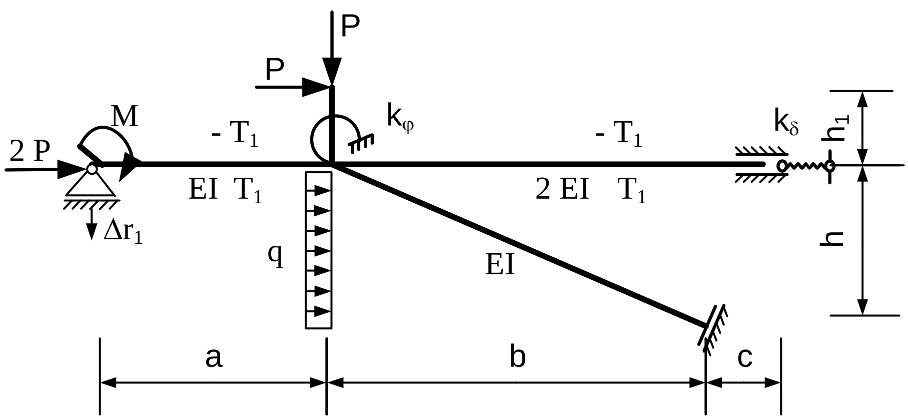
ROZWIĄZANIE UKŁADU METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

1. Dane i szukane

Dla ramy geometrycznie niewyznaczalnej o schemacie i obciążeniu jak na rysunku należy:

- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia mechanicznego (obliczyć siły przekrojowe i sporządzić ich wykresy).
- Zbudować szczegółową postać układu równań metody przemieszczeń dla danego obciążenia niemechanicznego.

Rozwiązanie powinno zawierać wykresy momentów zginających w układzie podstawowym od każdego rodzaju obciążenia.



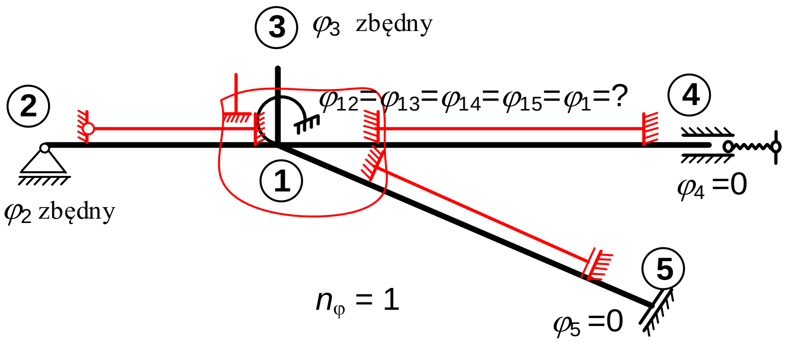
Dane do obliczeń: P = 20 kN, M = 10 kN·m, q = 6 kN/m, k_φ =2 EI/m, k_δ = 0.5EI/m^3, Δr_1 = 2 cm, T_1 = 25°C, α = 0.000012/°C, E =210 GPa, h = 0.24 m.

Szukane: M_x^F, M_y^F, V^F, szczegółowe postacie układów równań metody przemieszczeń od każdego typu obciążenia oddzielnie.

2. Obliczenie stopnia geometrycznej (kinematycznej) niewyznaczalności układu

$$n_g = n_\varphi + n_\delta$$

2.1 Podział układu na elementy o znanych wzorach transformacyjnych i obliczenie liczby niezależnych obrotów n_φ



2.2 Zbudowanie modelu przegubowego układu i obliczenie liczby niezależnych przesunięć n_δ

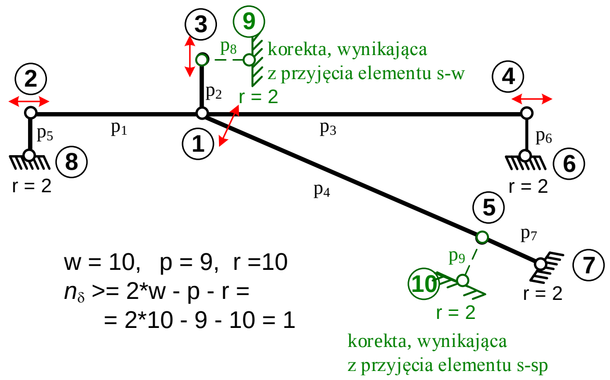
- odrzucamy więzi sprężyste, wszystkie węzły zamieniamy na przegubowe, korygujemy model dodając więź prostopadłą do końca elementu typu wspornik i/lub typu sztywno – sztywno-suwnego (przesuw prostopadły do osi pręta)

Obliczamy ze wzoru (warunek konieczny)

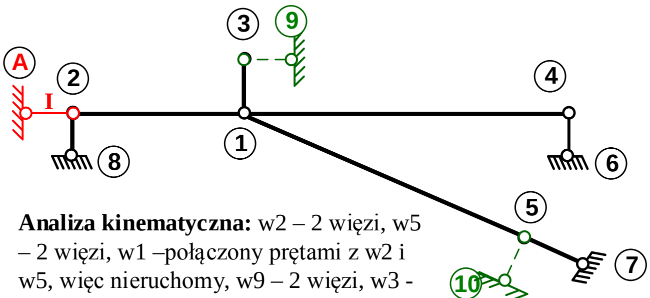
$$n_\delta \geq 2w - p - r$$

Dokładamy n_δ więzi translacyjnych i przeprowadzamy analizę kinematyczną modelu. Jeśli taki model przegubowy jest geometrycznie niezmienny to obliczona liczba n_δ jest wystarczająca (warunek dostateczny).

Model przegubowy



Model przegubowy po dołożeniu 1 więzi translacyjnej

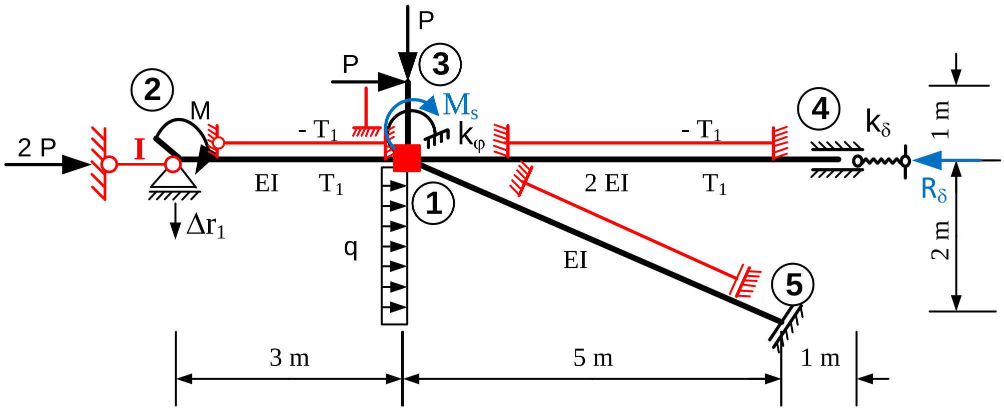


Analiza kinematyczna: w2 – 2 więzi, w5 – 2 więzi, w1 –połączony prętami z w2 i w5, więc nieruchomy, w9 – 2 więzi, w3 - połączony prętami z w1 i w9, więc jest nieruchomy, w6 – 2 więzi, w4 - połączony prętami z w1 i w6, więc jest nieruchomy, => model GN => n_δ = 1

3. Przyjęcie układu podstawowego metody przemieszczeń

Układ podstawowy – układ zadany, w którym dodano n_φ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych. W układzie tym oznaczymy węzły – początkowe numery dajemy w węzłach z dodanymi więziami rotacyjnymi.

W naszym zadaniu $n_g = 1+1 = 2$



L_{15} = 5.385 m

4. Ogólna postać układu równań metody przemieszczeń

Od obciążenia mechanicznego: $k_{11}\varphi_1 + k_{1I}\delta_I + k_{1F} = 0$

$$k_{I1}\varphi_1 + k_{II}\delta_I + k_{IF} = 0$$

Od przemieszczenia podpory: $k_{11}\varphi_1 + k_{1I}\delta_I + k_{1\Delta} = 0$

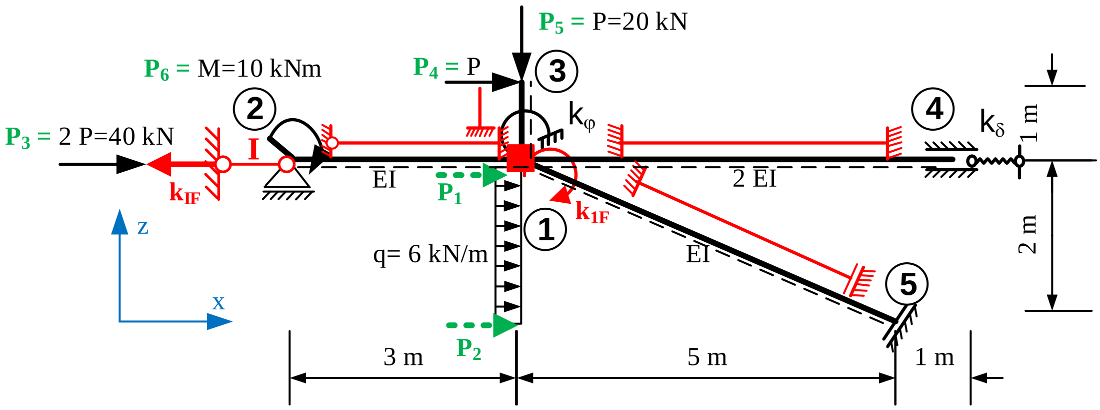
$$k_{I1}\varphi_1 + k_{II}\delta_I + k_{I\Delta} = 0$$

Od zmian temperatury: $k_{11}\varphi_1 + k_{1I}\delta_I + k_{1T} = 0$

$$k_{I1}\varphi_1 + k_{II}\delta_I + k_{IT} = 0$$

5. Rozwiązanie układu podstawowego metody przemieszczeń

5.1 Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia mechanicznego ($\varphi_1 = 0$, $\delta_I = 0$)



Obliczenie momentów brzegowych
(wykorzystamy wzory transformacyjne dla przyjętych elementów, znakujemy je zgodne ze statyczną umową znakowania, tzn. momenty prawoskrętne są dodatnie)

$$M_{12}^{0F} = \frac{M}{2} = 5\ kN \cdot m$$

$$M_{13}^{0F} = -P \cdot 1\ m = -20\ kN \cdot m$$

$$M_{15}^{0F} = -\frac{\left(-q \cdot L_{15,z}^2\right)}{3} = \frac{(6\ \cdot 2^2)}{3}\ kN \cdot m = 8\ kN \cdot m$$

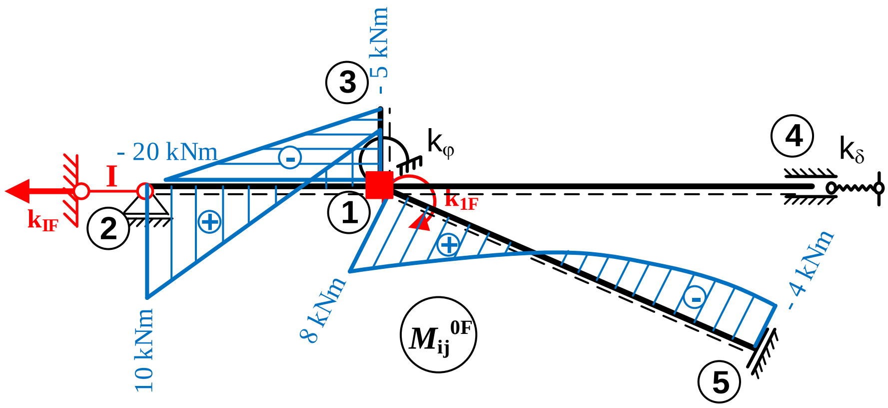
$$M_{51}^{0F} = -\frac{\left(-q \cdot L_{15,z}^2\right)}{6} = \frac{(6\ \cdot 2^2)}{6}\ kN \cdot m = 4\ kN \cdot m$$

Uwaga: momenty M_{15}^{0F} i M_{51}^{0F} obliczono podstawiając do wzoru wartość obciążenia q i prostopadłą do niego długość elementu (rzut długości pręta L_{15}), można obliczyć prostopadłą do pręta 1-5 wartość obciążenia i wówczas podstawić do wzoru długość L_{15}.

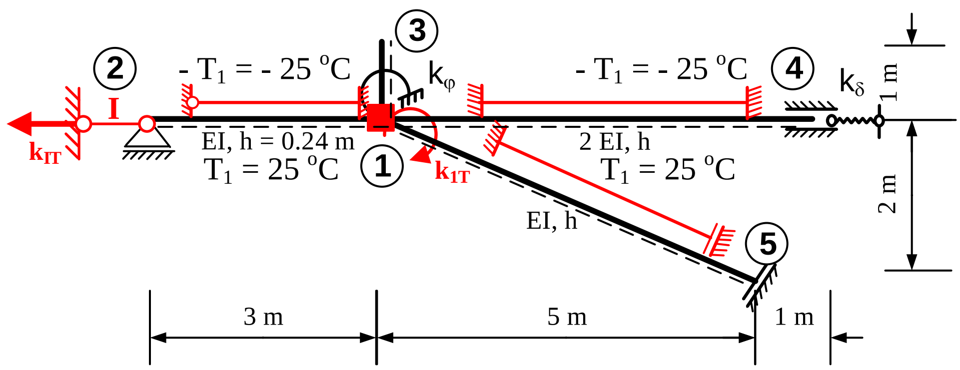
Siły równoważne (równoważniki obciążenia – oznaczone kolorem zielonym)

$$P_1 = P_2 = q \cdot \frac{2m}{2} = 6\ kN$$

Na podstawie obliczonych momentów brzegowych sporządzimy wykres momentów zginających w układzie podstawowym od obciążenia danego (momenty odkładamy po stronie włókien rozciąganych, znaki przyjmujemy zgodnie z wytrzymałościową umową znakowania, w tym przykładzie znak plus, jeśli rozciągane są wyróżnione włókna).



5.2 Rozwiązanie układu podstawowego od zmiany temperatury ($\varphi_1 = 0,\ \delta_I = 0$)



Obliczenie momentów brzegowych

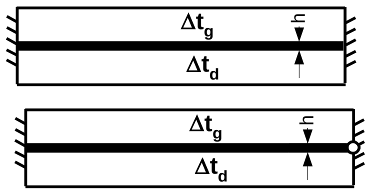
Wykorzystamy następujące wzory transformacyjne (prof. S. Żukowski)

$$M_{ij} = -EI\alpha_T\left(\Delta t_d - \Delta t_g\right)/h \qquad M_{ji} = EI\alpha_T\left(\Delta t_d - \Delta t_g\right)/h$$

$$V_{ij} = 0 \qquad V_{ji} = 0$$

$$M_{ij} = -1.5EI\alpha_T\left(\Delta t_d - \Delta t_g\right)/h$$

$$V_{ij} = 1.5EI\alpha_T\left(\Delta t_d - \Delta t_g\right)/(Lh) \qquad V_{ji} = 1.5EI\alpha_T\left(\Delta t_d - \Delta t_g\right)/(Lh)$$

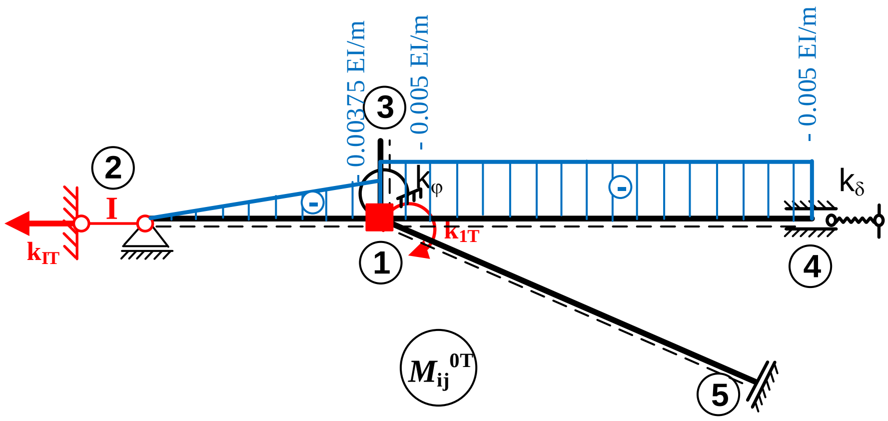


$$M_{12}^{0T} = [-1.5 \cdot 0.000012/\,^oC \cdot (-25\,^oC - 25\,^oC) \cdot EI]/0.24m \;= 0.00375\; EI/m$$

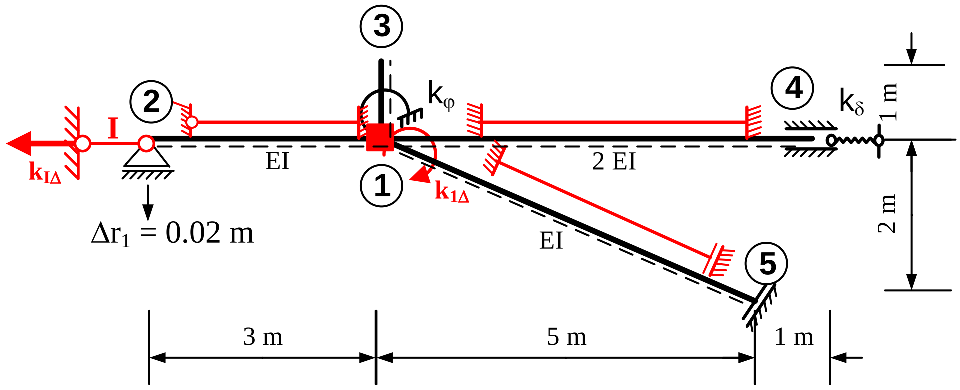
$$M_{14}^{0T} = -[0.000012/\,^oC \cdot (25\,^oC - (-25\,^oC)) \cdot 2EI]/0.24m \;= -0.0050\; EI/m$$

$$M_{41}^{0T} = [0.000012/\,^oC \cdot (25\,^oC - (-25\,^oC)) \cdot 2EI]/0.24m \;= 0.0050\; EI/m$$

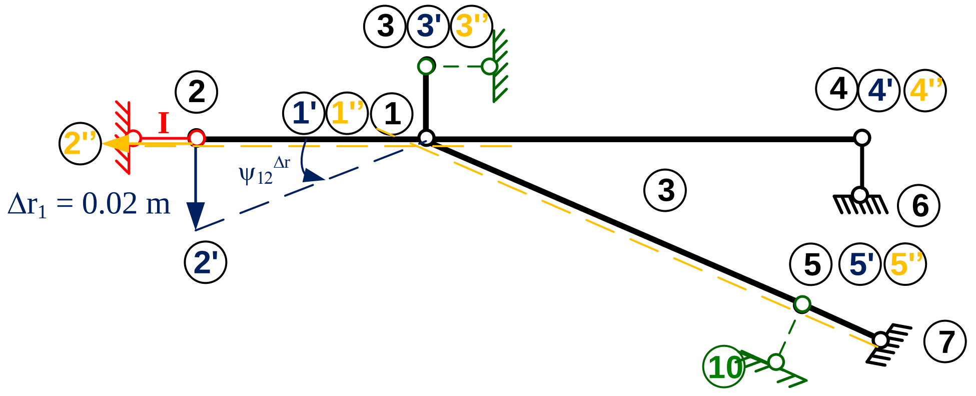
Na podstawie obliczonych momentów brzegowych sporządzimy wykres momentów zginających w układzie podstawowym od zmian temperatury



5.3 Rozwiązanie układu podstawowego od osiadania podpory ($\varphi_1 = 0,\ \delta_I = 0$)



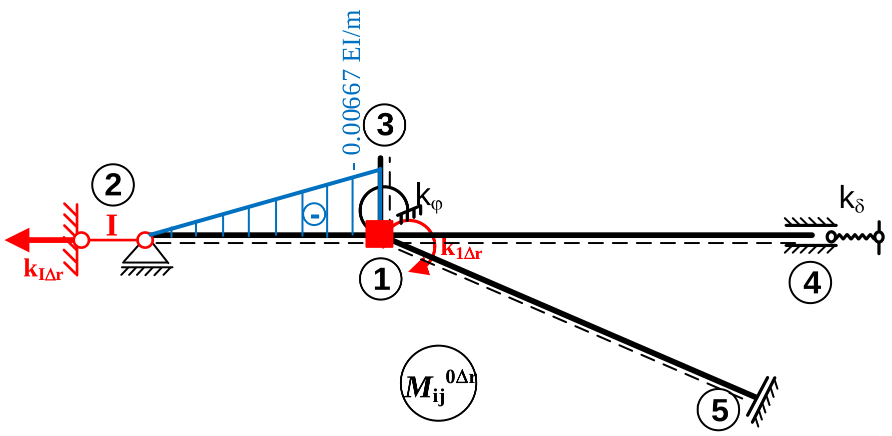
Do obliczenia momentów brzegowych wykorzystamy plan przemieszczeń możliwych i obróconych (w bardziej złożonych przypadkach może być przydatny biegunowy plan przemieszczeń obróconych) sporządzony w modelu przegubowym od zadanego przemieszczenia podpory



$$\psi_{12}^{\Delta r} = -\frac{\Delta r_1}{L_{12}} = -\frac{0.02m}{3m} = -0.00667$$

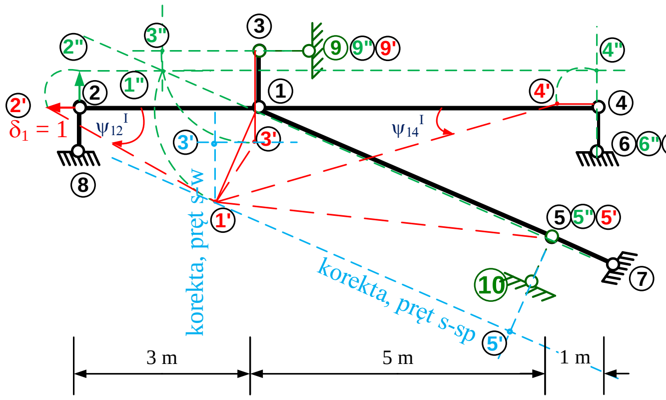
$$M_{12}^{0\Delta r} = \frac{EI}{3m} \cdot [-3 \cdot (-0.00667)] = \frac{0.00667EI}{m}$$

Wykres momentów zginających w układzie podstawowym od przemieszczenia podpory

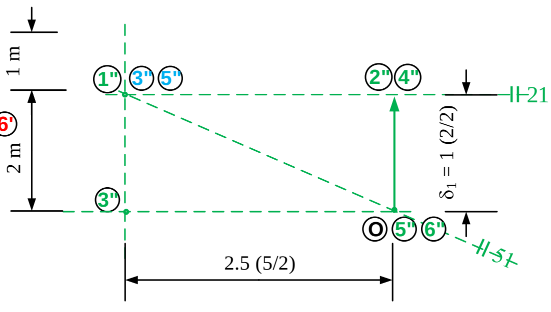


6. Sporządzenie planu przemieszczeń możliwych, planu przemieszczeń obróconych, biegunowego planu przemieszczeń obróconych i kątów obrotu cięciw od $\delta_I = 1$ ($\varphi_1 = 0$, obciążenia = 0)

Plany przemieszczeń



BPPO



$\delta_{12}^{I} = 2.5$, $\delta_{14}^{I} = -2.5$ $\delta_{s}^{I} = 1$

Kąty obrotu cięciw: $\psi_{ij}^{I}=\frac{\delta_{ij}^{I}}{L_{ij}}$

$\psi_{12}^{I}=\frac{\delta_{12}^{I}}{L_{12}}=\frac{2.5}{3\,m}=\frac{0,8333}{m},$

$\psi_{14}^{I}=\frac{\delta_{14}^{I}}{L_{14}}=-\frac{2.5}{6\,m}=-\frac{0,4167}{m}$

Wartości sił równoważnych i wartości przemieszczeń pod nimi:

$P_1=6\,kN,$ $\delta_{P1}^{I}=-1,$

$P_2=6\,kN,$ $\delta_{P2}^{I}=-1,$

$P_3=40\,kN,$ $\delta_{P3}^{I}=-1,$

$P_4=20\,kN,$ $\delta_{P4}^{I}=-1,$

$P_5=40\,kN,$ $\delta_{P5}^{I}=2.5,$

$P_6=10\,kNm,$ $\delta_{P6}^{I}=\psi_{12}^{I}=\frac{0.8333}{m}.$

7. Obliczenie współczynników układu równań metody przemieszczeń

7.1 Obliczenie elementów macierzy sztywności

Wykorzystamy wzory opracowane przez prof. St. Żukowskiego

$$k_{ii}=\sum_j M_{ij}^{i}+k_i^{\varphi}=\sum_j a_{ij}\cdot EJ_{ij}/L_{ij}+k_i^{\varphi},$$

$$k_{i\beta}=\sum_j M_{ij}^{\beta}=-\sum_j c_{ij}\cdot EJ_{ij}/L_{ij}\cdot\psi_{ij}^{\beta},$$

$$k_{\alpha j}=-\sum_{ij}(M_{ij}^{j}+M_{ji}^{j})\cdot\psi_{ij}^{\alpha}=\sum_{ij}V_{ij}^{j}\cdot\Delta_{ij}^{\alpha}=-\sum_{ij}c_{ji}\cdot EJ_{ij}/L_{ij}\cdot\psi_{ij}^{\alpha},$$

$$k_{\alpha\beta}=-\sum_{ij}(M_{ij}^{\beta}+M_{ji}^{\beta})\cdot\psi_{ij}^{\alpha}+\sum_s k_s^{\delta}\cdot\Delta L_s^{\alpha}\cdot\Delta L_s^{\beta}=$$

$$=\sum_{ij}V_{ij}^{\beta}\cdot\Delta_{ij}^{\alpha}+\sum_s k_s^{\delta}\cdot\Delta L_s^{\alpha}\cdot\Delta L_s^{\beta}=\sum_{ij}d_{ij}\cdot EJ_{ij}/L_{ij}\cdot\psi_{ij}^{\alpha}\cdot\psi_{ij}^{\beta}+\sum_s k_s^{\delta}\cdot\Delta L_s^{\alpha}\cdot\Delta L_s^{\beta}$$

,

$$k_{11}=\frac{EI}{3m}\cdot 3+0+\frac{2EI}{6m}\cdot 4+\frac{EI}{5.385m}\cdot 1+\frac{2EI}{m}=4.519\frac{EI}{m}$$

$$k_{1I}=\frac{EI}{3m}\cdot(-3)\cdot\left(\frac{0.833}{m}\right)+0+\frac{2EI}{6m}\cdot(-6)\cdot\frac{-0.4167}{m}+0=0\frac{EI}{m^2}=k_{I1}$$

$$k_{II}=\frac{EI}{3m}\cdot 3\cdot\left(\frac{0.833}{m}\right)^2+0+\frac{2EI}{6m}\cdot 12\cdot\left(-\frac{0.4167}{m}\right)^2+0+\frac{0.5EI}{m^3}\cdot 1\cdot 1=1.889\frac{EI}{m^3}$$

7.2 Obliczenie wyrazów wolnych

Wykorzystamy następujące wzory

$k_{io} = \sum_j M_{ij}^o - M_i^o$,

$$k_{\alpha o} = -\sum_{ij}(M_{ij}^o + M_{ji}^o)\cdot \psi_{ij}^\alpha + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^o - \sum_p P_p \cdot \delta_p^\alpha$$

Obciążenie mechaniczne

Przemieszczenie na kierunku więzi sprężystej $\delta_S^{0F} = 0$

$$k_{1F} = 5\ kNm - 20kNm + 0 + 8\ kNm = -7\ kNm,$$

$$k_{IF} = -\left\{(5\ kNm \cdot \left(\frac{0.8333}{m}\right) + (-20\ kNm \cdot 0) + 0 + (8\ kNm + 4\ kNm)\cdot 0\right\} +$$

$$-\left\{\begin{matrix}[6\ kN\cdot(-1)] + [6\ kN\cdot(-1)] + [40\ kN\cdot(-1)] + [20\ kN\cdot(-1)] + 20\ kN \cdot 2.5 + \\ +(10\ kNm \cdot \frac{0.8333}{m}\end{matrix}\right\} = 9.5\ kN$$

Obciążenie zmianą temperatury

Przemieszczenie na kierunku więzi sprężystej przy zerowych zmianach temperatury w osi elementów wynosi $\delta_S^{0T} = 0$. Przy obciążeniu zmianą temperatury w układzie podstawowym nie występują siły równoważne

$$k_{1T} = 0.00375\frac{EI}{m} - 0.005\frac{EI}{m} = -0.00125\frac{EI}{m},$$

$$k_{IT} = -\left\{0.00375\frac{EI}{m}\cdot\left(\frac{0.8333}{m}\right) + \left(-0.005\frac{EI}{m} + 0.005\frac{EI}{m}\right)\cdot\left(-\frac{0.4167}{m}\right)\right\} = -0.003125\frac{EI}{m^2}$$

Obciążenie przemieszczeniem podpory

Przemieszczenie na kierunku więzi sprężystej przy zadanym przemieszczeniu podpory wynosi $\delta_S^{0\Delta r} = 0$. Przy obciążeniu przemieszczeniem podpory w układzie podstawowym nie występują siły równoważne

$$k_{1\Delta r} = 0.00667\frac{EI}{m} = 0.00667\frac{EI}{m},$$

$$k_{I\Delta r} = -\left\{0.00667\frac{EI}{m}\cdot\left(\frac{0.8333}{m}\right) +\right\} = -0.005556\frac{EI}{m^2}$$

8. Szczegółowe postacie układu równań metody przemieszczeń i ich rozwiązanie

Obciążenie mechaniczne

$$4.519\frac{EI}{m}\cdot\varphi_1^F + 0\frac{EI}{m^2}\cdot\delta_I^F - 7\ kNm = 0$$

$$0\frac{EI}{m^2}\cdot\varphi_1^F + 1.889\frac{EI}{m^3}\cdot\delta_I^F + 9.5\ kN = 0$$

$$\varphi_1^F = 1.549\frac{kNm^2}{EI}, \qquad \delta_I^F = -5.029\frac{kNm^3}{EI}$$

Obciążenie zmianą temperatury

$$4.519\frac{EI}{m}\cdot\varphi_1^T + 0\frac{EI}{m^2}\cdot\delta_I^T - 0.00125\frac{EI}{m} = 0$$

$$0\frac{EI}{m^2}\cdot\varphi_1^T + 1.889\frac{EI}{m^3}\cdot\delta_I^T - 0.003125\frac{EI}{m^2} = 0$$

$$\varphi_1^T = 0{,}00277, \qquad \delta_I^T = 0{,}001654\,m$$

Obciążenie przemieszczeniem podpory

$$4.519\frac{EI}{m}\cdot\varphi_1^{\Delta r} + 0\frac{EI}{m^2}\cdot\delta_I^{\Delta r} + 0.00667\frac{EI}{m} = 0$$

$$0\frac{EI}{m^2}\cdot\varphi_1^{\Delta r} + 1.889\frac{EI}{m^3}\cdot\delta_I^{\Delta r} - 0.005556\frac{EI}{m^2}kN = 0$$

$$\varphi_1^{\Delta r} = -0{,}00148, \qquad \delta_I^{\Delta r} = 0{,}002943\,m$$

9. Obliczenie sił przekrojowych - obciążenie mechaniczne

Ze wzorów transformacyjnych obliczymy najpierw momenty brzegowe a na ich podstawie sporządzimy wykresy momentów zginających

$$M_{12}^F = \frac{EI}{3m}\left\{3\cdot 1.549\frac{kNm^2}{EI} - 3\cdot\frac{0{,}8333}{m}\cdot(-5.029\frac{kNm^3}{EI})\right\} + 5\,kNm = 10.739\,kNm,$$

$$M_{13}^F = -20\,kNm,$$

$$M_{14}^F = \frac{2EI}{6m}\left\{4\cdot 1.549\frac{kNm^2}{EI} - 6\cdot\frac{-0{,}4167}{m}\cdot(-5.029\frac{kNm^3}{EI})\right\} = -2.126\,kNm,$$

$$M_{41}^F = \frac{2EI}{6m}\left\{2\cdot 1.549\frac{kNm^2}{EI} - 6\cdot\frac{-0{,}4167}{m}\cdot(-5.029\frac{kNm^3}{EI})\right\} = -3.159\,kNm,$$

$$M_{15}^F = \frac{EI}{5.385m}\left\{1\cdot 1.549\frac{kNm^2}{EI}\right\} + 8\,kNm = 8.288\,kNm,$$

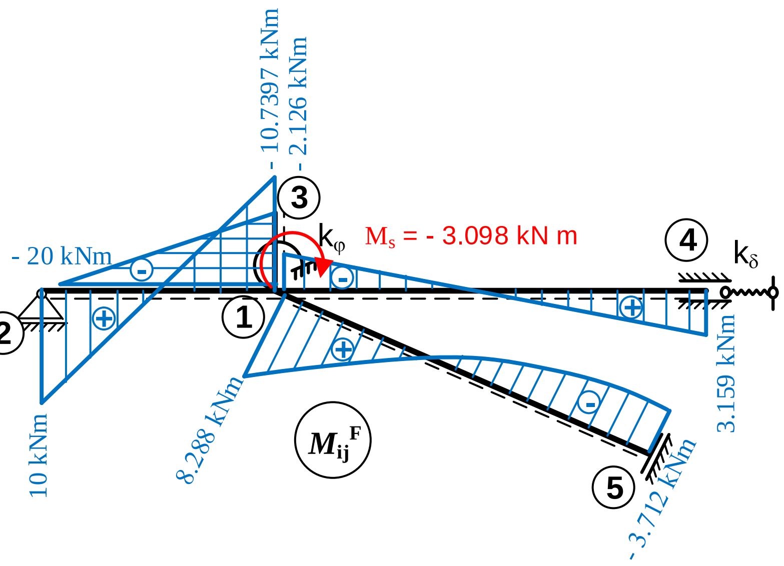
$$M_{51}^F = \frac{EI}{5.385m}\left\{-1\cdot 1.549\frac{kNm^2}{EI}\right\} + 4\,kNm = 3.712\,kNm.$$

Reakcje w więziach sprężystych wynoszą

$$M_s = -k_\varphi\cdot\varphi_1^F = -2\frac{EI}{m}\cdot 1.549\frac{kNm^2}{EI} = -3.098\,kNm,$$

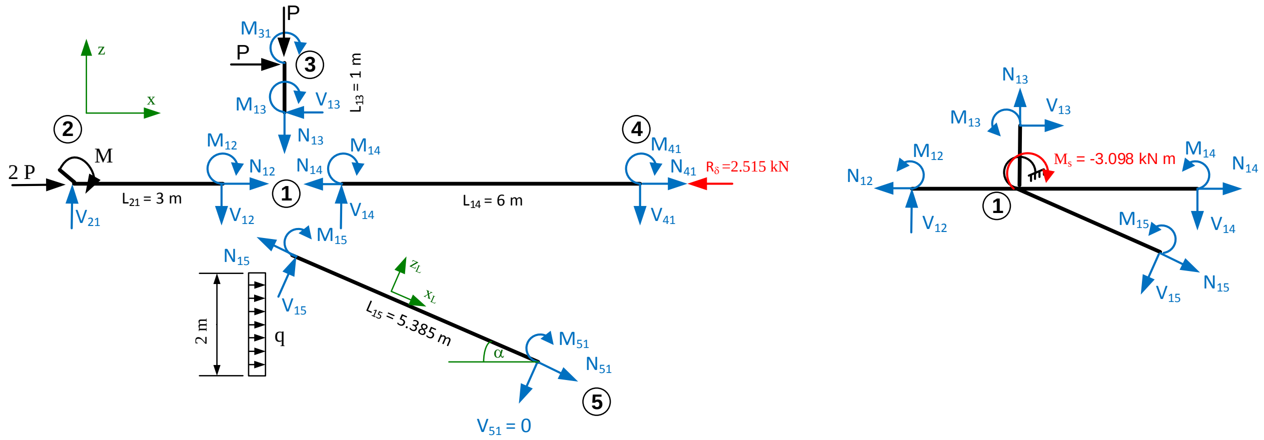
$$R_\delta = -k_\delta\cdot\delta_s^F = -k_\delta\cdot\delta_s^I\cdot\delta_I^F = -0.5\frac{EI}{m^3}\cdot 1\cdot(-5.029\frac{kNm^3}{EI}) = 2.5145\,kN.$$

Wykres momentów zginających



Siły tnące można również obliczyć z wzorów transformacyjnych elementów lub z równań równowagi elementów. W prezentowanym przykładzie wykorzystamy równania równowagi elementów do obliczenia sił tnących i równania równowagi węzłów do obliczenia sił osiowych.

Uwaga: Na szkicach zwroty momentów dotyczą dodatnich momentów brzegowych.



Pręt 1-2

$$\sum M_1 = 0, \quad M + V_{21} \cdot 3m + M_{12} = 10kNm + V_{21} \cdot 3m + 10.739\ kNm = 0,$$

$$V_{21} = V_{12} = -6.906\ kN,$$

$$N_{12} = -2P = -40\ kN$$

Pręt 1-3

$$V_{13} = P = 20\ kN,$$

$$N_{13} = -P = -20\ kN$$

Pręt 1-4

$$\sum M_4 = 0, \quad M_{14} + V_{14} \cdot 6\ m + M_{41} = -2.126\ kNm + V_{14} \cdot 6\ m - 3.159\ kNm = 0,$$

$V_{14} = 0,880\ kN,$

$N_{14} = -R_\delta = -2.515\ kN$

Pręt 1-5

$$\sum M_5 = 0, \quad M_{15} + V_{15} \cdot 5.385\ m + q \cdot 2\ m \cdot 1\ m + M_{51} \\ = 8.288\ kNm + V_{15} \cdot 5.385\ m + 12\ kNm + 3.712\ kNm = 0,$$

$V_{15} = -4.457\ kN,$

$$\sum X_L = -N_{15} + N_{51} + q \cdot 2 \cdot cos\alpha \ = -N_{15} + N_{51} + 11.142\ kN = 0$$

Węzeł 1

$$\sum Z = V_{12} - V_{14} + V_{13} - N_{15} \cdot sin\alpha - V_{15} \cdot cos\alpha$$

$$= [-6.906 - 0.88 + (-20) - \ N_{15} \cdot \frac{2}{5.385} - (-4.457) \cdot \frac{5}{5.385}]kN = 0$$

$N_{15} = -63,671\ kN,$

$N_{51} = \ N_{15} - 11.142\ kN = -74.813\ kN$

Kontrola

$\sum M_1 = M_s - M_{12} - M_{13} - M_{14} - M_{15} = 0$?

$\sum M_1 = [-3.098 - 10.739 - (-20) - (-2.126) - 8,288]kN \ = \ 0.011$ kN