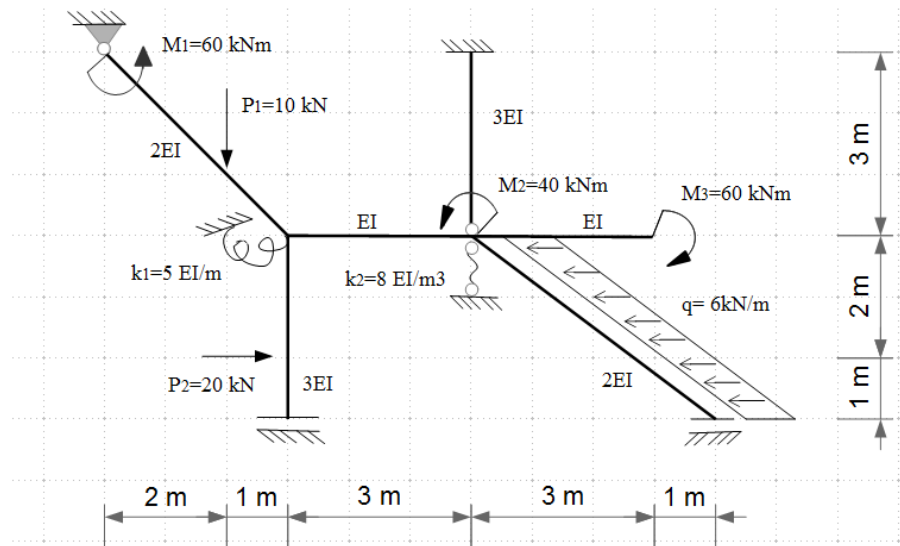


ZADANIE 1.

Dla ramy hiperstatycznej o schemacie i obciążeniu jak na rysunku należy:

- 1) Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- 2) Stosując metodę przemieszczeń wyznaczyć siły przekrojowe i reakcje.
- 3) Przeprowadzić kontrolę rozwiązania (jego statyczną i kinematyczną dopuszczalność).



Rys.1.

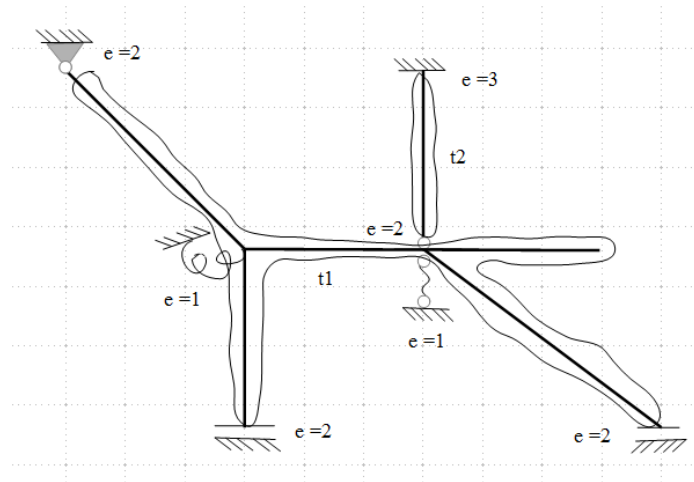
Dane:

- $EA = \infty$ / pręty nieściśliwe osiowo/

Szukane:

- Wykresy sił przekrojowych w ramie z Rys.1 wywołane obciążeniem mechanicznym M^F ; V^F ; N^F

I. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIETYCZNIENNOŚCI (GN) I STATYCZNEJ WYNYCZALNOŚCI (SW) ANALIZOWANEGO UKŁADU



Rys.2.

- sprawdzenie warunku ilościowego geometrycznej niezmienności: $e \geq 3t$

$e = 13$ – liczba więzi zewnętrznych i wewnętrznych

$t = 2$ – liczba tarcz tworzących graf otwarty

$13 \neq 3 \cdot 2$; ($e > 3t$)

- ✓ Warunek ilościowy GN spełniony
- ✓ Układ jest SN nietycznialny $e > 3t$, stopień statycznej nietycznialności wynosi $n_h = e - 3t = 7$

- sprawdzenie warunku jakościowego geometrycznej niezmienności:

Tarcza t1 z ostoją połączona jest ośmioma więziami w tym trzema niezbieżnymi więziami na mocy twierdzenia o dwóch tarczach pozbawiona jest prawidłowo trzech stopni swobody stąd jest nieruchoma ($t1 + t0 = t0$). Tarcza t2 z tarczą nieruchomą połączona jest pięcioma więziami w tym trzema niezbieżnymi więziami, stąd na mocy twierdzenia o dwóch tarczach tworzy tarczę nieruchomą /prawidłowo odebrane są trzy stopnie swobody/ ($t2 + t0 = t0$). Cały układ jest geometrycznie niezmienny.

- ✓ Warunek jakościowy GN spełniony

Wniosek:

Wobec spełnionego warunku ilościowego i jakościowego geometrycznej niezmienności układ jest **geometrycznie niezmienny (GN)**. Układ jest **statycznie nietycznialny (SN)** o stopniu statycznej nietycznialności $n_h = 7$ (układ hiperstatyczny)

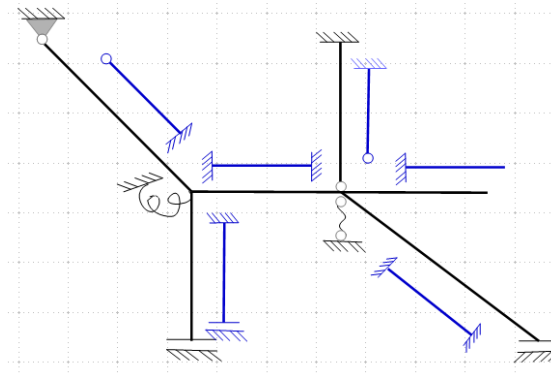
Ponieważ analizowany układ jest statycznie nietycznialny (SN) nie można wyznaczyć reakcji i sił przekrojowych wykorzystując jedynie warunki równowagi płaskiego układu sił. Aby wyznaczyć reakcje i siły przekrojowe w zadanej ramie zastosowana zostanie **METODA PRZEMIESZCZEŃ** jedna z metod rozwiązywania układów GN i SN.

II. ROZWIĄZANIE UKŁADU GN I SN METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

1. Podział układu na typy prętów

UWAGA!

Należy przyporządkować typy prętów w schemacie tak, by układ był nieprzesuwany ($n_\delta = 0$) oraz by otrzymać w zadaniu jak najmniej niewiadomych geometrycznych (n_g)



Rys.3.

2. Określenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności ramy $n_g = n_\varphi + n_\delta$

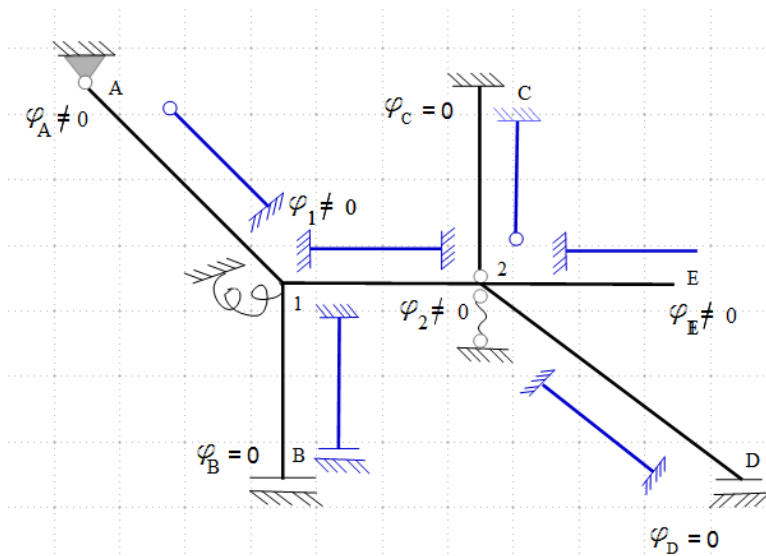
2.1. określenie n_φ

n_φ – liczba niezależnych obrotów węzłów w pełni określająca obroty brzegowe wszystkich węzłów

$\varphi_A \neq 0, \varphi_E \neq 0$ -
 -obroty tych węzłów
 uwzględnione są we wzorach transformacyjnych przyjętych typów prętów (nie są traktowane jako niewiadome)

$\varphi_1 \neq 0, \varphi_2 \neq 0$ -
 -niewiadome geometryczne

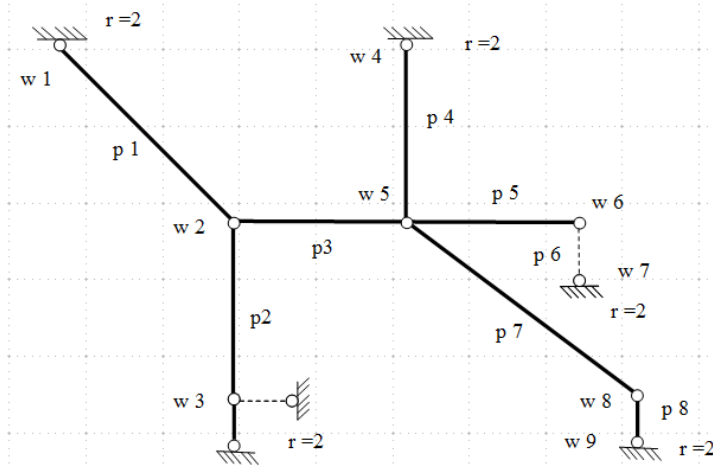
$$n_\varphi = 2$$



Rys.4.

2.2. określenie n_δ

n_δ – liczba niezależnych przesuwów węzłów w pełni określająca przesunięcia brzegowe wszystkich węzłów (stopień geometrycznej zmienności ustroju przekształconego w łańcuch kinematyczny /w schemat przegubowy/).



Rys.5. Schemat przegubowy

Oszacowanie:

$$n_{\delta} \geq 2w - p - r$$

$$p = 8, w = 9, r = 10$$

$$n_{\delta} \geq 0 - \text{układ może być nieprzesuwny}$$

Analiza kinematyczna:

Na mocy twierdzenia o 3 tarczach mamy:

$$p_1 + p_2 + t_0 = t_0,$$

$$t_0 + p_3 + p_4 = t_0,$$

$$t_0 + p_5 + p_6 = t_0,$$

$$t_0 + p_7 + p_8 = t_0$$

Układ przegubowy jest GN

Z analizy kinematycznej układu przegubowego wynika, że jest on nieprzesuwny stąd:

$$n_{\delta} = 0$$

WNIOSEK

Stożek geometrycznej niewyznaczalności wynosi:

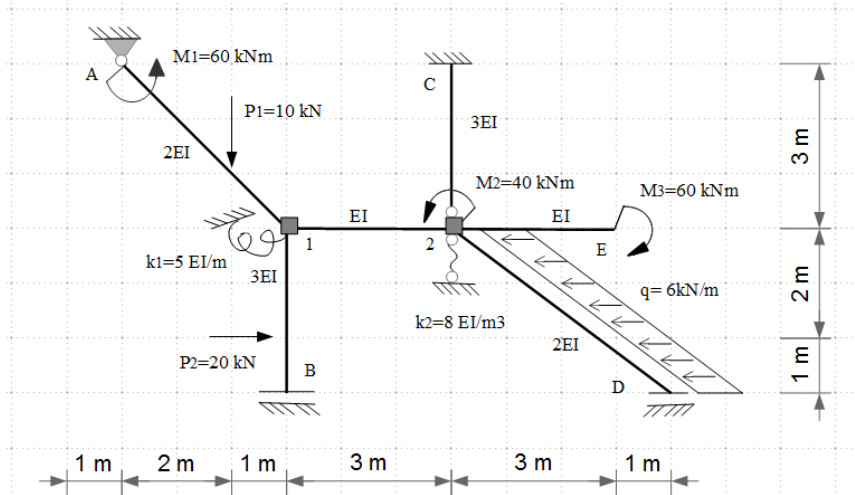
$$n_g = n_{\varphi} + n_{\delta} = 2 + 0 = 2$$

-Analizowana rama przy wybranych typach prętów jest dwukrotnie **geometrycznie niewyznaczalna**, niewiadomymi są kąty obrotu węzłów, brak niewiadomych przesuwów węzłów.

Niewiadome geometryczne: $\varphi_1 = ?$ - obrót węzła 1, $\varphi_2 = ?$ - obrót węzła 2

3. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Układ podstawowy metody przemieszczeń tworzy się poprzez nałożenie w układzie zadanym dodatkowych więzi (więzi fikcyjnych) blokujących niewiadome przemieszczenia.



Rys.6. Przyjęty schemat podstawowy metody przemieszczeń

4. Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń – postać ogólna

(obliczenie niewiadomych geometrycznych - φ_1, φ_2)

Równania z których wyznacza się wartości niewiadomych przemieszczeń (φ_1, φ_2) wynikają z postulatu zerowania się w każdej dodanej więzi fikcyjnej reakcji (reakcji momentowej), wywołanej obrotem dodanych więzi i zadaniem obciążeniem. Stąd dla każdej dodanej więzi fikcyjnej buduje się funkcję na wartość reakcji w niej powstającą i przyrównuje się tę funkcję do zera.

Ogólna postać równania metody przemieszczeń (liczba równań wynosi n_g):

$$K_i = \sum_j^{n_g} k_{ij} \varphi_j + k_{i0} = 0, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, n_g\}$$

k_{ij} – reakcja w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „ i ”-tej więzi fikcyjnej wywołana jednostkowym (1rad) prawoskrętnym obrotem „ j ”-tej więzi fikcyjnej.

k_{i0} – reakcja w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „ i ”-tej więzi fikcyjnej wywołana obciążeniem zadaniem

φ_j - przemieszczenie w układzie zadaniem w miejscu i na kierunku „ j ”-tej więzi fikcyjnej (obrót węzła „ j ” w układzie zadaniem SN)

K_i – reakcja w układzie zadaniem w miejscu i na kierunku „ i ”-tej więzi fikcyjnej

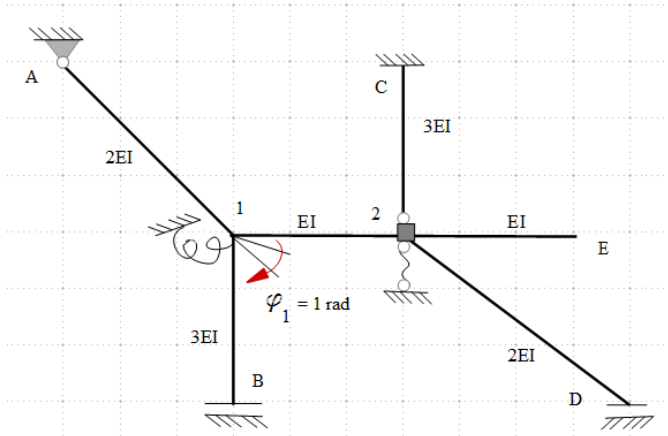
Przy $n_g = n_\varphi + n_\delta = 2 + 0 = 2$ układy równań metody przemieszczeń przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} k_{11}\varphi_1 + k_{12}\varphi_2 + k_{1F} &= K_1; & K_1 &= K_2 = 0 \\ k_{21}\varphi_1 + k_{22}\varphi_2 + k_{2F} &= K_2 \end{aligned}$$

5. Wyznaczenie współczynników układu równań metody przemieszczeń

Wartości współczynników układu równań metody przemieszczeń, które określają wartości reakcji momentowych w schemacie podstawowym w miejscu i na kierunku „ i ”-tych więzi dodatkowych wywołanych obciążeniem mechanicznym i niemechanicznym, wyznacza się z warunku równowagi płaskiego układu sił w „ i ”-tych węzłach (suma momentów wszystkich sił w „ i ”-tym węzle równa się zero).

5.1. Rozwiązanie układu podstawowego od jednostkowego obrotu węzła 1 (pierwszy stan rotacyjny $\varphi_1 = 1 \text{ rad}$)



Uwaga

Wartości momentów brzegowych od stanu rotacyjnego otrzymuje się stosując odpowiednio przekształcone **wzory transformacyjne**

$$\bar{M}_{ij}^{\varphi_1} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_i + b_{ij} \cdot \varphi_j),$$

$$\bar{M}_{ji}^{\varphi_1} = \frac{EI_{ji}}{L_{ji}} (a_{ji} \cdot \varphi_j + b_{ji} \cdot \varphi_i),$$

$a_{ij}, a_{ji}, b_{ij}, b_{ji}$ – stałe zależne od przyjętego typu pręta

Momenty brzegowe:

$$\bar{M}_{12}^{\varphi_1} = \frac{EI}{3m} \cdot 4 \cdot 1 = 1.333 \frac{EI}{m},$$

$$\bar{M}_{21}^{\varphi_1} = \frac{EI}{3m} \cdot 2 \cdot 1 = 0.666 \frac{EI}{m},$$

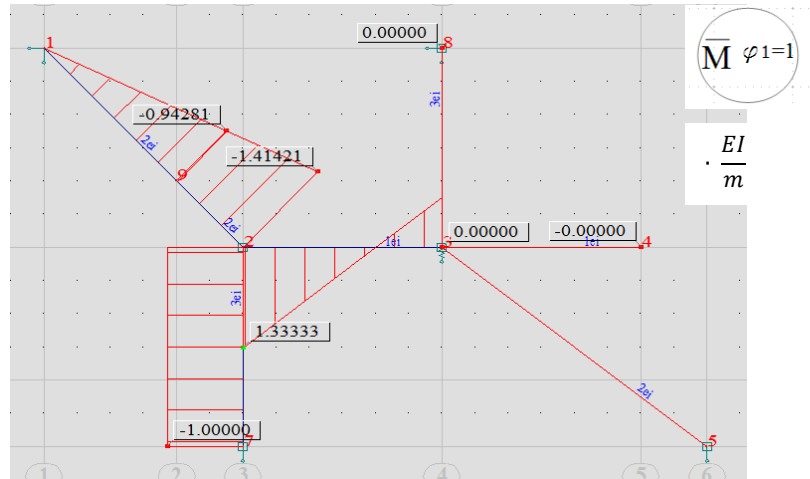
$$\bar{M}_{1B}^{\varphi_1} = \frac{3EI}{3m} \cdot 1 \cdot 1 = 1.0 \frac{EI}{m},$$

$$\bar{M}_{B1}^{\varphi_1} = \frac{3EI}{3m} \cdot (-1) \cdot 1 = -1.0 \frac{EI}{m},$$

$$\bar{M}_{1A}^{\varphi_1} = \frac{2EI}{3\sqrt{2}m} \cdot 3 \cdot 1 = 1.414 \frac{EI}{m},$$

$$\bar{M}_{A1}^{\varphi_1} = \frac{2EI}{3\sqrt{2}m} \cdot 0 \cdot 1 = 0 \frac{EI}{m},$$

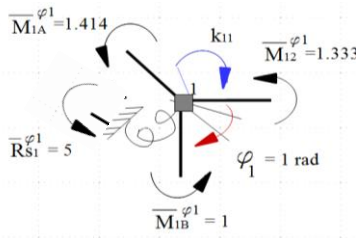
Zasada znakowania:
 Momenty prawoskrętne są dodatnie



Momenty brzegowe od obciążenia ($\varphi_1 = 1$) w układzie podstawowym (znaki na wykresach są związane z odpowiednim wyróżnieniem włókien w danym programie obliczeniowym)

Równowaga sił w węzłach:

Węzeł 1

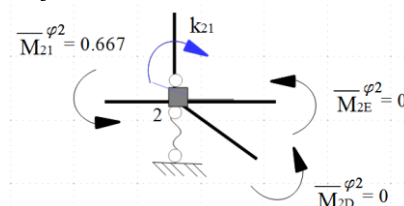


$$\sum \bar{M}_1^{\varphi_1=1} = 0,$$

$$k_{11} - 1.414 EI/m - 1 EI/m - 1.333 EI/m - 5 EI/m = 0,$$

$$k_{11} = 8.748 EI/m,$$

Węzeł 2

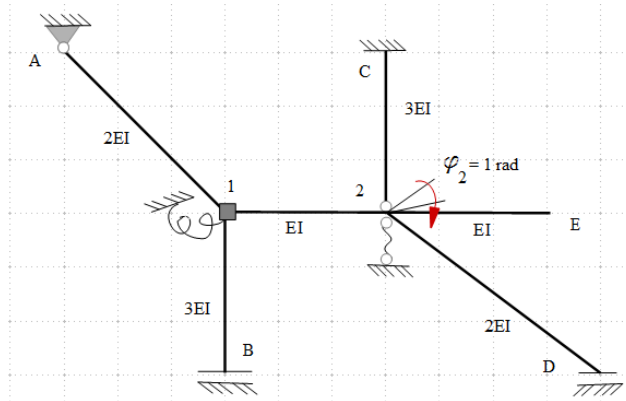


$$\sum \bar{M}_2^{\varphi_1=1} = 0$$

$$k_{21} - 0.6666 EI/m = 0,$$

$$k_{21} = 0.667 EI/m$$

5.2. Rozwiązanie układu podstawowego od jednostkowego obrotu węzła 2 (drugi stan rotacyjny $\varphi_2 = 1 \text{ rad}$)



Uwaga

Wartości momentów brzegowych od stanu rotacyjnego otrzymuje się stosując odpowiednio przekształcone **wzory transformacyjne**

$$\bar{M}_{ij}^{\varphi_2} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_i + b_{ij} \cdot \varphi_j),$$

$$\bar{M}_{ji}^{\varphi_2} = \frac{EI_{ji}}{L_{ji}} (a_{ji} \cdot \varphi_j + b_{ji} \cdot \varphi_i),$$

$a_{ij}, a_{ji}, b_{ij}, b_{ji}$ – stałe zależne od przyjętego typu pręta

Momenty brzegowe:

$$\bar{M}_{21}^{\varphi_2} = \frac{EI}{3m} \cdot 4 \cdot 1 = 1.333 \frac{EI}{m},$$

$$\bar{M}_{12}^{\varphi_2} = \frac{EI}{3m} \cdot 2 \cdot 1 = 0.666 \frac{EI}{m},$$

$$\bar{M}_{2D}^{\varphi_2} = \frac{2EI}{5m} \cdot 4 \cdot 1 = 1.6 \frac{EI}{m},$$

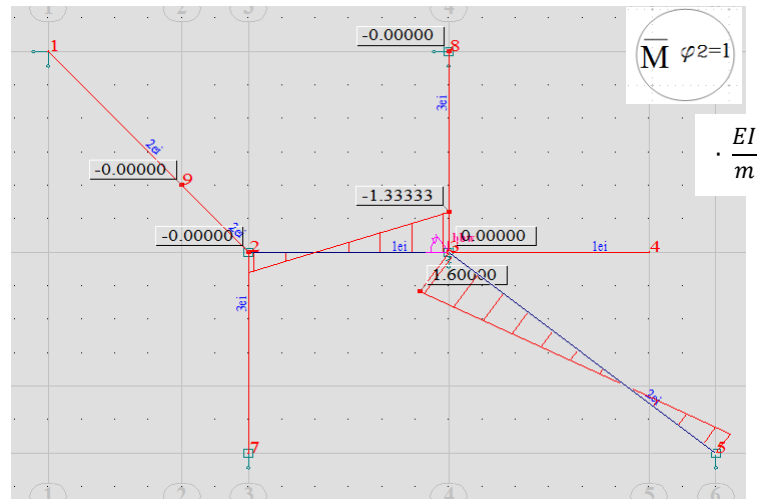
$$\bar{M}_{D2}^{\varphi_2} = \frac{2EI}{5m} \cdot 2 \cdot 1 = 0.8 \frac{EI}{m},$$

$$\bar{M}_{2E}^{\varphi_2} = \frac{2EI}{3\sqrt{2}m} \cdot 0 \cdot 1 = 0 \frac{EI}{m},$$

$$\bar{M}_{E2}^{\varphi_2} = \frac{2EI}{3\sqrt{2}m} \cdot 0 \cdot 1 = 0 \frac{EI}{m},$$

Zasada znakowania:

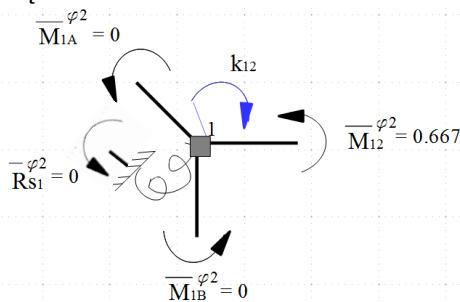
Momenty prawoskrętne są dodatnie



Momenty brzegowych od obciążenia ($\varphi_2 = 1$) w układzie podstawowym (znaki na wykresach są zależne od przyjęcia włókien wyróżnionych)

Równowaga sił w węzłach:

Węzeł 1

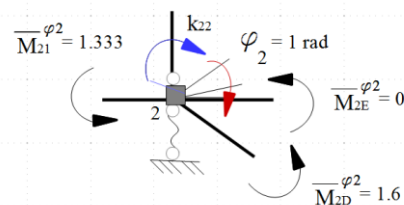


$$\sum \bar{M}_1^{\varphi_2=1} = 0$$

$$k_{12} - 0.6666 EI/m = 0,$$

$$k_{12} = 0.667 EI/m,$$

Węzeł 2

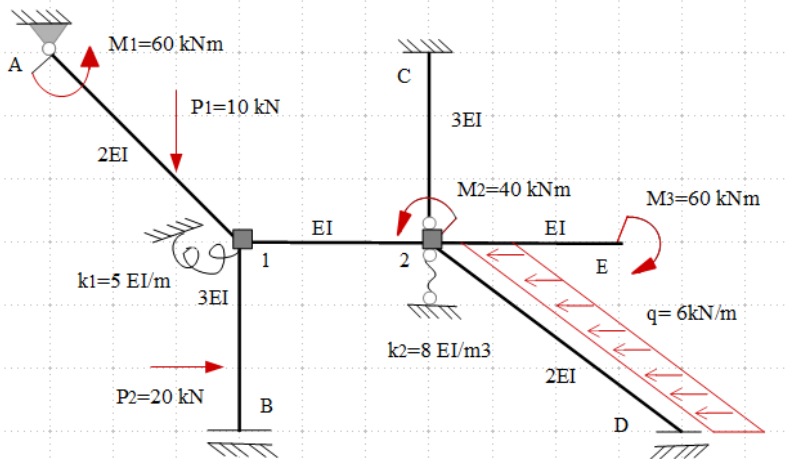


$$\sum \bar{M}_2^{\varphi_2=1} = 0$$

$$k_{22} - 1.3333 EI/m - 1.6 EI/m = 0,$$

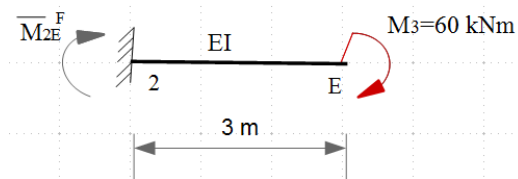
$$k_{22} = 2.933 EI/m,$$

5.3. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia danego (obciążenie mechaniczne F)



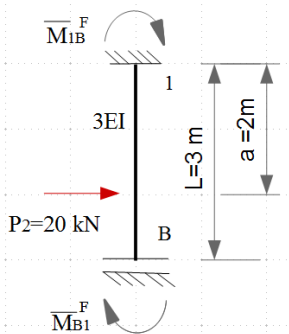
Wyznaczając wartości momentów brzegowych od obciążenia mechanicznego dzieli się układ na elementy prętowe i węzłowe i analizuje się sukcesywnie elementy prętowe np. wykorzystując stabilizowane wyrażenia na wartości brzegowe momentów zależnych od typu pręta i zadanego obciążenia.

Pręt 2-E



$$\bar{M}_{2E}^F = -60.0 \text{ kNm}$$

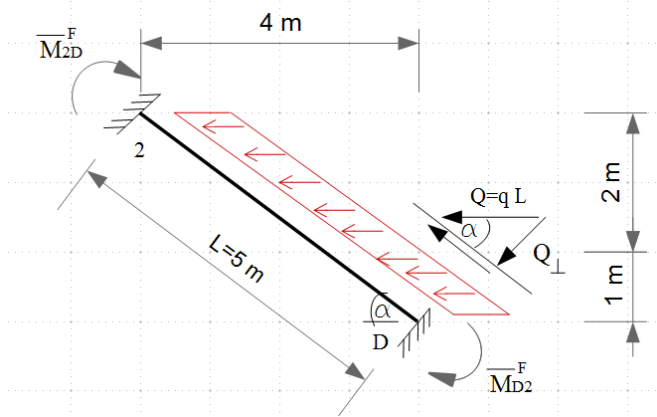
Pręt 1-B



$$\begin{aligned} \bar{M}_{1B}^{-F} &= -\frac{Pa}{2} \left(2 - \frac{a}{L}\right) = \\ &= -\frac{(-20\text{kN}) \cdot 2\text{m}}{2} \left(2 - \frac{2\text{m}}{3\text{m}}\right) \\ &= 26.666 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{B1}^F &= -Pa^2/2L = \\ &= -\frac{(-20\text{kN}) \cdot (2\text{m})^2}{2 \cdot 3\text{m}} = 13.333 \text{ kNm} \end{aligned}$$

Pręt 2-D



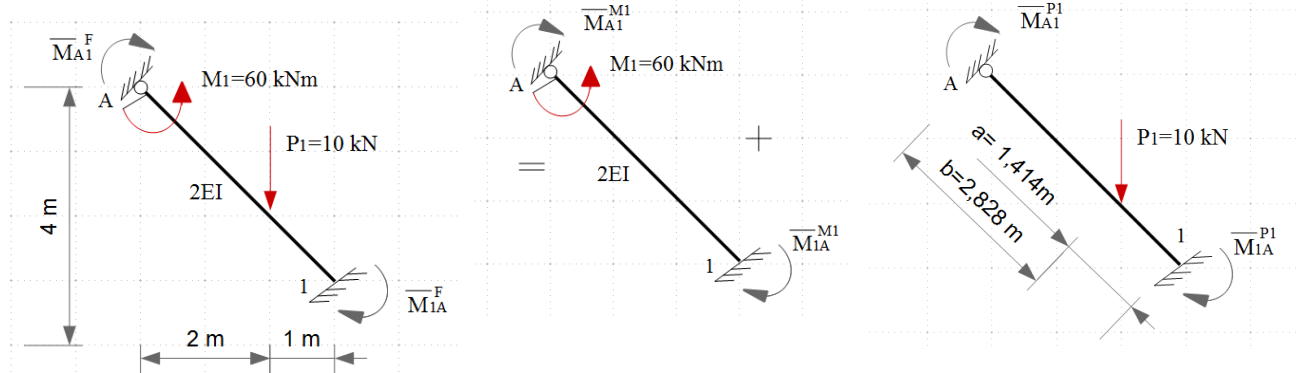
$$\sin \alpha = 3/5$$

$$q_{\perp} = -\frac{Q_{\perp}}{L} = -\frac{6 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} \cdot \sin \alpha}{5 \text{ m}} = 3.6 \text{ kN/m}$$

$$\bar{M}_{2D}^F = -\frac{q_{\perp} L^2}{12} = -\frac{3.6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} (5 \text{ m})^2}{12} = -7.5 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{D2}^F = \frac{q_{\perp} L^2}{12} = \frac{3.6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} (5 \text{ m})^2}{12} = 7.5 \text{ kNm}$$

Pręt 1-A



$$\bar{M}_{1A}^{P1} = -\frac{P_{\perp} a \cdot b}{2L^2} (L + b) =$$

$$-\frac{\left(-10 \text{ kN} \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot \sqrt{2} \text{ m} \cdot 2\sqrt{2} \text{ m}}{2 \cdot (3\sqrt{2} \text{ m})^2} (3\sqrt{2} \text{ m} + 2\sqrt{2}) = 5.5555 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{A1}^{P1} = 0.0 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{1A}^{M1} = -\frac{M1}{2} =$$

$$= -\frac{60 \text{ kNm}}{2} = -30 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{A1}^{M1} = 0.0 \text{ kNm}$$

$$\bar{M}_{1A}^F = \bar{M}_{1A}^{M1} + \bar{M}_{1A}^{P1} = -30 \text{ kNm} + 5.5555 \text{ kNm} = 24.4444 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{A1}^F = \bar{M}_{A1}^{M1} + \bar{M}_{A1}^{P1} = 0.0 \text{ kNm}$$

Momenty brzegowe:

$\bar{M}_{1A}^F = -24.444 \text{ kNm},$
 $\bar{M}_{A1}^F = 0 \text{ kNm},$
 -moment brzegowy
 $\bar{M}_{A1}^F = -60 \text{ kNm},$
 -moment przywęzłowy

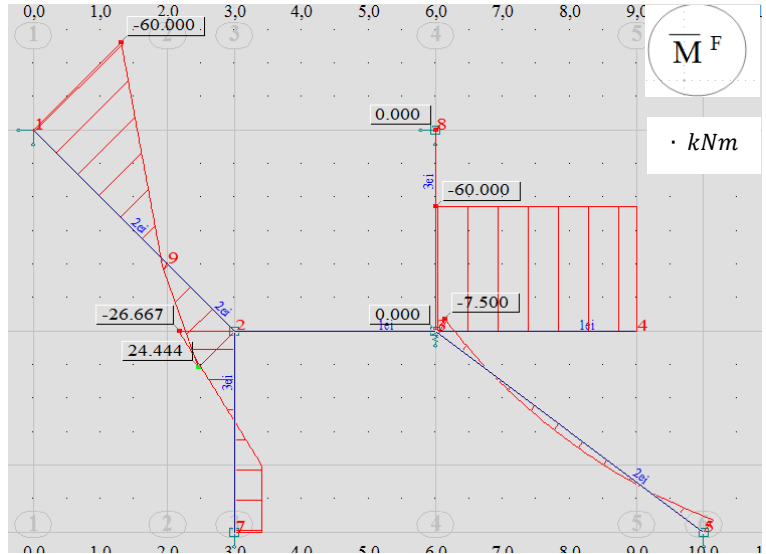
$\bar{M}_{1B}^F = 26.667 \text{ kNm},$
 $\bar{M}_{B1}^F = 13.333 \text{ kNm},$

$\bar{M}_{2E}^F = -60.0 \text{ kNm},$
 $\bar{M}_{E2}^F = 0 \text{ kNm},$
 -moment brzegowy
 $\bar{M}_{E2}^F = 60 \text{ kNm},$
 -moment przywęzłowy

$\bar{M}_{2D}^F = -7.5 \text{ kNm},$
 $\bar{M}_{D2}^F = 7.5 \text{ kNm},$

$\bar{M}_{12}^F = \bar{M}_{21}^F = 0.0 \text{ kNm},$
 $\bar{M}_{2C}^F = \bar{M}_{C2}^F = 0.0 \text{ kNm},$

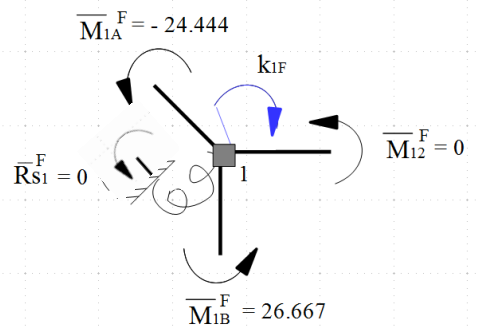
Zasada znakowania:
 Momenty prawoskrętne są dodatnie



Wykres momentów przywęzłowych od obciążenia (F) w układzie podstawowym. (W programie znaki na wykresach są związane z odpowiednim przyjęciem włókien wyróżnionych)

Równowaga sił w węzłach:

Węzeł 1

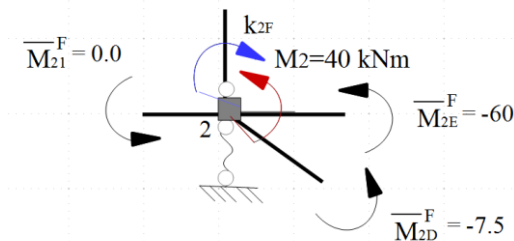


$$\sum \bar{M}_1^F = 0$$

$$k_{1F} - 26.667 \text{ kNm} + 24.444 \text{ kNm} = 0,$$

$$k_{1F} = 2.223 \text{ kNm},$$

Węzeł 2



$$\sum \bar{M}_2^F = 0$$

$$k_{2F} + 60.00 \text{ kNm} + 7.5 \text{ kNm} - 40 \text{ kNm} = 0,$$

$$k_{2F} = -27.5 \text{ kNm},$$

6. Rozwiązanie układu równań metody przemieszczeń

Postać ogólna układu równań

$$\begin{aligned} k_{11}\varphi_1 + k_{12}\varphi_2 + k_{1F} &= 0; \\ k_{21}\varphi_1 + \delta_{22}\varphi_2 + k_{2F} &= 0; \end{aligned}$$

Postać szczegółowa układu równań

$$\begin{aligned} 8.748 \text{ EI/m} \cdot \varphi_1 + 0.667 \text{ EI/m} \cdot \varphi_2 &= -2.223 \text{ kNm}; \\ 0.667 \text{ EI/m} \cdot \varphi_1 + 2.933 \text{ EI/m} \cdot \varphi_2 &= 27.5 \text{ kNm}; \end{aligned}$$

Rozwiązanie układu równań

$$\varphi_1 = -0.9856 \frac{\text{kNm}^2}{\text{EI}}, \quad \varphi_2 = 9.6 \frac{\text{kNm}^2}{\text{EI}},$$

7. Reakcje i siły przekrojowe wywołane obciążeniem mechanicznym (F) w układzie statycznie niewyznaczalnym SN i GN

7.1. Momenty zginające w przekrojach przywęzłowych w ramie SN poddanej obciążeniu mechanicznemu (F)

Wartości momentów zginających w przekrojach przywęzłowych uzyskać można stosując:

superpozycję rozwiązań: $M_{ij} = \sum_{\varphi k=1}^{n_g} \bar{M}_{ij}^{\varphi k} \varphi_k + \bar{M}_{ij}^F = \bar{M}_{ij}^{\varphi 1} \varphi_1 + \bar{M}_{ij}^{\varphi 2} \varphi_2 + \bar{M}_{ij}^F$
 lub
 wzory transformacyjne: $M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_i + b_{ij} \cdot \varphi_j) + \bar{M}_{ij}^F$

Superpozycja rozwiązań:

$$M_{1A} = 1.414 \frac{\text{EI}}{m} \left(-0.9856 \frac{\text{kNm}^2}{\text{EI}} \right) + 0 \cdot 9.6 \frac{\text{kNm}^2}{\text{EI}} + (-24.444 \text{ kNm}) = -25.83834 \text{ kNm},$$

$$M_{A1} = -60 \text{ kNm},$$

$$M_{12} = 1.333 \text{ EI/m} (-0.9861 \text{ kNm}^2/\text{EI}) + 0.666 \text{ EI/m} 9.6 \text{ kNm}^2/\text{EI} + (0 \text{ kNm}) = 5.079128 \text{ kNm},$$

$$M_{21} = 0.666 \text{ EI/m} (-0.9861 \text{ kNm}^2/\text{EI}) + 1.333 \text{ EI/m} 9.6 \text{ kNm}^2/\text{EI} + (0 \text{ kNm}) = 12.14005 \text{ kNm},$$

$$M_{1B} = 1 \text{ EI/m} (-0.9861 \text{ kNm}^2/\text{EI}) + 0 \text{ EI/m} 9.6 \text{ kNm}^2/\text{EI} + (26.667 \text{ kNm}) = 25.6809 \text{ kNm},$$

$$M_{B1} = -1 \text{ EI/m} (-0.9861 \text{ kNm}^2/\text{EI}) + 0 \text{ EI/m} 9.6 \text{ kNm}^2/\text{EI} + (13.333 \text{ kNm}) = 14.3191 \text{ kNm},$$

$$M_{2D} = 0 \text{ EI/m} (-0.9861 \text{ kNm}^2/\text{EI}) + 1.6 \text{ EI/m} 9.6 \text{ kNm}^2/\text{EI} + (-7.5 \text{ kNm}) = 7.85999 \text{ kNm},$$

$$M_{D2} = 0 \text{ EI/m} (-0.9861 \text{ kNm}^2/\text{EI}) + 0.8 \text{ EI/m} 9.6 \text{ kNm}^2/\text{EI} + (7.5 \text{ kNm}) = 15.18 \text{ kNm},$$

$$M_{2E} = 0 \text{ EI/m} (-0.9861 \text{ kNm}^2/\text{EI}) + 0 \text{ EI/m} 9.6 \text{ kNm}^2/\text{EI} + (-60 \text{ kNm}) = -60 \text{ kNm},$$

$$M_{E2} = 0 \text{ EI/m} (-0.9861 \text{ kNm}^2/\text{EI}) + 0 \text{ EI/m} 9.6 \text{ kNm}^2/\text{EI} + (60 \text{ kNm}) = 60 \text{ kNm},$$

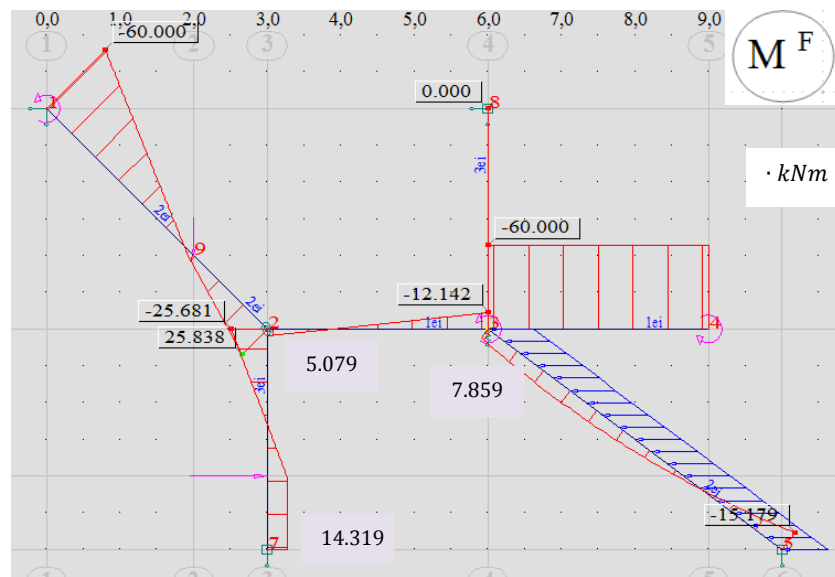
$$M_{2C} = 0 \text{ kNm}, \quad M_{C2} = 0 \text{ kNm},$$

$$M_{S2} = 5 \text{ EI/m} (-0.9861 \text{ kNm}^2/\text{EI}) = -4.9305 \text{ kNm} - \text{siła w więzi sprężystej rotacyjnej}$$

Uwaga!

Momenty prawoskrętne są dodatnie, lewoskrętne ujemne (zgodnie z zasadą znakowania met. przemieszczeń)

Wartości momentów zginających w punktach charakterystycznych zostaną wyliczone po wyznaczeniu wartości sił tnących.



Wykres momentów zginających od obciążenia (F) w ramie SN

7.2. Siły tnące w przekrojach przywęzłowych w ramie SN poddanej obciążeniu mechanicznemu

Wartości sił tnących uzyskać można stosując:

warunki równowagi sił w elemencie:
 lub

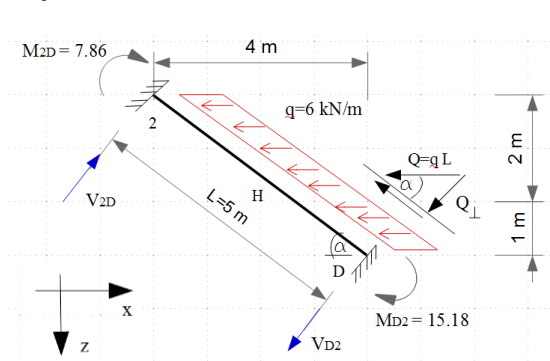
$$\sum M_i = 0, \sum Z = 0, \sum X = 0$$

wzory transformacyjne:

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (c_{ij} \cdot \varphi_i + c_{ij} \cdot \varphi_j) + \bar{V}_{ij}^F$$

Równowaga sił w elementach prętowych:

Pręt 2-D



$$\sum M_D = 0$$

$$V_{2D} 5m + 7.86 \text{ kNm} + 15.18 \text{ kNm} - 30 \text{ kN} \cdot 1.5m = 0$$

$$V_{2D} = 4.392 \text{ kN}$$

$$\sum M_2 = 0$$

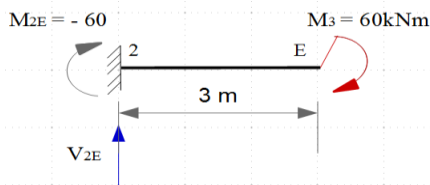
$$V_{D2} 5m + 7.86 \text{ kNm} + 15.18 \text{ kNm} + 30 \text{ kN} \cdot 1.5m = 0$$

$$V_{D2} = -13.608 \text{ kN}$$

$$M_H = V_{2D} 2.5m + 7.86 \text{ kNm} - \left(\frac{6 \text{ kN}}{m} \cdot 2.5m \cdot 0.75m \right)$$

$$= 7.59 \text{ kNm}$$

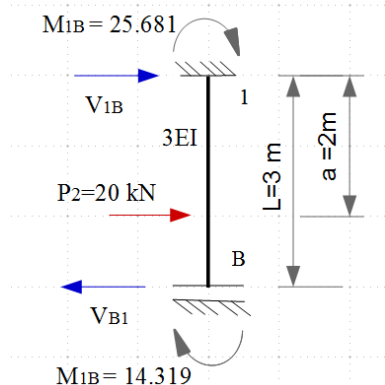
Pręt 2-E



$$\sum Z = 0$$

$$V_{2E} = 0$$

Pręt 1-B



$$\sum M_B = 0$$

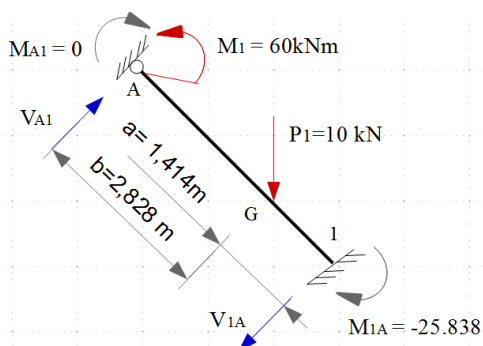
$$V_{1B}3m + 25.681kNm + 14.319kNm + 20kNm1m = 0$$

$$V_{1B} = -20kN$$

$$\sum X = 0$$

$$V_{B1} = 0$$

Pręt A-1



$$\sum M_1 = 0$$

$$V_{A1}3\sqrt{2}m - 60kNm - 25.838kNm - 10kN 1m = 0$$

$$V_{A1} = 22.58923kN$$

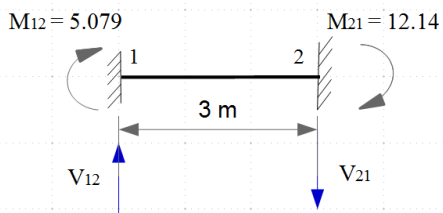
$$\sum M_A = 0$$

$$V_{1A}3\sqrt{2}m - 60kNm - 25.838kNm + 10kN 2m = 0$$

$$V_{1A} = 15.5181kN$$

$$M_G = -V_{1A}1.414m + 25.838kNm = 3.8953$$

Pręt 1-2



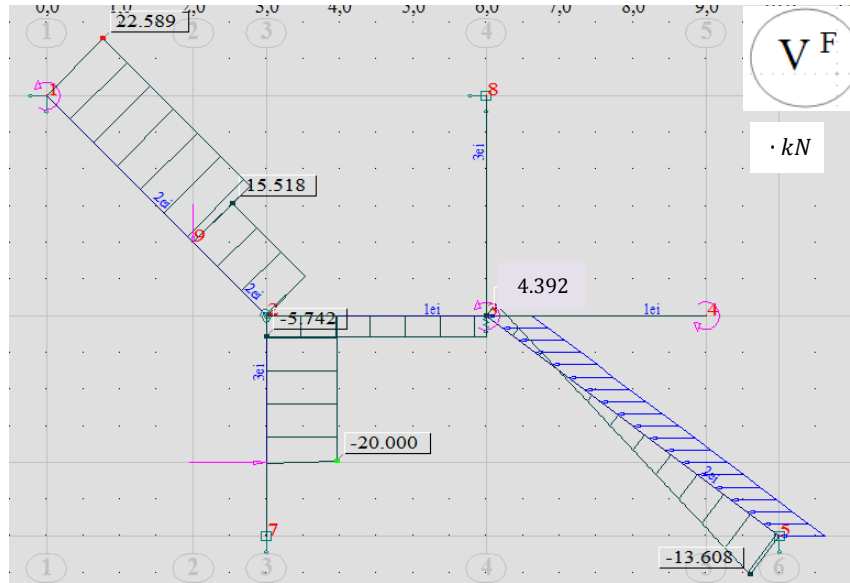
$$\sum M_2 = 0$$

$$V_{12}3m + 5.079 kNm + 12.14kNm = 0$$

$$V_{12} = -5.7397 kN$$

$$\sum Z = 0$$

$$V_{21} = -5.7397$$



Wykres sił tnących od obciążenia (F) w ramie SN

7.3. Siły osiowe w przekrojach przywęzłowych w ramie SN poddanej obciążeniu mechanicznemu

Siły osiowe wyznaczyć można z **równowagi sił w węzłach**. Ze względu na fakt, że w każdym z węzłów występuje po min. 3 niewiadome siły, warunki równowagi płaskiego zbieżnego układu sił nie są wystarczające do wyznaczenia tych niewiadomych. Stąd w pierwszej kolejności wyznaczono reakcję podporową R_D wykorzystując wyliczoną wcześniej wartość siły tnącej V_{D2} oraz reakcję R_{S2} .

$$R_{SD} = \sum_i^{n_\delta} k_\delta \delta_s^i = 0, (n_\delta = 0)$$

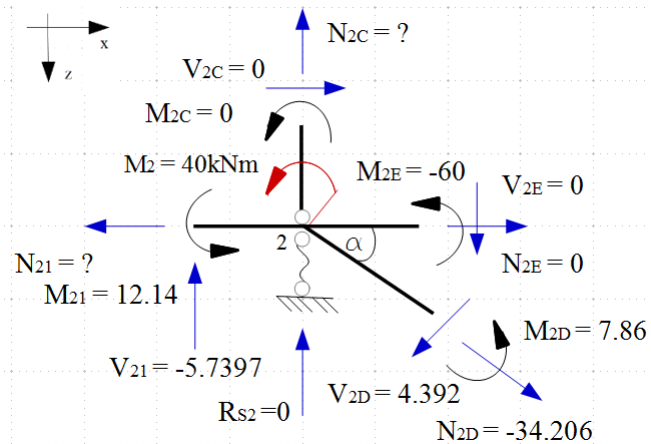
$$\frac{V_{D2}}{R_D} = \cos \alpha = \frac{4}{5}, R_D = 17.01 \text{ kN},$$

$$\frac{N_{D2}}{R_D} = \sin \alpha = \frac{3}{5}, N_{D2} = 10.206 \text{ kN},$$

$$N_{2D} = -N_{D2} - \frac{6 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot 5 \text{ m} \cdot \cos \alpha = -10.206 \text{ kN} - 30 \text{ kN} \cdot \frac{4}{5} = -34.206 \text{ kN}$$

Diagram showing the decomposition of shear force $V_{D2} = 13.608$ kN at joint D into normal force N_{D2} and reaction $R_D = 17.01$ kN. The angle α is defined by the geometry of the member.

Równowaga sił w węźle 2



$$\sin \alpha = 3/5, \quad \cos \alpha = 4/5$$

$$\sum X = 0$$

$$-N_{21} + N_{2D} \cdot \cos \alpha - V_{2D} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{21} = -34.206 \text{ kN} \cdot \frac{4}{5} + 4.392 \text{ kN} \cdot \frac{3}{5} = \mathbf{30 \text{ kN}}$$

$$\sum Z = 0$$

$$-V_{21} - N_{2C} + V_{2D} \cdot \cos \alpha - N_{2D} \cdot \sin \alpha = 0$$

$$N_{2C} = -5.7397 \text{ kN} - 4.392 \cdot \frac{4}{5} + 34.206 \text{ kN} \cdot \frac{3}{5}$$

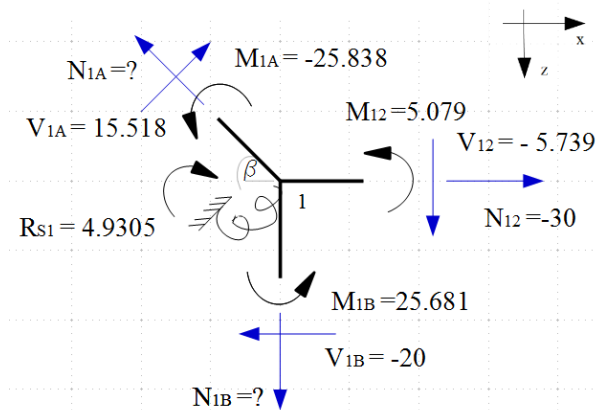
$$= \mathbf{-11.271 \text{ kN}}$$

Kontrola równowagi układu na kierunku więzi fikcyjnej / $K_2 = 0$ (?) /

$$K_2 = M_{2D} + M_{21} + M_{2E} + M_{2C} - M_2 = 7.86 \text{ kNm} + 12.14 \text{ kNm} - 60 \text{ kNm} + 0 + 40 \text{ kNm} = 0$$

WARUNEK SPEŁNIONY

Równowaga sił w węźle 1



$$\sin \beta = \sqrt{2}/2, \quad \cos \beta = \sqrt{2}/2$$

$$\sum X = 0$$

$$-N_{1A} \cdot \cos \beta + V_{1A} \cdot \sin \beta + N_{12} - V_{1B} = 0$$

$$N_{1A} = \frac{15.518 \text{ kN} \cdot \sqrt{2}/2 - 30 \text{ kN} + 20 \text{ kN}}{\sqrt{2}/2}$$

$$= \mathbf{1.376 \text{ kN}}$$

$$\sum Z = 0$$

$$-N_{1A} \cdot \sin \beta - V_{1A} \cdot \cos \beta + V_{12} + N_{1B} = 0$$

$$N_{1B} = 15.518 \text{ kN} \cdot \sqrt{2}/2 + 1.376 \text{ kN} \cdot \sqrt{2}/2$$

$$+ 5.739 \text{ kN} = \mathbf{17.68 \text{ kN}}$$

$$N_{A1} = N_{1A} + 10 \text{ kN} \sqrt{2}/2 =$$

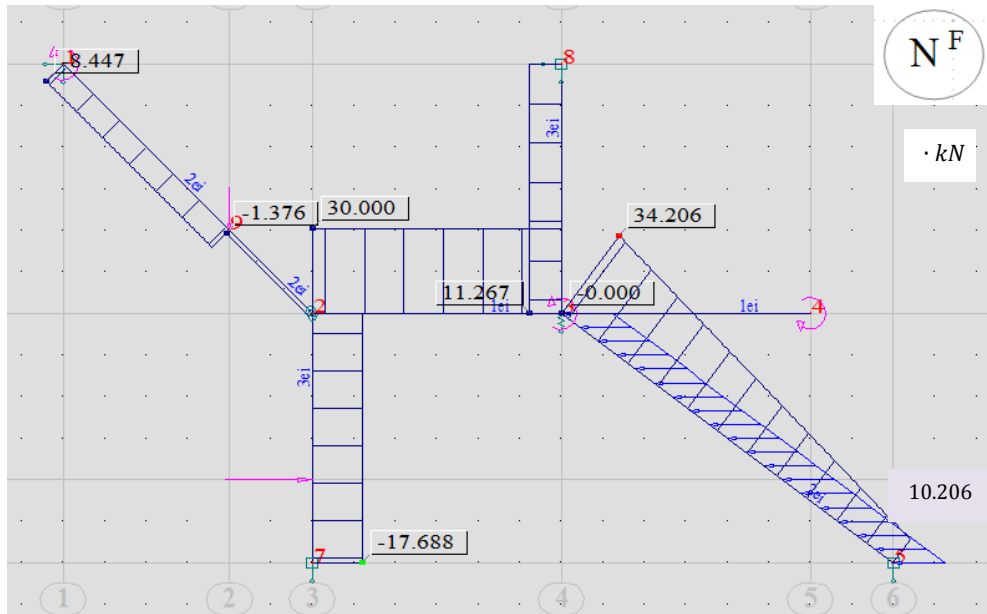
$$1.376 \text{ kN} + 10 \text{ kN} \sqrt{2}/2 = \mathbf{8.447 \text{ kN}}$$

Kontrola równowagi układu na kierunku więzi fikcyjnej / $K_1 = 0$ (?) /

$$K_1 = M_{1B} + M_{12} + M_{1A} + R_{S1} - M_1 = 25.681 \text{ kNm} + 5.079 \text{ kNm} - 25.838 \text{ kNm} - 4.9305 \text{ kNm} + 0 \text{ kNm}$$

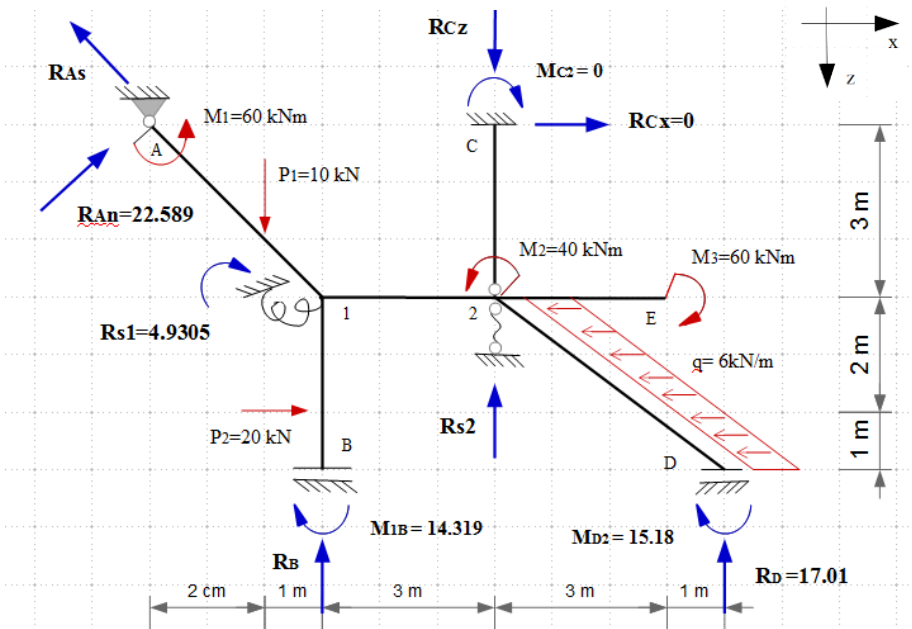
$$= -7.9 \cdot 10^{-3} \text{ kNm} \cong 0$$

WARUNEK SPEŁNIONY



Wykres sił osiowych od obciążenia (F) w ramie SN (rozszerzenie znak „-„)

7.4. Reakcje podporowe w ramie SN poddanej obciążeniu mechanicznemu



Z równowagi sił w prętach i węzłach wyliczono w punkcie 7.2. i 7.3 wartości reakcji podporowych

$$R_B = -N_{1B} = -17.68 \text{ kN},$$

$$R_D = 17.01 \text{ kN},$$

$$R_{S2} = 0 \text{ kN},$$

$$R_{Cz} = -N_{2c} = 11.27 \text{ kN},$$

$$R_{As} = N_{A1} = 8.447 \text{ kN},$$

Kontrola poprawności wyznaczenia wybranych reakcji (równowaga globalna układu sił)

Warunki równowagi układu sił

$$\sum M_1 = 0$$

$$22.589\text{kN} \cdot 3\sqrt{2}\text{m} - 10\text{kN} \cdot 1\text{m} + 4.9305\text{kNm} - 20\text{kN} \cdot 2\text{m} + 14.319\text{kNm} + R_{Cz}3\text{m} - 40\text{kNm} + 60\text{kNm} - 17.01\text{kN} \cdot 7\text{m} + 30\text{kN} \cdot 1.5\text{m} + 15.18\text{kNm} - 60\text{kNm} = 0$$

$$R_{Cz} \rightarrow 11.26782983955416 \text{ kN}$$

$$\sum M_A = 0$$

$$-R_B \cdot 3\text{m} + 11.26786\text{m} - 60\text{kNm} + 10\text{kN} \cdot 2\text{m} + 4.9305\text{kNm} - 40\text{kNm} + 60\text{kNm} - 20\text{kN} \cdot 5\text{m} + 30\text{kN} \cdot 4.5\text{m} + 15.18\text{kNm} + 14.319\text{kNm} - 17.01\text{kN} \cdot 10\text{m} = 0$$

$$R_B \rightarrow -17.68790000000001 \text{ kN}$$

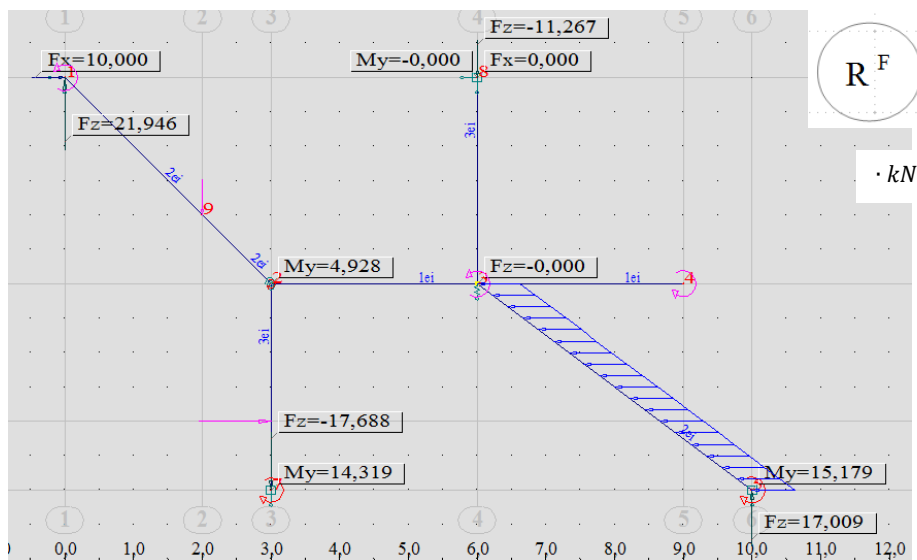
$$\sum M_c = 0$$

$$R_{As}3\sqrt{2}\text{m} - 60\text{kNm} - 40\text{kNm} + 60\text{kNm} + 4.9305\text{kNm} + 15.18\text{kNm} + 14.319\text{kNm} + 22.589\text{kN} \cdot 3\sqrt{2}\text{m} - 10\text{kN} \cdot 4\text{m} - 20\text{kN} \cdot 5\text{m} + 30\text{kN} \cdot 4.5\text{m} - 17.01\text{kN} \cdot 4\text{m} - 17.68\text{kN} \cdot 3\text{m} = 0$$

$$R_{As} \rightarrow 8.441320432199857 \text{ kN}$$

$$R_{Az} = -R_{As} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - R_{An} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -8.44\text{kN} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 22.589\text{kN} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -21.94 \text{ kN}$$

$$R_{Ax} = -R_{As} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + R_{An} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -8.44\text{kN} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + 22.589\text{kN} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 10 \text{ kN}$$



Wartości reakcji podporowych od obciążenia (F) w ramie SN

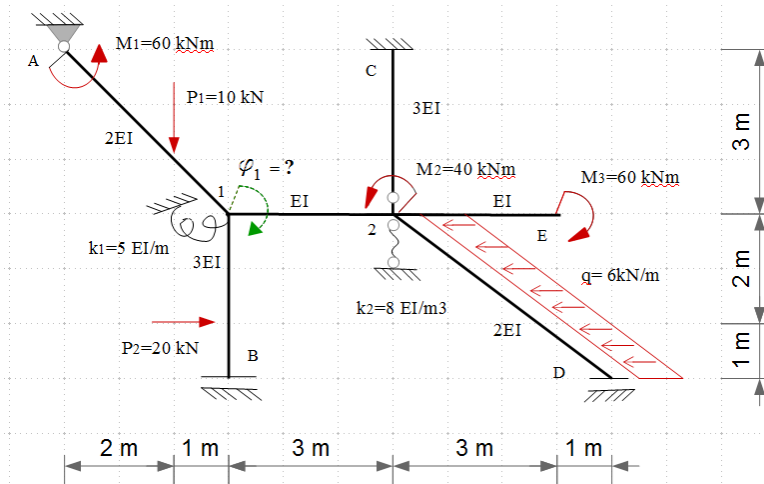
III. KONTROLA ZGODNOŚCI PRZEMIESZCZEŃ I ODKSZTAŁCEŃ USTROJU (kontrola kinematycznej dopuszczalności otrzymanych rozwiązań)

Aby sprawdzić czy rozwiązanie jest kinematycznie dopuszczalne należy w wybranym miejscu wyliczyć przemieszczenie wykorzystując w obliczeniach otrzymane rozwiązanie układu i sprawdzić czy wyliczona wartość przemieszczenia jest zgodna z warunkami podparcia i ciągłości konstrukcji.

Sprawdzone zostanie czy wartości dwóch wybranych przemieszczeń są zgodne z odpowiednimi warunkami:

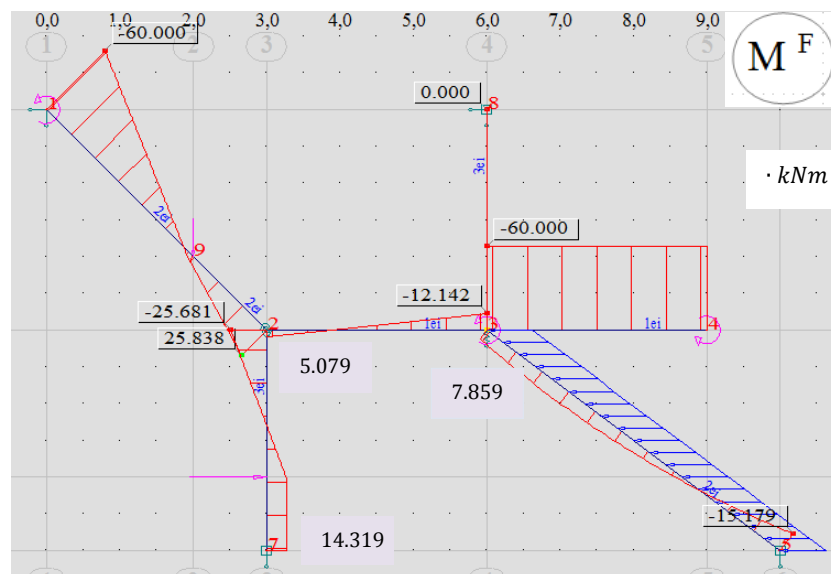
obrót węzła 1 ($\varphi_1 = -0.9856 \frac{kNm^2}{EI}$), oraz pionowy **przesuw węzła A** ($U_z = 0 \frac{kNm^3}{EI}$),

- φ_1 obrót węzła 1 ($\varphi_1 = -0.9856 \frac{kNm^2}{EI}$)



1. Rozwiązanie układu zadanego od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia

Rozwiązanie uzyskano metodą przemieszczeń i wyniki spisano z punktu 7.1.



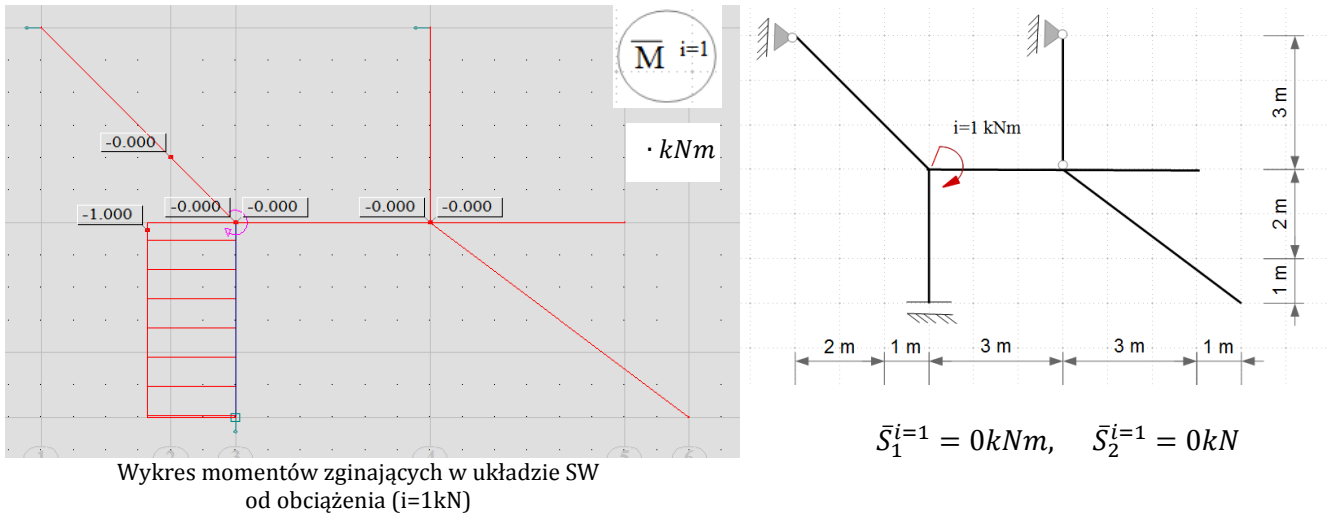
$$S_1^F = -4.93 kNm$$

$$S_2^F = 0 kN$$

Wykres momentów zginających od obciążenia (F) w ramie SN

2. Rozwiązanie układu podstawowego (np. SW) od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia

Rozwiązanie uzyskano w systemie Robot Structural Analysis (w projekcie ramę statycznie wyznaczalną obciążoną jednostkowym obciążeniem rozwiązujemy bez użycia komputera)



3. Zastosowanie zasady prac przygotowanych do wyznaczenia szukanego przemieszczenia

$$1 \text{ kNm} \cdot \varphi_1 = \sum_p \left(\int \bar{M}^{i=1} \frac{M^F}{EI} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{i=1} \cdot S_m^F}{k_m}$$

$$1 \text{ kN} \cdot \varphi_1 = \frac{1}{3EI} \cdot (-1 \text{ kNm}) \cdot 14.319 \text{ kNm} \cdot 1 \text{ m} + \frac{1}{3EI} \frac{2 \text{ m}}{6} ((-1 \text{ kNm}) \cdot 14.319 \text{ kNm} + 4 \cdot (-1 \text{ kNm}) \cdot (-5.681 \text{ kNm}) + (-1 \text{ kNm}) \cdot (-25.681 \text{ kNm})) = -0.985666 \frac{\text{kNm}^2 \text{m}^3}{EI} /: 1 \text{ kNm}$$

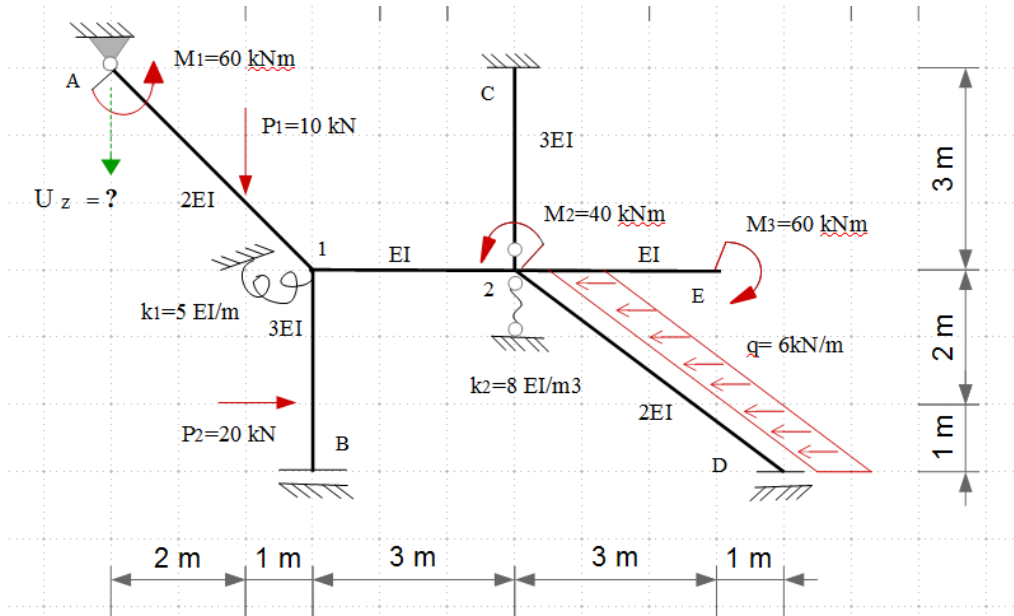
Odpowiedź: $\varphi_1 = -0.985666 \frac{\text{kNm}^2}{EI}$ (kierunek przemieszczenia przeciwny do przyjętego zwrotu siły i=1kNm)

Otrzymana wartość przemieszczenia jest zgodna z założonym warunkiem (jest równa przemieszczeniu

więzi sprężystej rotacyjnej $\frac{S_1^F}{k_1} = -\frac{4.93 \text{ kNm}}{\frac{5EI}{m}} = -0.986 \frac{\text{kNm}^2}{EI},$

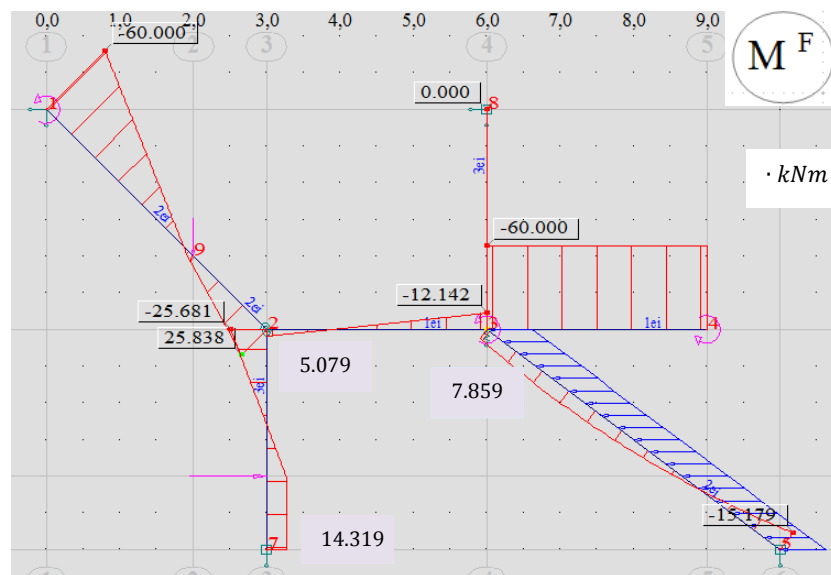
WARUNEK SPEŁNIONY

- U_z pionowy przesuw węzła A ($U_z = 0 \frac{kNm^3}{EI}$),



1. Rozwiązanie układu zadanego od obciążenia stanowiącego przyczynę przemieszczenia

Rozwiązanie uzyskano metodą przemieszczeń i wyniki spisano z punktu 7.1.



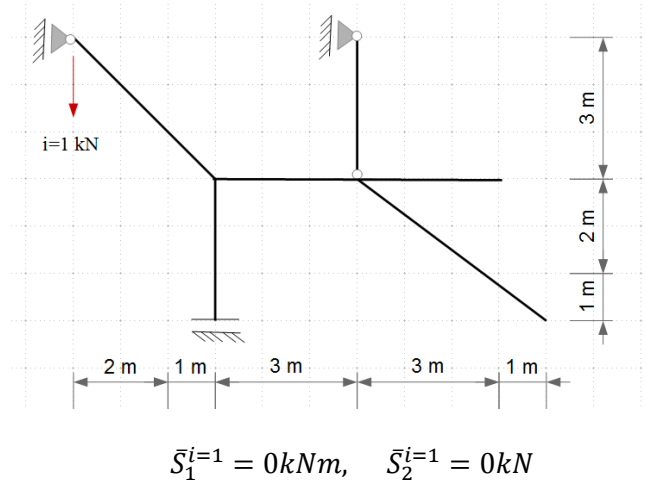
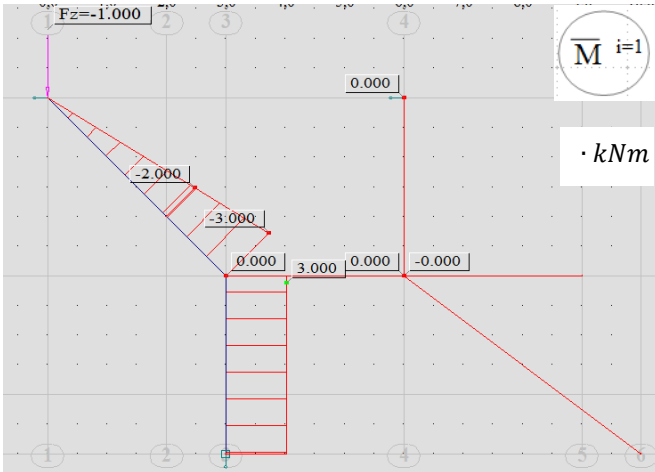
$$S_1^F = -4.93 kNm$$

$$S_2^F = 0 kN$$

Wykres momentów zginających od obciążenia (F) w ramie SN

2. Rozwiązanie układu podstawowego (np. SW) od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia

Rozwiązanie uzyskano w systemie Robot Structural Analysis (w projekcie ramę statycznie wyznaczalną obciążoną jednostkowym obciążeniem rozwiązujemy bez użycia komputera)



Wykres momentów zginających w układzie SW od obciążenia (i=1kN)

3. Zastosowanie zasady prac przygotowanych do wyznaczenia szukanego przemieszczenia

$$1kN \cdot U_Z = \sum_p \left(\int \bar{M}^{i=1} \frac{M^F}{EI} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{i=1} \cdot S_m^F}{k_m}$$

$$1kN \cdot U_Z = \frac{1}{3EI} \cdot 3kNm \cdot 14.319kNm \cdot 1m + \frac{1}{3EI} \frac{2m}{6} (3kNm \cdot 14.319kNm + 4 \cdot 3kNm \cdot (-5.681kNm) + 3kNm \cdot (-25.681kNm)) + \frac{1}{2EI} \frac{2\sqrt{2}m}{6} (4 \cdot (-1kNm) \cdot (-28.0523kNm) + (-2kNm) \cdot 3.8953kNm) + \frac{1}{2EI} \frac{\sqrt{2}m}{6} (3.8953kNm \cdot (-2kNm) + 4 \cdot (-2.5kNm) \cdot 14.86665kNm + (-3kNm) \cdot 25.838kNm) = -0.00505852127 \frac{kNm^3}{EI} /: 1kN$$

Odpowiedź: $U_Z = -0.00505852127 \frac{kNm^3}{EI} \cong 0$ (kierunek przemieszczenia przeciwny do przyjętego zwrotu siły i=1kN)

Otrzymana wartość przemieszczenia jest zgodna z założonym warunkiem ($U_Z = 0 \frac{kNm^3}{EI}$)
 WARUNEK SPEŁNIONY

Wniosek dotyczący kinematycznej dopuszczalności rozwiązania (M^F, V^F, N^F)

Wyliczone przemieszczenia φ_1, U_Z są zgodne warunkami ciągłości ustroju stąd wykres momentów zginających od obciążenia mechanicznego (F) w układzie SN wyliczony metodą przemieszczeń jest kinematycznie dopuszczalny.