R o z w i ą z a n i e

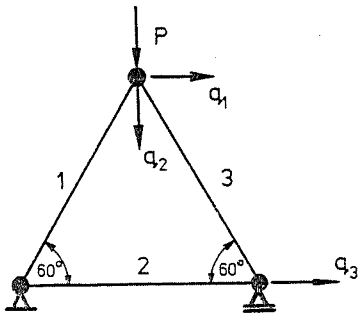
Układ ma trzy dynamiczne stopnie swobody; obieramy współrzędne uogólnione $\bar{q}$. Jeśli przyjmiemy założenie o granulacji mas w węzłach, wtedy zgodnie z (3.120), (3.121)

$$B = \{m\} = \mathrm{diag}(1 \quad 1 \quad 1)\cdot m.$$

Jeśli natomiast uwzględnimy ciągły rozkład mas, to zgodnie z (3.130), (3.131)

$$B = \begin{bmatrix} 0,667 & 0 & 0,167 \\ 0 & 0,667 & 0 \\ 0,167 & 0 & 0,667 \end{bmatrix} \cdot m.$$

Macierz transformacji współrzędnych uogólnionych na wydłużenia prętów ma postać



Rys. 3.21

$$A_k = \begin{bmatrix} 0,500 & -0,866 & 0 \\ 0 & 0 & 1,000 \\ -0,500 & -0,866 & 0,500 \end{bmatrix},$$

a zatem zgodnie z (3.125)

$$K = A_k^T\{EA/l\}A_k = \begin{bmatrix} 0,500 & 0 & -0,250 \\ 0 & 1,500 & -0,433 \\ -0,250 & -0,433 & 1,250 \end{bmatrix} EA/l \ .$$

Wektor uogólnionych sił wzbudzających ma postać

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} P \ .$$

PRZYKŁAD 3.13.7

Dany jest fundament blokowy, jak na rys. 3.22 (wymiar w kierunku osi x_3 wynosi 1,5 a). Drgania bloku są wzbudzane siłą F_o wirującą z częstością kołową p. Układ jest symetryczny względem płaszczyzny x_1x_2. Należy zbadać ruch naroża N podczas stacjonarnych drgań wymuszonych z częstością $p = 0,9\,\omega_1$. Efekty drugiego rzędu pominąć. Wykorzystać zasady analizy wymiarowej przyjmując $k_1 = k$, $k_2 = 0,7\ k$, $k_3 = 2\ k$ oraz $\gamma = 0,10$ dla wszystkich głównych form drgań.

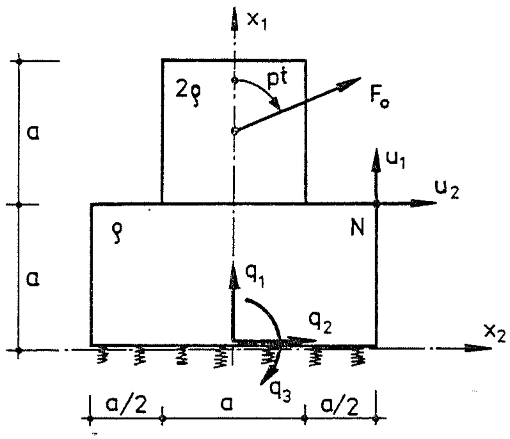
R o z w i ą z a n i e

Za wielkości porównawcze przyjmujemy a, ρ, k, F_o. Układ ma trzy dynamiczne stopnie swobody. Obieramy współrzędne uogólnione $\bar{q}$. Charakterystyki bryły:

$$m = 2\cdot 1,5\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot 1,5\cdot 1\cdot 2 = 3,0 + 3,0 = 6,00 \ ,$$

$$S_{13} = 0, \qquad S_{23} = 3\cdot 0,5 + 3\cdot 1,5 = 6,00 \ ,$$

$$J_3^m = 3,0(2^2/12 + 1^2/12 + 0,5^2) + 3,0(1^2/12 + 1^2/12 + 1,5^2) = 9,25.$$



Rys. 3.22

Macierz bezwładności zgodnie z (3.135) ma postać

$$B = \begin{bmatrix} 6,00 & 0 & 0 \\ 0 & 6,00 & 6,00 \\ 0 & 6,00 & 9,25 \end{bmatrix} .$$

Charakterystyki pola podstawy:

$$A = 2\cdot 1,5 = 3,00 \ , \qquad J_3 = 3,0\cdot 2^2/12 = 1,00 \ .$$

Macierz sztywności zgodnie z (3.137) ma postać

$$K = \mathrm{diag}(3,00 \quad 2,10 \quad 2,00).$$

Równanie charakterystyczne po podstawieniu $\omega^{-2} = \lambda$

$$\det \begin{bmatrix} 6,00-3,00\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 6,00-2,10\lambda & 6,00 \\ 0 & 6,00 & 9,25-2,00\lambda \end{bmatrix} = 0 \ ,$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2 - 7,4821\lambda + 4,6429) = 0 \ .$$

Rozwiązanie zagadnienia własnego daje wyniki:

$$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 6,7992 \longrightarrow & \omega_1 = 0,3835 \\ \lambda_2 = 2,0000 \longrightarrow & \omega_2 = 0,7071 \\ \lambda_3 = 0,6829 \longrightarrow & \omega_3 = 1,2101 \end{matrix}\right\} \cdot \sqrt{k/\rho a} \ ,$$

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0{,}7248 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -0{,}7610 \end{bmatrix} .$$

Drgania wymuszone przeanalizujemy dwoma sposobami, przyjmując zgodnie z tematem zadania $p = 0{,}9\cdot 0{,}3825 = 0{,}34515\sqrt{k/\rho a}$.

W pierwszym sposobie pominiemy dla uproszczenia tłumienie i wykorzystamy równanie typu (3.45) z uwzględnieniem (3.139). Po wykonaniu działań otrzymuje się:

$$\begin{bmatrix} 2{,}2852 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}3852 & -0{,}7148 \\ 0 & -0{,}7148 & 0{,}8981 \end{bmatrix} \bar{q} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1{,}5 \end{bmatrix} \sin pt + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cos pt ,$$

a stąd

$$\bar{q}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 2{,}6876 \\ 3{,}8093 \end{bmatrix} , \qquad \bar{q}_c = \begin{bmatrix} 0{,}4376 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Macierz transformacji współrzędnych dla naroża N:

$$A_N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} ,$$

a więc

$$\bar{u}_s = A_N\bar{q}_s = \begin{bmatrix} -3{,}8093 \\ 6{,}4969 \end{bmatrix} , \qquad \bar{u}_c = A_N\bar{q}_c = \begin{bmatrix} 0{,}4376 \\ 0 \end{bmatrix} ,$$

$$\text{am}\ u_1 = \sqrt{3{,}8093^2 + 0{,}4376^2} = 3{,}8343\ F_o/ka^2 ,$$

$$\text{am}\ u_2 = \sqrt{6{,}4969^2 + 0^2} = 6{,}4969\ F_o/ka^2 .$$

Drugi sposób rozwiązania polega na zastosowaniu transformacji własnej. Można przy tym uwzględnić tłumienie bez konieczności rozwiązywania dużego układu równań typu (3.44). Przebieg obliczeń jest następujący:

$$\{k^o\} = W^TKW = \begin{bmatrix} 3{,}1032 & 0 & 0{,}0001 \\ 0 & 3{,}0000 & 0 \\ 0{,}0001 & 0 & 3{,}2582 \end{bmatrix} \approx$$

$$\approx \text{diag}(3{,}1032 \quad 3{,}0000 \quad 3{,}2582) ;$$

$$\eta_1 = p/\omega_1 = 0{,}90000, \qquad \eta_1^2 = 0{,}81000 ,$$

$$\eta_2 = p/\omega_2 = 0{,}48812, \qquad \eta_2^2 = 0{,}23826 ,$$

$$\eta_3 = p/\omega_3 = 0{,}28522, \qquad \eta_3^2 = 0{,}08135 ,$$

$$\gamma = 0{,}10 , \qquad \gamma^2 = 0{,}01 ;$$

$$h_1 = \frac{1}{3{,}1032}(1-0{,}81)/[(1-0{,}81)^2+0{,}01\cdot 0{,}81] = 1{,}3852 ,$$

$$h_2 = \frac{1}{3{,}0000}(1-0{,}23826)/[(1-0{,}23826)^2+0{,}01\cdot 0{,}23826] = 0{,}4358 ,$$

$$h_3 = \frac{1}{3{,}2582}(1-0{,}08135)/[(1-0{,}08135)^2+0{,}01\cdot 0{,}08135] = 0{,}3338 ,$$

$$h_1' = \frac{1}{3{,}1032}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}9/[(1-0{,}81)^2+0{,}01\cdot 0{,}81] = 0{,}2477 ,$$

$$h_2' = \frac{1}{3{,}0000}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}48812/[(1-0{,}23826)^2+0{,}01\cdot 0{,}23826] = 0{,}0279 ,$$

$$h_3' = \frac{1}{3{,}2582}\cdot 0{,}1\cdot 0{,}28522/[(1-0{,}08135)^2+0{,}01\cdot 0{,}08135] = 0{,}0104 ;$$

$$H = W\{h\}W^T = \begin{bmatrix} 0{,}4358 & 0 & 0 \\ 0 & 1{,}0416 & 0{,}7500 \\ 0 & 0{,}7500 & 1{,}5785 \end{bmatrix} ,$$

$$H' = W\{h'\}W^T = \begin{bmatrix} 0{,}0279 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}1405 & 0{,}1716 \\ 0 & 0{,}1716 & 0{,}2537 \end{bmatrix} ;$$

$$\bar{q}_s = H\bar{F}_s + H'\bar{F}_c = \begin{bmatrix} 0{,}0279 \\ 2{,}1666 \\ 3{,}1177 \end{bmatrix} , \qquad \bar{q}_c = -H'\bar{F}_s + H\bar{F}_c = \begin{bmatrix} 0{,}4358 \\ -0{,}3979 \\ -0{,}5521 \end{bmatrix} ,$$

$$\bar{u}_s = A_N\bar{q}_s = \begin{bmatrix} -3{,}0898 \\ 5{,}2843 \end{bmatrix} , \qquad \bar{u}_c = A_N\bar{q}_c = \begin{bmatrix} 0{,}9879 \\ -0{,}9500 \end{bmatrix} ,$$

$$\text{am}\ u_1 = \sqrt{3{,}0989^2 + 0{,}9879^2} = 3{,}2439\ F_o/ka^2 ,$$

$$\text{am}\ u_2 = \sqrt{5{,}2843^2 + 0{,}9500^2} = 5{,}3690\ F_o/ka^2 .$$

Porównanie tych wyników z poprzednimi daje wyobrażenie o roli tłumienia w rozważanym przypadku.

Charakterystyki trajektorii ruchu naroża N obliczymy następująco:

$$\bar{u}_s^T\bar{u}_s = 37{,}4707 , \qquad \bar{u}_c^T\bar{u}_c = 1{,}8784 , \qquad \bar{u}_s^T\bar{u}_c = -8{,}0725 ,$$

$$2\theta = \text{arctg}[-2\cdot 8{,}0725/(1{,}8784-37{,}4707)] = 3{,}5674 \text{ rad},$$

$$\theta = 1{,}7837 \text{ rad}, \quad \sin\theta = 0{,}9774 , \quad \cos\theta = -0{,}2113 ;$$

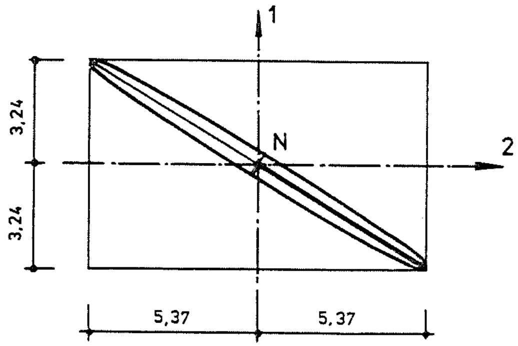
$$\bar{R} = \bar{u}_s\sin\theta + \bar{u}_c\cos\theta = \begin{bmatrix} -3{,}2287 \\ 5{,}3656 \end{bmatrix} ,$$

$$R = \sqrt{\bar{R}^T\bar{R}} = 6{,}2621\ F_o/ka^2 ;$$

$$\bar{r} = \bar{u}_s \cos\theta - \bar{u}_c \sin\theta = \begin{bmatrix} -0{,}3127 \\ -0{,}1880 \end{bmatrix} ,$$

$$r = \sqrt{\bar{r}^T \bar{r}} = 0{,}3649 \; F_o/ka^2 .$$

Obraz trajektorii ruchu naroża jest przedstawiony na rysunku 3.23.

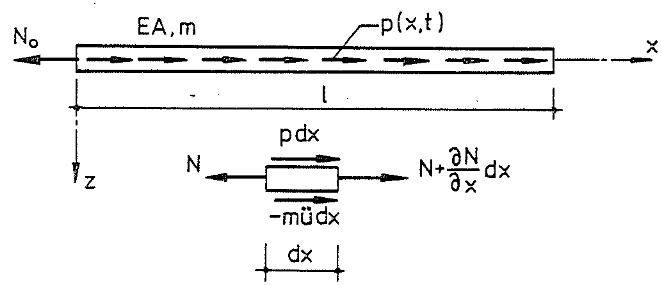


Rys. 3.23

4. UKŁADY CIĄGŁE

4.1. Drgania osiowe pręta pryzmatycznego

Rozważmy pręt pryzmatyczny o długości l, przekrojowej sztywności osiowej EA oraz masie m na jednostkę długości, poddany działaniu obciążenia stycznego $p(x,t)$, jak na rys. 4.1. Warunek równowagi



Rys. 4.1

wyciętego elementu pręta sprowadza się do równania

$$-\frac{\partial N}{\partial x} + m\ddot{u} = p(x,t) . \tag{4.1}$$

Podstawiając z definicji

$$N = EA \frac{\partial u}{\partial x} , \tag{4.2}$$

otrzymuje się równanie różniczkowe dynamicznej równowagi pręta, z pominięciem tłumienia

$$-EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + m\ddot{u} = p(x,t) . \tag{4.3}$$

Całki równania jednorodnego będziemy poszukiwali przyjmując $p(x,t) = 0$ oraz zakładając, że u jest harmoniczną funkcją czasu z częstością ω, a więc $\ddot{u} = -\omega^2 u$. Po wprowadzeniu oznaczeń