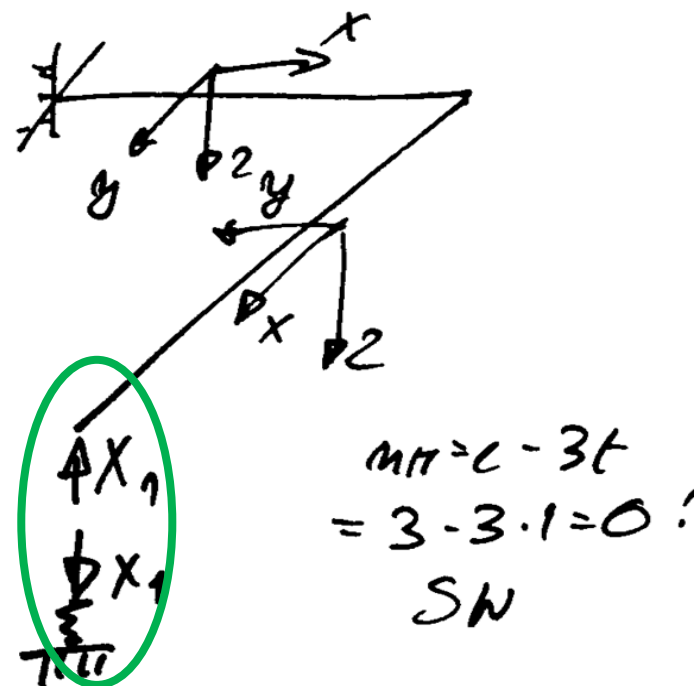
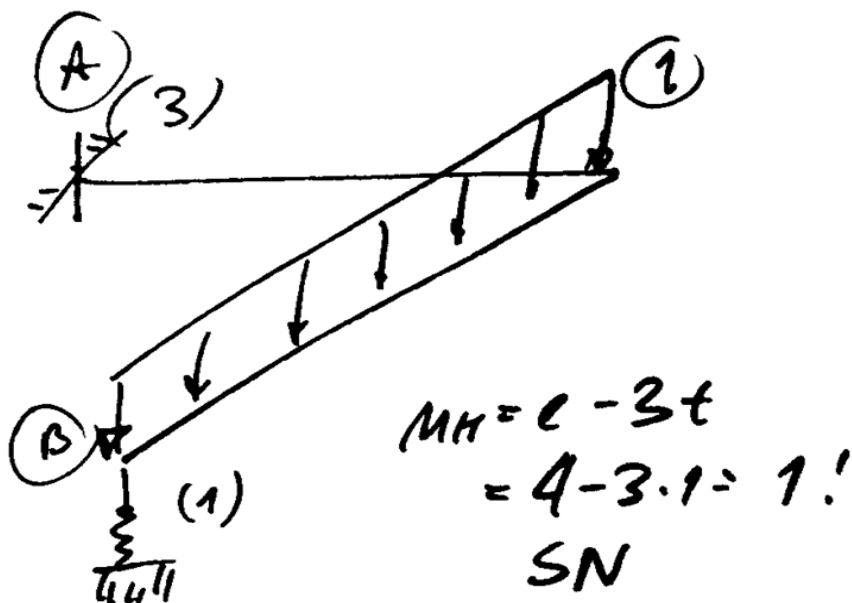
Wyznaczyliśmy już momenty  $M^F$  od obciążenia danego w układzie statycznie niewyznaczalnym. Aby skorzystać z przytoczonego wzoru musimy jeszcze rozwiązać dowolny układ podstawowy dźwigara od obciążenia jednostkowego przyłożonego w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia  $P_i = 1$ . Może to być taki sam układ, jaki był przyjęty do rozwiązania układu od obciążenia danego. Może też być dowolny inny układ. Tu przyjęto układ jak na rysunku poniżej.

## 4. Dźwigary załamane w planie

□ Wyznaczenie sił przekrojowych w SN układzie załamanym w planie od obciążeń mechanicznych:

1. Ustalenie SSN,

2. Przyjęcie UP MS (SW i GN) i przyjęcie siły hiperstatycznej w miejscu usuniętej więzi  $X_1$ ,





## 4. Dźwigary załamane w planie

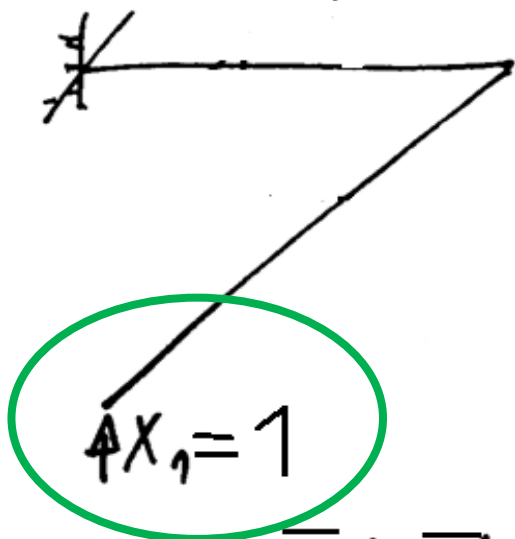
### 3. Zapisanie równania kanonicznego MS

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1P} = 0$$

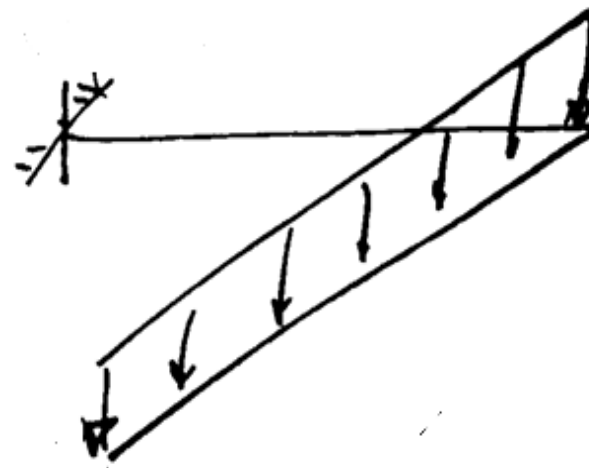
$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

### 4. Rozwiązanie układu podstawowego od sił hiperstatycznej $X_1=1$ oraz od obciążeń danych typu P,

UP od obciążenia  $X_1=1$



UP od obciążenia danego typu P



Wyznaczenie jednostkowego  $\overline{M}_x^1, \overline{M}_y^1$  od obciążenia

Wyznaczenie  $\overline{M}_x^P, \overline{M}_y^P$  od obciążenia danego

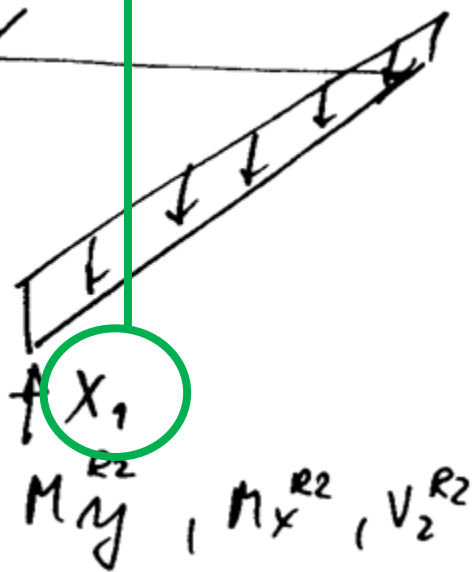


## 4. Dźwigary załamane w planie

5. Obliczenie współczynników równania i wyznaczenie wartości niewiadomej siły hiperstatycznej,

$$X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

6. Wyznaczenie sił przekrojowych,



$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1P} = 0 \quad X_1 = -\frac{\delta_{1P}}{\delta_{11}}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^1}{EI_y} ds + \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^1}{GI_x} ds + \frac{\bar{S}_1 \cdot \bar{S}_1}{K_A}$$

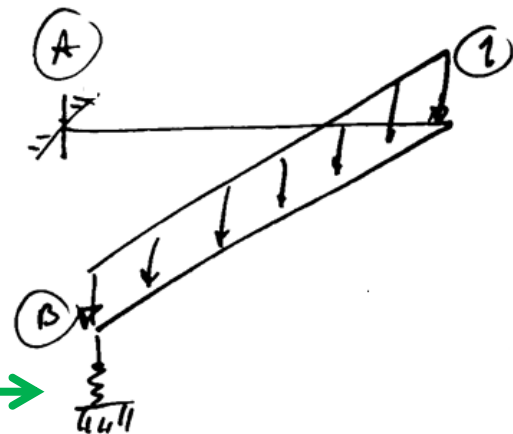
$$\delta_{1P} = \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^P}{EI_y} ds + \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^P}{GI_x} ds + \frac{\bar{S}_1 \bar{S}_P}{K_A}$$



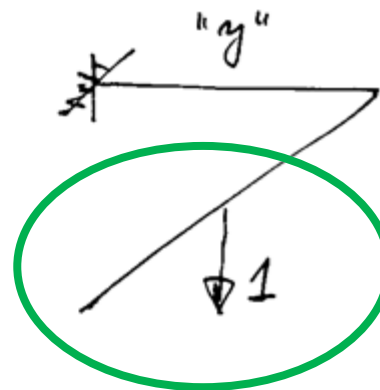
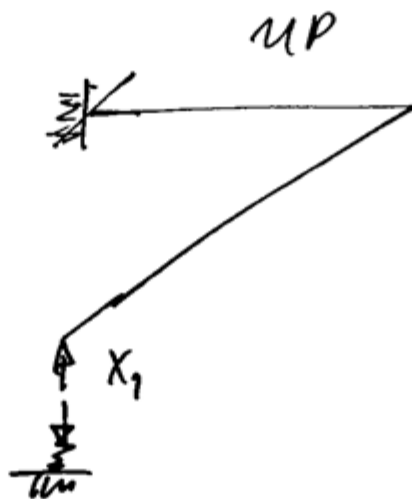
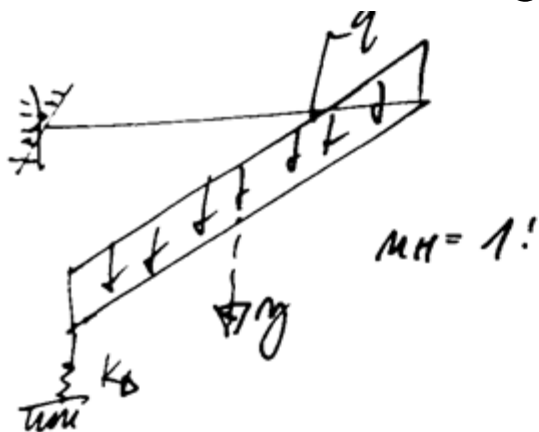
## 4. Dźwigary załamane w planie

7. Sprawdzenie poprawności rozwiązania,

$$A_B = \int \frac{M_{R2} \bar{M}_y}{EI_y} ds + \int \frac{M_{R2} \bar{M}_x}{EI_x} ds + \frac{S_{R2} \cdot \bar{S}_1}{k_\Delta}$$



8. Obliczenie szukanego przemieszczenia.



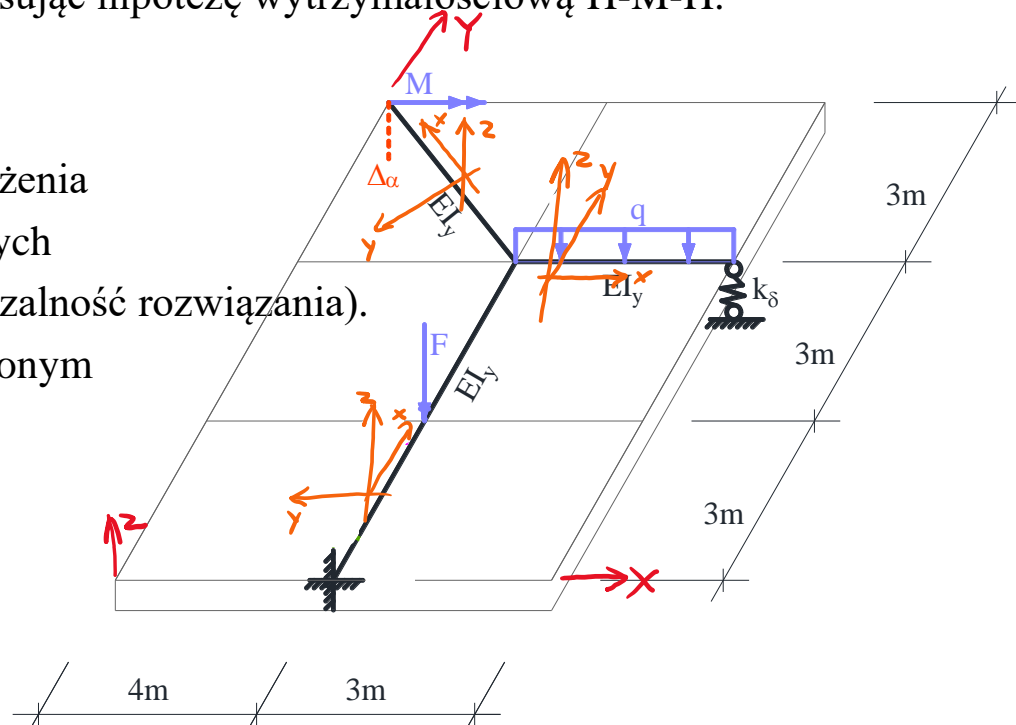
$$y = \int \frac{M_{R2} \bar{M}_y}{EI_y} ds + \int \frac{M_{R2} \bar{M}_x}{EI_x} ds + \frac{S_{R2} \cdot \bar{S}_y}{k_\Delta}$$

## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

Dany jest hiperstatyczny układ załamany w planie o schemacie statycznym i obciążeniu mechanicznym i niemechanicznym jak na rysunku 1.1. Zakładamy, że konstrukcja wykonana jest z rur stalowych, tzn.  $GI_s = 0.769 EI_y$ , ze stali o wytrzymałości obliczeniowej równej 235 MPa, średni współczynnik obliczeniowy wynosi  $\gamma_f = 1,3$ . Należy:

- Sprawdzić czy zadany układ jest rzeczywiście hiperstatyczny i geometrycznie niezmienny.
- Stosując metodę sił rozwiązać go od zadanego obciążenia siłami.
- Zaprojektować wstępnie przekroje prętów stosując hipotezę wytrzymałościową H-M-H.
- Po zaprojektowaniu przekrojów rozwiązać zadany układ od obciążeń niemechanicznych.
- Przeprowadzić kontrolę rozwiązania od obciążenia mechanicznego i od obciążeń niemechanicznych (sprawdzić statyczną i kinematyczną dopuszczalność rozwiązania).
- Obliczyć wartość przemieszczenia w zaznaczonym miejscu oddzielnie od wszystkich obciążeń.

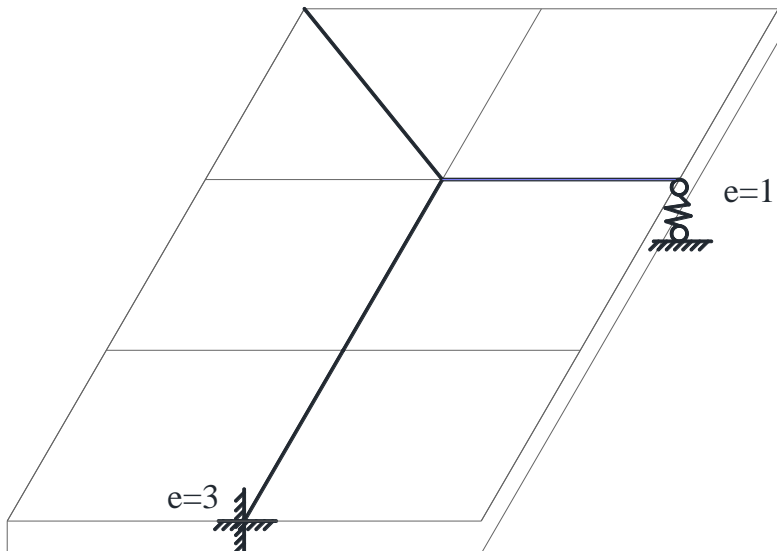
Dane do obliczeń:  $F = 12 \text{ kN}$ ;  $q = 4 \text{ kN/m}$ ;  
 $M = 24 \text{ kN m}$ ;  $k_\delta = 8 EI_y/\text{m}^3$ ;





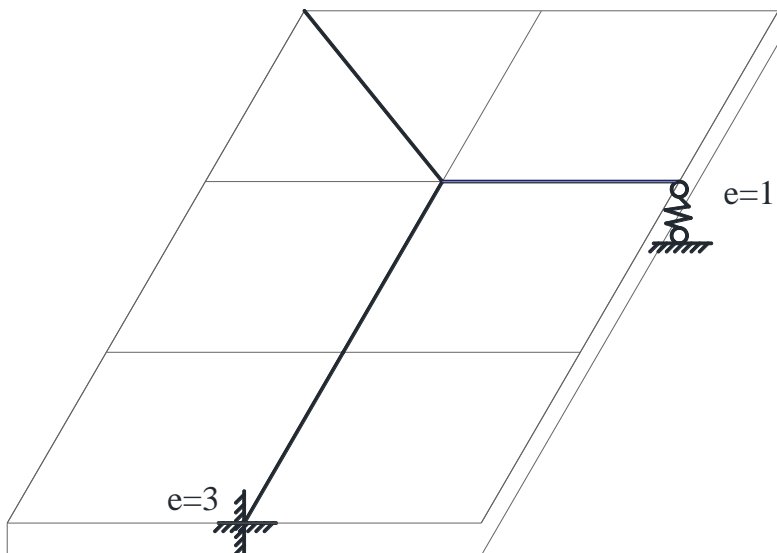
## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 1. Stopień statycznej niewyznaczalności

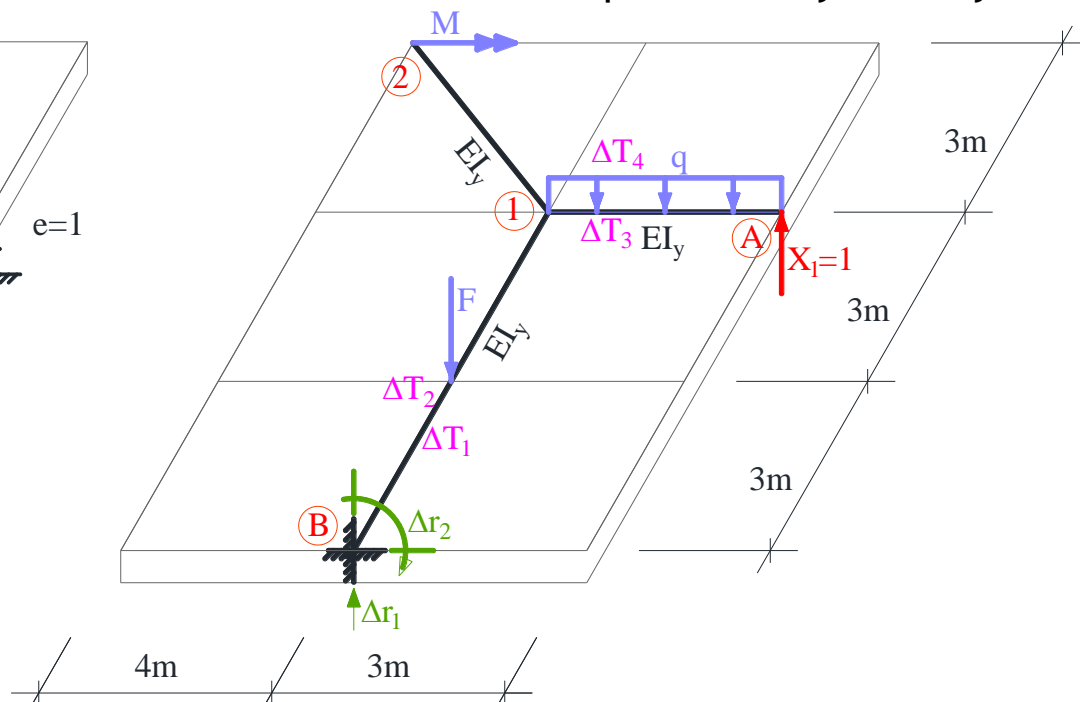


## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 1. Stopień statycznej niewyznaczalności

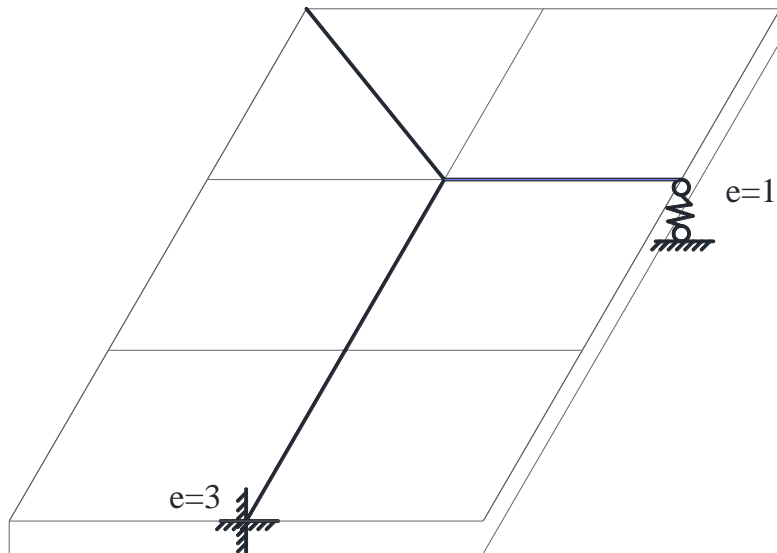


### 2. Układ podstawowy metody sił

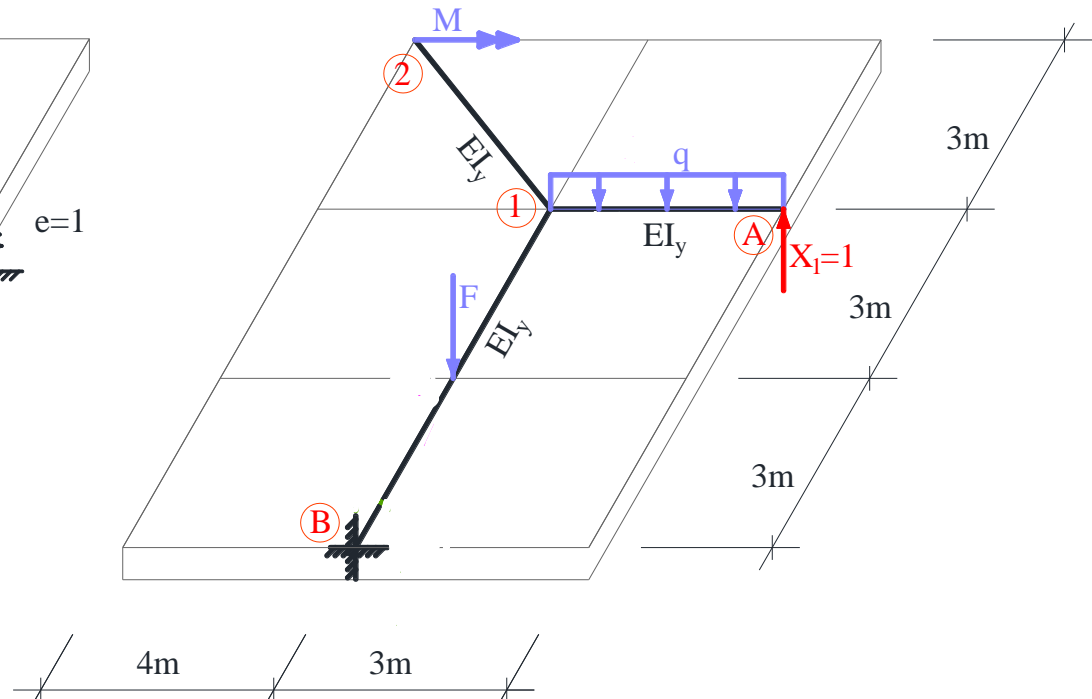


## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

Stopień statycznej niewyznaczalności



Układ podstawowy metody sił

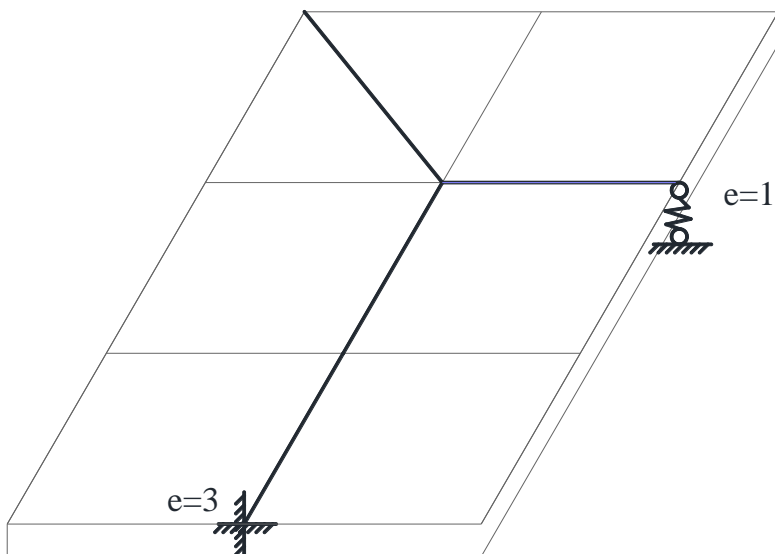


Postać ogólna układu równań metody sił

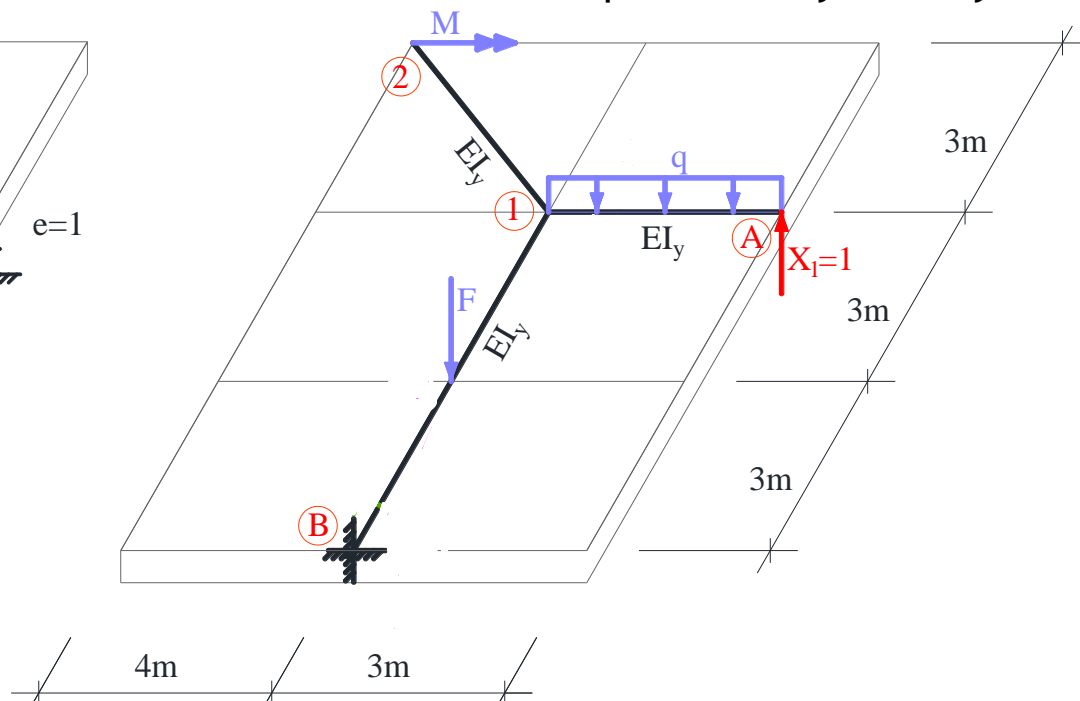
$$\delta_{11} X_1^F + \delta_{1F} = -\frac{X_1^F}{k_\delta}$$

# 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

## 1. Stopień statycznej niewyznaczalności



## 2. Układ podstawowy metody sił



Postać ogólna układu równań metody sił

$$\delta_{11} X_1^F + \delta_{1F} = -\frac{X_1^F}{k_\delta}$$

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^j}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^j}{GI_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^j}{k_n}$$

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od jednostkowej j-tej niewiadomej w układzie podstawowym,

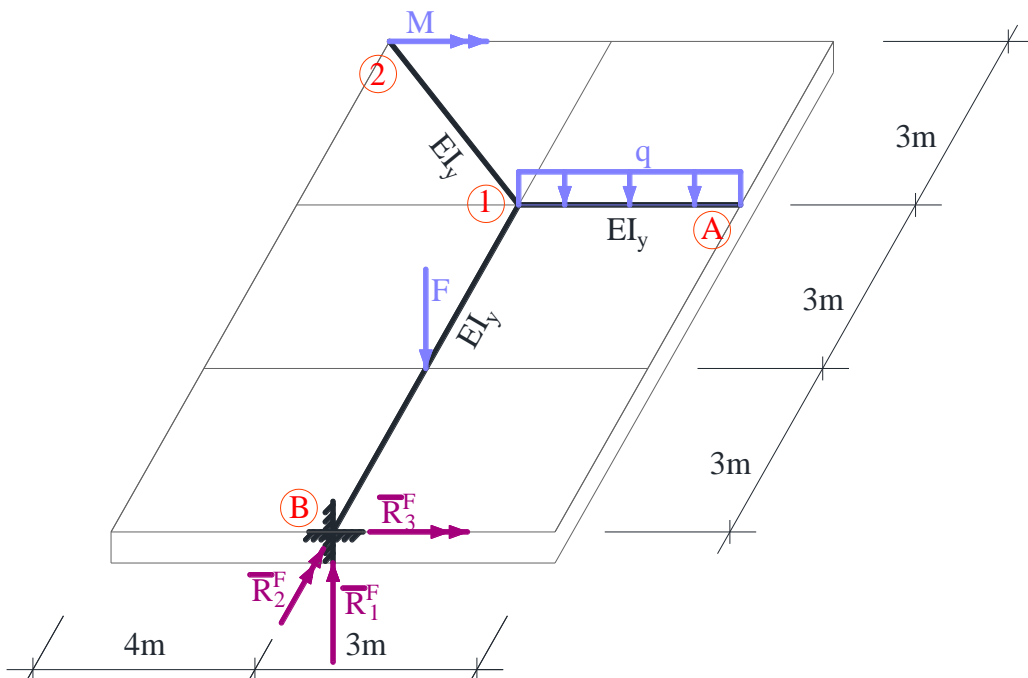
$$\delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^F}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^F}{GI_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^F}{k_n}$$

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od obciążenia mechanicznego w układzie podstawowym,



## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 3. Rozwiązanie układu podstawowego metody sił od obciążenia danego



#### Obliczenie reakcji

$$\sum M_{xB} = M + \bar{R}_3^F - q \cdot 3m \cdot 6m - P \cdot 3m = 0$$

$$24kN \cdot m + \bar{R}_3^F - 4 \frac{kN}{m} \cdot 3m \cdot 6m - 12kN \cdot 3m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_3^F = 84kN \cdot m$$

$$\sum M_{yB} = \bar{R}_2^F + q \cdot 3m \cdot 1,5m = 0$$

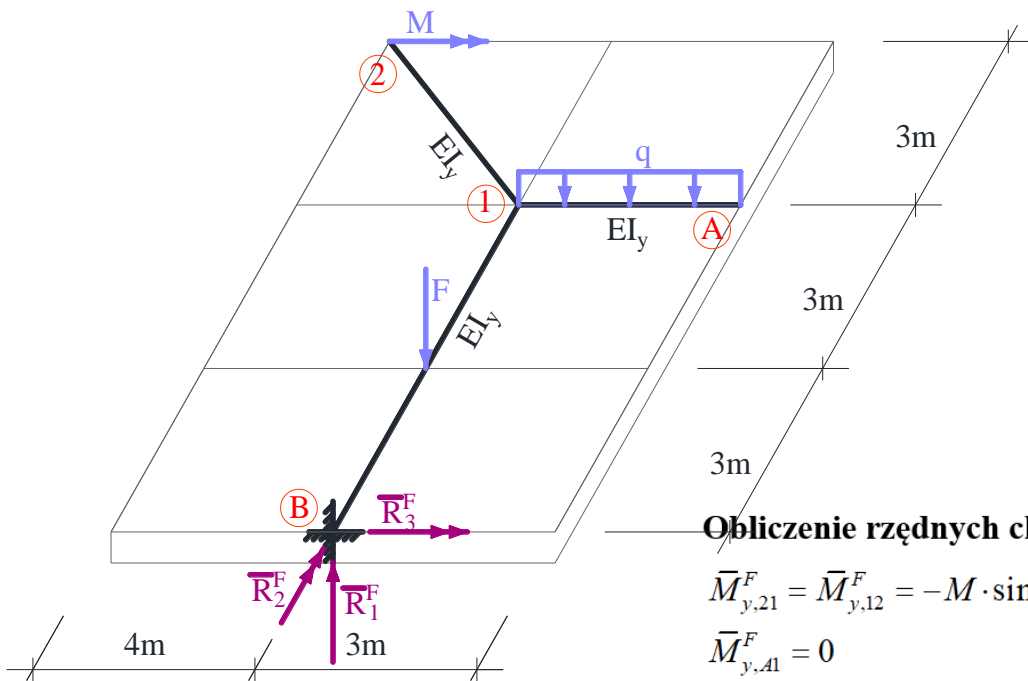
$$\bar{R}_2^F + 4 \frac{kN}{m} \cdot 3m \cdot 1,5m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_2^F = -18kN \cdot m$$

$$\sum V_{zB} = \bar{R}_1^F - q \cdot 3m - P = 0$$

$$\bar{R}_1^F - 4 \frac{kN}{m} \cdot 3m - 12kN = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_1^F = 24kN$$

## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 3. Rozwiązanie układu podstawowego metody sił od obciążenia danego



**Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów zginających**

$$\bar{M}_{y,21}^F = \bar{M}_{y,12}^F = -M \cdot \sin \alpha = -24 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot 0,6 = -14,4 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_{y,41}^F = 0$$

$$\bar{M}_{y,14}^F = q \cdot 3\text{m} \cdot 1,5\text{m} = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3\text{m} \cdot 1,5\text{m} = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_{y,3}^F = q \cdot 1,5\text{m} \cdot 0,75\text{m} = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 1,5\text{m} \cdot 0,75\text{m} = 4,5 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

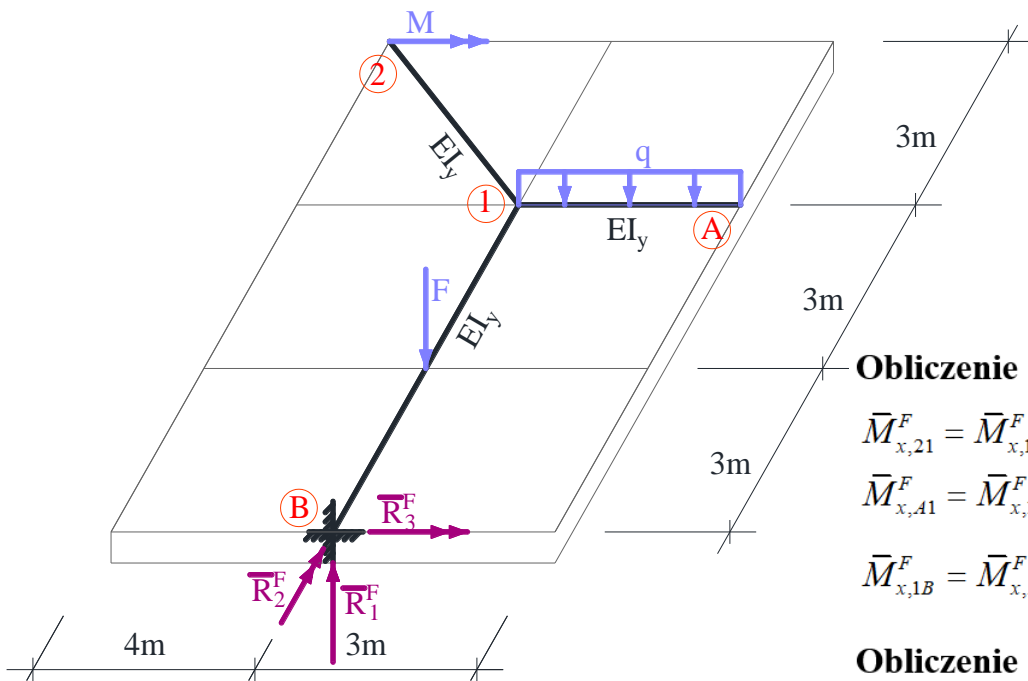
$$\bar{M}_{y,1B}^F = -M = -24 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_{y,B1}^F = -M + q \cdot 3\text{m} \cdot 6\text{m} + P \cdot 3\text{m} = -24 \text{ kN} \cdot \text{m} + 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3\text{m} \cdot 6\text{m} + 12 \text{ kN} \cdot 3\text{m} = 84 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_{y,4}^F = -M + q \cdot 3\text{m} \cdot 3\text{m} = -24 \text{ kN} \cdot \text{m} + 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3\text{m} \cdot 3\text{m} = 12 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 3. Rozwiązanie układu podstawowego metody sił od obciążenia danego



**Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów skręcających**

$$\bar{M}_{x,21}^F = \bar{M}_{x,12}^F = -M \cdot \cos \alpha = -24 \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot 0,8 = -19,2 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$\bar{M}_{x,41}^F = \bar{M}_{x,14}^F = 0$$

$$\bar{M}_{x,1B}^F = \bar{M}_{x,B1}^F = q \cdot 3\text{m} \cdot 1,5\text{m} = 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3\text{m} \cdot 1,5\text{m} = 18 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

**Obliczenie rzędnych sił tnących**

$$\bar{V}_{z,21}^F = \bar{V}_{z,12}^F = 0$$

$$\bar{V}_{z,41}^F = 0$$

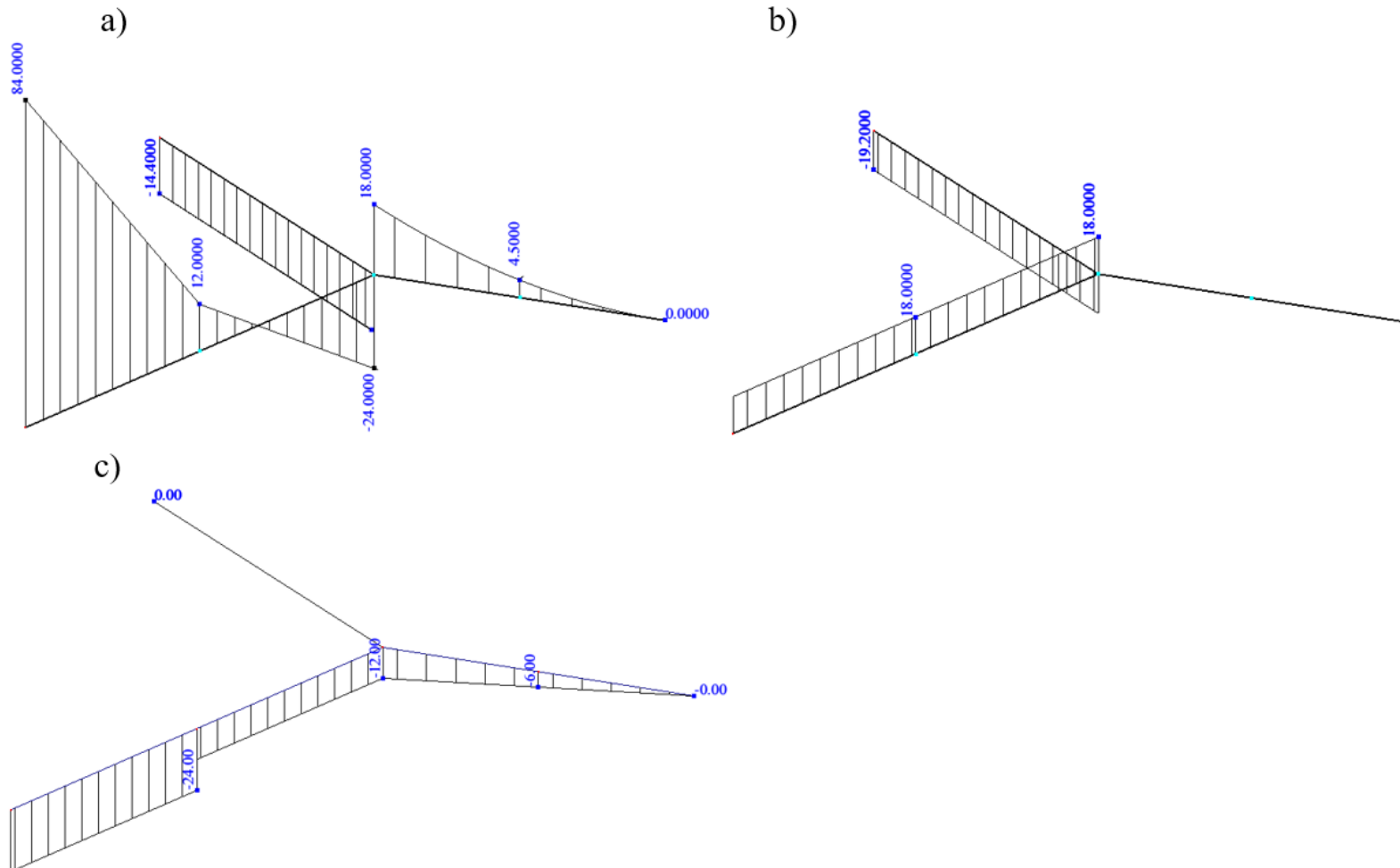
$$\bar{V}_{z,14}^F = -q \cdot 3\text{m} = -4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$\bar{V}_{z,14}^F = \bar{V}_{z,41}^F = -q \cdot 3\text{m} = -4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3\text{m} = -12 \text{ kN}$$

$$\bar{V}_{z,4B}^F = \bar{V}_{z,B4}^F = -q \cdot 3\text{m} - P = -4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3\text{m} - 12 \text{ kN} = 24 \text{ kN}$$

## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 3. Rozwiązanie układu podstawowego metody sił od obciążenia danego



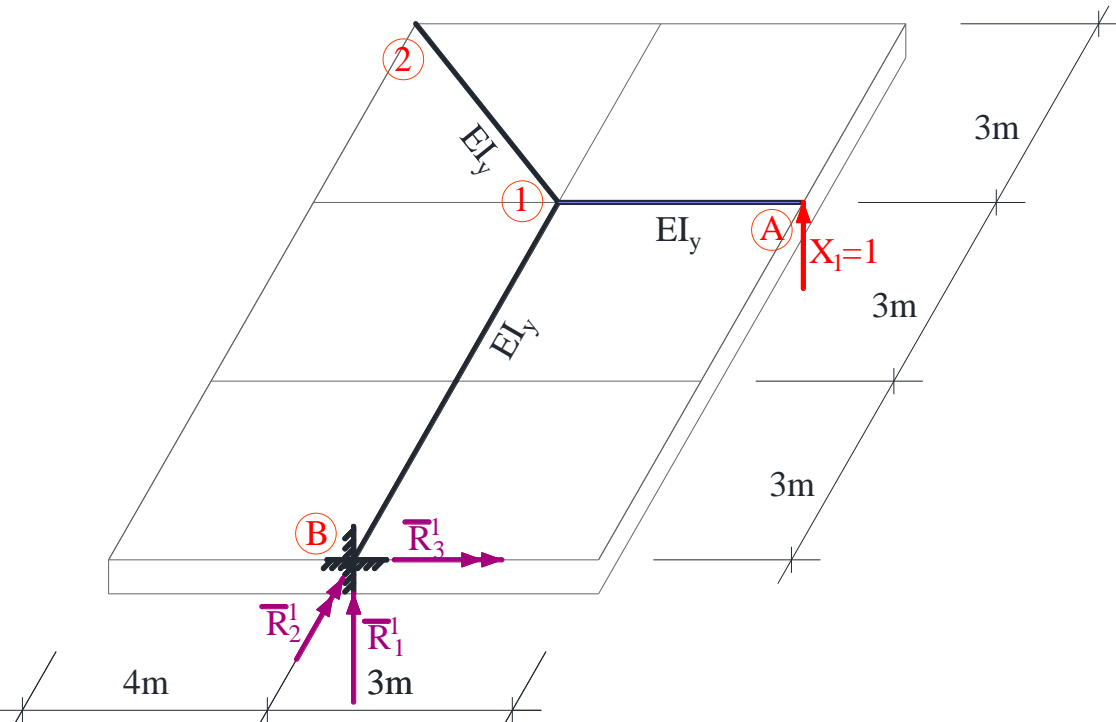
wykresy sił przekrojowych od obciążenia mechanicznego:

a) momenty zginające w  $\text{kN}\cdot\text{m}$ , b) momenty skręcające w  $\text{kN}\cdot\text{m}$ , c) siły tnące w  $\text{kN}$



# 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

## 4. Rozwiązanie układu podstawowego metody sił od $X_1=1$



**Obliczenie reakcji**

$$\sum M_{xB} = \bar{R}_3^1 + X_1 \cdot 6m = 0$$

$$\bar{R}_3^1 + 1 \cdot 6m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_3^1 = -6m$$

$$\sum M_{yB} = \bar{R}_2^1 - X_1 \cdot 3m = 0$$

$$\bar{R}_2^1 - 1 \cdot 3m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_2^1 = 3m$$

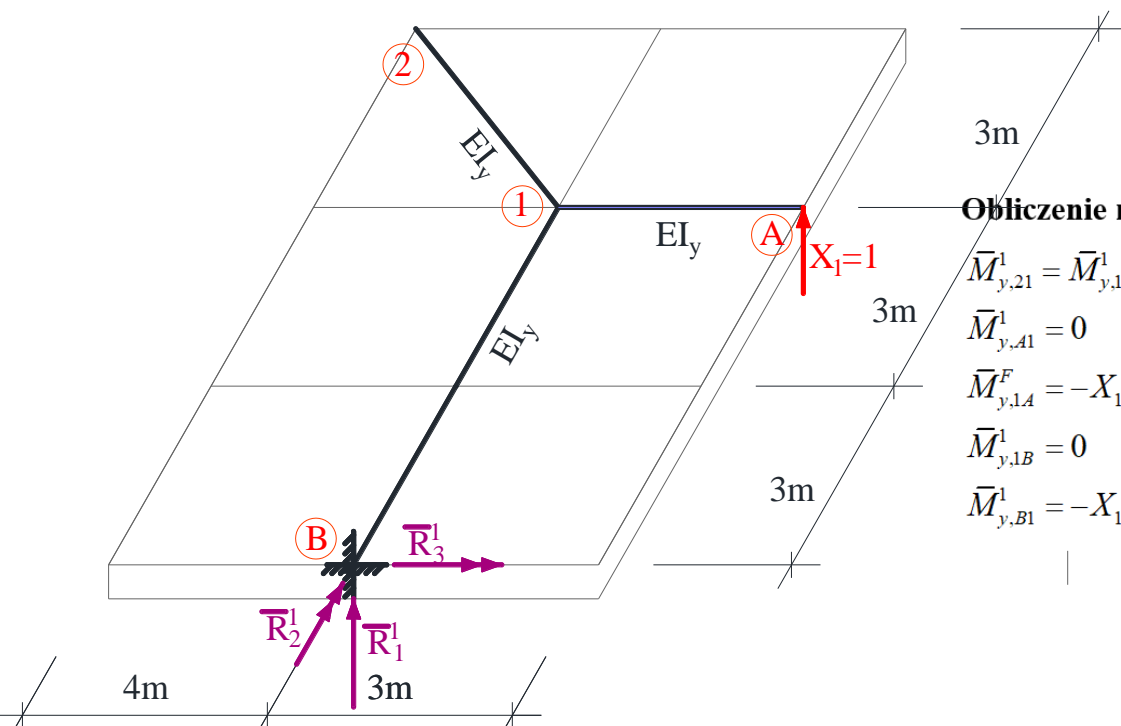
$$\sum V_{zB} = \bar{R}_1^1 + X_1 = 0$$

$$\bar{R}_1^1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_1^1 = -1$$



# 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

Rozwiązanie układu podstawowego metody sił od  $X_1=1$



Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów zginających

$$\bar{M}_{y,21}^1 = \bar{M}_{y,12}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{y,A1}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{y,1A}^F = -X_1 \cdot 3m = -1 \cdot 3m = -3m$$

$$\bar{M}_{y,1B}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{y,B1}^1 = -X_1 \cdot 6m = -1 \cdot 6m = -6m$$

Obliczenie reakcji

$$\sum M_{xB} = \bar{R}_3^1 + X_1 \cdot 6m = 0$$

$$\bar{R}_3^1 + 1 \cdot 6m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_3^1 = -6m$$

$$\sum M_{yB} = \bar{R}_2^1 - X_1 \cdot 3m = 0$$

$$\bar{R}_2^1 - 1 \cdot 3m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_2^1 = 3m$$

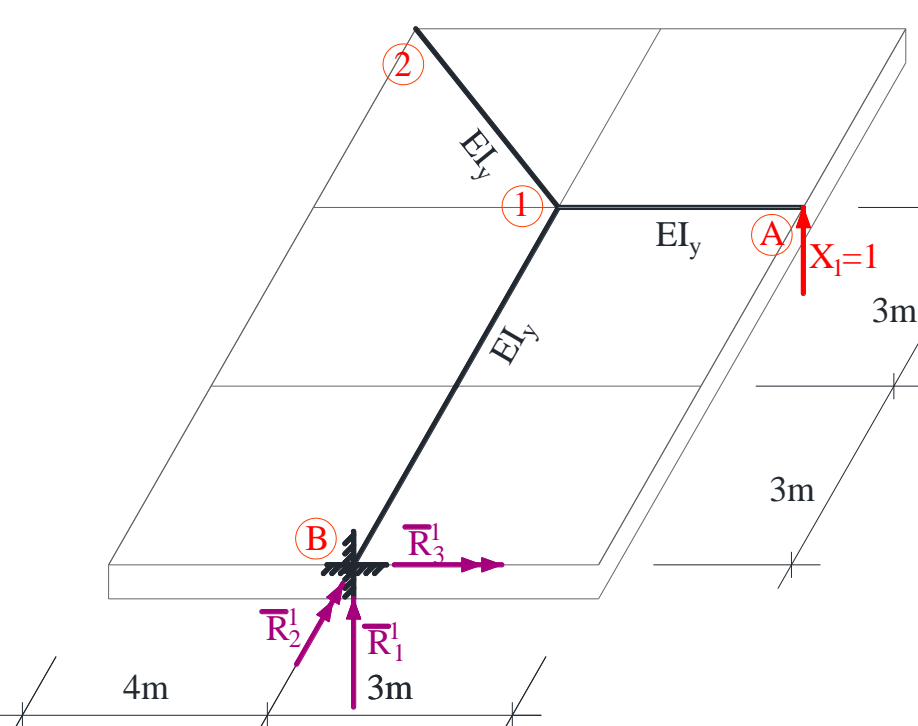
$$\sum V_{zB} = \bar{R}_1^1 + X_1 = 0$$

$$\bar{R}_1^1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_1^1 = -1$$



# 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

## 4. Rozwiązanie układu podstawowego metody sił od $X_1=1$



### Obliczenie reakcji

$$\sum M_{xB} = \bar{R}_3^1 + X_1 \cdot 6m = 0$$

$$\bar{R}_3^1 + 1 \cdot 6m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_3^1 = -6m$$

$$\sum M_{yB} = \bar{R}_2^1 - X_1 \cdot 3m = 0$$

$$\bar{R}_2^1 - 1 \cdot 3m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_2^1 = 3m$$

$$\sum V_{zB} = \bar{R}_1^1 + X_1 = 0$$

$$\bar{R}_1^1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_1^1 = -1$$

### Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów zginających

$$\bar{M}_{y,21}^1 = \bar{M}_{y,12}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{y,A1}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{y,1A}^F = -X_1 \cdot 3m = -1 \cdot 3m = -3m$$

$$\bar{M}_{y,1B}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{y,B1}^1 = -X_1 \cdot 6m = -1 \cdot 6m = -6m$$

### Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów skręcających

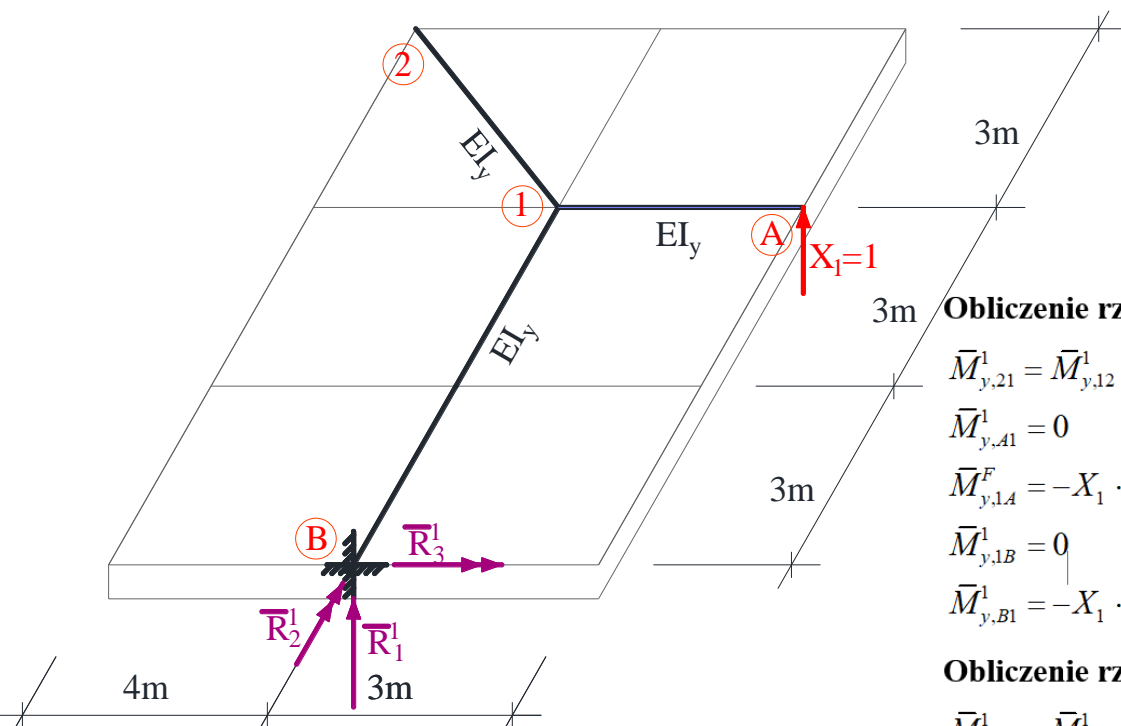
$$\bar{M}_{x,21}^1 = \bar{M}_{x,12}^1 =$$

$$\bar{M}_{x,A1}^1 = \bar{M}_{x,1A}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{x,1B}^1 = \bar{M}_{x,B1}^1 = -X_1 \cdot 3m = -1 \cdot 3m = -3m$$

## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 4. Rozwiązanie układu podstawowego metody sił od $X_1=1$



#### Obliczenie reakcji

$$\sum M_{xB} = \bar{R}_3^1 + X_1 \cdot 6m = 0$$

$$\bar{R}_3^1 + 1 \cdot 6m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_3^1 = -6m$$

$$\sum M_{yB} = \bar{R}_2^1 - X_1 \cdot 3m = 0$$

$$\bar{R}_2^1 - 1 \cdot 3m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_2^1 = 3m$$

$$\sum V_{zB} = \bar{R}_1^1 + X_1 = 0$$

$$\bar{R}_1^1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_1^1 = -1$$

#### Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów zginających

$$\bar{M}_{y,21}^1 = \bar{M}_{y,12}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{y,A1}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{y,1A}^F = -X_1 \cdot 3m = -1 \cdot 3m = -3m$$

$$\bar{M}_{y,1B}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{y,B1}^1 = -X_1 \cdot 6m = -1 \cdot 6m = -6m$$

#### Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów skręcających

$$\bar{M}_{x,21}^1 = \bar{M}_{x,12}^1 =$$

$$\bar{M}_{x,A1}^1 = \bar{M}_{x,1A}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{x,1B}^1 = \bar{M}_{x,B1}^1 = -X_1 \cdot ? = -1 \cdot 3m = -3m$$

#### Obliczenie rzędnych sił tnących

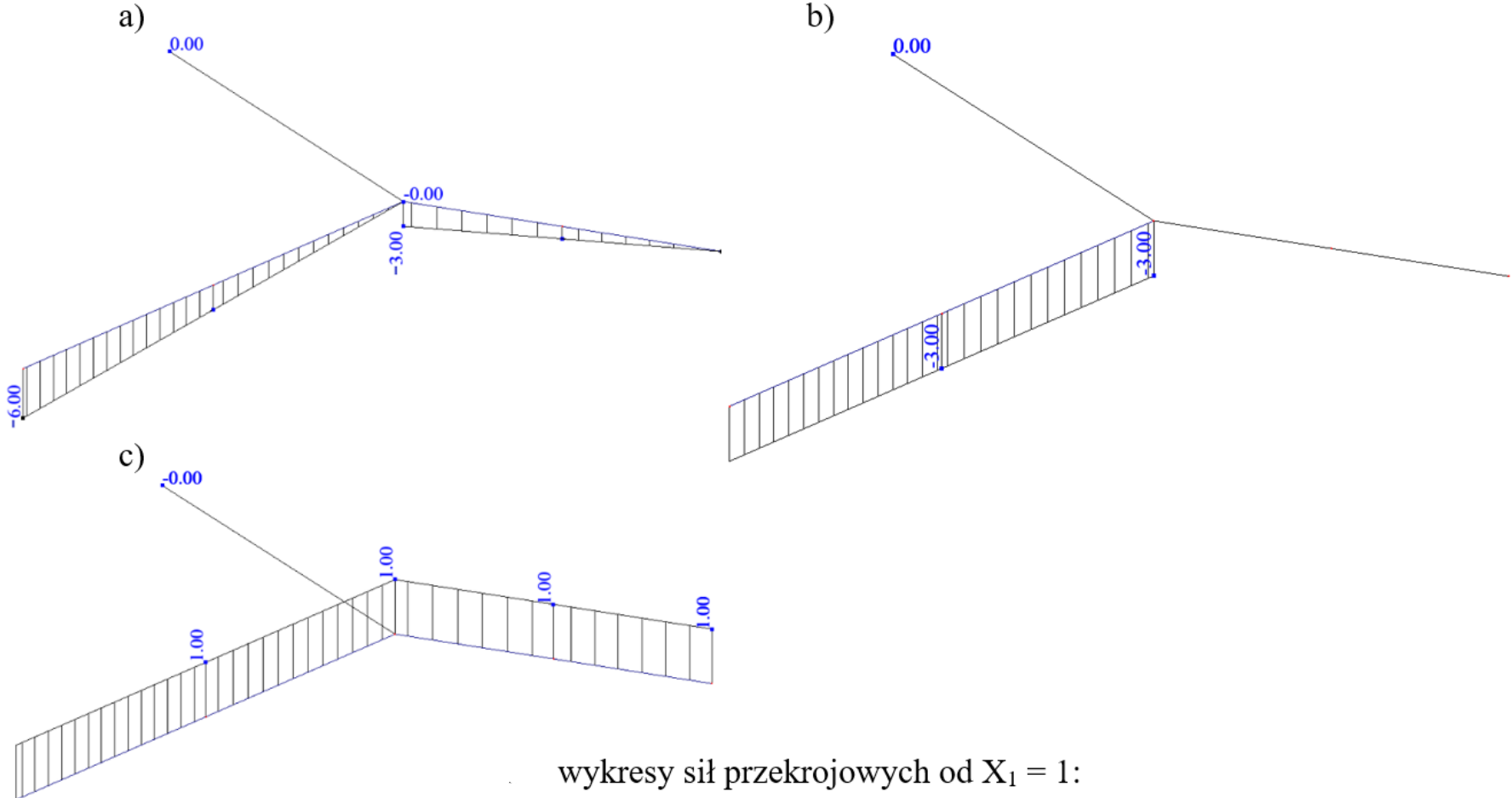
$$\bar{V}_{z,21}^1 = \bar{V}_{z,12}^1 = 0$$

$$\bar{V}_{z,A1}^1 = \bar{V}_{z,A1}^1 = X_1 = 1$$

$$\bar{V}_{z,1B}^1 = \bar{V}_{z,B1}^1 = X_1 = 1$$

## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 4. Rozwiązanie układu podstawowego metody sił od $X_1=1$



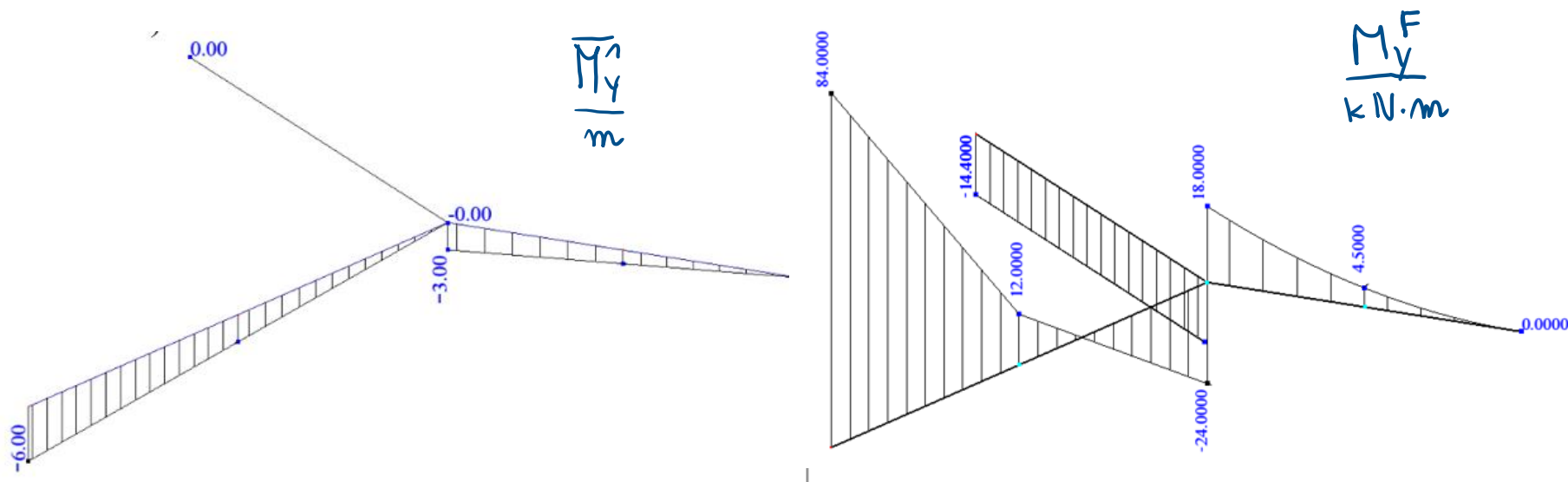
wykresy sił przekrojowych od  $X_1 = 1$ :

a) momenty zginające w m, b) momenty skręcające w m, c) siły tnące



## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

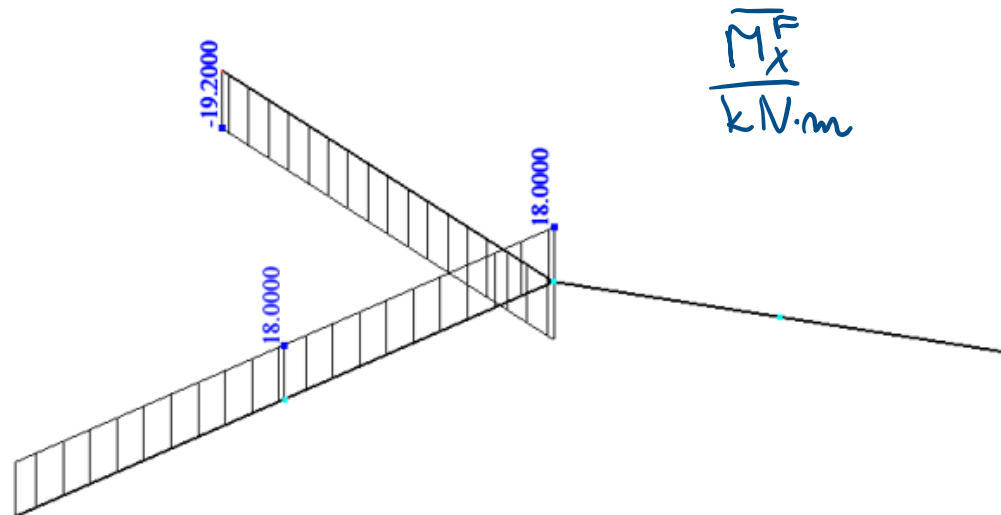
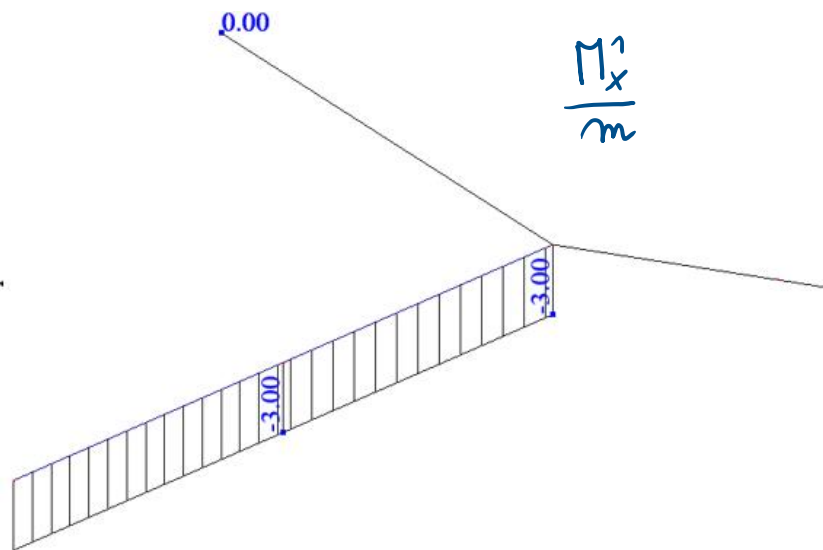
### 5. Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych metody sił



$$\begin{aligned}
 \delta_{1F} &= \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^F}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^F}{GI_x} dx = \frac{3m}{6EI_y} \{0 \cdot 0 + 4 \cdot 4,5 kN \cdot m \cdot (-1,5)m + 18 kN \cdot m \cdot (-3)m\} + \\
 &+ \frac{3m}{6EI_y} \{(-24) kN \cdot m \cdot 0 + 4 \cdot (-6) kN \cdot m \cdot (-1,5)m + 12 kN \cdot m \cdot (-3)m\} + \\
 &+ \frac{3m}{6EI_y} \{12 kN \cdot m \cdot (-3)m + 4 \cdot 36 kN \cdot m \cdot (-4,5)m + 84 kN \cdot m \cdot (-6)m\} + \frac{1}{0,769EI_y} \cdot 18m \cdot 6m \cdot (-3)m = \\
 &= -40,5 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} + 0 - 702 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} - 421,3264 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} = -1163,8264 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y}
 \end{aligned}$$

## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 5. Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych metody sił

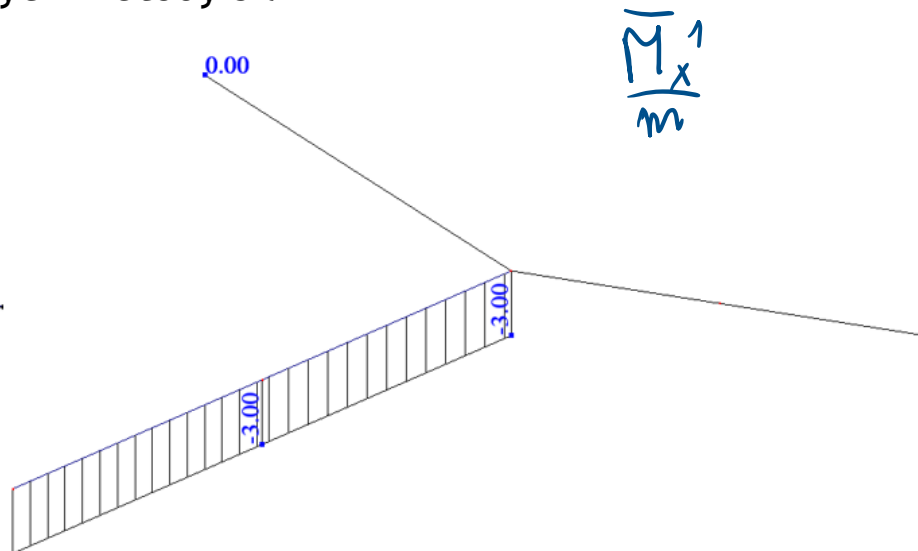
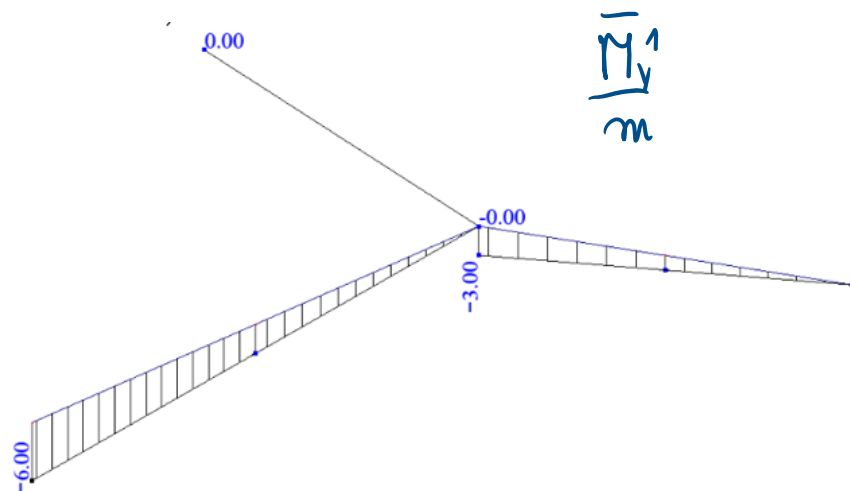


$$\begin{aligned}
 \delta_{1F} &= \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^F}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^F}{GI_x} dx = \frac{3m}{6EI_y} \{0 \cdot 0 + 4 \cdot 4,5 kN \cdot m \cdot (-1,5)m + 18 kN \cdot m \cdot (-3)m\} + \\
 &+ \frac{3m}{6EI_y} \{(-24) kN \cdot m \cdot 0 + 4 \cdot (-6) kN \cdot m \cdot (-1,5)m + 12 kN \cdot m \cdot (-3)m\} + \\
 &+ \frac{3m}{6EI_y} \{12 kN \cdot m \cdot (-3)m + 4 \cdot 36 kN \cdot m \cdot (-4,5)m + 84 kN \cdot m \cdot (-6)m\} + \frac{1}{0,769EI_y} \cdot 18m \cdot 6m \cdot (-3)m = \\
 &= -40,5 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} + 0 - 702 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} - 421,3264 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} = -1163,8264 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y}
 \end{aligned}$$



## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 5. Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych metody sił



$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^1}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^1}{GI_x} dx = \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-3)m \cdot 3m \cdot \frac{2}{3} \cdot (-3)m + \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-6)m \cdot 6m \cdot \frac{2}{3} \cdot (-6)m + \\ &+ \frac{1}{0,769EI_y} \cdot (-3)m \cdot 6m \cdot (-3)m = 9 \frac{m^3}{EI_y} + 72 \frac{m^3}{EI_y} + 70,2211 \frac{m^3}{EI_y} = 151,2211 \frac{m^3}{EI_y} \end{aligned}$$

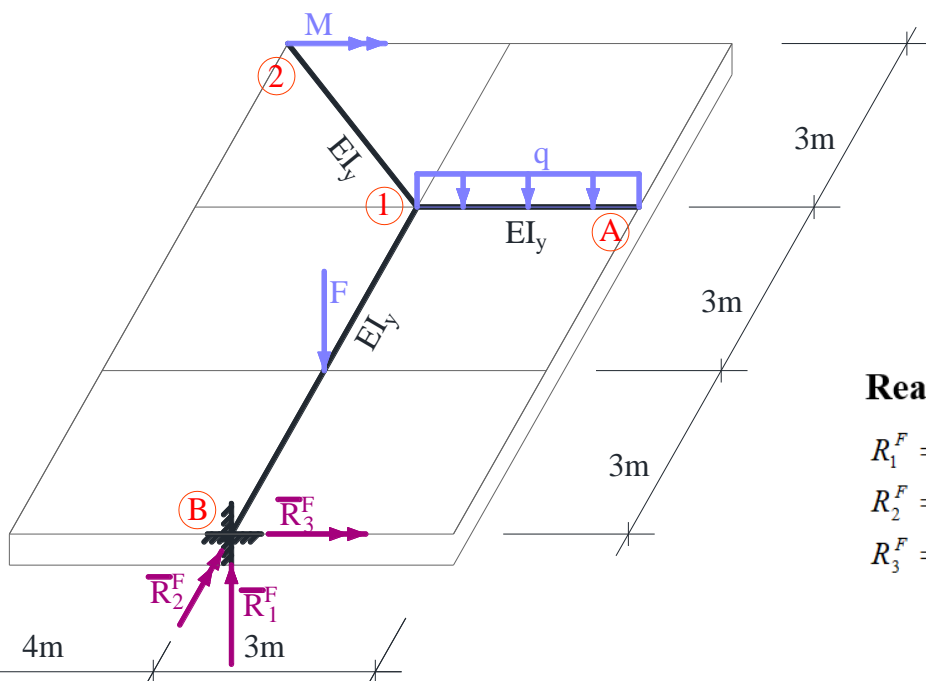


## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 6. Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie

$$151,2211 \frac{m^3}{EI_y} X_1^F - 1163,8264 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} = - \frac{X_1^F}{8 \frac{m^3}{EI_y}} \Rightarrow X_1^F = 7,6898 kN.$$

### 7. Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów



$$\begin{aligned} R_i^F &= \bar{R}_i^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_i^F, \\ M_{y,ij}^F &= \bar{M}_{y,ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{M}_{y,ij}^F, \\ M_{x,ij}^F &= \bar{M}_{x,ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{M}_{x,ij}^F, \\ V_{z,ij}^F &= \bar{V}_{z,ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{V}_{z,ij}^F. \end{aligned}$$

#### Reakcje

$$\begin{aligned} R_1^F &= \bar{R}_1^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_1^F = 1m \cdot 7,6898 kN + 24 kN = 31,6898 kN, \\ R_2^F &= \bar{R}_2^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_2^F = 3m \cdot 7,6898 kN - 18 kN \cdot m = 5,0694 kN \cdot m, \\ R_3^F &= \bar{R}_3^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_3^F = -6m \cdot 7,6898 kN + 84 kN \cdot m = 37,8610 kN \cdot m. \end{aligned}$$



# 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

## 7. Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów

### Momenty zginające

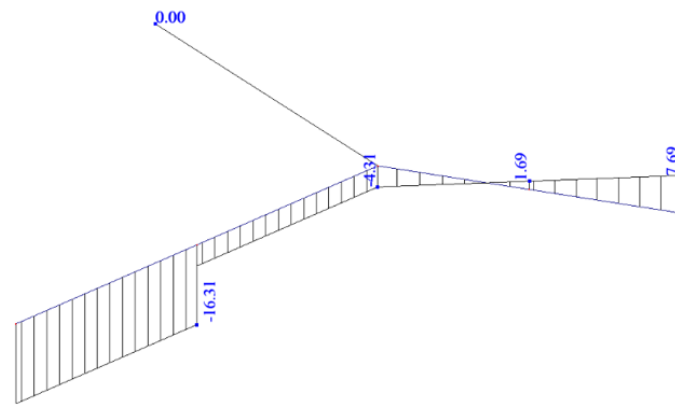
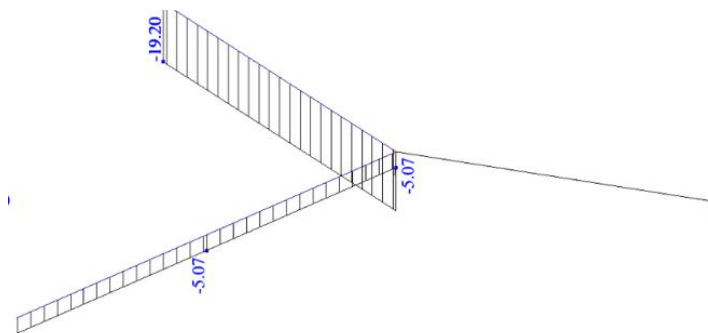
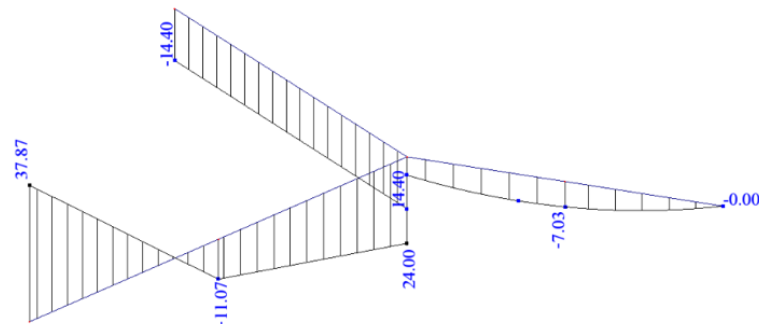
Pręt	Punkt	$\frac{\bar{M}_{y,ij}^1}{m}$	$\frac{X_1^F}{kN}$	$\frac{\bar{M}_{y,ij}^F}{kN \cdot m}$	$\frac{M_{y,ij}^F}{kN \cdot m}$
12	2	0	7,6898	-14,4	-14,4
	1	0		-14,4	-14,4
1A	A	0		0	0
	3	-1,5		4,5	-7,0347
	1	-3		18	-5,0694
1B	1	0		-24	-24
	4	-3		12	-11,0694
	B	-6		84	37,8610

### Momenty skręcające

Pręt	Punkt	$\frac{\bar{M}_{x,ij}^1}{m}$	$\frac{X_1^F}{kN}$	$\frac{\bar{M}_{x,ij}^F}{kN \cdot m}$	$\frac{M_{x,ij}^F}{kN \cdot m}$
12	2	0	7,6898	-19,2	-19,2
	1	0		-19,2	-19,2
1A	A	0		0	0
	1	0		0	0
1B	1	-3		18	-5,0694
	B	-3		18	-5,0694

### Sily tnące

Pręt	Punkt	$\frac{\bar{V}_{z,ij}^1}{1}$	$\frac{X_1^F}{kN}$	$\frac{\bar{V}_{z,ij}^F}{kN}$	$\frac{V_{z,ij}^F}{kN}$
12	2	0	7,6898	0	0
	1	0		0	0
1A	A	1		0	7,6898
	1	1		-12	-4,3102
14	1	1		-12	-4,3102
	4	1		-12	-4,3102
4B	4	1		-24	-16,3102
	B	1		-24	-16,3102



## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

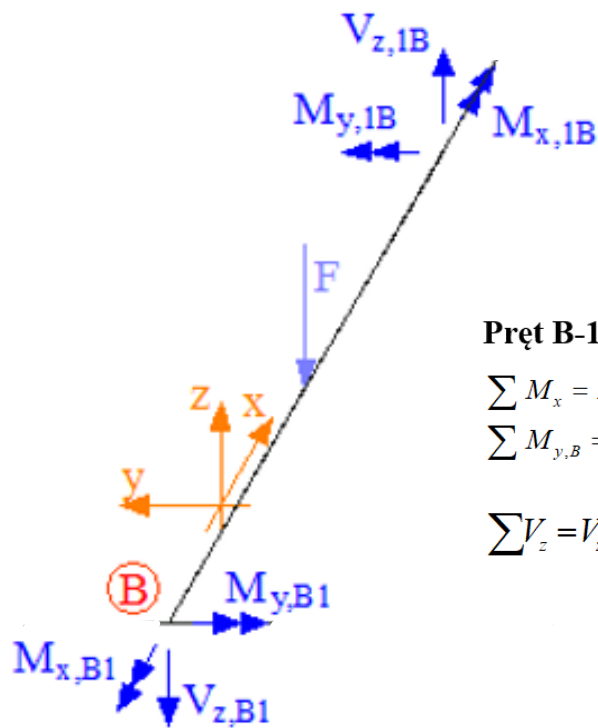
### 8. Kontrola statyczna rozwiązania

**Kontrola statycznej dopuszczalności rozwiązania** polega na sprawdzeniu czy siły spełniają równania równowagi na prętach i w węzłach. Wektory sił przekrojowych wskazują dodatnio współrzędnych.



## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 8. Kontrola statyczna rozwiązania



**Pręt B-1**

$$\sum M_x = M_{x,1B}^F - M_{x,B1}^F = -5,0694 \text{ kN} \cdot \text{m} - (-5,0694) \text{ kN} \cdot \text{m} = 0,$$

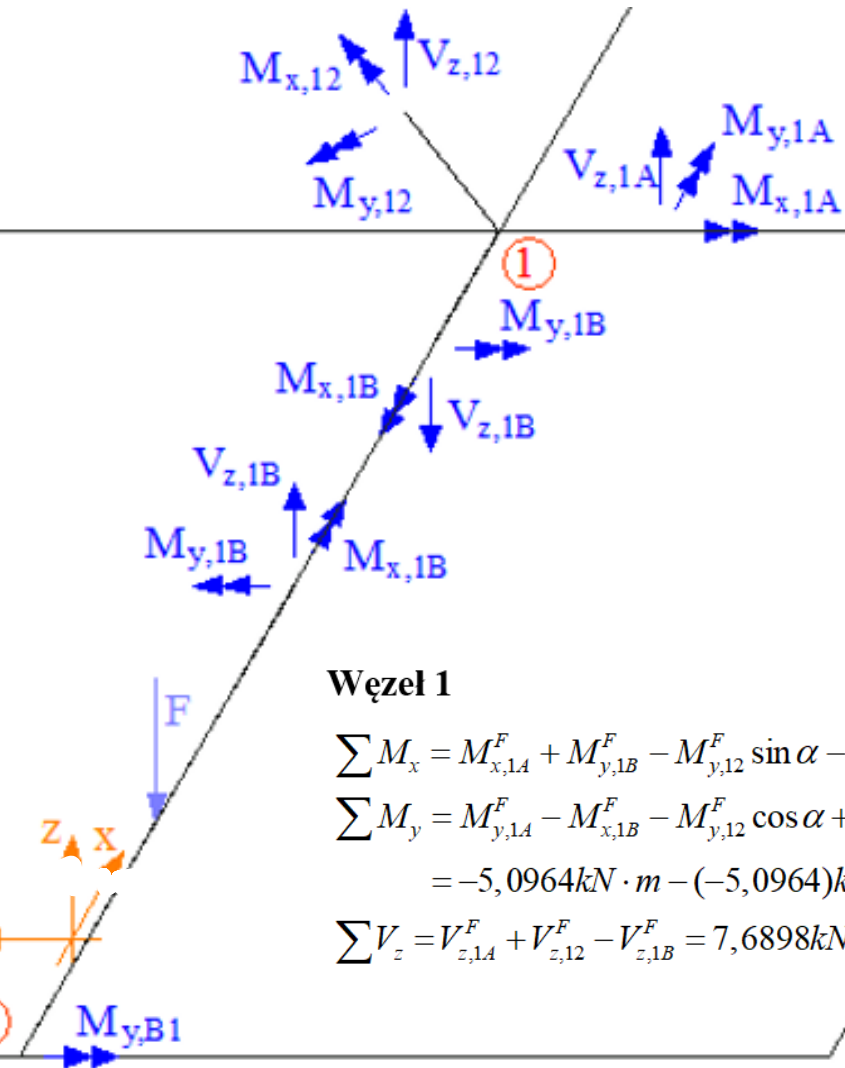
$$\sum M_{y,B} = M_{y,1B}^F - M_{y,B1}^F + P \cdot 3\text{m} - V_{z,1B}^F \cdot 6\text{m} = -24 \text{ kN} \cdot \text{m} - 37,8610 \cdot \text{m} + 12 \text{ kN} \cdot 3\text{m} - (-4,3102) \text{ kN} \cdot 6\text{m} = 0,$$

$$\sum V_z = V_{z,1B}^F - V_{z,B1}^F - P = -4,3102 \text{ kN} - (-16,3102) \text{ kN} - 12 \text{ kN} = 0.$$



## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 8. Kontrola statyczna rozwiązania



**Węzeł 1**

$$\sum M_x = M_{x,1A}^F + M_{y,1B}^F - M_{y,12}^F \sin \alpha - M_{x,12}^F \cos \alpha = 0 + (-24)kN \cdot m - (-14,4)kN \cdot m \cdot 0,6 - (-19,2)kN \cdot m \cdot 0,8 = 0,$$

$$\sum M_y = M_{y,1A}^F - M_{x,1B}^F - M_{y,12}^F \cos \alpha + M_{x,12}^F \sin \alpha =$$

$$= -5,0964kN \cdot m - (-5,0964)kN \cdot m - (-14,4)kN \cdot m \cdot 0,8 + (-19,2)kN \cdot m \cdot 0,6 = 0,$$

$$\sum V_z = V_{z,1A}^F + V_{z,12}^F - V_{z,1B}^F = 7,6898kN + 0 - 7,6898kN = 0.$$



## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 9. Kontrola kinematyczna rozwiązania

$$\Delta_{1F} = -\frac{X_1^F}{k_\delta} = -\frac{7,6898kN}{8 \frac{EI_y}{m^3}} = 0,9612 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y}$$

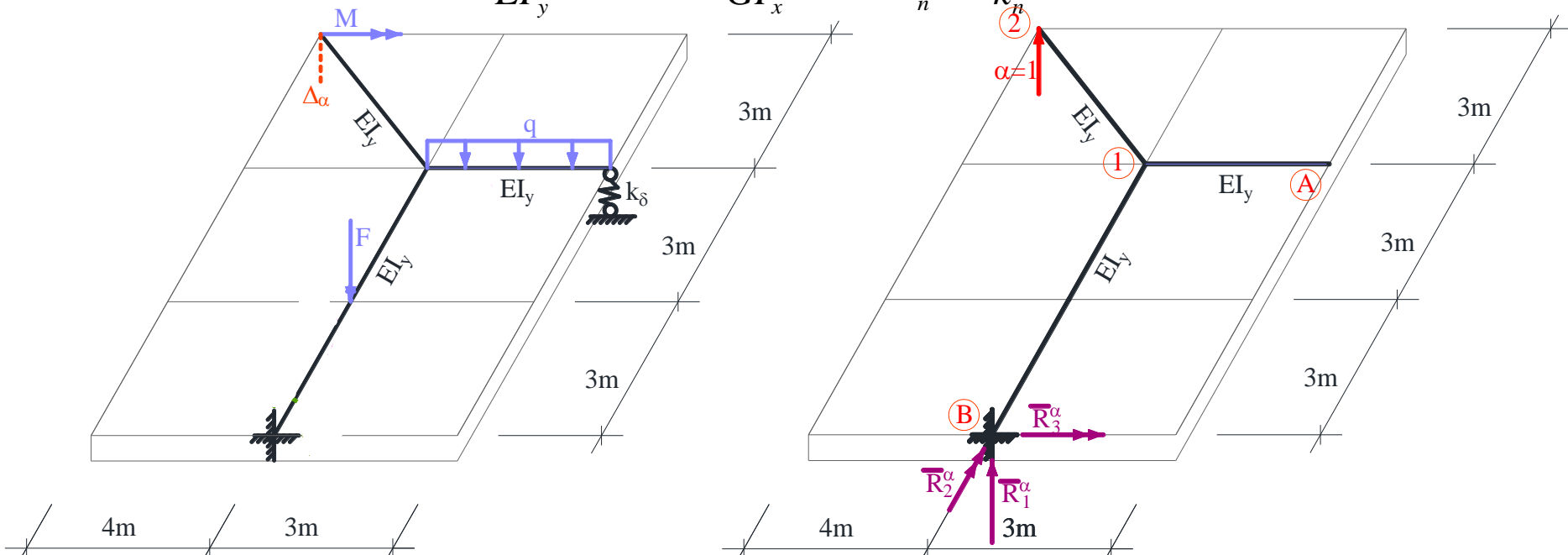
$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \int \frac{\bar{M}_y^1 M_y^F}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^1 M_x^F}{GI_x} dx = \frac{3m}{6EI_y} \{0 \cdot 0 + 4 \cdot (-7,0347)kN \cdot m \cdot (-1,5)m + (-5,0694)kN \cdot m \cdot (-3)m\} + \\ &+ \frac{3m}{6EI_y} \{(-24)kN \cdot m \cdot 0 + 4 \cdot (-17,5347)kN \cdot m \cdot (-1,5)m + (-11,0694)kN \cdot m \cdot (-3)m\} + \\ &+ \frac{3m}{6EI_y} \{(-11,0694)kN \cdot m \cdot (-3)m + 4 \cdot 13,3958)kN \cdot m \cdot (-4,5)m + 37,8610kN \cdot m \cdot (-6)m\} + \\ &+ \frac{1}{0,769EI_y} \cdot (-5,0964)m \cdot 6m \cdot (-3)m = 28,7802 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} + 69,2082 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} + (-217,541) \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} \\ &+ 118,5696 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} = -0,9651 \frac{kN \cdot m^2}{EI_y} \end{aligned}$$

## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 10. Obliczenie szukanego przemieszczenia

Do wyznaczenia przemieszczeń wykorzystano twierdzenie redukcyjne, które pozwala na to aby jedno z otrzymanych rozwiązań było w układzie statycznie wyznaczalnym. Ponieważ rzeczywiste siły wewnętrzne zostały uzyskane we wcześniejszych punktach, należy rozwiązać dowolny układ podstawowy od siły jednostkowej w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia. Gdy znane jest rozwiązanie układu hiperstatycznego, przemieszczenia wyznaczane są ze wzorów:

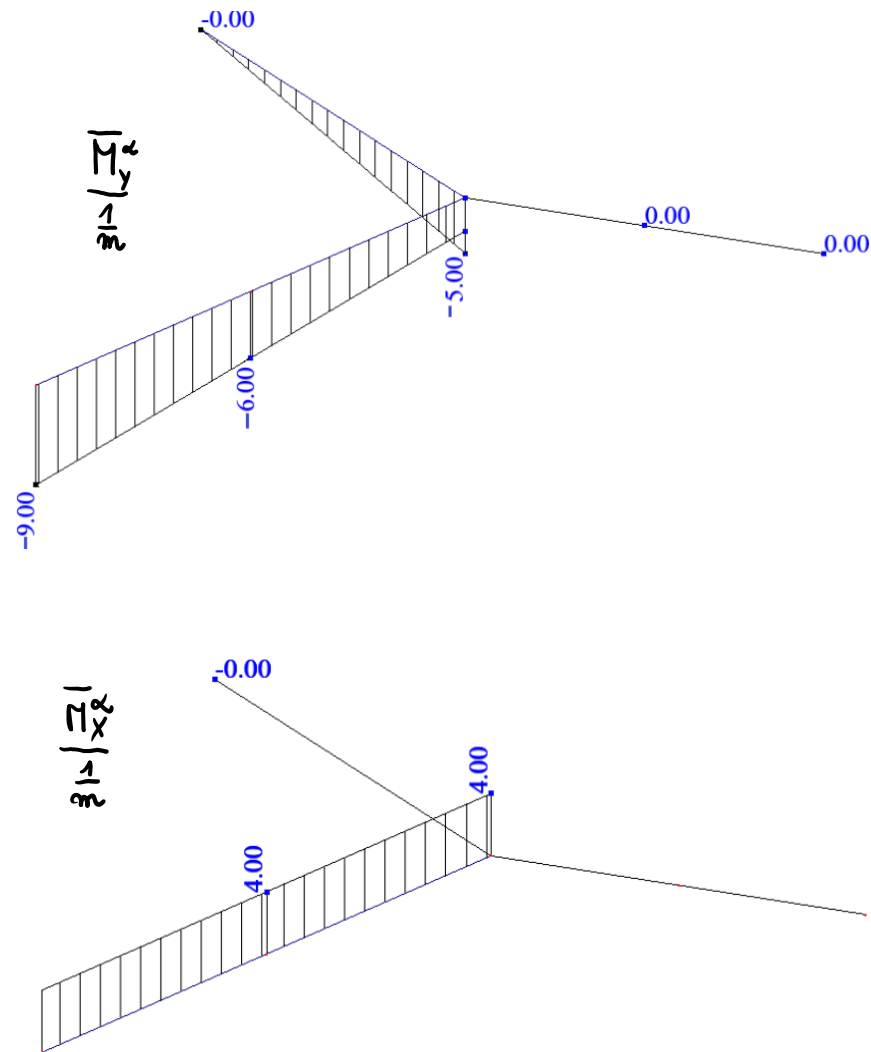
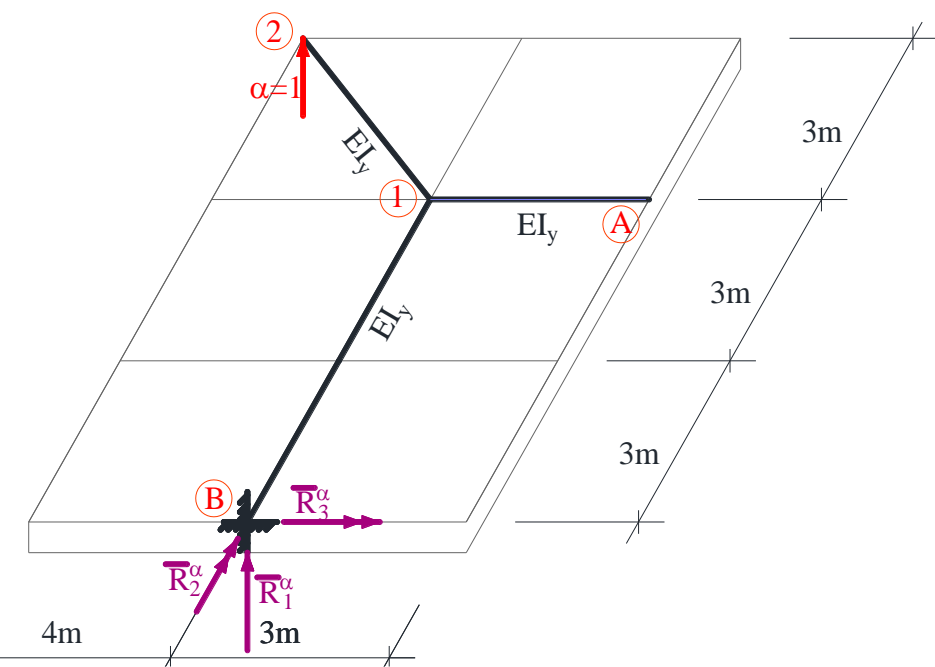
$$\Delta_{\alpha F} = \int \frac{\bar{M}_y^\alpha M_y^F}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^\alpha M_x^F}{GI_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^\alpha \cdot S_n^F}{k_n},$$



## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

### 10. Obliczenie szukanego przemieszczenia

$$\Delta_{\alpha F} = \int \frac{\bar{M}_y^{\alpha} M_y^F}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^{\alpha} M_x^F}{GI_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^{\alpha} \cdot S_n^F}{k_n},$$







## 4. Dźwigary załamane w planie- przykład

10. Obliczenie szukanego przemieszczenia

$$\Delta_{\alpha F} = \int \frac{\bar{M}_y^\alpha M_y^F}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^\alpha M_x^F}{GI_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^\alpha \cdot S_n^F}{k_n},$$

$$\begin{aligned} \Delta_{\alpha F} = & \int \frac{\bar{M}_y^\alpha M_y^F}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^\alpha M_x^F}{GI_x} dx = \frac{3m}{6EI_y} \{0 \cdot 0 + 4 \cdot (-7,0347)kN \cdot m \cdot 0m + (-5,0694)kN \cdot m \cdot 0m\} + \\ & + \frac{3m}{6EI_y} \{(-24)kN \cdot m \cdot (-3) + 4 \cdot (-17,5347)kN \cdot m \cdot (-4,5)m + (-11,0694)kN \cdot m \cdot (-6)m\} + \\ & + \frac{3m}{6EI_y} \{(-11,0694)kN \cdot m \cdot (-6)m + 4 \cdot 13,3958)kN \cdot m \cdot (-7,5)m + 37,8610kN \cdot m \cdot (-9)m\} + \\ & + \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5m \cdot (-5)m \cdot (-14,4)kN \cdot m + \frac{1}{0,769EI_y} \cdot (-5,0964)kN \cdot m \cdot 6m \cdot 4m = 0 + 227,0220 \frac{kN \cdot m^3}{EI_y} - \\ & - 338,1012 \frac{kN \cdot m^3}{EI_y} + 180 \frac{kN \cdot m^3}{EI_y} + (-158,2127) \frac{kN \cdot m^3}{EI_y} = -89,2919 \frac{kN \cdot m^3}{EI_y} = -0,0199m \end{aligned}$$