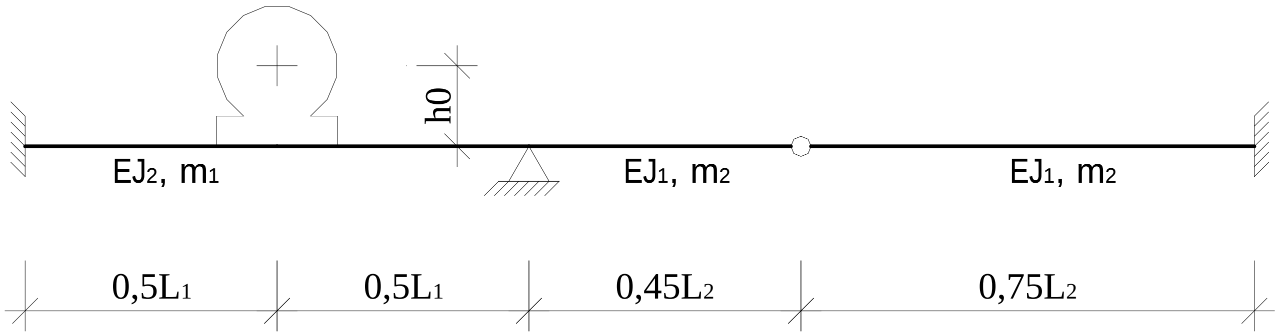
Dla belki płaskiej rozwiązać zagadnienie własne oraz wyznaczyć formy drgań własnych. Wpływ tłumienia, odkształcalności osiowej i postaciowej prętów pominąć. Zastosować zasady analizy wymiarowej.

Dane:

L_1 = 5m, L_2 = 6m, EJ_1 = 20MNm^2, EJ_2 = 18MNm^2, m_1 = 60kg/m, m_2 = 40kg/m,

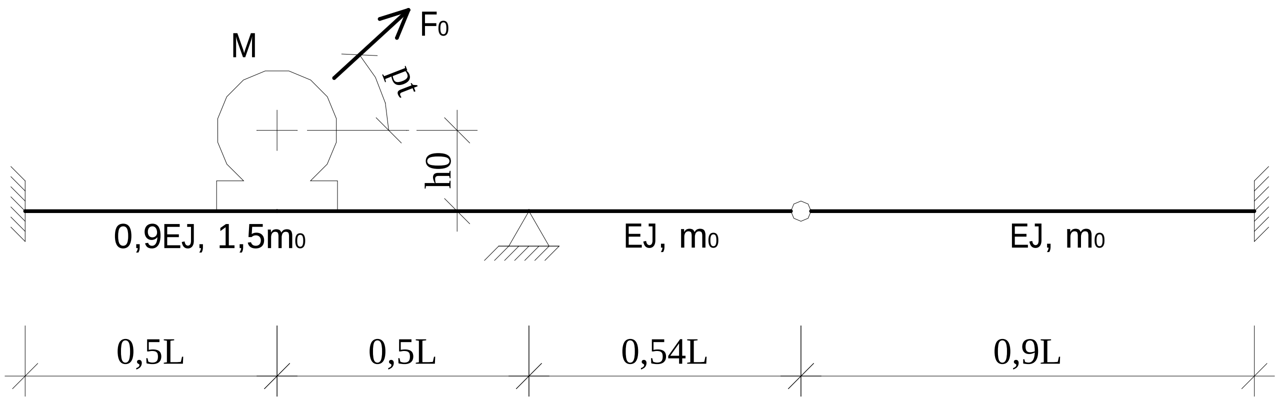
G = 500kg, G_w = 90kg, e = 4mm, h_0 = 0,20m, n = 1400 cykli/min.



Wielkości porównawcze:

L = L_1 = 5m, M = G = 500kg, EJ = EJ_1 = 20MNm^2, $m_2 = m_0$ = 40kg/m, $F_0 = G_w{*}e{*}p^2$,

$p = \frac{2\pi}{60}n = \frac{2\pi}{60}\cdot 1400 = 146{,}608\frac{\text{rad}}{\text{s}}$ - częstość wzbudzania → $F_0 = 90\cdot 0{,}004\cdot 146{,}608^2 = 7737{,}8N$



1. Przyjęcie współrzędnych uogólnionych Lagrange'a

1.1. Stopień statycznej niewyznaczalności - n_h

n_h = e – 3t = 10 – 3*2 = 4,

<u>n_h = 4</u>

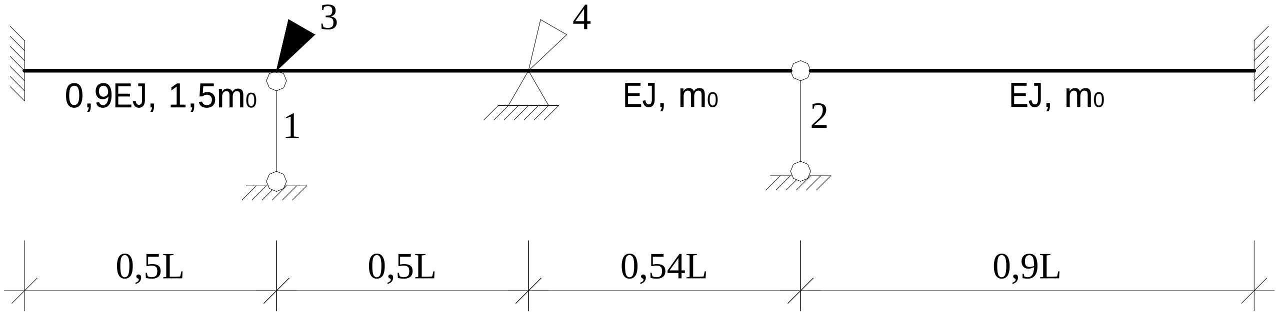
1.2. Stopień geometrycznej niewyznaczalności - n_g

$n_g = n_\phi + n_\delta$

$n_\phi = 2$

$n_\delta \geq 2w - p - r \;=\; 2*5 - 4 - 6 = 0,$

Z powyższej nierówności nie wynika bezpośrednio, że układ jest nieprzesuwny. Należy sprawdzić GN. Z analizy GN wynika, że analizowany układ ma 2 stopnie swobody, które należy odebrać dołączając do układu dwie więzi elementarne. Pokazano to na rysunku poniżej

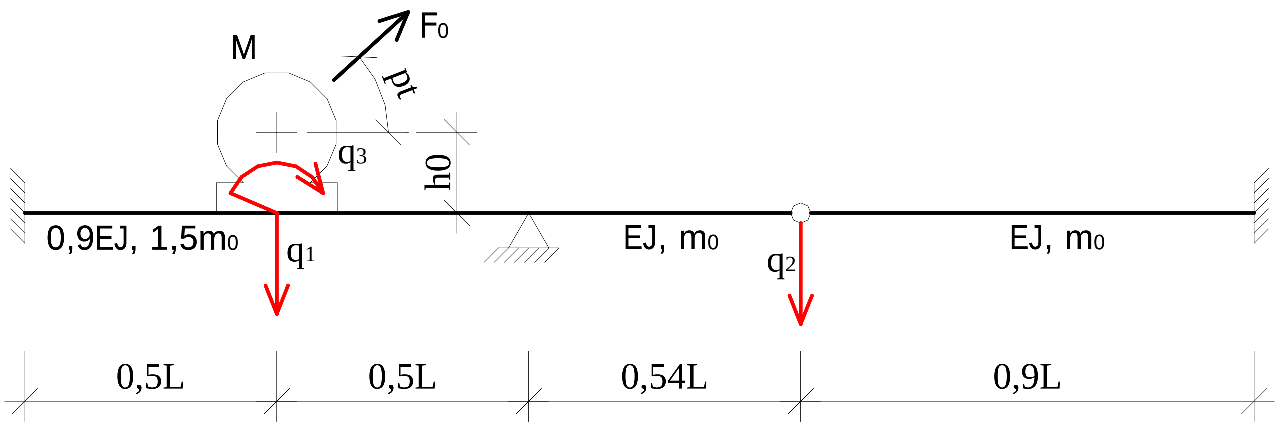


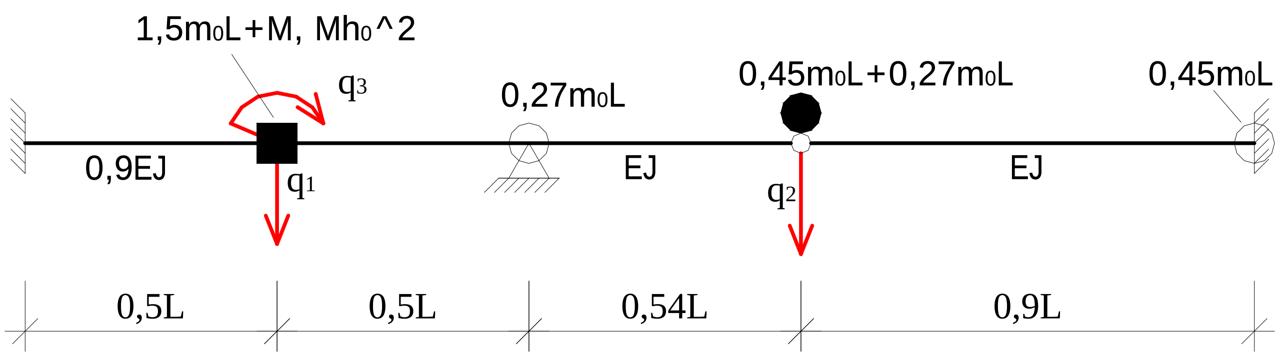
Zatem: $n_g = 2 + 2 = 4$

$\underline{n_g = 4}$

1.3. Liczba dynamicznych stopni swobody. Przyjęcie współrzędnych uogólnionych

Granulację masy analizowanego układu przeprowadzono w taki sposób, że do opisu zagadnień dynamicznych można przyjąć 3 dynamiczne stopnie swobody, które odpowiadają więziom 1, 2, 3 ze schematu wyjściowego metody przemieszczeń. Współrzędne uogólnione (Lagrange'a) przyjęto zgodnie z kierunkami więzi 1, 2, 3 (rysunek poniżej).





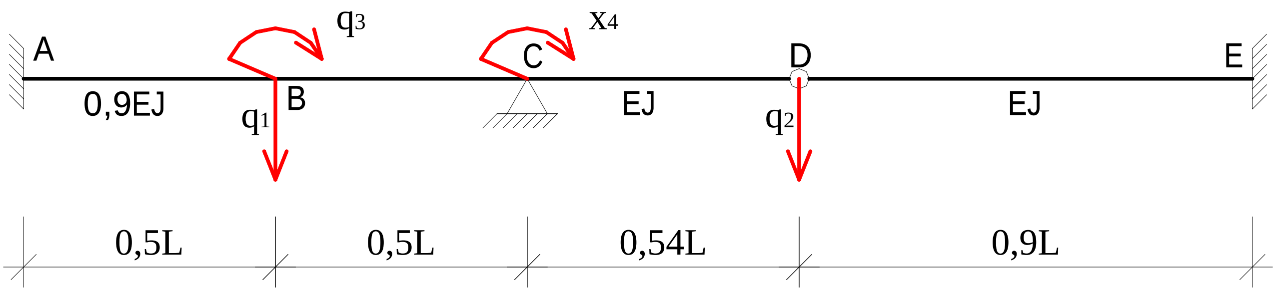
1.4. Stopień geometrycznej niewyznaczalności w sensie dynamicznym - n_{gd}

$n_{gd} = n_g - d = 4 - 3 = 1$

$\underline{n_{gd} = 1}$

2. Wyznaczenie macierzy sztywności – K

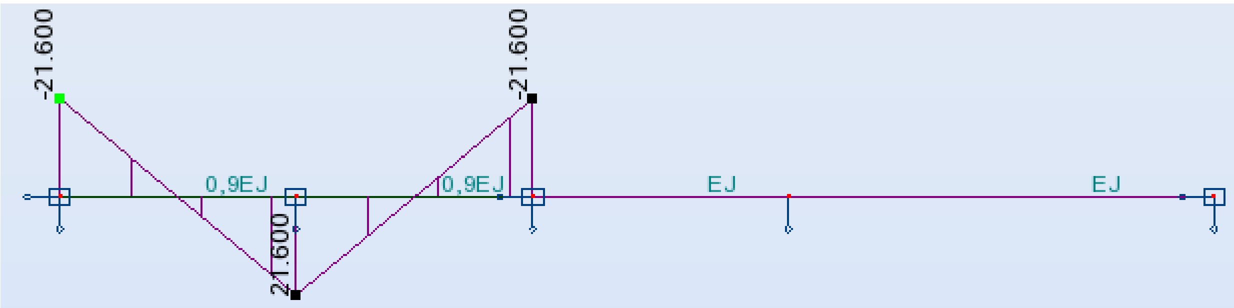
2.1. Schemat wyjściowy metody przemieszczeń



Wektor współrzędnych uogólnionych w bazie poszerzonej

$$\breve{\bar{q}} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

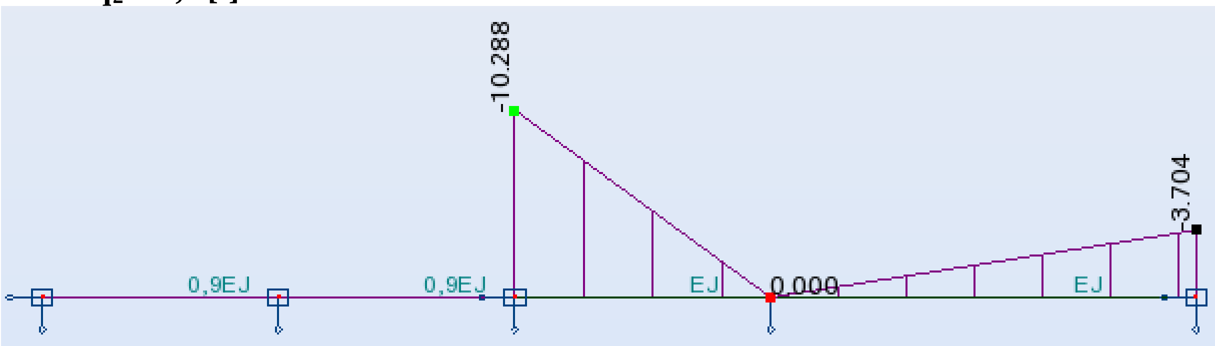
2.2. Stan $q_1 = 1{,}0$ [-]



<u>Kąty obrotu cięciw prętów</u>

$$\psi^1_{AB} = \frac{2}{L}, \quad \psi^1_{BC} = -\frac{2}{L}, \quad \psi^1_{CD} = 0, \quad \psi^1_{DE} = 0$$

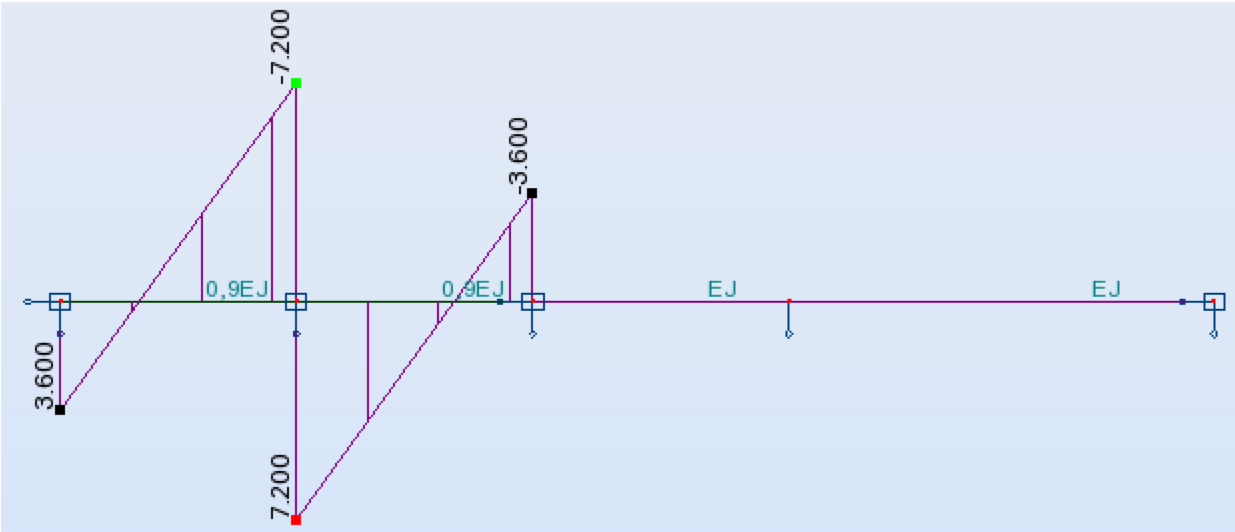
2.3. Stan $q_2 = 1,0$ [-]



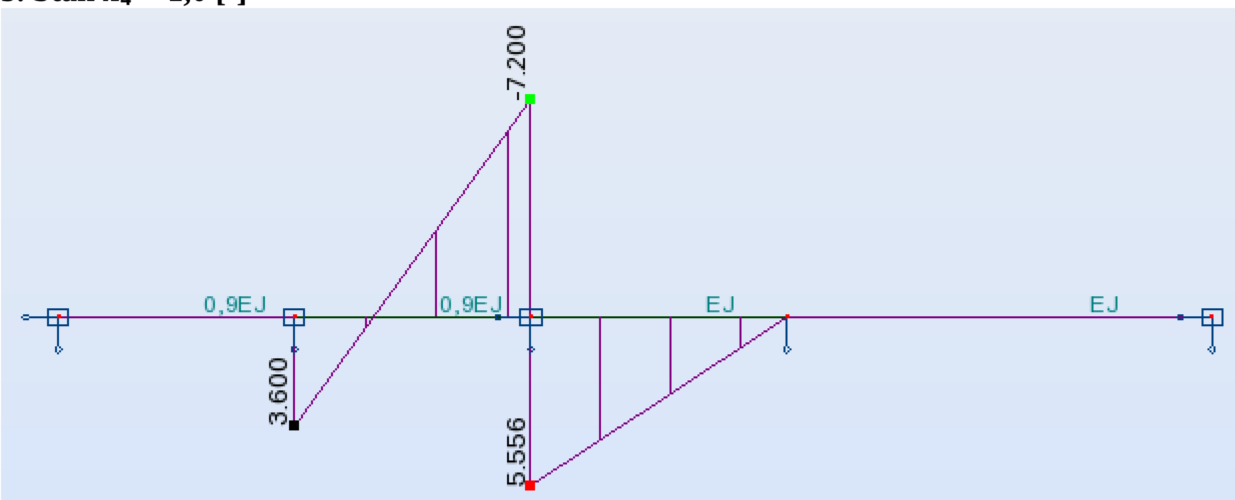
Kąty obrotu cięciw prętów

$$\psi_{AB}^2 = 0, \quad \psi_{BC}^2 = 0, \quad \psi_{CD}^2 = \frac{1,852}{L}, \quad \psi_{DE}^2 = -\frac{1,111}{L}$$

2.4. Stan $q_3 = 1,0$ [-]



2.5. Stan $x_4 = 1,0$ [-]



2.6. Współczynniki macierzy sztywności $\breve{K}$

Współczynniki macierzy sztywności wyznaczono z następujących wzorów

$$k_{11} = -\sum_{ij}\left(M_{ij}^1 + M_{ji}^1\right)\cdot\psi_{ij}^1 = -\left(-21{,}6-21{,}6\right)\frac{EJ}{L^2}\cdot\left(\frac{2}{L}\right) - \left(21{,}6+21{,}6\right)\frac{EJ}{L^2}\cdot\left(-\frac{2}{L}\right) = 172{,}8\frac{EJ}{L^3}$$

$$k_{12} = k_{21} = -\sum_{ij}\left(M_{ij}^1 + M_{ji}^1\right)\cdot\psi_{ij}^2 = 0$$

$$k_{13} = k_{31} = \sum_{j} M_{Bj}^1 = M_{BA}^1 + M_{BC}^1 = -21{,}6\frac{EJ}{L^2} + 21{,}6\frac{EJ}{L^2} = 0$$

$$k_{14} = k_{41} = \sum_{j} M_{Cj}^1 = M_{CB}^1 + M_{CD}^1 = 21{,}6\frac{EJ}{L^2}$$

$$k_{22} = -\sum_{ij}\left(M_{ij}^2 + M_{ji}^2\right)\cdot\psi_{ij}^2 = -\left(-10{,}288+0\right)\frac{EJ}{L^2}\cdot\left(\frac{1{,}852}{L}\right) - \left(0+3{,}704\right)\frac{EJ}{L^2}\cdot\left(-\frac{1{,}111}{L}\right) = 23{,}167\frac{EJ}{L^3}$$

$$k_{23} = k_{32} = \sum_{j} M_{Bj}^2 = M_{BA}^2 + M_{BC}^2 = 0$$

$$k_{24} = k_{42} = \sum_{j} M_{Cj}^2 = M_{CB}^2 + M_{CD}^2 = -10{,}288\frac{EJ}{L^2}$$

$$k_{33} = \sum_{j} M_{Bj}^3 = M_{BA}^3 + M_{BC}^3 = 7{,}2\frac{EJ}{L} + 7{,}2\frac{EJ}{L} = 14{,}4\frac{EJ}{L}$$

$$k_{34} = k_{43} = M_{BC}^4 = M_{CB}^3 = 3{,}6\frac{EJ}{L}$$

$$k_{44} = \sum_{j} M_{Cj}^4 = M_{CB}^4 + M_{CD}^4 = 7{,}2\frac{EJ}{L} + 5{,}556\frac{EJ}{L} = 12{,}756\frac{EJ}{L}$$

Stąd poszerzona macierz sztywności ma postać

$$\breve{K} = \begin{bmatrix} 172{,}8\dfrac{EJ}{L^3} & 0 & 0 & 21{,}6\dfrac{EJ}{L^2} \\ 0 & 23{,}167\dfrac{EJ}{L^3} & 0 & -10{,}288\dfrac{EJ}{L^2} \\ 0 & 0 & 14{,}4\dfrac{EJ}{L} & 3{,}6\dfrac{EJ}{L} \\ 21{,}6\dfrac{EJ}{L^2} & -10{,}288\dfrac{EJ}{L^2} & 3{,}6\dfrac{EJ}{L} & 12{,}756\dfrac{EJ}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{qq} & K_{qx} \\ K_{xq} & K_{xx} \end{bmatrix}$$

2.7. Macierz sztywności K w bazie $\overline{q}$ – redukcja macierzy $\breve{K}$

Macierz sztywności K w bazie minimalnej uzyskuje się ze wzoru

$$K = K_{qq} - K_{qx}\cdot K_{xx}^{-1}\cdot K_{xq}$$

gdzie w analizowanym przykładzie poszczególne bloki macierzowe mają postać:

$$\mathrm{K}_{qq} = \begin{bmatrix} 172{,}8\frac{EJ}{L^3} & 0 & 0 \\ 0 & 23{,}167\frac{EJ}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & 14{,}4\frac{EJ}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{K}_{qx} = \begin{bmatrix} 21{,}6\frac{EJ}{L^2} \\ -10{,}288\frac{EJ}{L^2} \\ 3{,}6\frac{EJ}{L} \end{bmatrix}$$

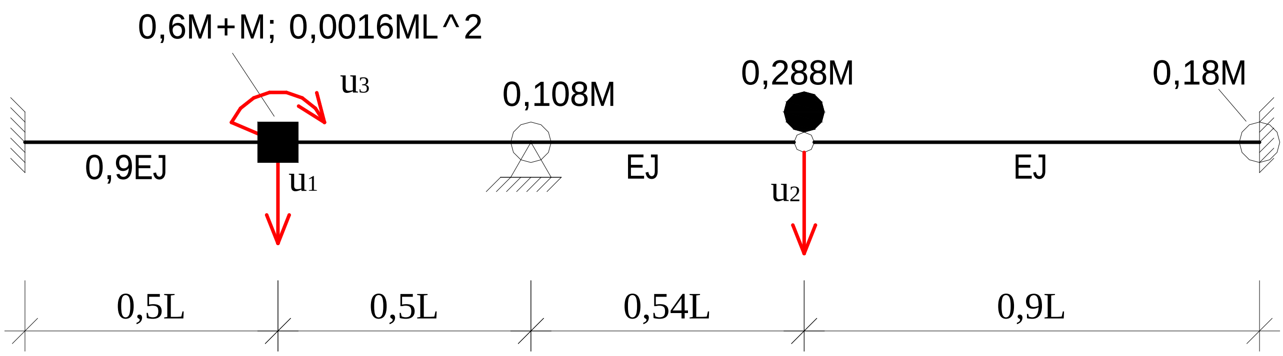
$$\mathrm{K}_{xq} = \begin{bmatrix} 21{,}6\frac{EJ}{L^2} & -10{,}288\frac{EJ}{L^2} & 3{,}6\frac{EJ}{L} \end{bmatrix}, \quad \mathrm{K}_{xx} = \begin{bmatrix} 12{,}756\frac{EJ}{L} \end{bmatrix}$$

Macierz sztywności w bazie **q** ma zatem postać

$$\mathrm{K}_{qq} = \begin{bmatrix} 136{,}224\frac{EJ}{L^3} & 17{,}4209\frac{EJ}{L^3} & -6{,}09595\frac{EJ}{L^2} \\ 17{,}4209\frac{EJ}{L^3} & 14{,}8695\frac{EJ}{L^3} & 2{,}90348\frac{EJ}{L^2} \\ -6{,}09595\frac{EJ}{L^2} & 2{,}90348\frac{EJ}{L^2} & 13{,}384\frac{EJ}{L} \end{bmatrix}$$

3. Wyznaczenie macierzy bezwładności - B

3.1. Przyjęcie współrzędnych lokalnych dla mas



3.2. Transformacja współrzędnych uogólnionych na lokalne

Transformacja współrzędnych uogólnionych na lokalne

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Stąd macierz transformacji ma postać

$$A_m = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonala mas która odpowiada współrzędnym lokalnym ma postać:

$\{m\}$ = diag(1,6M; 0,288M; 0,0016ML^2)

3.3. Wyznaczenie macierzy bezwładności

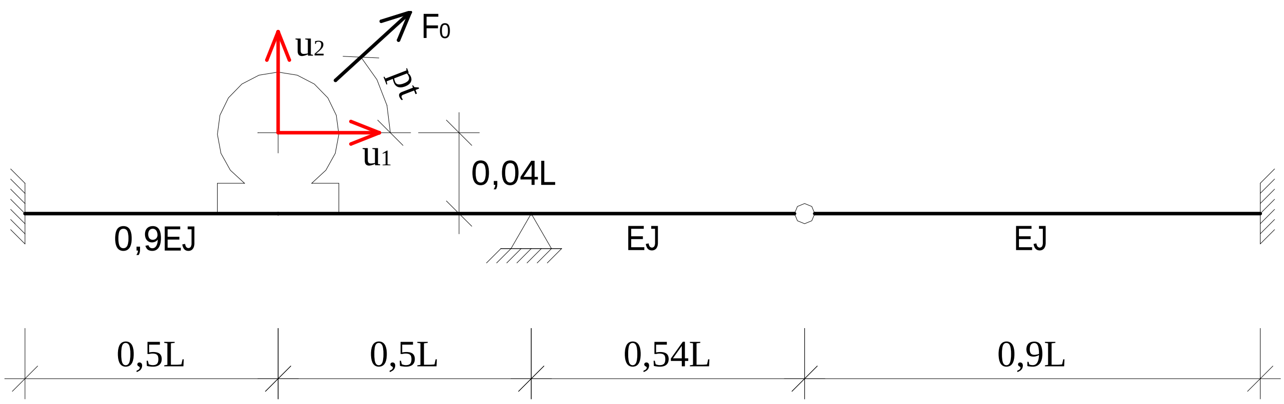
$$B = A_m^T.\{m\}\cdot A_m =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1{,}6M & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}288M & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0016ML^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1{,}6M & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}288M & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0016ML^2 \end{bmatrix}$$

4. Wyznaczenie wektora wzbudzania - F

4.1. Przyjęcie współrzędnych lokalnych dla sił wymuszających



4.2. Transformacja współrzędnych uogólnionych na lokalne

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}04L \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

Stąd macierz transformacji ma postać

$$A_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0{,}04L \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Wektor sił wymuszających, który odpowiada współrzędnym lokalnym ma postać

$$\overline{P} = \begin{bmatrix} F_0 \cos(pt) \\ F_0 \sin(pt) \end{bmatrix}$$

4.3. Wyznaczenie wektora wzbudzania

$$L = u^T . \overline{P} = q^T \cdot A_p^T \cdot \overline{P} = q^T \cdot \overline{F}$$

$$\overline{F} = A_p^T \cdot \overline{P} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0{,}04L & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} F_0 \cos(pt) \\ F_0 \sin(pt) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_0 \sin(pt) \\ 0 \\ 0{,}04F_0 \mathrm{L} \cos(pt) \end{bmatrix}$$

$$\overline{F} = \overline{F}_S + \overline{F}_C = \begin{bmatrix} -F_0 \sin(pt) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}04F_0 \mathrm{L} \cos(pt) \end{bmatrix}$$

$$\overline{F}_S = \begin{bmatrix} -F_0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \sin(pt), \quad \overline{F}_C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0{,}04F_0 \mathrm{L} \end{bmatrix} \cos(pt)$$

5. Rozwiązanie zagadnienia własnego

5.1. Równanie zagadnienia własnego

Formułując równanie ruchu układu za pomocą metody przemieszczeń uzyskuje się równanie drgań własnych w postaci

$$\mathrm{B} \cdot \ddot{\overline{\mathrm{q}}} + \mathrm{K} \cdot \overline{\mathrm{q}} = \overline{0}$$

Zakładając rozwiązanie harmoniczne ($\ddot{\overline{\mathrm{q}}} = -\omega^2 \overline{\mathrm{q}}$) otrzymuje się

$$\left(\mathrm{K} - \omega^2 \cdot \mathrm{B}\right) \cdot \overline{\mathrm{q}} = \overline{0}$$

Powyższe równanie ma nietrywialne rozwiązanie wtedy i tylko wtedy, gdy

$\det\left(\mathrm{K} - \omega^2 \cdot \mathrm{B}\right) = 0$ – jest to równanie zagadnienia własnego

Dalej wykonując odpowiednie przekształcenia otrzymamy

$$\det\left(\frac{\mathrm{EJ}}{\mathrm{L}^3} \mathrm{K}* - \omega^2 \cdot \mathrm{M} \cdot \mathrm{B}*\right) = 0$$

$$\det\left((\mathrm{B}*)^{-1} \cdot \mathrm{K}* - \lambda \cdot \mathrm{I}\right) = 0$$

Przyjmując , że $\lambda = \omega^2 \cdot \frac{M \cdot L^3}{EJ}$ (gdzie λ są wartościami własnymi) otrzymamy relację pomiędzy wartościami własnymi a częstościami własnymi

$$\omega = \sqrt{\lambda \frac{EJ}{M \cdot L^3}}$$

$$K^* = \begin{bmatrix} 136{,}24 & 17{,}4209 & -6{,}09595L \\ 17{,}4209 & 14{,}8695 & 2{,}90348L \\ -6{,}09595L & 2{,}90348L & 13{,}384L^2 \end{bmatrix}, \qquad B^* = \begin{bmatrix} 1{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}288 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}0016L^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B^{*-1} * K^*} = \begin{pmatrix} 1.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0.288 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0016\ L^2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 136.224 & 17.4209 & -6.09595\,L \\ 17.4209 & 14.8695 & 2.90348\,L \\ -6.09595\,L & 2.90348\,L & 13.384\,L^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 85.14 & 10.8881 & -3.80997\,L \\ 60.4892 & 51.6302 & 10.0815\,L \\ -\frac{3809.97}{L} & \frac{1814.675}{L} & 8365 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B^{*-1} * K^* - \lambda * I} = \begin{pmatrix} 85.14-\lambda & 10.8881 & -3.80997\,L \\ 60.4892 & 51.6302-\lambda & 10.0815\,L \\ -\frac{3809.97}{L} & \frac{1814.675}{L} & 8365-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\det(B^{*-1} * K^* - \lambda * I) = 2.81181 * 10^7 - 1.11501 * 10^6\,\lambda + 8501.77\,\lambda^2 - \lambda^3$$

$$2.81181 * 10^7 - 1.11501 * 10^6\,\lambda + 8501.77\,\lambda^2 - \lambda^3 = 0$$

<u>Wartości własne</u>

$\lambda_1 = 33.9935$, $\lambda_2 = 98.8369$, $\lambda_3 = 8368.94$

<u>Częstości własne układu</u>

$$\omega_1 = 5{,}8304\sqrt{\frac{EJ}{ML^3}}, \quad \omega_2 = 9{,}94168\sqrt{\frac{EJ}{ML^3}}, \quad \omega_3 = 91{,}4819\sqrt{\frac{EJ}{ML^3}}$$

Po podstawieniu wartości mianowanych za wielkości porównawcze otrzymujemy

$$\omega_1 = 104{,}297\frac{rad}{s}, \quad \omega_2 = 177{,}842\frac{rad}{s}, \quad \omega_3 = 1636{,}478\frac{rad}{s}$$

oraz częstotliwości

$$f_1 = 16{,}599Hz, \quad f_2 = 28{,}304Hz, \quad f_3 = 260{,}45Hz$$

Wektory własne

- pierwszy wektor własny

$$B^{*-1} * K^* - \lambda_1 * I = \begin{pmatrix} 85.14 - \lambda_1 & 10.8881 & -3.80997\,L \\ 60.4892 & 51.6302 - \lambda_1 & 10.0815\,L \\ -\frac{3809.97}{L} & \frac{1814.675}{L} & 8365 - \lambda_1 \end{pmatrix}$$

$$B^{*-1} * K^* - \lambda_1 * I = \begin{pmatrix} 51.1865 & 10.8881 & -3.80997\,L \\ 60.4892 & 17.6767 & 10.0815\,L \\ -\frac{3809.97}{L} & \frac{1814.675}{L} & 8331.0465 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}\,(B^{*-1} * K^* - \lambda_1 * I) = \mathrm{adj}\begin{pmatrix} 51.1865 & 10.8881 & -3.80997\,L \\ 60.4892 & 17.6767 & 10.0815\,L \\ -\frac{3809.97}{L} & \frac{1814.675}{L} & 8331.0465 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 0.2372 \\ -1 \\ \frac{0.3263}{L} \end{pmatrix}$$

- drugi wektor własny

$$B^{*-1} * K^* - \lambda_2 * I = \begin{pmatrix} 85.14 - \lambda_2 & 10.8881 & -3.80997\,L \\ 60.4892 & 51.6302 - \lambda_2 & 10.0815\,L \\ -\frac{3809.97}{L} & \frac{1814.675}{L} & 8365 - \lambda_2 \end{pmatrix}$$

$$B^{*-1} * K^* - \lambda_2 * I = \begin{pmatrix} -13.6969 & 10.8881 & -3.80997\,L \\ 60.4892 & -47.2067 & 10.0815\,L \\ -\frac{3809.97}{L} & \frac{1814.675}{L} & 8266.1631 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}\,(B^{*-1} * K^* - \lambda_2 * I) = \mathrm{adj}\begin{pmatrix} -13.6969 & 10.8881 & -3.80997\,L \\ 60.4892 & -47.2067 & 10.0815\,L \\ -\frac{3809.97}{L} & \frac{1814.675}{L} & 8266.1631 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \begin{pmatrix} -0.7587 \\ -1 \\ \frac{-0.1302}{L} \end{pmatrix}$$

- trzeci wektor własny

$$B^{*-1} * K^{*} - \lambda_3 * I = \begin{pmatrix} 85.14 - \lambda_3 & 10.8881 & -3.80997\,L \\ 60.4892 & 51.6302 - \lambda_3 & 10.0815\,L \\ -\frac{3809.97}{L} & \frac{1814.675}{L} & 8365 - \lambda_3 \end{pmatrix}$$

$$B^{*-1} * K^{*} - \lambda_3 * I = \begin{pmatrix} -8283.8 & 10.8881 & -3.80997\,L \\ 60.4892 & -8317.3098 & 10.0815\,L \\ -\frac{3809.97}{L} & \frac{1814.675}{L} & -3.94 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{adj}\,(B^{*-1} * K^{*} - \lambda_3 * I) = \mathrm{adj} \begin{pmatrix} -8283.8 & 10.8881 & -3.80997\,L \\ 60.4892 & -8317.3098 & 10.0815\,L \\ -\frac{3809.97}{L} & \frac{1814.675}{L} & -3.94 \end{pmatrix}$$

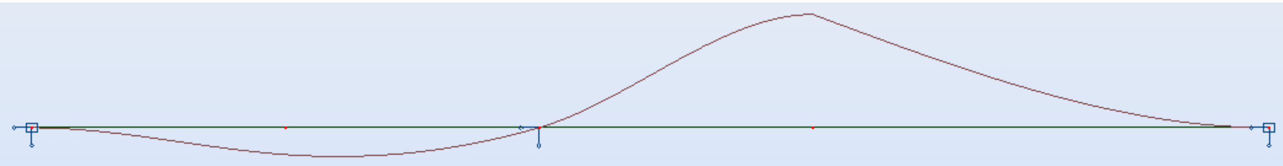
$$w_3 = \begin{pmatrix} 0.000458 \\ -0.001209 \\ -\frac{1}{L} \end{pmatrix}$$

Macierz własna

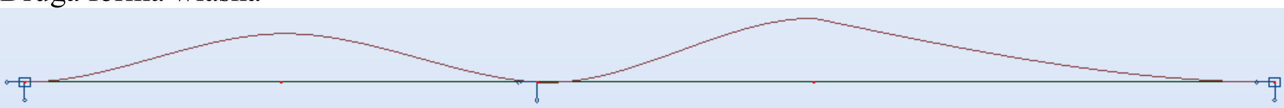
$$W = \begin{bmatrix} 0{,}2372 & 0{,}7587 & 0{,}000458 \\ -1 & -1 & -0{,}001209 \\ 0{,}3263 \cdot \frac{1}{L} & -0{,}1302 \cdot \frac{1}{L} & -\frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

Formy własne

Pierwsza forma własna



Druga forma własna



Trzecia forma własna