

WZORY NUMERYCZNEGO OBLICZANIA CAŁEK STOSOWANE PRZY WYZNACZANIU PRZEMIESZCZEŃ

Całki występujące we wzorach stosowanych do wyznaczania przemieszczeń mogą być obliczane jako sumy całek obliczanych w przyjętych przedziałach całkowania np. $\int \frac{M^i \cdot M^F}{EI} \cdot dx = \sum_j \int_{L_j} \frac{M^i \cdot M^F}{EI_j} \cdot dx$

, gdzie L_j jest długością j -tego przedziały całkowania. Jeśli dodatkowo w przedziale całkowania

$$EI_j = const \quad \text{to} \quad \int_{L_j} \frac{M^i \cdot M^F}{EI_j} \cdot dx = \frac{1}{EI_j} \int_{L_j} M^i \cdot M^F \cdot dx.$$

Uwzględniając, że M^i oraz M^F są funkcjami współrzędnej x mierzonej wzdłuż osi pręta

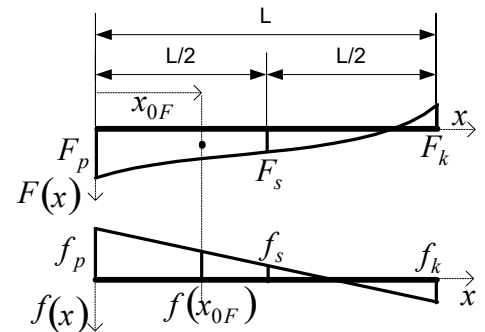
$$\text{i wprowadzając oznaczenia:} \quad F(x) = \frac{M^F(x)}{EI(x)} \quad \text{i} \quad f(x) = M^i(x) \quad \text{gdy} \quad EI_j = EI_j(x)$$

$$F(x) = M^F(x) \quad \text{i} \quad f(x) = M^i(x) \quad \text{gdy} \quad EI_j = const$$

obliczanie całek w poszczególnych przedziałach sprowadza się do obliczania całek z iloczynu dwóch funkcji.

Funkcje $F(x)$ i $f(x)$ mogą oczywiście oznaczać dowolne wielkości to jest siły osiowe, siły tnące, zmiany temperatury itd.

Do obliczania tych całek można stosować wzory całkowania numerycznego np. wzór Simpsona, wzór trapezów, wzór Mohra lub inne.



WZORY DLA JEDNEGO PRZEDZIAŁU CAŁKOWANIA

Wzór Simpsona $\int F(x) \cdot f(x) \cdot dx = \frac{L}{6} (F_p \cdot f_p + 4F_s \cdot f_s + F_k \cdot f_k)$

Wzór trapezów $\int F(x) \cdot f(x) \cdot dx = \frac{L}{6} [2 \cdot (F_p \cdot f_p + F_k \cdot f_k) + F_p \cdot f_k + F_k \cdot f_p]$

Wzór Mohra (Wereszczagina) $\int F(x) \cdot f(x) \cdot dx = \Omega_F \cdot f(x_{0F})$

gdzie L - długość przedziału,

F_p, f_p - wartości funkcji na początku przedziału,

F_s, f_s - wartości funkcji w środku przedziału,

F_k, f_k - wartości funkcji na końcu przedziału,

Ω_F - pole wykresu funkcji $F(x)$ w przedziale całkowania,

$f(x_{0F})$ - wartość funkcji $f(x)$ w punkcie x_{0F} , w którym znajduje się środek ciężkości funkcji $F(x)$

ZAŁOŻENIA

Jeśli funkcje podcałkowe spełniają podane poniżej warunki to wyniki uzyskane z zastosowaniem tych wzorów są wynikami dokładnymi.

Funkcja $f(x)$ jest ciągła i gładka (ma ciągłą pochodną) i najwyżej liniowa $f(x) = a_f \cdot x + b_f$

Funkcja $F(x)$

we wzorze Simpsona jest ciągła i gładka wraz z pochodnymi i najwyżej drugiego stopnia

$$F(x) = a_F \cdot x^2 + b_F \cdot x + c_F$$

we wzorze trapezów jest ciągła i gładka i najwyżej liniowa

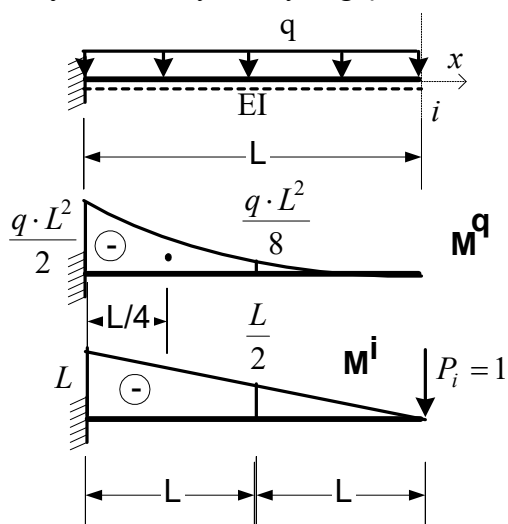
$$F(x) = a_F \cdot x + b_F$$

we wzorze Mohra (Wereszczagina) jest dowolna ale taka, dla której znane jest położenie środka ciężkości (współrzędna x_{0F}).

W przeciwnym razie uzyskany wynik obarczony jest błędem zależnym od tego w jakim stopniu funkcje podcałkowe nie spełniają przedstawionych powyżej warunków.

PRZYKŁADY

Przykład 1. Wyznaczyć ugięcie końca wspornika jak na rysunku poniżej.



Przyjmując, że funkcje: $F = M^q$ a $f = M^i$ widzimy, że obydwie te funkcje ($F(x)$ – parabola, $f(x)$ – linia prosta) spełniają założenia wzoru Simpsona i wzoru Mohra.

Wg wzoru Simpsona (wynik dokładny)

$$\begin{aligned} \Delta_{iq} &= \int \frac{M^i \cdot M^q}{EI} \cdot dx = \frac{1}{EI} \cdot \int M^i \cdot M^q \cdot dx = \\ &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{L}{6} \cdot \left(\left(-\frac{qL^2}{2} \right) \cdot (-L) + 4 \cdot \left(-\frac{qL^2}{8} \right) \cdot \left(-\frac{L}{2} \right) + 0 \cdot 0 \right) = \frac{qL^4}{8EI} \end{aligned}$$

Wg wzoru Mohra (wynik dokładny)

$$\Delta_{iq} = \int \frac{M^i \cdot M^q}{EI} \cdot dx = \frac{1}{EI} \cdot \int M^i \cdot M^q \cdot dx = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{q \cdot L^2}{2} \right) \cdot L \cdot \frac{3}{4} \cdot L = \frac{q \cdot L^4}{8EI}$$

Wg wzoru trapezów - wynik obarczony błędem, gdyż funkcja $M^q(x)$ nie jest liniowa

$$\begin{aligned} \Delta_{iq} &= \int \frac{M^i \cdot M^q}{EI} \cdot dx = \frac{1}{EI} \cdot \int M^i \cdot M^q \cdot dx \approx \\ &\approx \frac{1}{EI} \cdot \frac{L}{6} \cdot \left(2 \left(-\frac{qL^2}{2} \right) \cdot (-L) + 2 \cdot 0 \cdot 0 + \left(-\frac{qL^2}{2} \right) \cdot 0 + 0 \cdot L \right) = \frac{qL^4}{6EI} \end{aligned}$$

$$\text{Błąd} \quad \left(\frac{qL^4}{6EI} - \frac{qL^4}{8EI} \right) / \left(\frac{qL^4}{8EI} \right) = \frac{1}{3} = 33.33\%$$

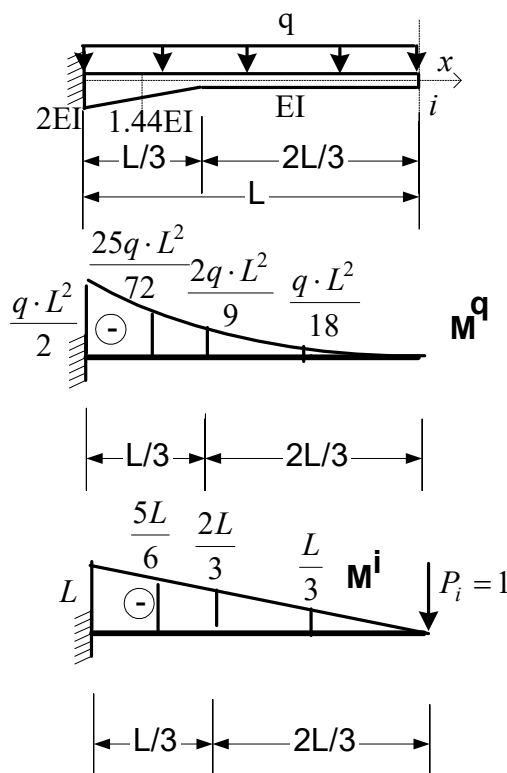
Aby, z zastosowaniem tego wzoru, uzyskać wynik dokładniejszy niezbędne jest dokonanie podziału na większą liczbę przedziałów.

Dla 4 przedziałów

$$\begin{aligned} \Delta_{iq} &= \int \frac{M^i \cdot M^q}{EI} \cdot dx = \frac{1}{EI} \cdot \int M^i \cdot M^q \cdot dx \approx \\ &\approx \frac{1}{EI} \cdot \frac{L/4}{6} \cdot \left(2 \left(-\frac{qL^2}{2} \right) \cdot (-L) + 2 \cdot \left(-\frac{9qL^2}{32} \right) \cdot \left(-\frac{3L}{4} \right) + \left(-\frac{qL^2}{2} \right) \cdot \left(-\frac{3L}{4} \right) + \left(-\frac{9qL^2}{32} \right) \cdot (-L) \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{L/4}{6} \cdot \left(2 \left(-\frac{9 \cdot q \cdot L^2}{32} \right) \cdot \left(-\frac{3L}{4} \right) + 2 \left(-\frac{q \cdot L^2}{8} \right) \cdot \left(-\frac{L}{2} \right) + \left(-\frac{9 \cdot q \cdot L^2}{32} \right) \cdot \left(-\frac{L}{2} \right) + \left(-\frac{q \cdot L^2}{8} \right) \cdot \left(-\frac{3L}{4} \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{L/4}{6} \cdot \left(2 \left(-\frac{q \cdot L^2}{8} \right) \cdot \left(-\frac{L}{2} \right) + 2 \cdot \left(-\frac{q \cdot L^2}{32} \right) \cdot \left(-\frac{L}{4} \right) + \left(-\frac{q \cdot L^2}{8} \right) \cdot \left(-\frac{L}{4} \right) + \left(-\frac{q \cdot L^2}{32} \right) \cdot \left(-\frac{L}{2} \right) \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{L/4}{6} \cdot \left(2 \left(-\frac{q \cdot L^2}{32} \right) \cdot \left(-\frac{L}{4} \right) + 2 \cdot 0 \cdot 0 + \left(-\frac{q \cdot L^2}{32} \right) \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{L}{4} \right) \right) = \frac{49}{384} \cdot \frac{qL^4}{EI} = 0.127604 \cdot \frac{qL^4}{EI} \end{aligned}$$

$$\text{Błąd} \quad \left(\frac{49}{384} - \frac{1}{8} \right) / \left(\frac{1}{8} \right) = \frac{1}{48} = 2.08\%$$

Przykład 2. Wyznaczyć ugięcie końca wspornika ze skosem jak na rysunku poniżej.



Ze względu na zmienną sztywność belki na odcinku $L/3$

przyjmiemy na tym odcinku $F = \frac{M^q}{EI}$ a $f = M^i$. Na

pozostałym odcinku sztywność jest stała więc możemy przyjąć $F = M^q$ i $f = M^i$. W drugim przedziale obydwie funkcje spełniają warunki wzoru Simpsona więc wynik całkowania w tym przedziale z zastosowaniem tego wzoru będzie dokładny. Pominiemy tę część obliczeń.

W pierwszym przedziale przyjęto przekrój prostokątny o szerokości b i wysokości

$$h(x) = \sqrt[3]{\frac{24I}{b}} \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 1 \right) \cdot \frac{x}{L} + 1 \right)$$

co daje sztywności giętne przekrojów belki w postaci funkcji

$$EI(x) = \frac{bh^3}{12} = 2EI \cdot \left(3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} - 1 \right) \cdot \frac{x}{L} + 1 \right)^3$$

Wartości $EI(x)/EI$ dla wybranych przekrojów zestawiono w tabeli poniżej

x	0	L/12	L/6	L/4	L/3
$EI(x)/EI$	2	1.706236	1.442746	1.207882	1

Uwzględniając fakt, że moment zginający w omawianym przedziale opisuje funkcja

$M^q(x) = \frac{qL^2}{2} \cdot \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2$ widzimy, że funkcja $F(x) = \frac{M^q(x)}{EI(x)}$ jest dość złożona i nie spełnia warunków

przedstawionych wzorów. Wynik całkowania w tym przedziale z wykorzystaniem tych wzorów będzie więc przybliżony.

Wg wzoru Simpsona.

$$\begin{aligned} \Delta_{iq} &= \int \frac{M^i \cdot M^q}{EI} \cdot dx = \int_{AB} \frac{M^i \cdot M^q}{EI} \cdot dx + \frac{1}{EI} \cdot \int_{BC} M^i \cdot M^q \cdot dx \approx \\ &\approx \frac{L/3}{6} \cdot \left(\frac{(-q \cdot L^2/2) \cdot (-L)}{2EI} + 4 \cdot \frac{(-25q \cdot L^2/72) \cdot (-5L/6)}{1.4427EI} + \frac{(-2q \cdot L^2/9) \cdot (-2L/3)}{EI} \right) + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{2L/3}{6} \cdot \left(\left(-\frac{2q \cdot L^2}{9} \right) \cdot \left(-\frac{2L}{3} \right) + 4 \cdot \left(-\frac{q \cdot L^2}{18} \right) \cdot \left(-\frac{L}{3} \right) + 0 \cdot 0 \right) = 0.099609 \frac{qL^4}{EI} \end{aligned}$$

W przypadku podziału pierwszego odcinka na 2 przedziały otrzymuje się wynik $\Delta_{iq} \approx 0.099607 \frac{qL^4}{EI}$

co oznacza, że uzyskane wyniki mają dokładne 4 cyfry.

Uwaga:

Wykorzystując wzór Simpsona do numerycznego obliczania całek należy pamiętać, że duże błędy mogą być generowane w wyniku nieciągłości funkcji i nieco mniejsze w wyniku nieciągłości pochodnych. W związku z tym konieczne należy dzielić na przedziały całkowania w miejscach nieciągłości funkcji lub ich pochodnych.