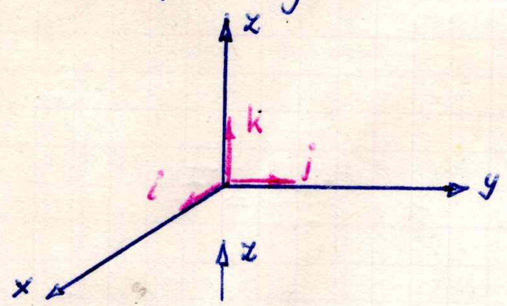
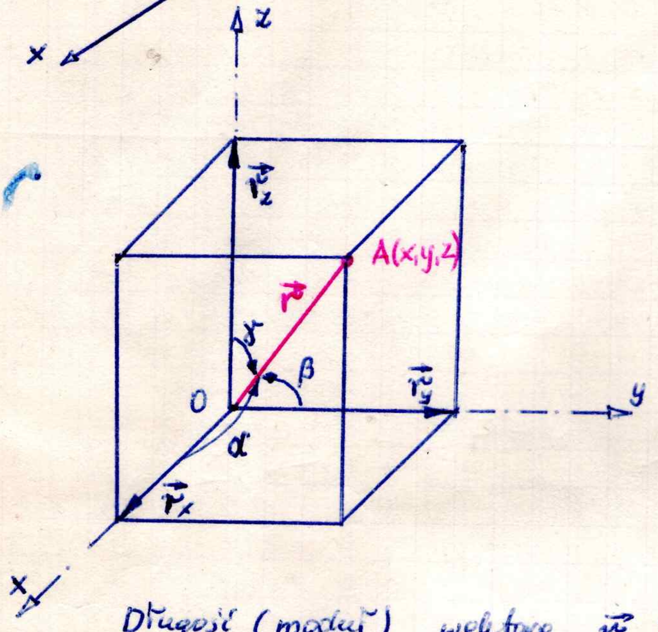
2. Siła w przestrzeni (wektor związany)

2.1. Opis siły



W trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej obieramy układ odniesienia jako ortokartezjański, prawoskrętny układ współrzędnych x, y, z z bazą wersorową i, j, k (bezwymiarową).



Położenie punktu A w przestrzeni można opisać za pomocą trzech współrzędnych (x, y, z) lub za pomocą wektora wodzącego $\vec{r} = \vec{OA} = \vec{r}(r_x, r_y, r_z)$ o współrzędnych (r_x, r_y, r_z) zwanych miarami rzutów wektora $\vec{r}$ na osie układu, przy czym

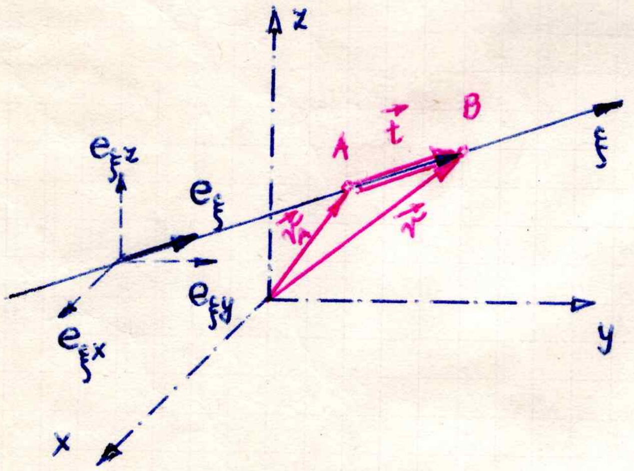
$$r_x = x, \quad r_y = y, \quad r_z = z.$$

Rzutami (składowe) wektora $\vec{r}$ na osie układu są wektory

$$\vec{r}_x = r_x i, \quad \vec{r}_y = r_y j, \quad \vec{r}_z = r_z k$$

Długość (moduł) wektora $\vec{r}$ jest równa $|\vec{r}| = r = \sqrt{r_x^2 + r_y^2 + r_z^2} \geq 0$, a jego kierunek jest określony za pomocą kątów α, β, γ, przy czym

$\cos\alpha = r_x/r$, $\cos\beta = r_y/r$, $\cos\gamma = r_z/r$ i wtedy $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.



Dowolna oś ξ (prosta skierowana) może być opisana w przestrzeni przez punkt lokacyjny A i wersor $\vec{e}_\xi$ o współrzędnych $\vec{e}_\xi(e_{\xi x}, e_{\xi y}, e_{\xi z})$

$e_\xi \cdot \cos(x,\xi) = 1$

$$e_{\xi x} = \cos(x,\xi); \quad e_{\xi y} = \cos(y,\xi); \quad e_{\xi z} = \cos(z,\xi).$$

Wektor wodzący punktu bieżącego B można zapisać w postaci

$$\vec{r} = \vec{r}_A + \vec{t} = \vec{r}_A + t \cdot \vec{e}_\xi$$

Po przejściu z zapisu wektorowego do analitycznego otrzymamy parametryczne równanie osi ξ, gdzie t jest parametrem skalarnym (ma wymiar długości).

$$x = x_A + t\cos(x,\xi)$$
$$y = y_A + t\cos(y,\xi)$$
$$z = z_A + t\cos(z,\xi)$$

Punkt lokacyjny A jest dowolnym punktem na osi ξ i może być obrany tak, aby jedna ze współrzędnych była równa zeru.

Obierzmy nowy punkt lokacyjny o współrzędnych (x_1, y_1, z_1). Jeżeli np. $\cos(x,\xi) \neq 0$ to można przyjąć $x_1 = x_A + t_1\cos(x,\xi) = 0$, stąd

$t_1 = -x_A / \cos(x,\xi)$, a więc $y_1 = y_A + t_1\cos(y,\xi)$; $z_1 = z_A + t_1\cos(z,\xi)$.

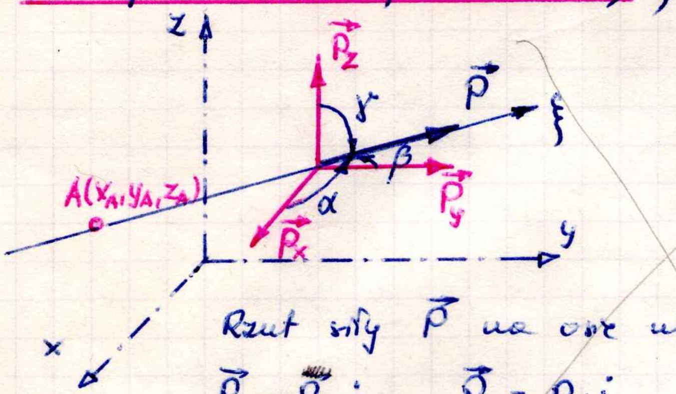
Równanie osi ξ przyjmuje nową postać

$$x = t\cos(x,\xi), \quad y = y_1 + t\cos(y,\xi), \quad z = z_1 + t\cos(z,\xi),$$

Uwaga: Punkt o współrzędnych $(0, y, z)$ jest punktem przebicia osią ξ płaszczyzny y, z.

Analogicznie można wyeliminować y_1 lub z_1 pozostawiając odpowiednio x_1, z_1 lub x_1, y_1.

Siła jest wielkością wektorową, przy czym wektor siły jest wektorem osiowym, tzn. związanym z określoną linią działania (osią lub prostą). Siła jest określona, jeśli znane są współrzędne siły P_x, P_y, P_z oraz współrzędne x_A, y_A, z_A dowolnego punktu lokacyjnego na osi działania tej siły (razem 6 informacji)



Rzut siły $\vec{P}$ na osie układu odniesienia:

$$\vec{P_x} = P_x \cdot i, \quad \vec{P_y} = P_y \cdot j, \quad \vec{P_z} = P_z \cdot k.$$

Moduł siły $|\vec{P}| = P = \sqrt{P_x^2 + P_y^2 + P_z^2}$.

Cosinusy kierunkowe:

$$\cos\alpha = P_x / P = p_x, \quad \cos\beta = P_y / P = p_y, \quad \cos\gamma = P_z / P = p_z$$

Równanie parametryczne osi działania siły

$$x = x_A + t \cdot p_x$$
$$y = y_A + t \cdot p_y$$
$$z = z_A + t \cdot p_z.$$

Trzy współrzędne punktu lokacyjnego można zredukować do dwóch, a tym samym sześć informacji o sile zredukować do pięciu (sześć informacji potrzeba do określenia wektora nieswobodnego, o określonym punkcie zaczepienia).

PRZYKŁAD!

Dane: $\vec{P}(3,4,5)\,N$; $A(1,-2,4)$

Wektorowe określenie siły $\vec{P} = 3i + 4j + 5k$. Moduł siły $P = (3^2+4^2+5^2)^{1/2} = 7.071\,N$

Cosinusy kierunkowe
$p_x = 3/7.071 = 0.4243 \rightarrow \alpha = 64,896°$
$p_y = 4/7.071 = 0.5657 \rightarrow \beta = 55,550°$
$p_z = 5/7.071 = 0.7071 \rightarrow \gamma = 45°$

Oś działania siły

$$x = 1 + 0.4243\,t \; ; \; y = -2 + 0.5657\,t \; ; \; z = 4 + 0.7071\,t$$

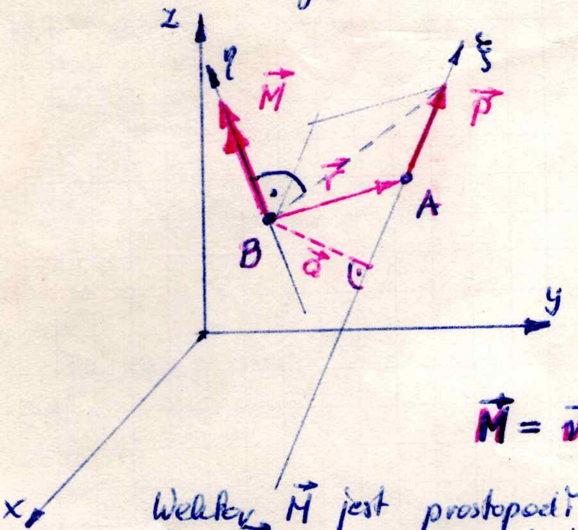
Redukcja współrzędnych punktu lokacyjnego (np. redukcja wsp. z)

$$z_1 = 4 + 0.7071\,t = 0 \rightarrow t = -4/0.7071 = -5,6568$$
$$x_1 = 1 + 0.4243\cdot(-5.6568) = -1.400 \; ; \; y_1 = -2 + 0.5697(-5.6568) = -5.200$$

Nowe równanie osi $x = -1.4 + 0.4243t$; $y = -5.2 + 0.5657t$; $z = 0.7071t$.

2.3. MOMENT SIŁY W PRZESTRZENI

• Moment względem punktu



Dana jest siła $\vec{P}$ (a więc także dowolny punkt leżący A na osi działania siły) oraz punkt B poza tą osią.

Momentem statycznym siły P (jako wektora związanego) względem punktu B nazywamy iloczyn wektorowy promienia wektora $\vec{r} = \vec{r}_{BA}$ (o początku w B i końcu w początku wektora $\vec{P}$) przez wektor $\vec{P}$.

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{P} \stackrel{def}{=} \vec{M}_B$$

Wektor $\vec{M}$ jest prostopadły do płaszczyzny wyznaczonej przez wektory $\vec{r}$ i $\vec{P}$ a jego zwrot wynika z reguły śruby prawoskrętnej. Iloczyn wektorowy nie jest komutatywny

$$\vec{r} \times \vec{P} = \vec{M} \quad ; \quad \vec{P} \times \vec{r} = -\vec{M}$$

Nie jest to wektor swobodny.
~~Jest to wektor (uswobodniony)~~ jest zaczepiony w punkcie B. Moduł wektora momentu $|\vec{M}| = M = rP\sin\varphi = Pa = |\vec{r}||\vec{P}| \cdot \sin(r,P)$ (siła razy ramię), gdzie a jest odległością punktu B od osi ξ (ramieniem siły względem punktu B). Moment nie zależy od położenia punktu leżącego A.

Jeżeli

$$\vec{P} = P_x i + P_y j + P_z k \quad \text{oraz} \quad \vec{r} = r_x i + r_y j + r_z k, \text{ to}$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{P} = r_x P_x\, i \times i + r_x P_y\, i \times j + r_x P_z\, i \times k + r_y P_x\, j \times i + r_y P_y\, j \times j +$$

$$+ r_y P_z\, j \times k + r_z P_x\, k \times i + r_z P_y\, k \times j + r_z P_z\, k \times k =$$

$$= (r_y P_z - r_z P_y) i + (r_z P_x - r_x P_z) j + (r_x P_y - r_y P_x) k =$$

$$= M_x i + M_y j + M_z k = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix}.$$

$$M_x = \begin{vmatrix} r_y & r_z \\ P_y & P_z \end{vmatrix}; \quad M_y = \begin{vmatrix} r_z & r_x \\ P_z & P_x \end{vmatrix}; \quad M_z = \begin{vmatrix} r_x & r_y \\ P_x & P_y \end{vmatrix}$$

gdzie M_x, M_y, M_z są współrzędnymi wektora momentu

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2}.$$

Cosinusy kierunkowe

$$\cos(x,\eta) = M_x / M = m_x \quad ; \cos(y,\eta) = M_y / M = m_y \; ; \cos(z,\eta) = M_z / M = m_z$$

Oś działania momentu

$$x = x_B + t m_x \quad ; \quad y = y_B + t m_y \quad ; \quad z = z_B + t m_z.$$

Z uwagi na to, że $\vec{P} \perp M$, iloczyn $\vec{P} \cdot \vec{M} = 0$.

2.4. PARA SIŁ

Parą sił nazywamy dwie siły równoległe o równych modułach i przeciwnych zwrotach (np. $\vec{a}$ i $-\vec{a}$)

$$|\vec{P}_1| = |\vec{P}_2| = P \to P_{1x} = -P_{2x}\ ;\ P_{1y} = -P_{2y}\ ;\ P_{1z} = -P_{2z}$$

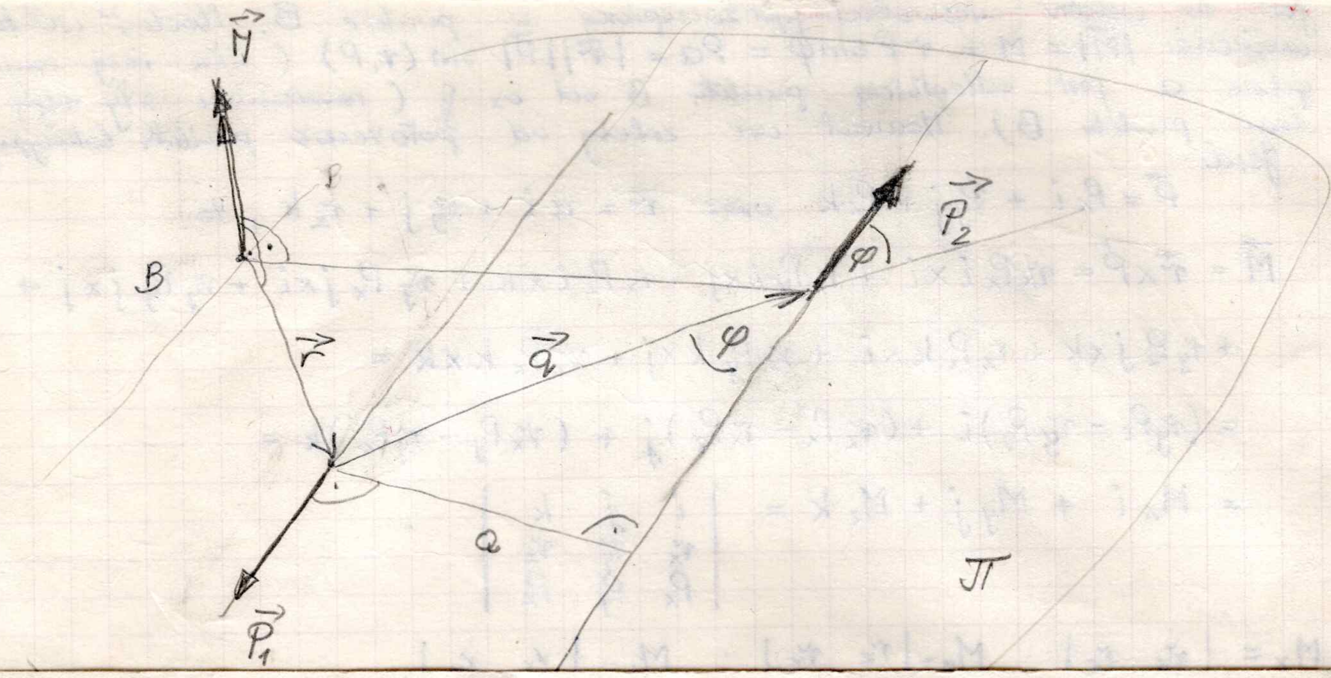
Linie działania tych sił wyznaczają płaszczyznę π, a wektor momentu względem B jest prostopadły do π.

$$\vec{M} = \vec{r}\times\vec{P}_1 + (\vec{r}+\vec{q})\times\vec{P}_2 = \cancel{\vec{r}\times\vec{P}_1} + \cancel{\vec{r}\times\vec{P}_2} + \vec{q}\times\vec{P}_2$$

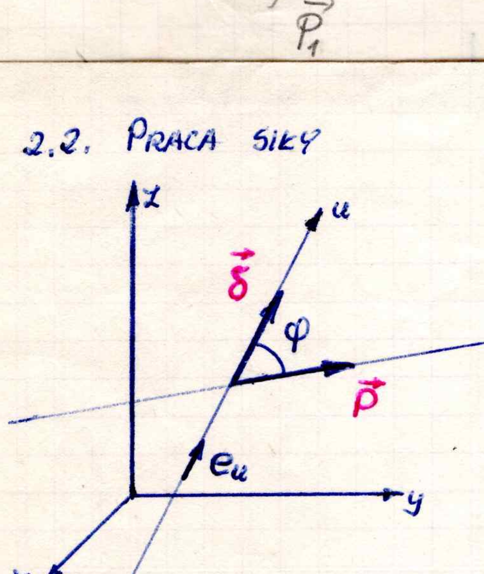
$$|\vec{M}| = M = Pq\sin\varphi = \underline{P\cdot a}$$

Moment pary sił nie zależy od położenia bieguna momentu, a więc wektor momentu pary sił jest wektorem swobodnym.

Wartość momentu pary sił jest równa iloczynowi modułu siły przez ramię pary. Moment pary wektorów (moduł pary) równy jest polu równoległoboku zbudowanego na wektorach pary.



2.2. PRACA SIŁY



Praca siły $\vec{P}$ na przemieszczeniu $\vec{\delta}$ jest równa iloczynowi skalarowemu wektorów $\vec{P}$ i $\vec{\delta}$; wynik skalarem

$$L = \vec{P}\cdot\vec{\delta} = P\delta\cos\varphi$$

Jeśli $\vec{P} = P_x i + P_y j + P_z k$ oraz

$\vec{\delta} = \delta_x i + \delta_y j + \delta_z k$ to

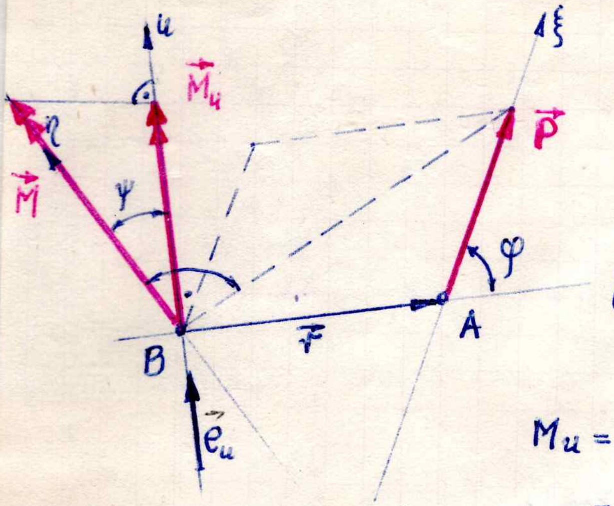
$i\cdot j = 0$ itd

$i\cdot i = j\cdot j = k\cdot k = 1$

$$L = \vec{P}\cdot\vec{\delta} = P_x\delta_x + P_y\delta_y + P_z\delta_z\ .$$

Iloczyn skalarowy jest komutatywny $\vec{P}\cdot\vec{\delta} = \vec{\delta}\cdot\vec{P}$

• Moment względem osi



Przeprowadźmy przez punkt B dowolną oś u o kierunku określonym wersorem $\vec{e}_u$, tworzącą z osią η kąt ψ.

Rzut momentu $\vec{M}$ na oś u, czyli wektor $\vec{M}_u$ nazywamy momentem siły $\vec{P}$ względem osi u.

(Punkt B może być dowolnie obrany na osi u)

Miara tego rzutu wynosi

$$M_u = M\cos\psi = \vec{M}\cdot\vec{e}_u = M_x e_{ux} + M_y e_{uy} + M_z e_{uz} =$$

$$= \begin{vmatrix} e_{ux} & e_{uy} & e_{uz} \\ r_x & r_y & r_z \\ P_x & P_y & P_z \end{vmatrix} = (\vec{r}\times\vec{P})\cdot e_u$$

verte

Jest to iloczyn mieszany wektorów $\vec{r}, \vec{P}, \vec{e}_u$.

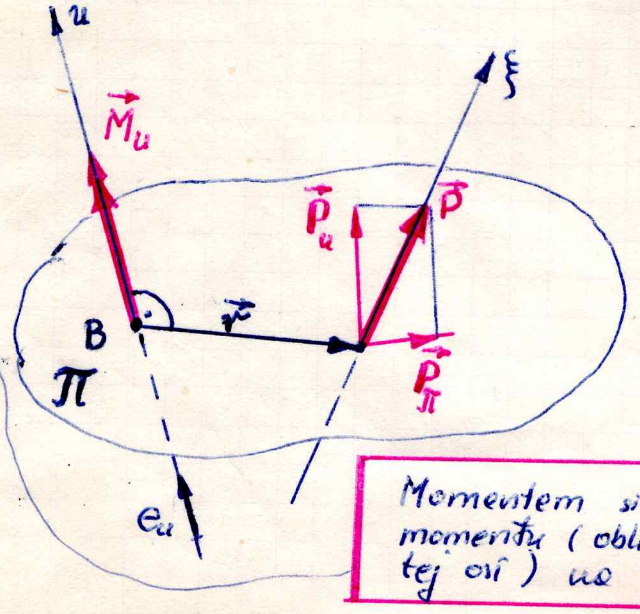
- Jeżeli $u \parallel \xi$, to $e_{ux} : e_{uy} : e_{uz} = P_x : P_y : P_z$, a więc $M_u = 0$ (wyznacznik równa się zero, gdy istnieją dwa wiersze proporcjonalne do siebie).
- Jeżeli u przecina ξ, to dla dowolnych A i B wektor $\vec{M}$ jest ⊥ do e_u, a tym samym iloczyn skalarowy $\vec{M}\cdot\vec{e}_u = 0$

(Inaczej: punkt B dowolnym punktem osi u, punkt A wybrany szczególnie jako punkt przecięcia osi u i ξ; wtedy także znika wyznacznik, bo $e_{ux} : e_{uy} : e_{uz} = r_x : r_y : r_z$.

Najprościej: Jeżeli A i B dowolne, to możemy przyjąć $A \equiv B$ jako punkt przecięcia prostych u i ξ, wtedy $r_x = r_y = r_z = 0$ i wyznacznik znika.

Wniosek:

Moment siły względem osi przecinającej linię działania siły lub względem osi równoległej do linii działania siły, jest równy zeru.



Dana jest siła $\vec{P}$ na osi ξ oraz oś u nierównoległa do osi ξ oraz nie przecinająca się z nią. Obieramy płaszczyznę $\pi \perp u$ i znajdujemy punkt przebicia u z π, punkt B. Siłę $\vec{P}$ zastępujemy siłą $\vec{P}_u \parallel u$ oraz siłę $\vec{P}_\pi$ będącą rzutem $\vec{P}$ na π. Oczywiste jest, że $\vec{P}_u \perp \vec{P}_\pi$ oraz $\vec{P} = \vec{P}_u + \vec{P}_\pi$

$$M_u = (\vec{r}\times\vec{P})\vec{e}_u = [\vec{r}\times(\vec{P}_u+\vec{P}_\pi)]\vec{e}_u =$$

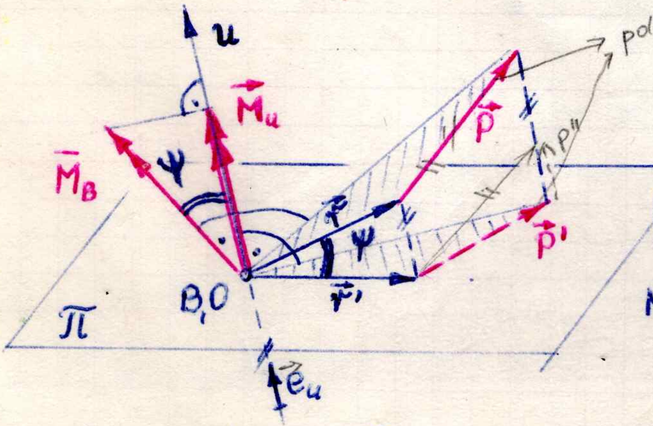
$$= \cancel{(\vec{r}\times\vec{P}_u)\vec{e}_u} + \underline{(\vec{r}\times\vec{P}_\pi)\vec{e}_u}$$

Momentem siły względem osi nazywamy rzut wektora momentu (obliczonego względem dowolnego punktu tej osi) na tę oś.

1

Moment siły względem osi jest równy momentowi rzutu siły na płaszczyznę ⊥ do osi, względem punktu przebicia płaszczyzny przez oś.

pole zrzutowane na inną płaszczyznę [illegible] z $\cos\psi$



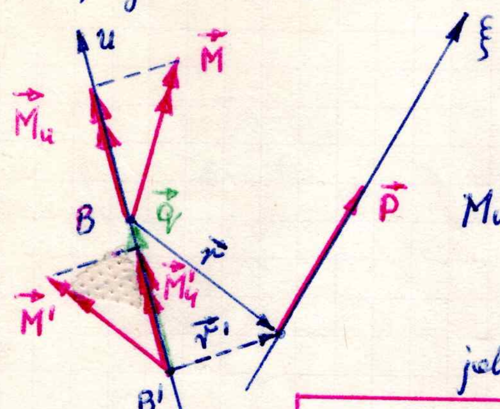
$$M_u = \cancel{|\vec{M}_u|} = |\vec{M}_B|\cos\psi = \vec{M}_B \cdot \vec{e}_u$$

Rzut na daną oś momentu obliczonego względem dowolnego punktu tej osi jest stały.

$$M_u = |\vec{M}_B|\cos\psi = |\vec{r} \times \vec{P}|\cos\psi = |\vec{r}\,' \times \vec{P}'| \quad \text{cbdo.}$$

$$= |[(\vec{r}\,'\cos\psi) \times (\vec{P}' + \vec{P}'')]| = |\vec{r}\,' \times \vec{P}' + \underbrace{\vec{r}\,' \times \vec{P}''}_{=0}| = |\vec{r}\,' \times \vec{P}'|$$

Dana jest siła $\vec{P}$ na osi ξ oraz oś u nierównoległa i nieprzecinająca się z osią ξ. Na osi u obieramy punkty B i B'. Momenty siły $\vec{P}$ względem tych punktów są ogólnie różne.



$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{P}, \quad \vec{M}' = \vec{r}\,' \times \vec{P}, \quad \vec{M} \neq \vec{M}'$$

Równocześnie

$$M_u' = (\vec{r}\,' \times \vec{P}) \cdot \vec{e}_u = [(\vec{q} + \vec{r}) \times \vec{P}] \cdot \vec{e}_u =$$

$$= \cancel{(\vec{q} \times \vec{P}) \cdot \vec{e}_u} + (\vec{r} \times \vec{P}) \cdot \vec{e}_u = M_u$$

jako, że $q_x : q_y : q_z = e_{ux} : e_{uy} : e_{uz}$

Zmiana położenia bieguna momentu na osi nie powoduje zmiany wartości momentu siły względem tej osi (chociaż momenty względem różnych biegunów są różne!)

Stąd wniosek, że wektor momentu siły względem osi jest wektorem osiowym (liniowym).