

Mechanika Budowli

Ćwiczenia audytoryjne nr 1

Opracowała: dr inż. Olga Szyłko-Bigus

olga.szylko-bigus@pwr.edu.pl



HR EXCELLENCE IN RESEARCH

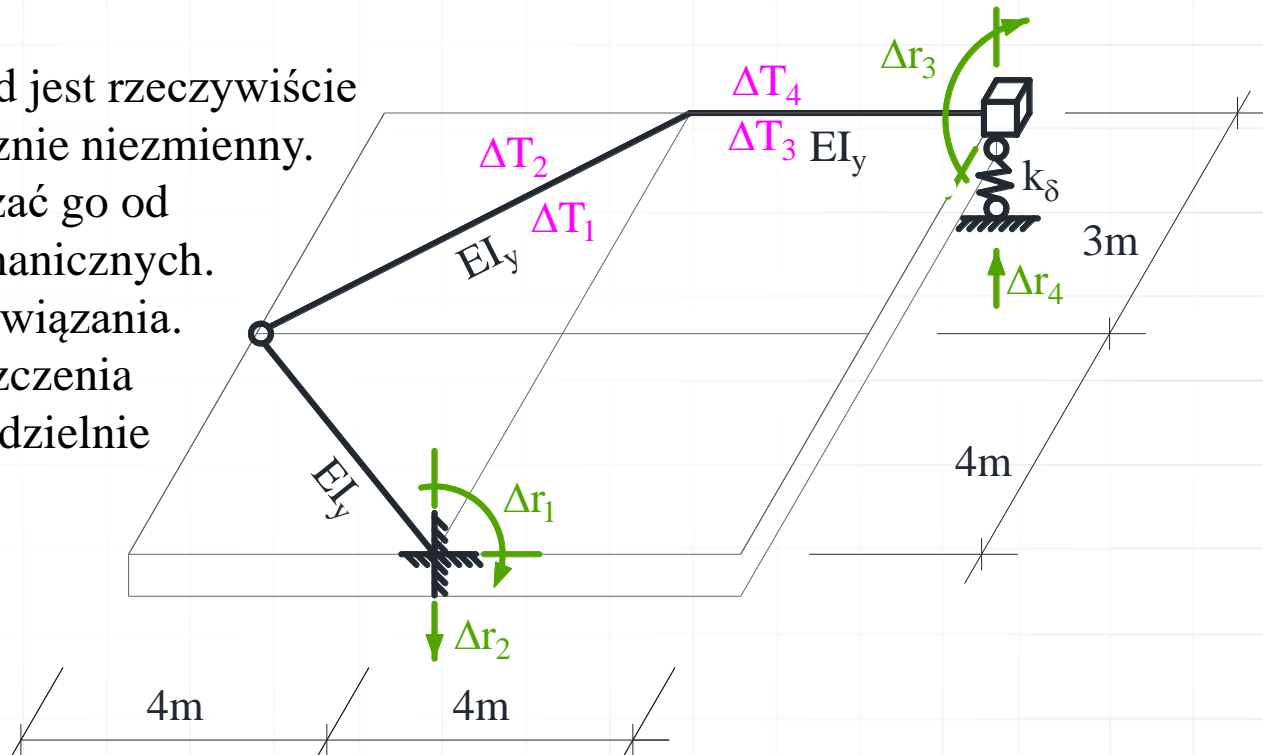


Politechnika Wroclawska

Układ dany

Dany jest hiperstatyczny układ załamany w planie o schemacie statycznym i obciążeniu niemechanicznym jak na rysunku 1.1. Zakładamy, że konstrukcja wykonana jest z rur stalowych (tzn. $GI_s = 0.769 EI_y$) RO 219.1 x 8, ze stali o współczynniku sprężystości podłużnej $E = 205 \text{ GPa}$,. Należy:

- Sprawdzić czy zadany układ jest rzeczywiście hiperstatyczny i geometrycznie niezmienny.
- Stosując metodę sił rozwiązać go od zadanych obciążeń niemechanicznych.
- Przeprowadzić kontrolę rozwiązania.
- Obliczyć wartość przemieszczenia w zaznaczonym miejscu oddzielnie od wszystkich obciążeń niemechanicznych.



Dane do obliczeń: $k_\delta = 1 \cdot 10^{-10} EI_y / \text{m}^3$; $\Delta T_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C}$; $\Delta T_2 = -20 \text{ }^\circ\text{C}$; $\Delta T_3 = -15 \text{ }^\circ\text{C}$; $\Delta T_4 = -35 \text{ }^\circ\text{C}$;
 $\Delta r_1 = 0,01 \text{ rad}$; $\Delta r_2 = 0,02 \text{ m}$; $\Delta r_3 = 0,03 \text{ rad}$; $\Delta r_4 = 0,04 \text{ m}$.

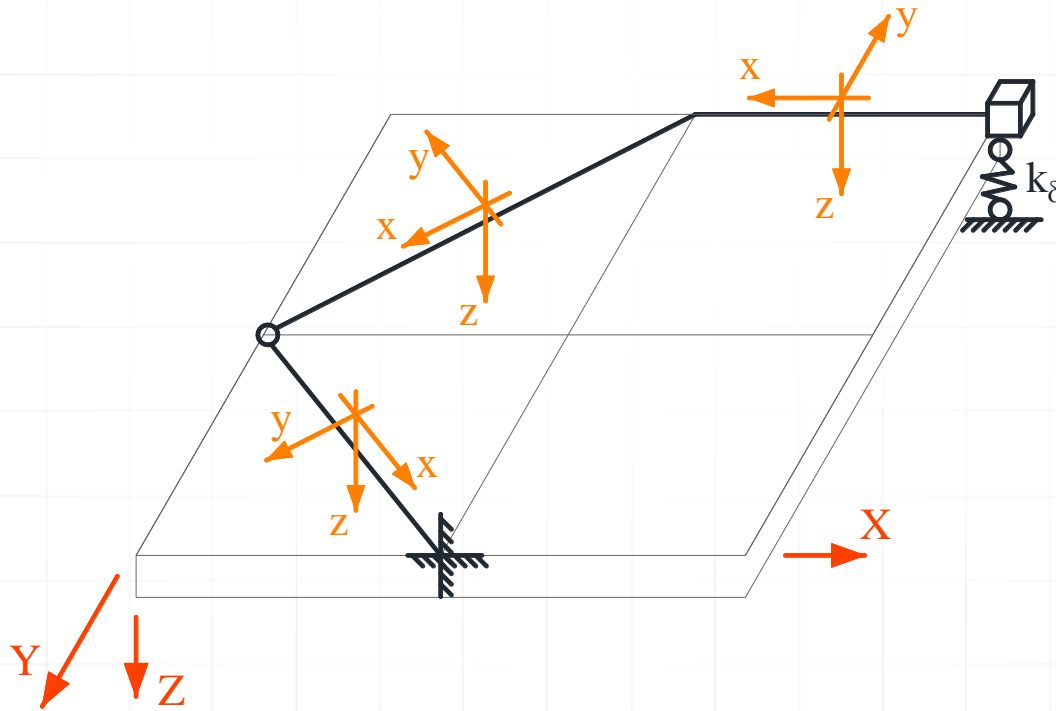
$$EI_y = 205000000 \text{ kN/m}^2 \cdot 2959,58 \cdot 10^{-8} \text{ m}^4 = 6067,139 \text{ kN}\cdot\text{m}^2,$$

$$k_\delta = 0,1 \cdot EI_y / \text{m}^3 = 0,1 \cdot 6067,139 \text{ kN}\cdot\text{m}^2 / \text{m}^3 = 606,7139 \text{ kN/m}.$$



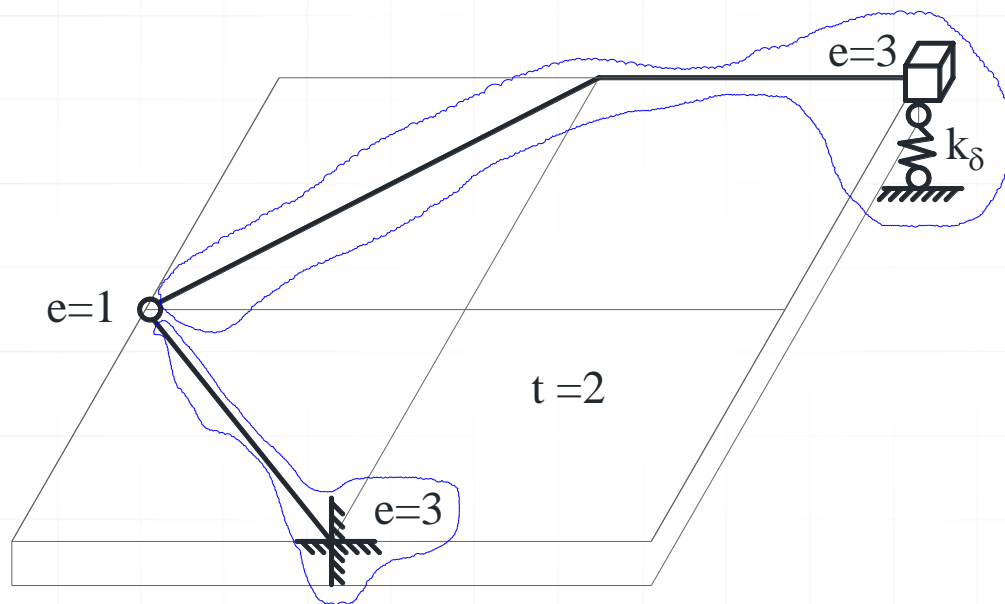
Przyjęcie układu współrzędnych

Przy rozwiązaniu przestrzennych układów konstrukcyjnych niezbędne jest przyjęcie globalnego układu współrzędnych dla całego układu (przyjęto prawoskrętny układ osi **XYZ**) oraz lokalnych układów współrzędnych **xyz** dla poszczególnych elementów z osią **x** będącą osią pręta oraz osią **z** prostopadłą do płaszczyzny dźwigara załamane w planie. Przyjęty globalny układ osi oraz układ osi lokalnych przedstawiono na rysunku



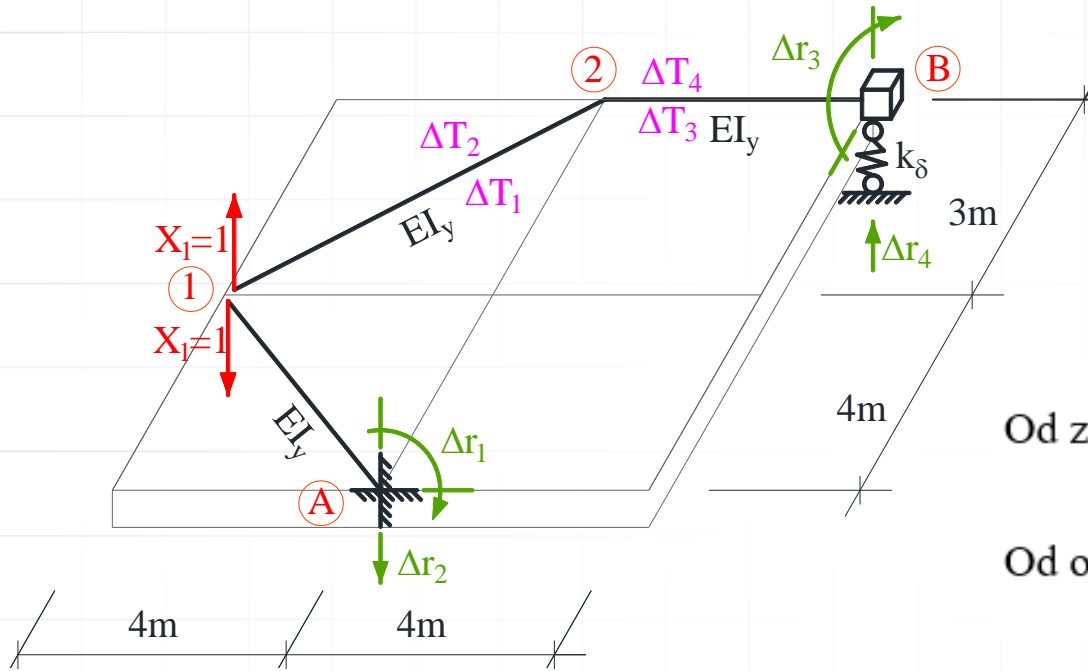
Sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu i obliczenie stopnia statycznej niewyznaczalności

Stopień statycznej niewyznaczalności: $n_h = e - 3 \cdot t$



Układ składa się z dwóch tarcz. Każda z tarcz jest połączona z ostoją trzema niezbieżnymi więziami. Cały dźwigar załamany w planie wraz z ostoją tworzy układ geometrycznie niezmienny. Warunki ilościowe ($e \geq 3 \cdot t$) i jakościowe geometrycznej niezmienności są spełnione

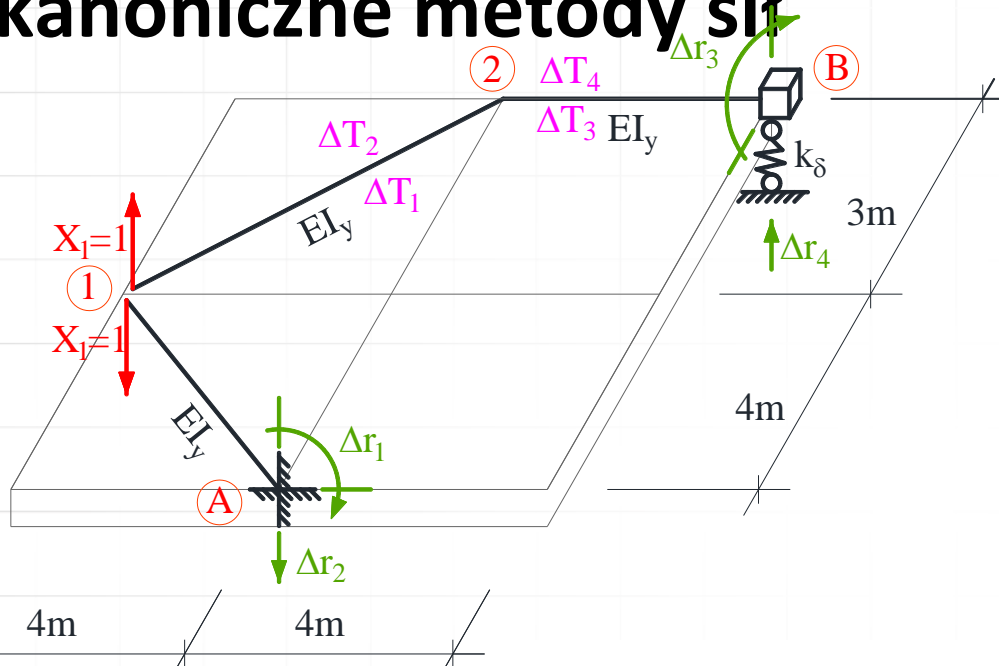
Układ podstawowy metody sił i równania kanoniczne metody sił



Od zmian temperatury: $\delta_{11}X_1^T + \delta_{1T} = 0$

Od osiadania podpory: $\delta_{11}X_1^\Delta + \delta_{1\Delta} = 0$

Układ podstawowy metody sił i równania kanoniczne metody sił



Od zmian temperatury: $\delta_{11} X_1^T + \delta_{1T} = 0$

Od osiadania podpory: $\delta_{11} X_1^\Delta + \delta_{1\Delta} = 0$

$$\delta_{ij} = \int \frac{\bar{M}_y^i \bar{M}_y^j}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^i \bar{M}_x^j}{GI_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^j}{k_n}$$

$$\delta_{iT} = \int \bar{M}_y^i \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} dx = \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{M_y^i}$$

$$\delta_{i\Delta} = - \sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n$$

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od jednostkowej j-tej niewiadomej w układzie podstawowym,

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od wpływu temperatury w układzie podstawowym,

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od wpływu osiadania podpór w układzie podstawowym

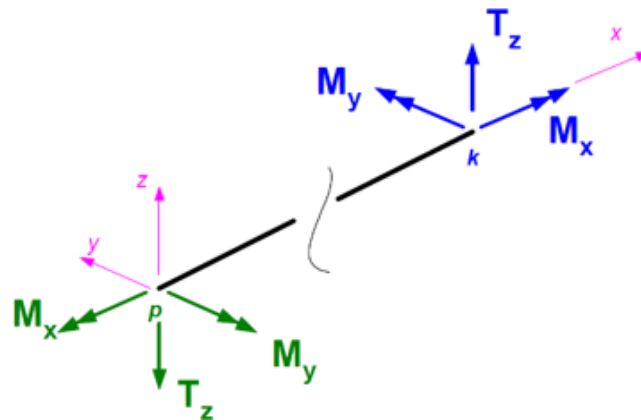


Definicja znakowania sił przekrojowych

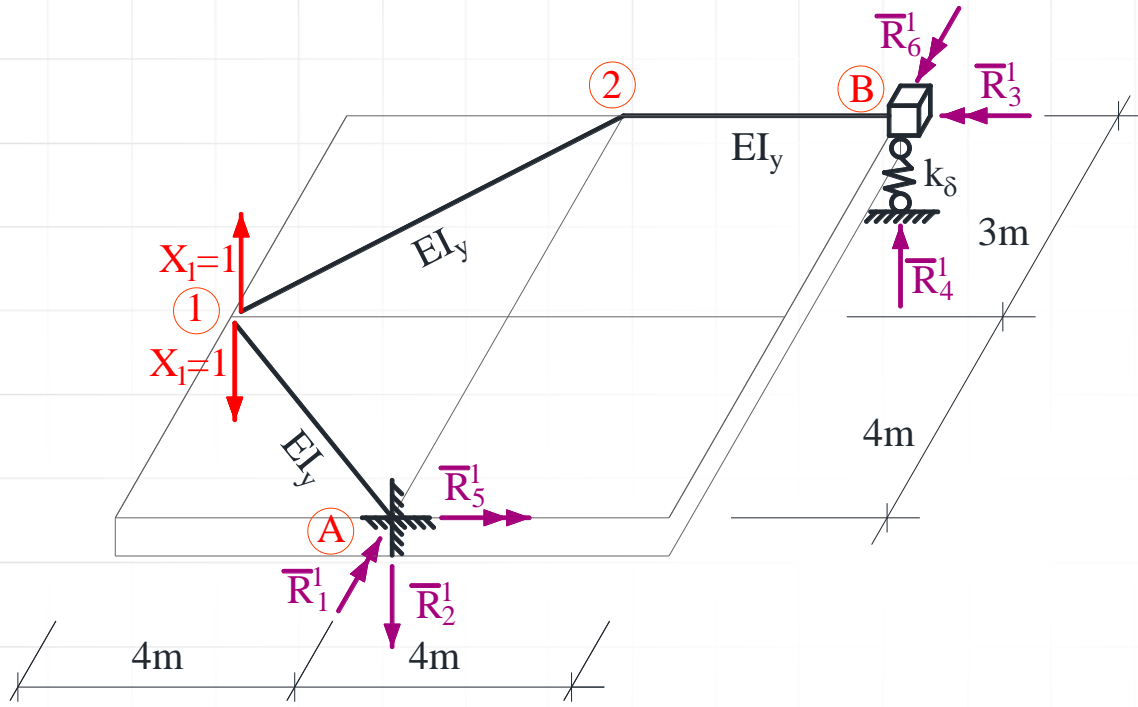
Momenty zginające M_y odkładamy po stronie włókien rozciąganych w płaszczyźnie xz . Znak „+” jest po dodatniej stronie lokalnej osi z . Momenty skręcające odkładamy w płaszczyźnie xz lub xy .

Znaki wynikają z przyjętych lokalnych układów współrzędnych, a definicja znakowania jest pokazana na rysunku poniżej i jest następująca:

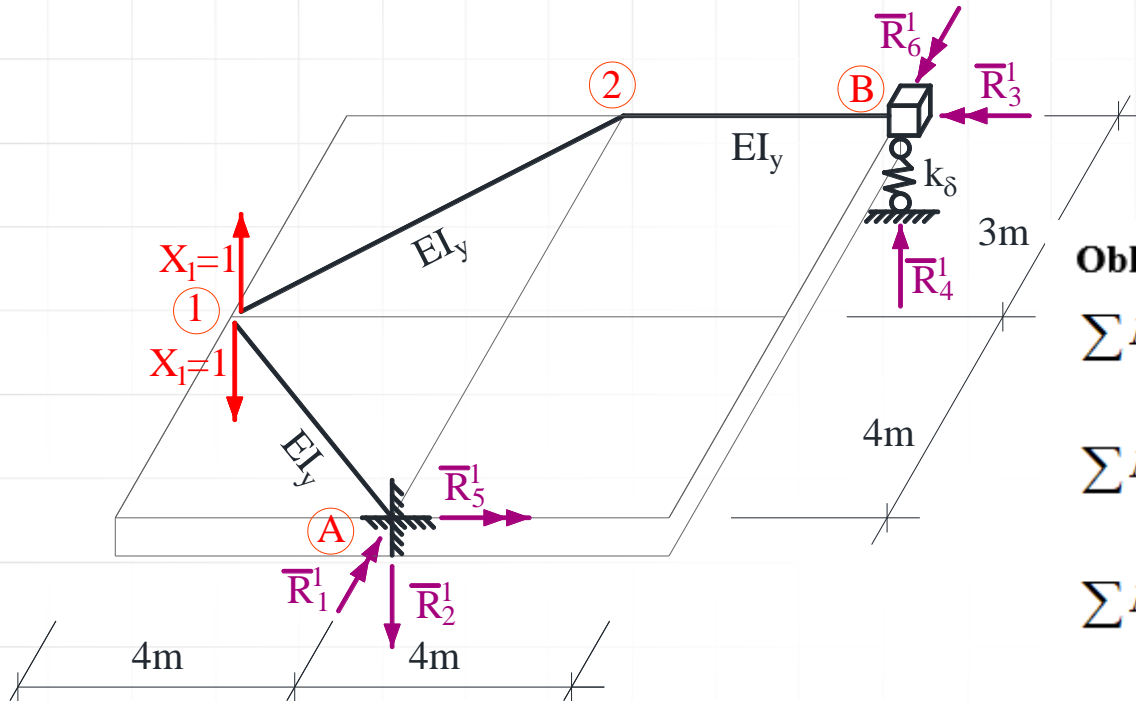
- Jeśli w przyjętym lokalnym układzie osi równoważymy obciążenia po stronie związanej z początkiem pręta (p) to **dodatnie siły przekrojowe mają zwroty przeciwne do przyjętych osi lokalnych**.
- Jeśli w przyjętym lokalnym układzie osi równoważymy obciążenia po stronie związanej z końcem pręta (k) to **dodatnie siły przekrojowe mają zwroty zgodne z przyjętymi osiami lokalnymi**.



Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$



Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$



Obliczenie reakcji

$$\sum M_{xA} = \bar{R}_5^1 - X_1 \cdot 4m = 0$$

$$\bar{R}_5^1 - 1 \cdot 4m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_5^1 = 4m$$

$$\sum M_{xB} = -\bar{R}_3^1 - X_1 \cdot 3m = 0$$

$$-\bar{R}_3^1 - 1 \cdot 3m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_3^1 = -3m$$

$$\sum M_{yA} = -\bar{R}_1^1 + X_1 \cdot 4m = 0$$

$$-\bar{R}_1^1 + 1 \cdot 4m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_1^1 = 4m$$

$$\sum M_{yB} = \bar{R}_6^1 - X_1 \cdot 8m = 0$$

$$\bar{R}_6^1 - 1 \cdot 8m = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_6^1 = 8m$$

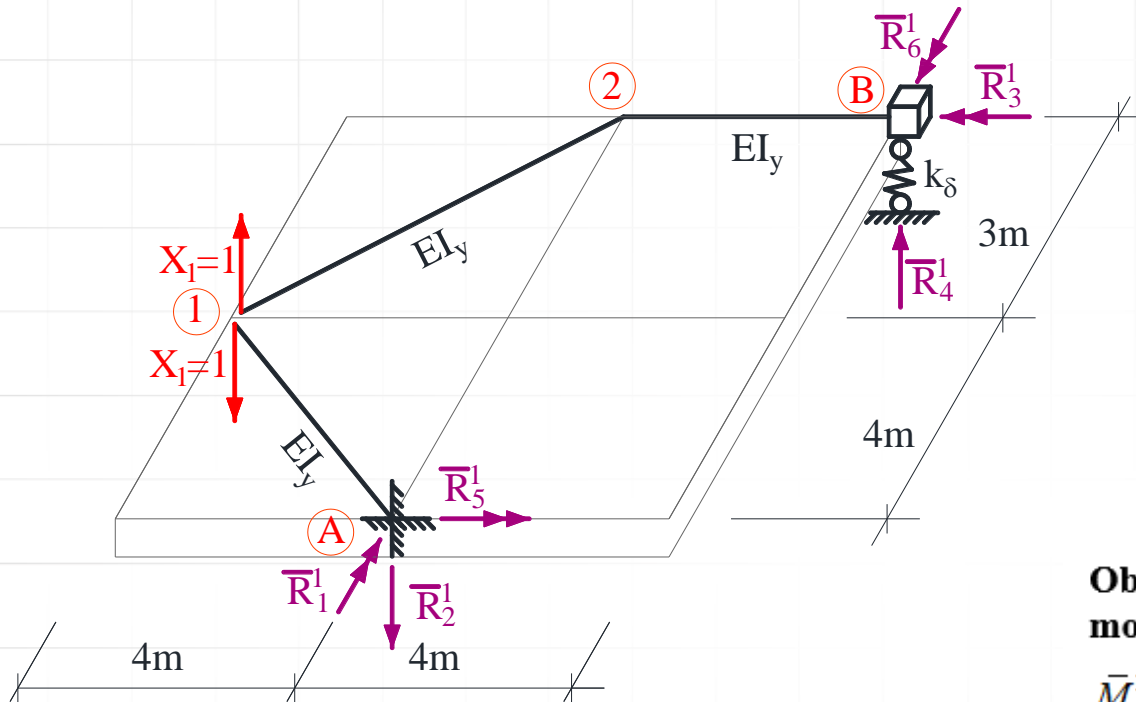
$$\sum V_{zA} = \bar{R}_2^1 + X_1 = 0$$

$$\bar{R}_2^1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_2^1 = -1$$

$$\sum V_{zB} = \bar{R}_4^1 + X_1 = 0$$

$$\bar{R}_4^1 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \bar{R}_4^1 = -1$$

Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$



Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów zginających

$$\bar{M}_{y,12}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{y,21}^1 = X_1 \cdot 5m = 5m$$

$$\bar{M}_{y,2B}^1 = X_1 \cdot 4m = 1 \cdot 4m = 4m$$

$$\bar{M}_{y,B2}^1 = X_1 \cdot 8m = 1 \cdot 8m = 8m$$

$$\bar{M}_{y,1A}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{y,A1}^1 = -X_1 \cdot 4\sqrt{2}m = -1 \cdot 4\sqrt{2}m = -4\sqrt{2}m$$

Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów skręcających

$$\bar{M}_{x,12}^1 = \bar{M}_{x,21}^1 = 0$$

$$\bar{M}_{x,2B}^1 = \bar{M}_{x,B2}^1 = X_1 \cdot 3m = 3m$$

$$\bar{M}_{x,1A}^1 = \bar{M}_{x,A1}^1 = 0$$

Obliczenie rzędnych sił tnących

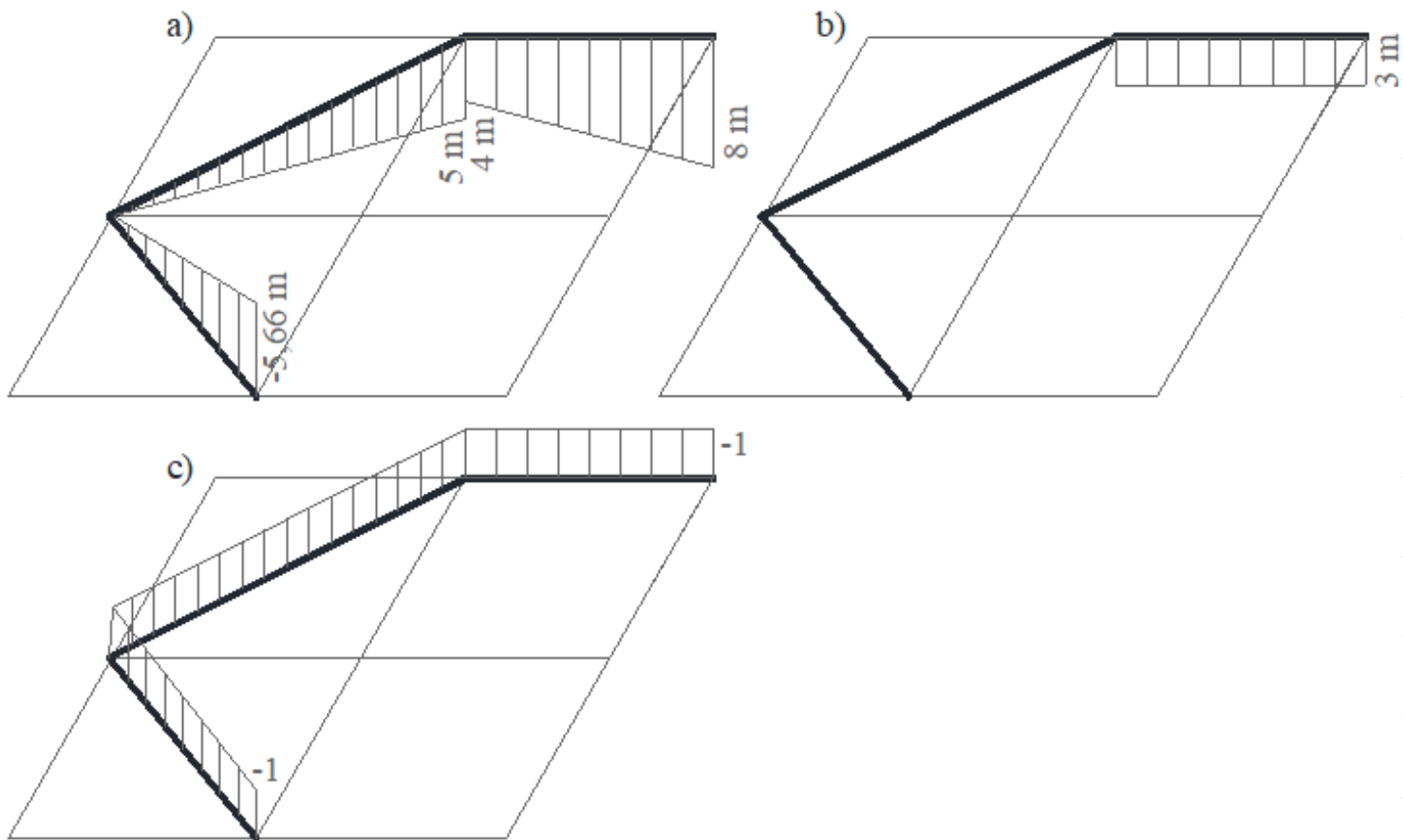
$$\bar{V}_{z,21}^1 = \bar{V}_{z,12}^1 = -X_1 = -1$$

$$\bar{V}_{z,2B}^1 = \bar{V}_{z,B2}^1 = -X_1 = -1$$

$$\bar{V}_{z,A1}^1 = \bar{V}_{z,A1}^1 = -X_1 = -1$$

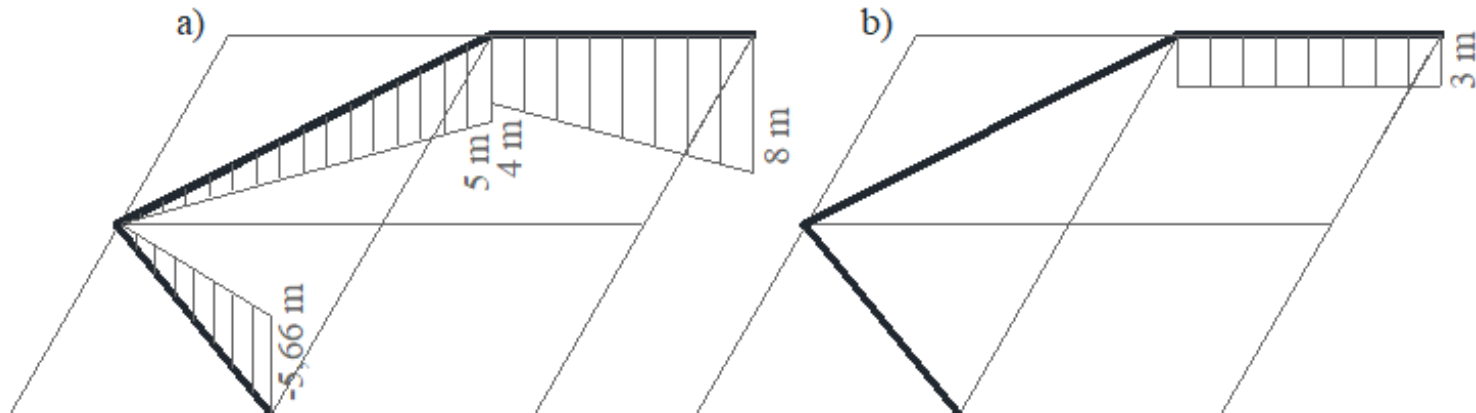
Siła podłużna w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^1 = -\bar{R}_4^1 = 1$

Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$



Rys. 7.2.2. wykresy sił przekrojowych od $X_1 = 1$:
a) momenty zginające, b) momenty skręcające, c) siły tnące

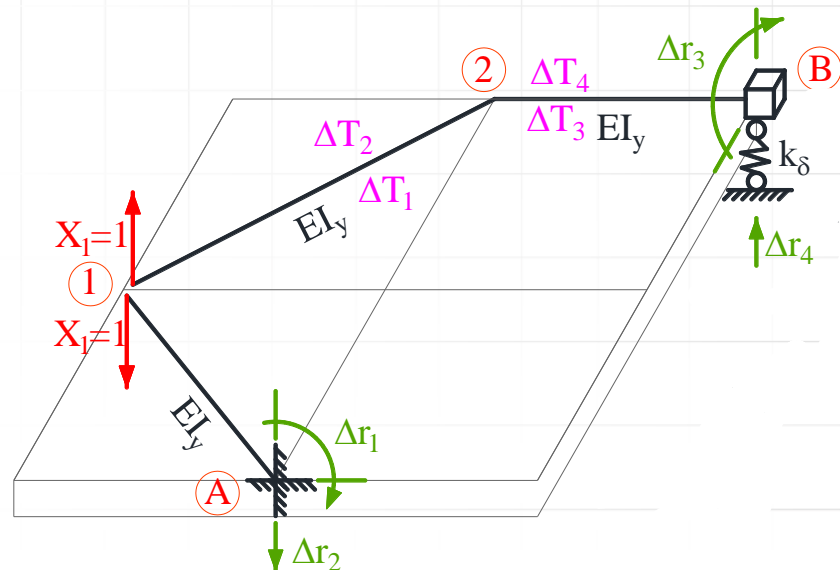
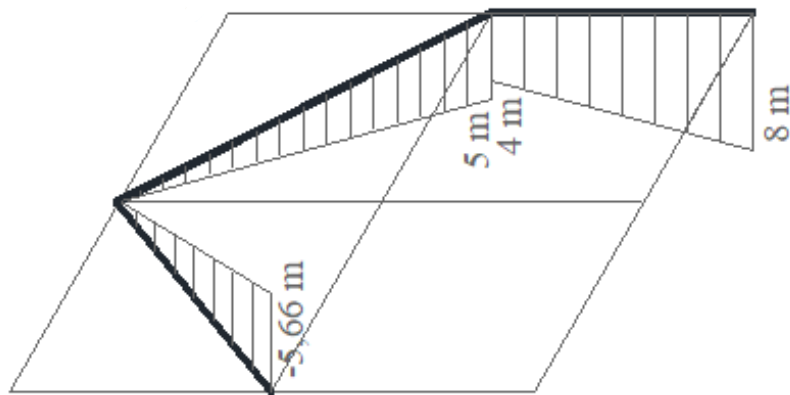
Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych układu równań metody sił



Do obliczenia całek we wzorach podanych w p. 5 zastosowano wzory uproszczonego całkowania (wzór Simpsona lub wzór Wereszczagina).

$$\begin{aligned} \delta_{11} = & \int \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^1}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^1}{GI_x} dx + \frac{\bar{S}_\delta^1 \bar{S}_\delta^1}{k_\delta} = \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5m \cdot 5m \cdot \frac{2}{3} \cdot 5m + \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-4\sqrt{2})m \cdot 4\sqrt{2}m \cdot \frac{2}{3} \cdot (-4\sqrt{2})m + \\ & + \frac{4m}{6EI_y} [4m \cdot 4m + 4 \cdot 6m \cdot 6m + 8m \cdot 8m] + \frac{1}{0,769EI_y} \cdot 3m \cdot 4m \cdot 3m + \frac{1 \cdot 1}{0,1 \frac{EI_y}{m^3}} = 41,6667 \frac{m^3}{EI_y} + 60,3398 \frac{m^3}{EI_y} + \\ & + 149,3333 \frac{m^3}{EI_y} + 46,8140 \frac{m^3}{EI_y} + 10 \frac{m^3}{EI_y} = 308,1538 \frac{m^3}{EI_y} \end{aligned}$$

Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych układu równań metody sił



Wyrazy wolne δ_{iT} należy obliczyć według wzoru

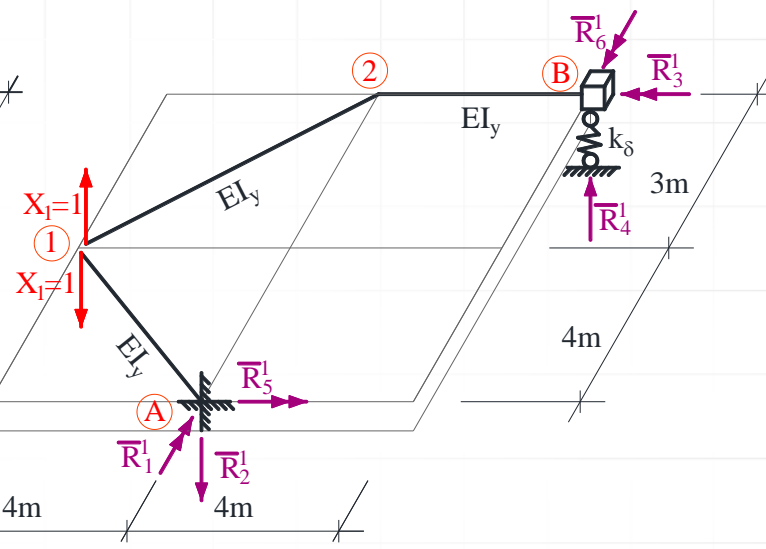
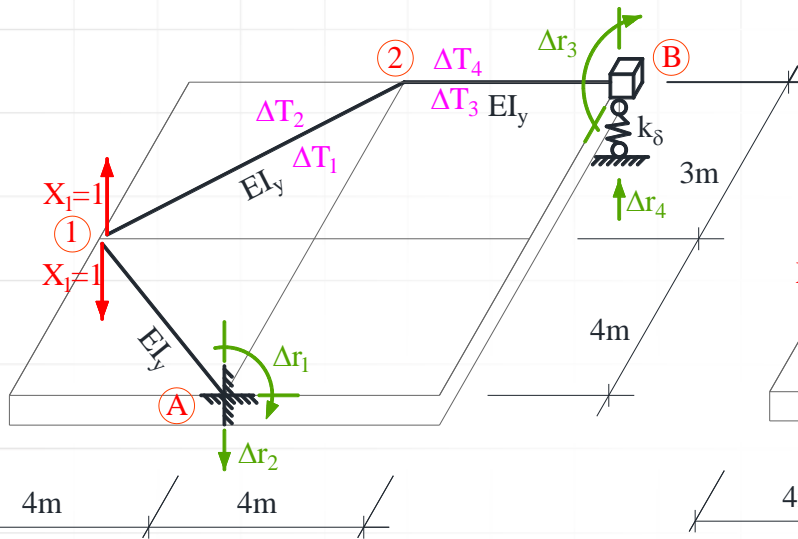
$$\delta_{iT} = \int \bar{M}_y^1 \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} dx = \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{M_y^1}$$

gdzie ΔT_w to temperatura po dodatniej stronie osi z , ΔT_p to temperatura po stronie ujemnej osi z , h to wysokość przekroju $h_{RO219.1 \times 8} = 0,2191$ m. Do obliczeń przyjmujemy: $\alpha = 0,000012/^\circ\text{C}$,

$$\Omega_{M_y^1,12} = 5m \cdot 5m \cdot \frac{1}{2} = 12,5m^2, \quad \Omega_{M_y^1,2b} = \frac{8m + 4m}{2} 4m = 24m^2,$$

$$\begin{aligned} \delta_{iT} &= \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{M_y^1} = 0,000012 \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{10^\circ\text{C} - (-20)^\circ\text{C}}{0,2191m} \cdot 12,5m^2 + 0,000012 \cdot \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-15^\circ\text{C} - (-35)^\circ\text{C}}{0,2191m} \cdot 24m^2 \\ &= 0,0205m + 0,0263 = 0,0468m. \end{aligned}$$

Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych układu równań metody sił



$$\bar{R}_5^1 = 4m$$

$$\bar{R}_3^1 = -3m$$

$$\bar{R}_1^1 = 4m$$

$$\bar{R}_6^1 = 8m$$

$$\bar{R}_2^1 = -1$$

$$\bar{R}_4^1 = -1$$

Wyrazy wolne $\delta_{i\Delta}$ należy obliczyć według wzoru

$$\delta_{i\Delta} = -\sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n$$

$$\delta_{1\Delta} = -\bar{R}_1^1 \Delta r_1 - \bar{R}_2^1 \Delta r_2 = -[4m \cdot 0,01 + (-1) \cdot 0,02m + (-3)m \cdot 0,03 + (-1) \cdot 0,04m] = -0,04m + 0,02m + 0,09m + 0,04m = 0,11m$$

$$308,1538 \frac{m^3}{EI_y} X_1^\Delta + 0,11m = 0 \quad \Rightarrow \quad X_1^\Delta = -0,00035696 \frac{EI_y}{m^2} = -0,000463 \frac{6067,139 \text{ kN} \cdot m^2}{m^2} = -2,1658 \text{ kN}$$

Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów

Innym sposobem, jest obliczenie reakcji i sił przekrojowych korzystając z zasady superpozycji

$$\begin{aligned} R_i^T &= \bar{R}_i^1 \cdot X_1^T, & M_{x,ij}^T &= \bar{M}_{x,ij}^1 \cdot X_1^T, \\ M_{y,ij}^T &= \bar{M}_{y,ij}^1 \cdot X_1^T, & V_{z,ij}^T &= \bar{V}_{z,ij}^1 \cdot X_1^T. \end{aligned}$$

Reakcje:

$$R_1^T = \bar{R}_1^1 \cdot X_1^T = 4m \cdot (-0,9220)kN = -3,6880kN \cdot m$$

$$R_2^T = \bar{R}_2^1 \cdot X_1^T = -1 \cdot (-0,9220)kN = 0,9220kN$$

$$R_3^T = \bar{R}_3^1 \cdot X_1^T = 3m \cdot (-0,9220)kN = -2,766kN \cdot m$$

$$R_4^T = \bar{R}_4^1 \cdot X_1^T = -1 \cdot (-0,9220)kN = -0,9220kN$$

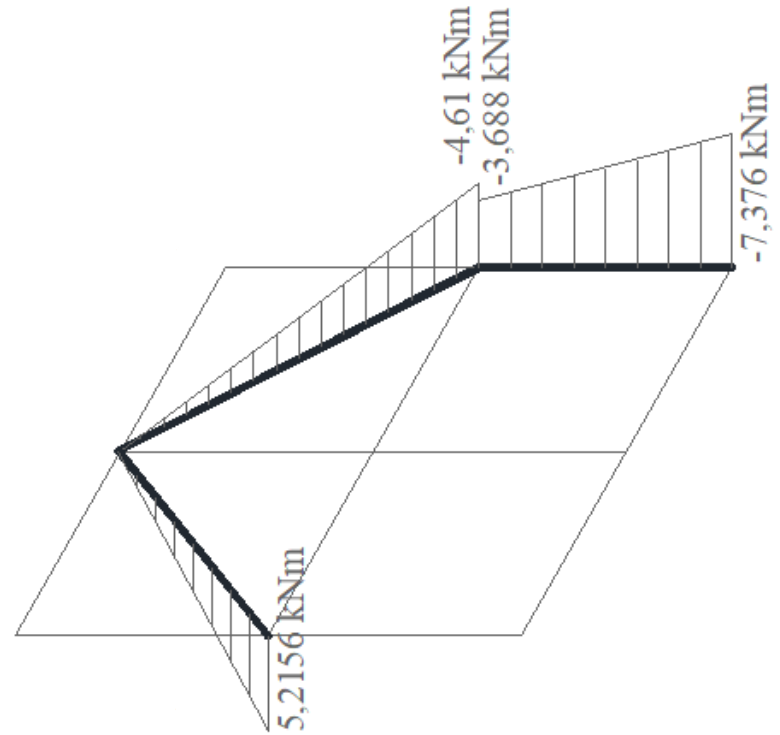
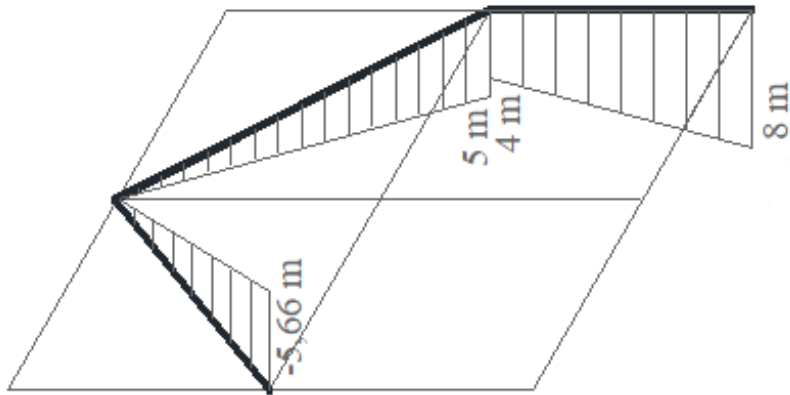
$$R_5^T = \bar{R}_5^1 \cdot X_1^T = 4m \cdot (-0,9220)kN = -3,6880kN \cdot m$$

$$R_6^T = \bar{R}_6^1 \cdot X_1^T = 8m \cdot (-0,9220)kN = -7,3760kN \cdot m$$

Siła w więzi sprężystej:

$$\bar{S}_\delta^\Delta = \bar{S}_\delta^1 \cdot X_1^\Delta = 1 \cdot (-0,9220)kN \cdot m = -0,9220kN \cdot m$$

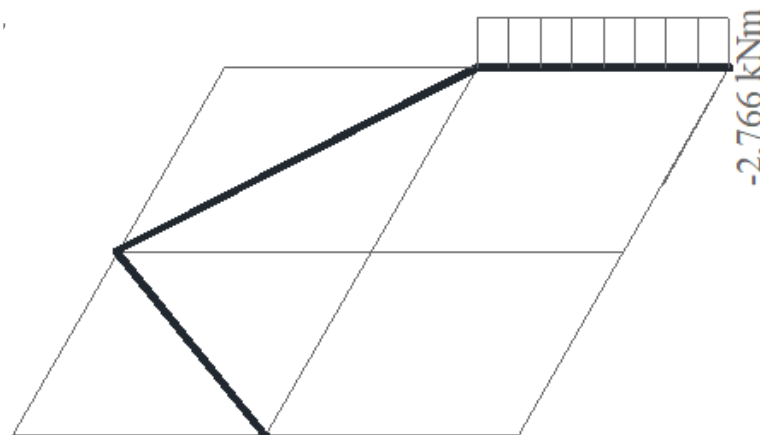
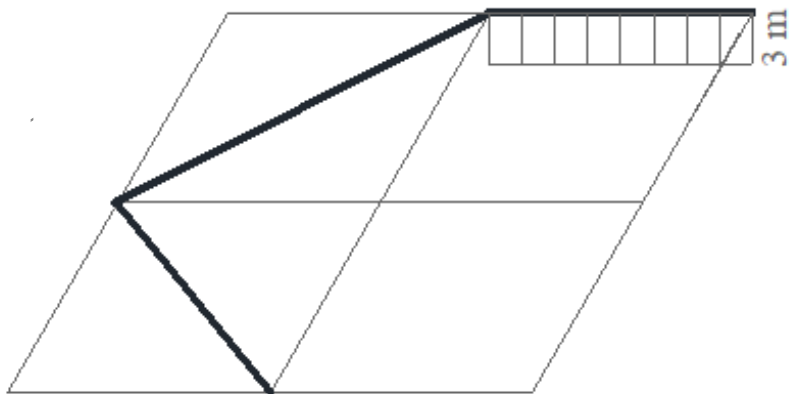
Obliczenie wartości sił przekro



Momenty zginające

| Pręt | Punkt | $\frac{\bar{M}_{y,ij}^1}{m}$ | $\frac{X_1^T}{kN}$ | $\frac{M_{y,ij}^T}{kN \cdot m}$ |
|------|-------|------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| 12 | 1 | 0 | -0,9220 | 0 |
| | 2 | 5 | | -4,6100 |
| 2B | 2 | 4 | | -3,6880 |
| | B | 8 | | -7,3760 |
| 1A | 1 | 0 | | 0 |
| | A | $-4 \cdot \sqrt{2}$ | | 5,2156 |

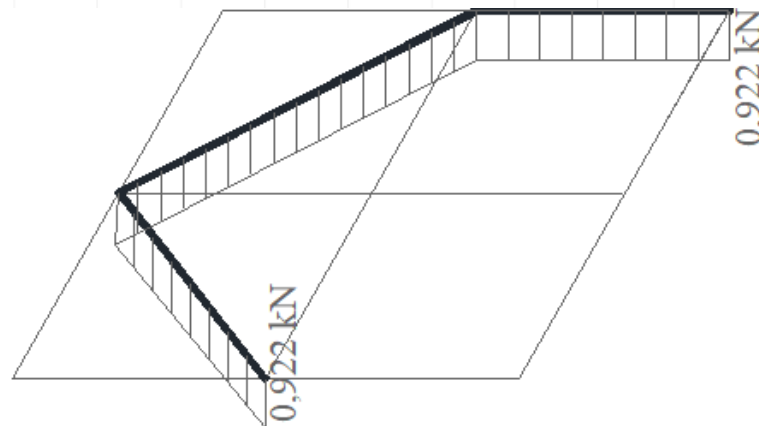
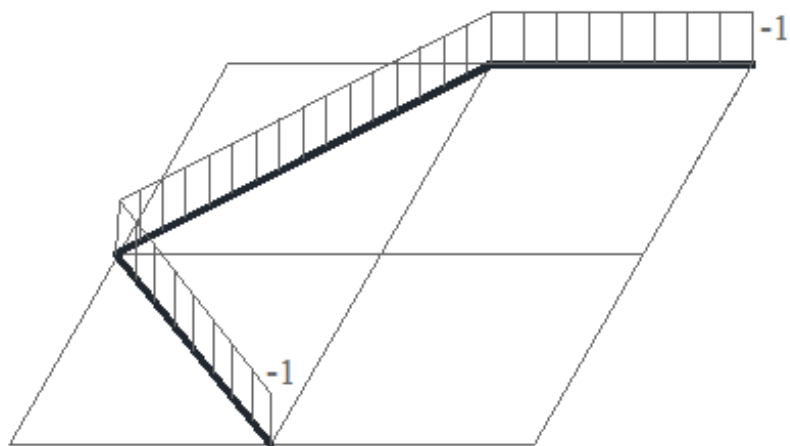
Obliczenie wartości sił przekrojowych



Momenty skręcające

| Pręt | Punkt | $\frac{\bar{M}_{x,ij}^1}{m}$ | $\frac{X_1^T}{kN}$ | $\frac{M_{x,ij}^T}{kN \cdot m}$ |
|------|-------|------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| 12 | 1 | 0 | -0,9220 | 0 |
| | 2 | 0 | | 0 |
| 2B | 2 | 3 | | -2,7660 |
| | B | 3 | | -2,7660 |
| 1A | 1 | 0 | | 0 |
| | A | 0 | | 0 |

Obliczenie wartości sił przekrojowych

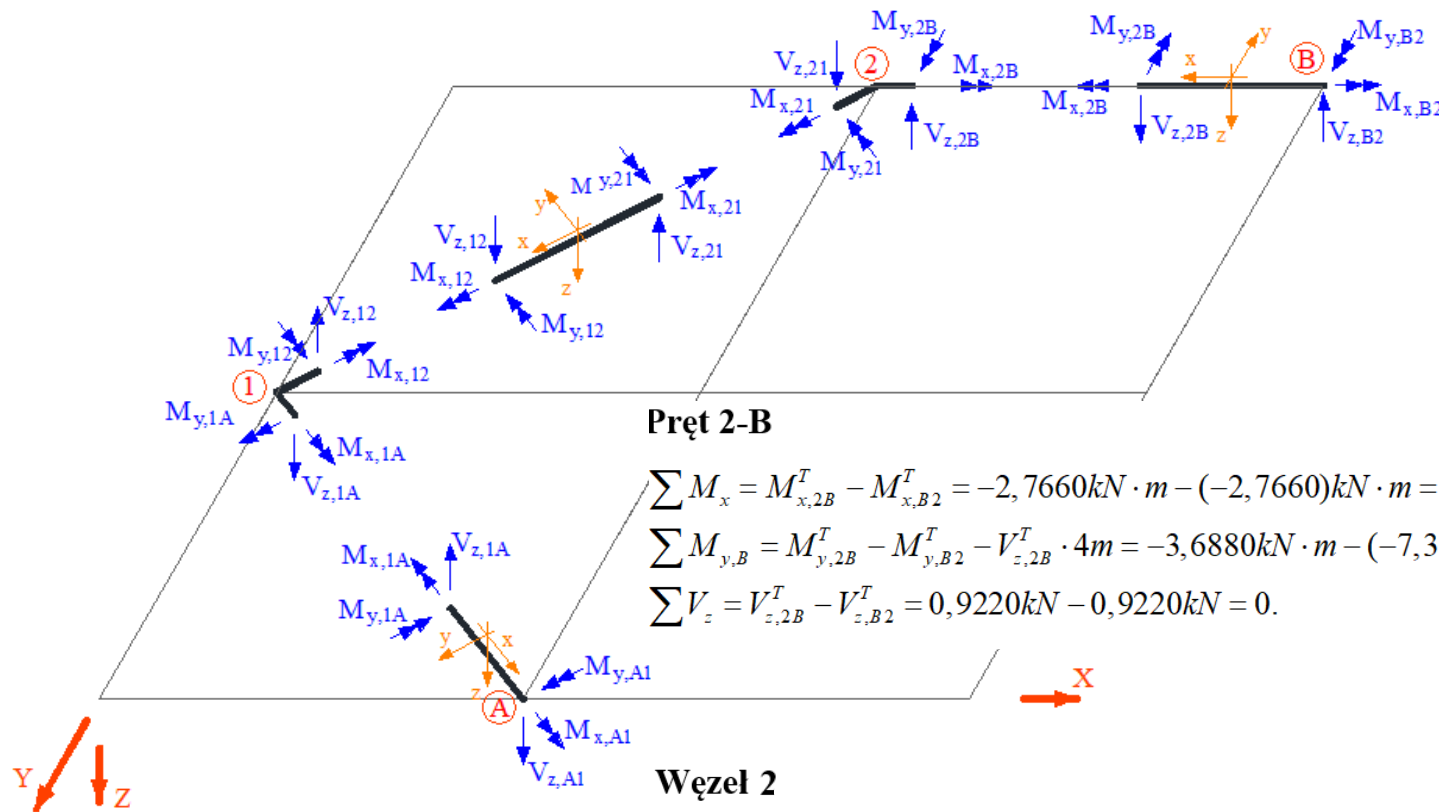


Siły tnące

| Pręt | Punkt | $\frac{\bar{V}_{z,ij}^1}{1}$ | $\frac{X_1^T}{kN}$ | $\frac{V_{z,ij}^T}{kN}$ |
|------|-------|------------------------------|--------------------|-------------------------|
| 12 | 1 | -1 | -0,9220 | 0,9220 |
| | 2 | -1 | | 0,9220 |
| 2B | 2 | -1 | | 0,9220 |
| | B | -1 | | 0,9220 |
| 1A | 1 | -1 | | 0,9220 |
| | a | -1 | | 0,9220 |

Kontrola poprawności rozwiązania – kontrola statyczna rozwiązania

Kontrola statycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu czy siły spełniają równania równowagi na prętach i w węzłach. Wektory sił przekrojowych wskazują dodatnie wartości zgodnie przyjętymi lokalnymi układami współrzędnych.



Pręt 2-B

$$\sum M_x = M_{x,2B}^T - M_{x,B2}^T = -2,7660 \text{ kN} \cdot \text{m} - (-2,7660) \text{ kN} \cdot \text{m} = 0,$$

$$\sum M_{y,B} = M_{y,2B}^T - M_{y,B2}^T - V_{z,2B}^T \cdot 4\text{m} = -3,6880 \text{ kN} \cdot \text{m} - (-7,3760) \text{ kN} \cdot \text{m} - 0,9220 \text{ kN} \cdot 4\text{m} = 0,$$

$$\sum V_z = V_{z,2B}^T - V_{z,B2}^T = 0,9220 \text{ kN} - 0,9220 \text{ kN} = 0.$$

Węzeł 2

$$\sum M_x = M_{x,2B}^T - M_{x,21}^T \cdot 0,8 - M_{y,21}^T \cdot 0,6 = -2,7660 \text{ kN} \cdot \text{m} - 0 - (-4,6100) \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot 0,6 = 0,$$

$$\sum M_y = M_{y,2B}^T + M_{x,21}^T - M_{y,21}^T \cdot 0,8 = (-3,6880) \text{ kN} \cdot \text{m} + 0 - (-4,6100) \text{ kN} \cdot \text{m} \cdot 0,8 = 0,$$

$$\sum V_z = V_{z,21}^T - V_{z,2B}^T = 0,9220 \text{ kN} - 0,9220 \text{ kN} = 0.$$

Obliczenie przemieszczenia

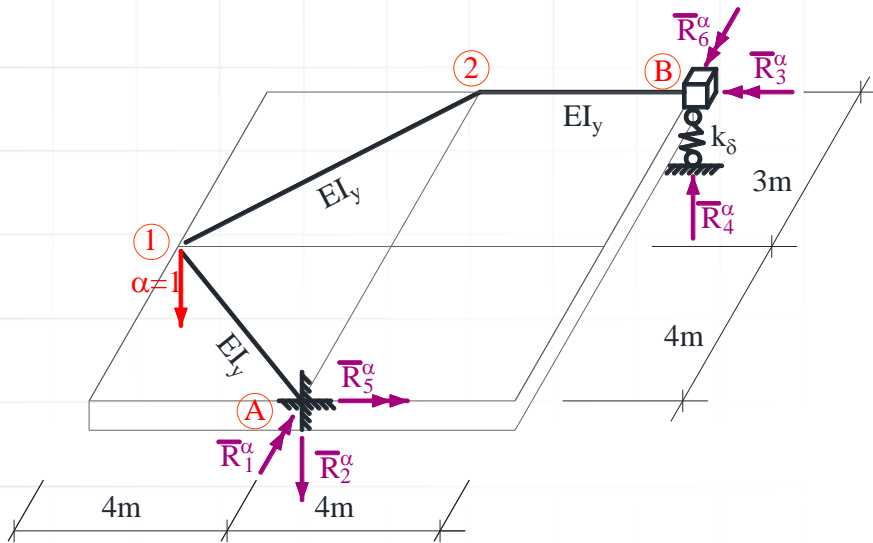
Do wyznaczenia przemieszczeń wykorzystano twierdzenie redukcyjne, które pozwala na to aby jedno z otrzymanych rozwiązań było w układzie statycznie wyznaczalnym. Ponieważ rzeczywiste siły wewnętrzne zostały uzyskane we wcześniejszych punktach, należy rozwiązać dowolny układ podstawowy od siły jednostkowej w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia. Gdy znane jest rozwiązanie układu hiperstatycznego, przemieszczenia wyznaczane są ze wzorów:

$$\Delta_{\alpha F} = \int \frac{\bar{M}_y^\alpha M_y^F}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^\alpha M_x^F}{GI_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^\alpha \cdot S_n^F}{k_n}$$

$$\Delta_{\alpha T} = \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^T}{EI} dx + \int \frac{\bar{M}_x^\alpha M_x^T}{GI_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^\alpha \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^\alpha}$$

$$\Delta_{\alpha \Delta} = \int \frac{\bar{M}_y^\alpha M_y^\Delta}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^\alpha M_x^\Delta}{GI_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^\alpha \cdot S_n^\Delta}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^\alpha \Delta r_n$$

Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia



Obliczenie reakcji

$$\begin{aligned} \sum M_{x,A} &= \bar{R}_5^\alpha - 1 \cdot 4m = 0 && \Rightarrow \bar{R}_5^\alpha = 4m \\ \sum M_{x,B} &= -\bar{R}_3^\alpha = 0 && \Rightarrow \bar{R}_3^\alpha = 0 \\ \sum M_{y,A} &= -\bar{R}_1^\alpha + 1 \cdot 4m = 0 && \Rightarrow \bar{R}_1^\alpha = 4m \\ \sum M_{y,B} &= \bar{R}_6^\alpha = 0 && \Rightarrow \bar{R}_6^\alpha = 0 \\ \sum V_{z,A} &= \bar{R}_2^\alpha + 1 = 0 && \Rightarrow \bar{R}_2^\alpha = -1 \\ \sum V_{z,B} &= \bar{R}_4^\alpha + 0 = 0 && \Rightarrow \bar{R}_4^\alpha = 0 \end{aligned}$$

Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów zginających

$$\begin{aligned} \bar{M}_{y,12}^\alpha &= \bar{M}_{y,21}^\alpha = 0 \\ \bar{M}_{y,2B}^\alpha &= \bar{M}_{y,B2}^\alpha = 0 \\ \bar{M}_{y,1,A}^\alpha &= 0 \\ \bar{M}_{y,A1}^\alpha &= -1 \cdot 4\sqrt{2}m = -4\sqrt{2}m \end{aligned}$$

Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów skręcających

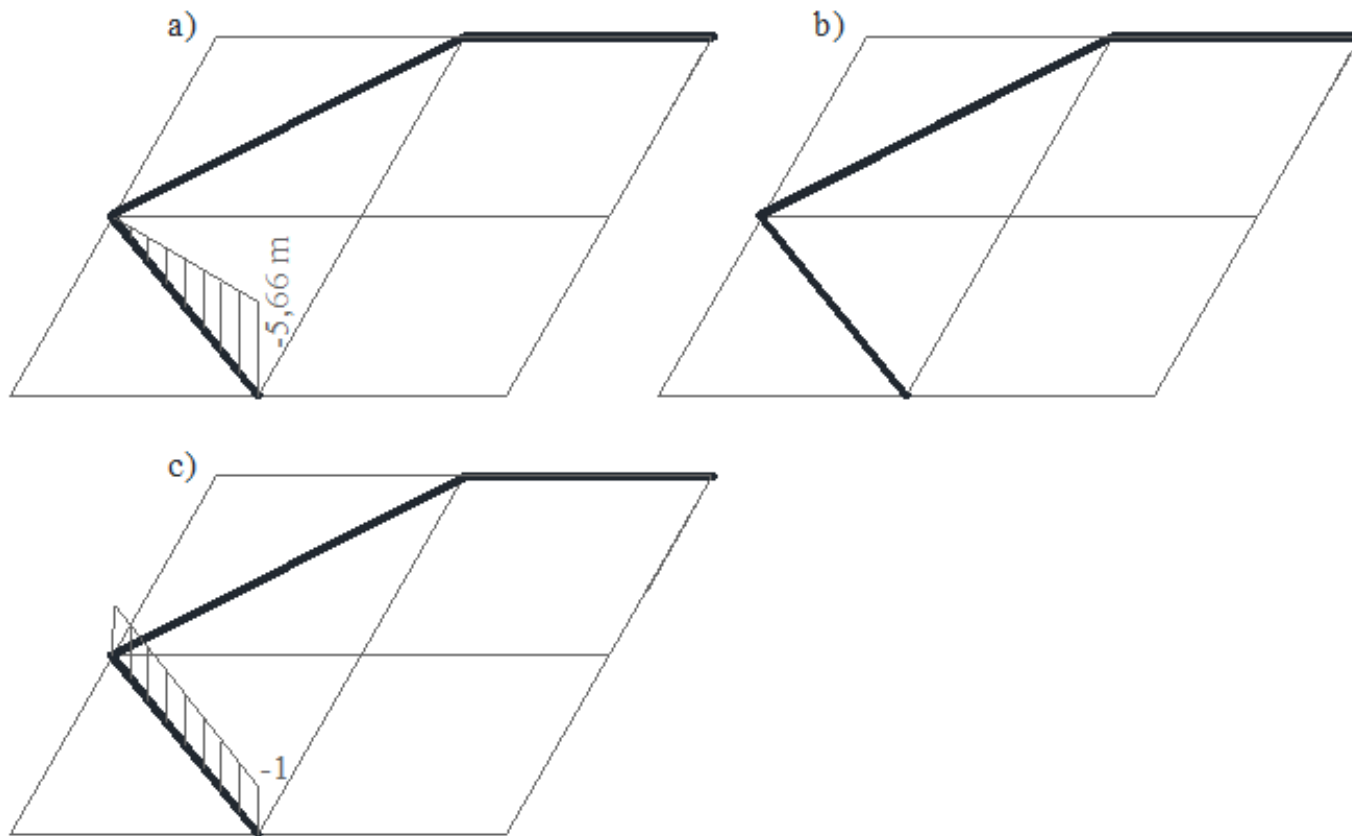
$$\begin{aligned} \bar{M}_{x,12}^\alpha &= \bar{M}_{x,21}^\alpha = 0 \\ \bar{M}_{x,2B}^\alpha &= \bar{M}_{x,B2}^\alpha = 0 \\ \bar{M}_{x,1,A}^\alpha &= \bar{M}_{x,A1}^\alpha = 0 \end{aligned}$$

Obliczenie rzędnych sił tnących

$$\begin{aligned} \bar{V}_{z,21}^\alpha &= \bar{V}_{z,12}^\alpha = 0 \\ \bar{V}_{z,2B}^\alpha &= \bar{V}_{z,B2}^\alpha = 0 \\ \bar{V}_{z,A1}^\alpha &= \bar{V}_{z,A1}^\alpha = -1 \end{aligned}$$

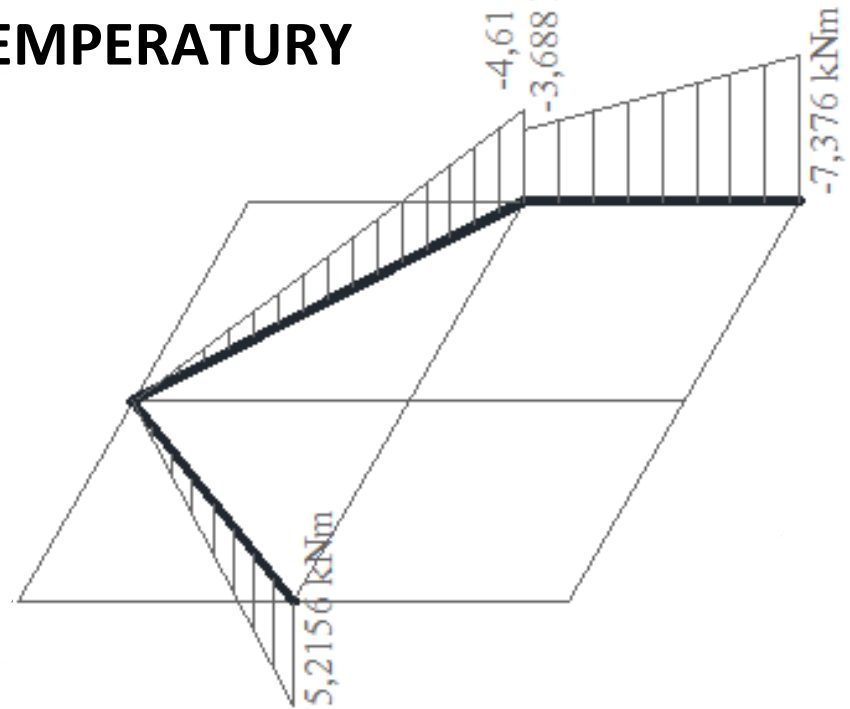
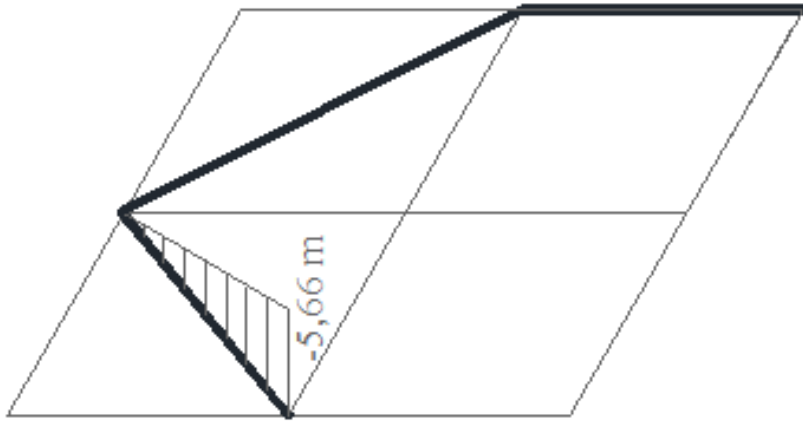
Siła podłużna w więzi sprężystej: $\bar{S}_f^1 = -\bar{R}_4^1 = 0$

Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia



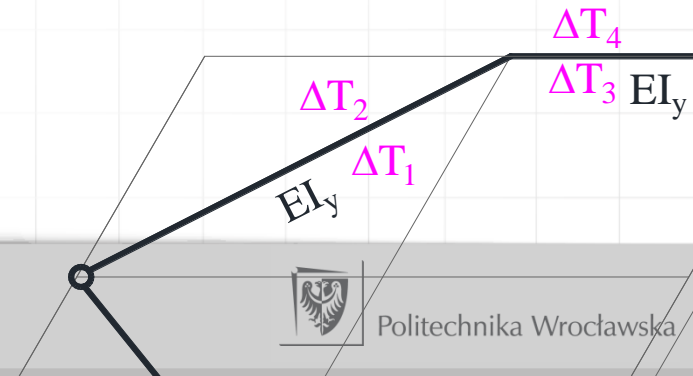
Wykresy sił przekrojowych od siły jednostkowej na kierunku szukanego przemieszczenia: a) momenty zginające, b) momenty skręcające, c) siły tnące

PRZEMIESZCZENIE OD ZMIAN TEMPERATURY



$$\Delta_{\alpha T} = \int \frac{\bar{M}_y^\alpha M_y^T}{EI_y} dx + \int \frac{\bar{M}_x^\alpha M_x^T}{GI_x} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^\alpha \cdot S_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^\alpha} = 0 +$$

$$+ \frac{1}{EI_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,2156 N \cdot m \cdot 4\sqrt{2} m \cdot \frac{2}{3} \cdot (-4\sqrt{2}) m + 0 + 0 + 0 = \frac{-55,6331 kN \cdot m^3}{EI_y} = \frac{-55,6331 kN \cdot m^3}{6067,139 kN \cdot m^2} = -0,0092 m = 0.$$



METODA PRZEMIESZCZEŃ

ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

Istotę metody przemieszczeń, najwygodniej jest przedstawić przez porównanie jej do metody sił, którą wcześniej już poznaliśmy i przy użyciu której jesteśmy w stanie policzyć przemieszczenia i rozkład sił wewnętrznych układów statycznie niewyznaczalnych.

Tok obliczeń matematycznych jest podobny, jednak sens fizyczny wielkości występujących w równaniach jest odmienny.

Podstawowe różnice pomiędzy tymi metodami zestawiono w poniższej tabeli.

Porównanie metody sił z metodą przemieszczeń

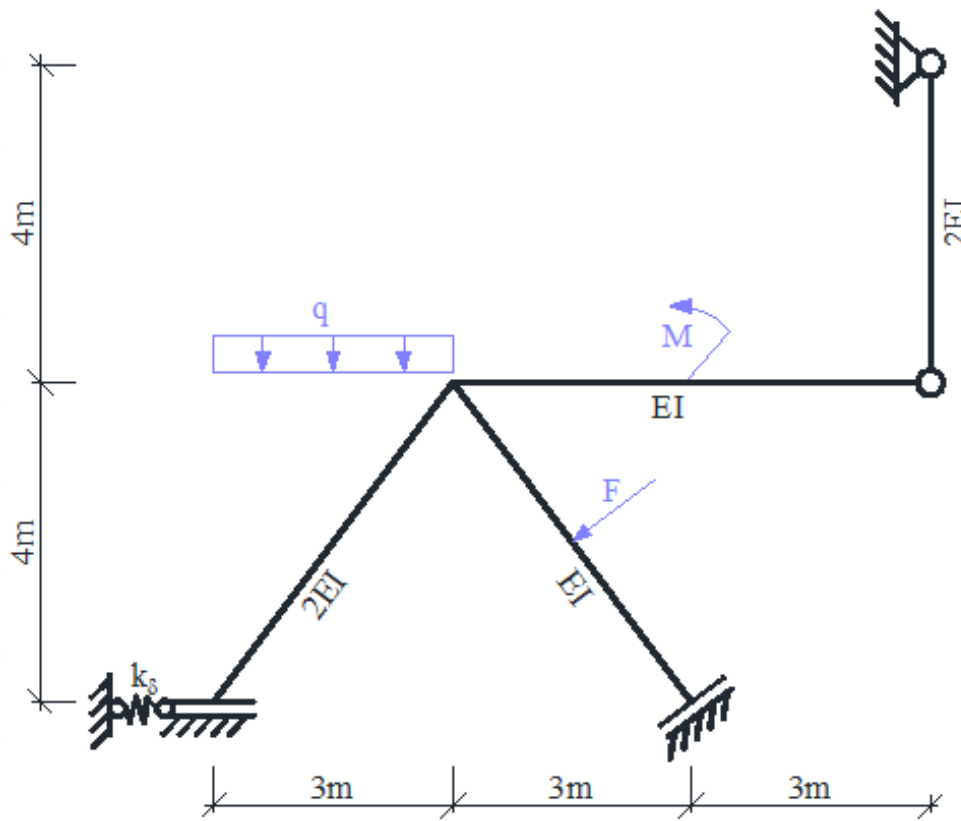
| | <i>Metoda sił</i> | <i>Metoda przemieszczeń</i> |
|----------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Niewiadomymi są: | nadliczbowe siły | przemieszczenia węzłów |
| Równania kanoniczne wyrażają: | przemieszczenia w miejscu odrzuconych więzów | reakcje w miejscu dołożonych więzów |
| O liczbie niewiadomych decyduje: | stopień statycznej niewyznaczalności (<i>SSN</i>). Jest to liczba więzów przesztynniających układ, które trzeba odrzucić. | stopień kinematycznej niewyznaczalności (<i>SKN</i>). Jest to liczba więzów, które trzeba wprowadzić aby układ usztynnić. |

METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia mechanicznego (obliczyć siły) przekrojowe i sporządzić ich wykresy.
- Zaprojektować wstępnie przekroje na zginanie.
- Rozwiązać ramę od zadanego obciążenia niemechanicznego.
- Przeprowadzić stosowne kontrole rozwiązania w obu przypadkach..

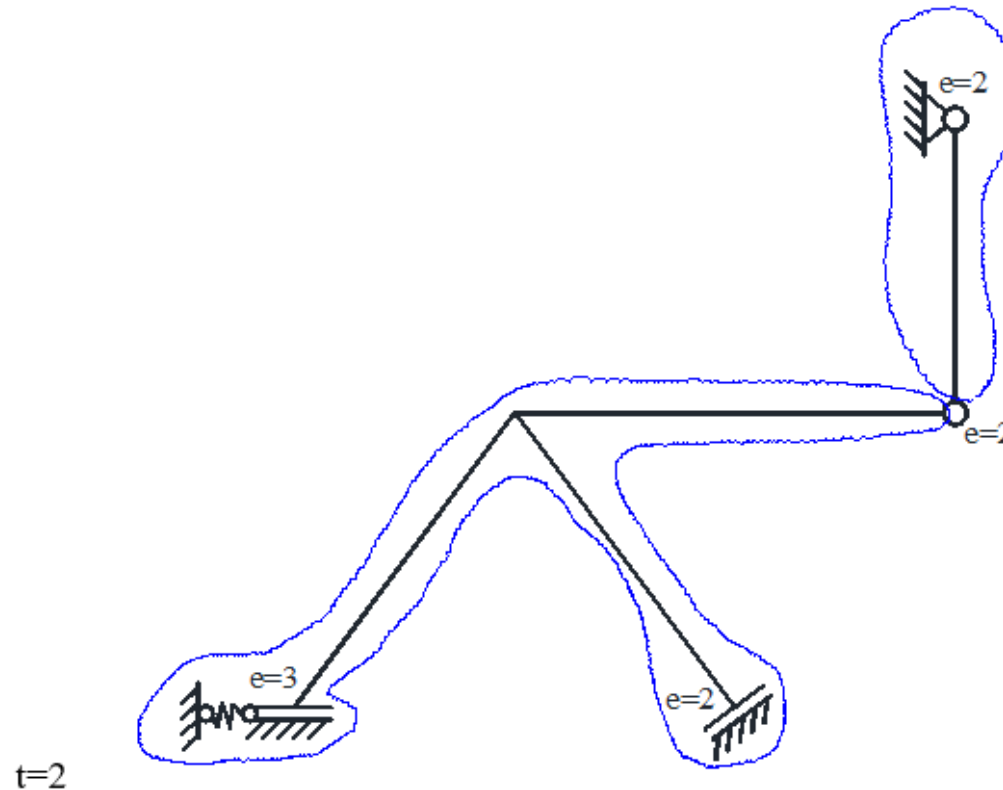
Dane do obliczeń: $F = 8 \text{ kN}$;
 $q = 4 \text{ kN/m}$; $M = 20 \text{ kN m}$;
 $k_{\delta} = 8 \text{ EI/m}^3$,



Rys. 1. Schemat statyczny

SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

Stopień statycznej niewyznaczalności



Tarcze i więzi

$$t = 2, e = 9, \quad n_h = 9 - 3 \cdot 2 = 3$$

Układ składa się z dwóch tarcz połączonych z ostoją siedmioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 6 niezbieżnych. Cała rama wraz z ostoją tworzy układ geometrycznie niezmienny

ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ






WZORY TRANSFORMACYJNE DLA PRĘTA PROSTEGO – teoria rzędu 1-go

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o, \quad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o, \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o$$

gdzie a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ są współczynnikami zależnymi od typu pręta.

Współczynniki te dla wybranych typów prętów o stałej sztywności zestawiono w tabeli poniżej

| i | j | a_{ij} | a_{ji} | $b_{ij} = b_{ji}$ | $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ | $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$ | $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---|----------|----------|-------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------------|
|  | | 4 | 4 | 2 | 6 | 6 | 12 |
|  | | 3 | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 |
|  | | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
|  | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

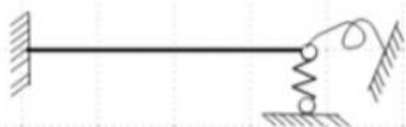
ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ



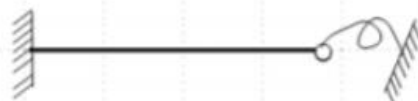
(sz-sz)



(sz-sz)



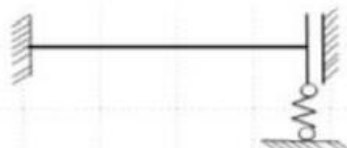
(sz-sz)



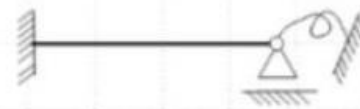
(sz-tyż)



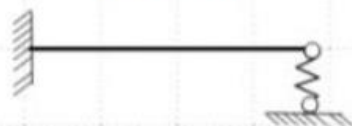
(sz-przeg) lub (sz-tyż)



(sz-sz)



(sz-sz)



(sz-przeg)



(sz-przeg)

ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

Stopień geometrycznej niewyznaczalności jest sumą niezależnych składowych przemieszczeń: obrotów węzłów n_φ i składowych przesunięć węzłów n_δ , które w pełni określają warunki brzegowe prętów na które został podzielony układ.

$$n_g = n_\varphi + n_\delta$$

n_φ - liczba niezależnych współrzędnych rotacyjnych (liczba niezależnych obrotów węzłów)

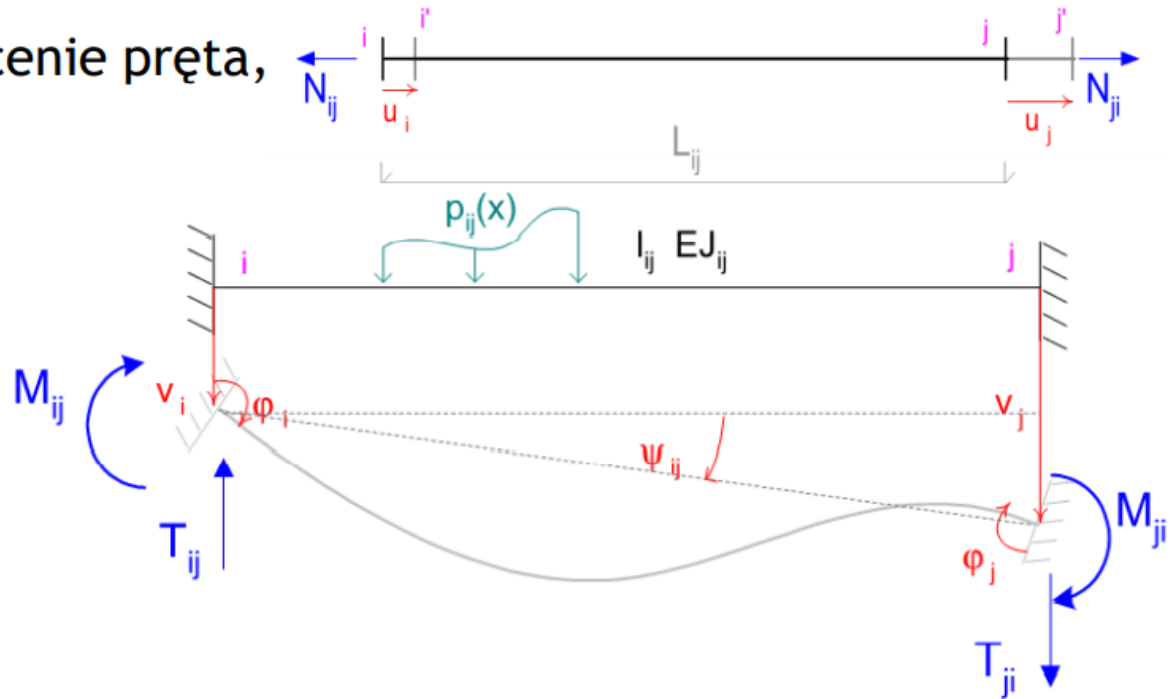
n_δ - liczba niezależnych współrzędnych translacyjnych (liczba niezależnych składowych przesuwów węzłów)

ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

Wzorami transformacyjnymi nazywa się zależności między momentami siłami brzegowymi a obrotami i przemieszczeniami brzegowymi pręta.

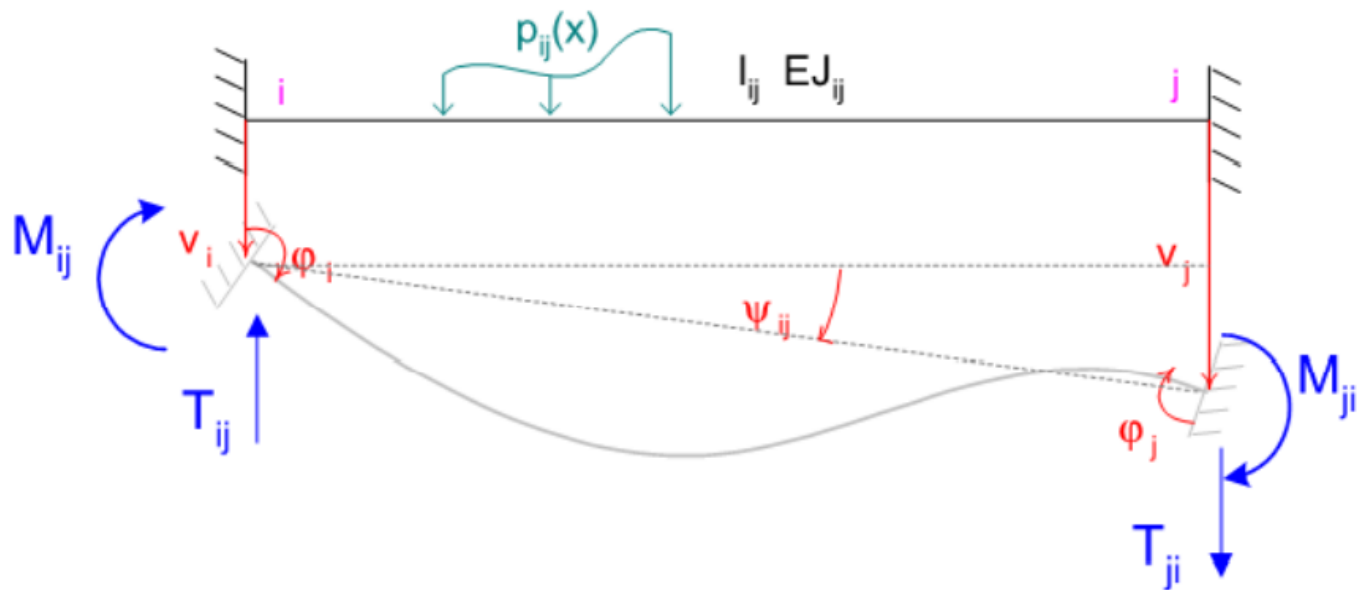
Każdy stan odkształcenia pręta wywołany obciążeniem może być rozłożony na:

- wydłużenie lub skrócenie pręta,
- odkształcenie wynikające ze zmiany odległości końców pręta w kierunku prostopadłym do jego osi,
- obroty węzłów.



ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

Momenty zginające i siły tnące wywołane są obrotami końców pręta φ_i , φ_j oraz przesunięciami prostopadłymi do osi pręta v_i oraz v_j . Ponieważ przemieszczenia wzdłuż osi pręta nie wywołują momentów zginających i sił tnących (tylko siły osiowe), stąd na rysunku przedstawiono pręt, którego końce doznają tylko obrotów i przesunięć prostopadłych do osi pręta.



PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE

WZORY TRANSFORMACYJNE DLA PRĘTA PROSTEGO – teoria rzędu 1-go

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o,$$


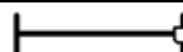
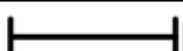
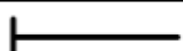
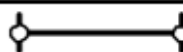
$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o,$$

$$V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o$$

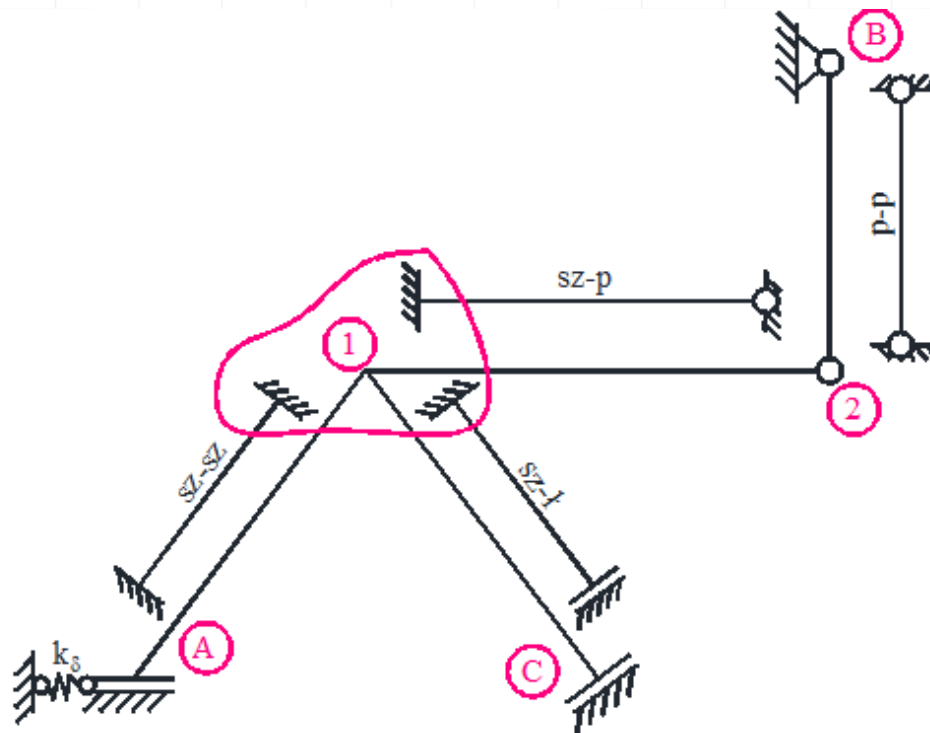
gdzie a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ są współczynnikami zależnymi od typu pręta.

Współczynniki te dla wybranych typów prętów o stałej sztywności zestawiono w tabeli poniżej

| i | j | a_{ij} | a_{ji} | $b_{ij} = b_{ji}$ | $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ | $c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$ | $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---|----------|----------|-------------------|----------------------------|----------------------------|-------------------------------------|
|  | | 4 | 4 | 2 | 6 | 6 | 12 |
|  | | 3 | 0 | 0 | 3 | 0 | 3 |
|  | | 1 | 1 | -1 | 0 | 0 | 0 |
|  | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
|  | | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |

PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW

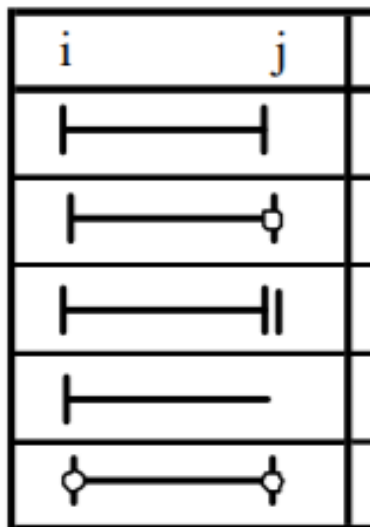
| i | j |
|------|------|
| — — | — — |
| — — | — —○ |
| — — | — — |
| — — | — — |
| ○— — | ○— — |



Rys. 3. Numeracja węzłów i typy prętów

Uwzględniając, że $\varphi_{1A} = \varphi_{1C} = \varphi_{12} = \varphi_1$, stwierdzono, że liczba stopni swobody obrotu węzłów $n_\varphi = 1$.

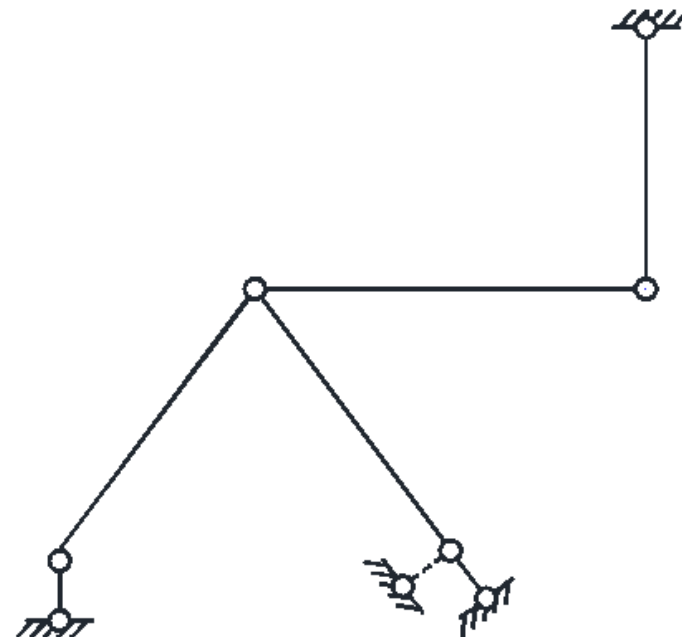
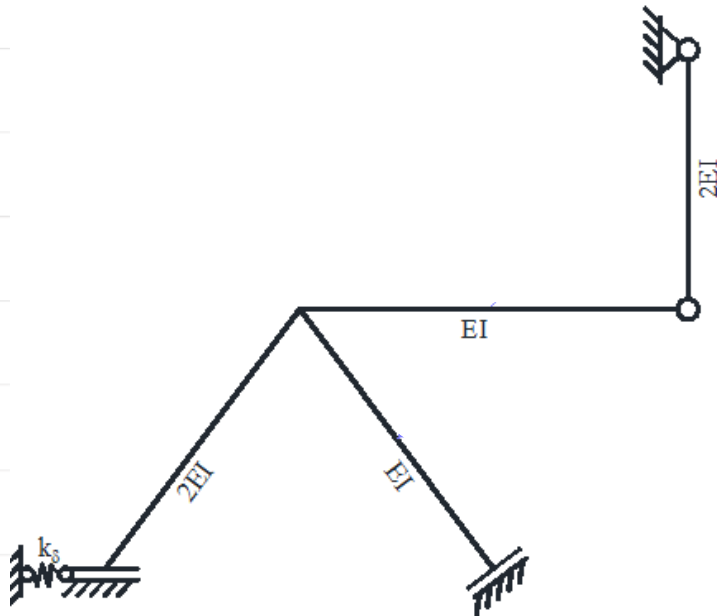
PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW



WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Do wyznaczenia liczby stopni swobody przesuwu węzłów budowany jest model przegubowy. Należy:

- zwolnić więzi przenoszące momenty
- pominąć więzi sprężyste
- należy odebrać stopnie swobody przesuwu prętom typu wspornik, oraz prętom o lewym końcu utwierdzonym, a prawym utwierdzonym z przesuwarem poprzecznym (należy dodać więź oznaczoną linią przerywaną)



Rys. 4. Model przegubowy

WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Oszacowanie liczby stopni swobody przesuwności węzłów

$$n_s \geq 2 \cdot w - p - r =$$

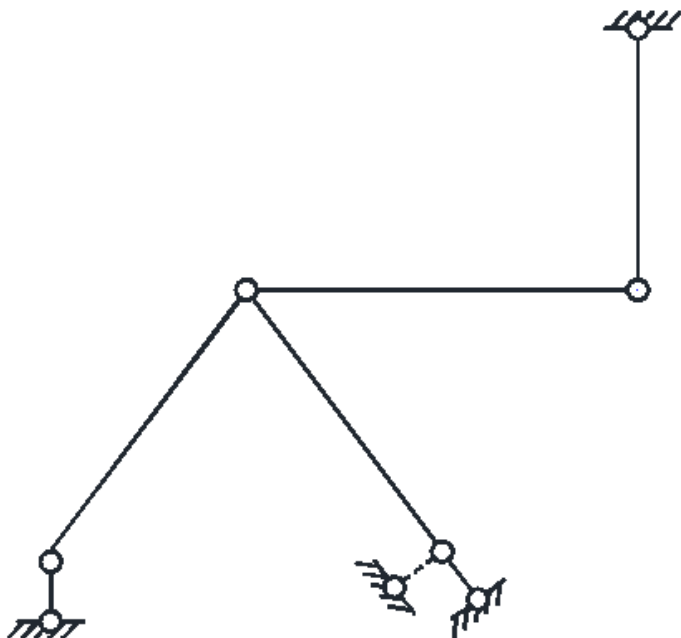
gdzie: $w =$ - liczba węzłów modelu,

$p =$ - liczba prętów w modelu,

$r =$ - liczba więzi podporowych modelu.

Oznacza to, że aby układ o węzłach przegubowych

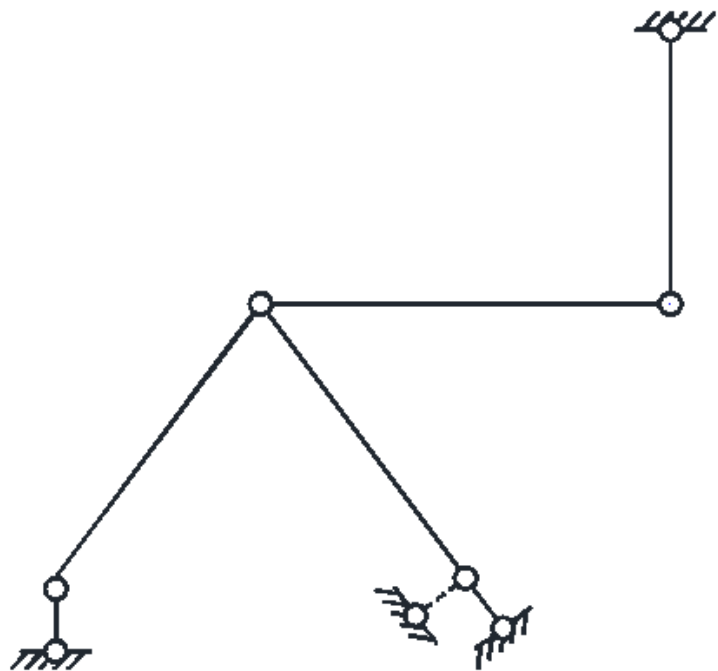
był geometrycznie niezmienny należy dodać co najmniej dwie więzi.



Rys. 4. Model przegubowy

WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Dopiero analiza kinematyczna potwierdza, że model przegubowy po dodaniu 2 więzi jest geometrycznie niezmienny, tak więc stopień swobody przesuwności węzłów $n_{\delta} =$



Rys. 5. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

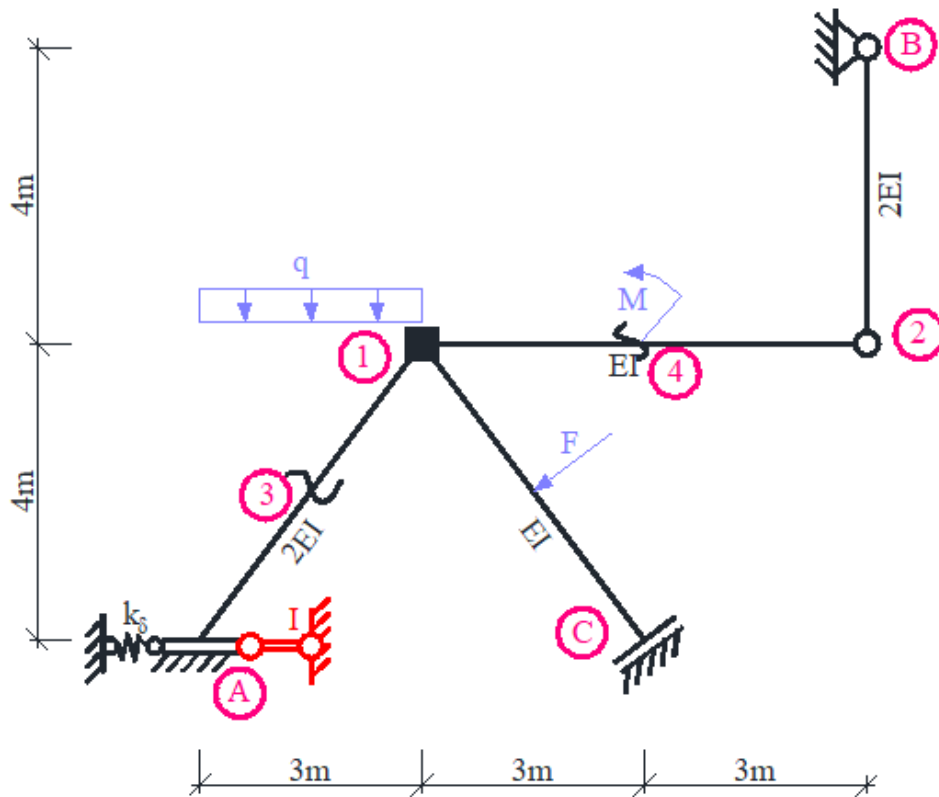
STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIETYCZALNOŚCI UKŁADU

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu wynosi:

$$n_g = n_\varphi + n_\delta = \dots + \dots = \dots$$

UKŁAD PODSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez dodanie n_ϕ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych (w tym przykładzie 2 więzi rotacyjne i 2 więzi translacyjne). Układ podstawowy metody przemieszczeń, pokazany na rysunku jest geometrycznie wyznaczalny.



$$n_g = n_\phi + n_\delta =$$

Rys. 6. Układ podstawowy metody przemieszczeń

UKŁAD PODSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ

