Opracowała: dr inż. Kamila Jarczewska
na podstawie wykładu prof. dr hab. inż. W. Glabisza

Wykład nr 2

TWIERDZENIE O WZAJEMNOŚCI PRAC (twierdzenie Bettiego) ORAZ TWIERDZENIA Z NIEGO WYNIKAJĄCE

Oznaczenia:

Δ_{ij} - przemieszczenie w miejscu i na kierunku „i” wywołane stanem „j”

δ_{ij} - przemieszczenie w miejscu i na kierunku „i” wywołane jednostkowym obciążeniem zadanym w miejscu i na kierunku „j”

δ'_{ij} - przemieszczenie w miejscu i na kierunku „i” wywołane jednostkowym przemieszczeniem zadanym w miejscu i na kierunku „j”

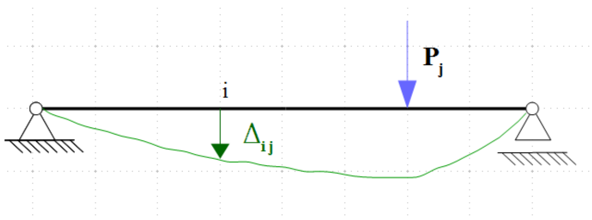
R_{ij} - reakcja w miejscu i na kierunku „i” wywołane stanem „j”

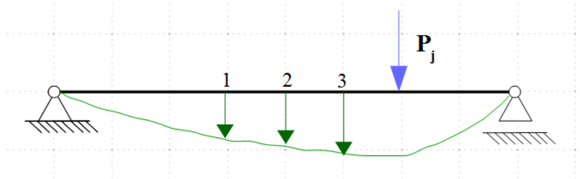
r_{ij} - reakcja w miejscu i na kierunku „i” wywołane jednostkowym obciążeniem zadanym w miejscu i na kierunku „j”

r'_{ij} - reakcja w miejscu i na kierunku „i” wywołane jednostkowym przemieszczeniem zadanym w miejscu i na kierunku „j”

*Uwaga:

Miejsce i kierunek „i” w którym definiowane jest przemieszczenie lub reakcja może oznaczać konkretne miejsce i kierunek ale również sumę określonych miejsc i kierunków reakcji i przemieszczeń np.:



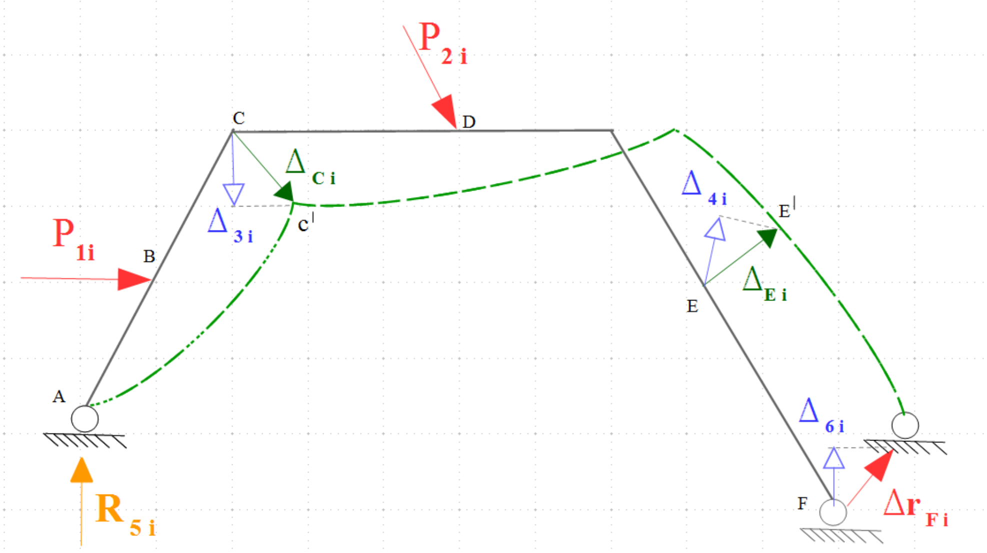


$\Delta_{ij} = \Delta_{1j} + \Delta_{2j} + \Delta_{3j}$

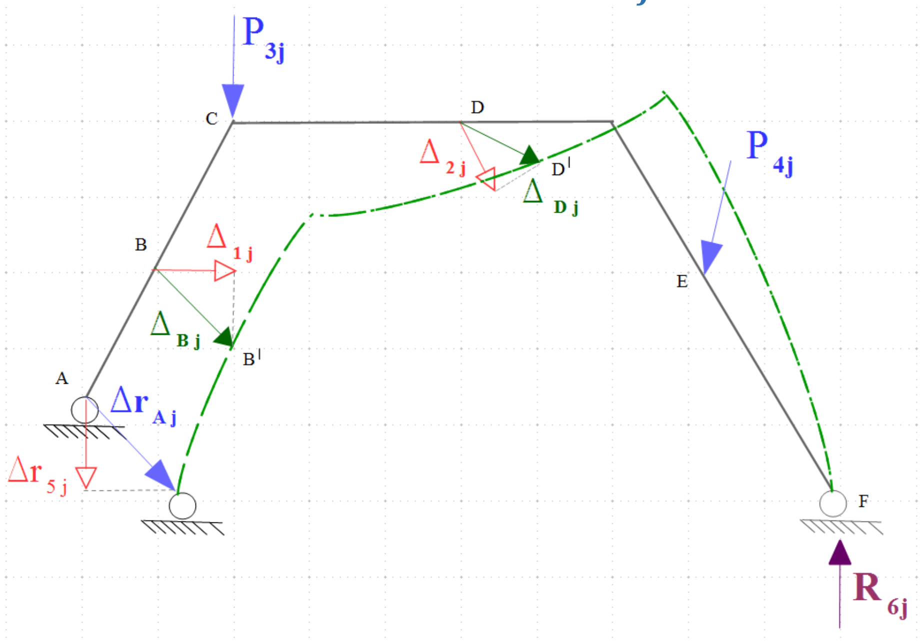
- ## Twierdzenie Bettiego:

Przyjmijmy dwa stany obciążeń i przemieszczeń:

Stan "i"



Stan "j"



- Jeżeli przymniemy, że:
  - stan "i" - jest stanem wirtualnych obciążeń i sił przekrojowych
  - stan "j" – jest stanem rzeczywistych przemieszczeń i odkształceń

zasada prac przygotowanych przyjmie postać II sformułowania.

II- sformułowanie ZPP

$$\sum_n \overline{P}_{n\,i}\;\Delta_{n\,j} + \sum_m \overline{R}_{m\,i}\;\Delta_{r_{m\,j}} = \int \overline{M}^i \Delta d\varphi^j + \int \overline{T}^i\;\Delta dh^j + \int \overline{N}^i\;\Delta ds^j \qquad (*)$$

- Jeżeli przymniemy, że:
  - stan "i" - jest stanem wirtualnych przemieszczeń i odkształceń
  - stan "j" – jest stanem rzeczywistych obciążeń i sił przekrojowych

zasada prac przygotowanych przyjmie postać I sformułowania.

I - sformułowanie ZPP

$$\sum_n P_{k\,j}\ \bar{\Delta}_{k\,i} + \sum_m R_{m\,j}\ \bar{\Delta}_{r_{m\,i}} = \int M^j \overline{\Delta d\varphi}^i + \int T^j\, \overline{\Delta dh}^j + \int N^j\, \overline{\Delta ds}^j \qquad (**)$$

- Jeżeli uwzględnimy, że obowiązują odpowiednie założenia (materiał jest liniowo sprężysty, warunki przemieszczeniowe układu podczas obciążania nie ulegają zmianie, obowiązuje zasada superpozycji, przemieszczenia są małe w stosunku do wymiarów konstrukcji) wówczas zależności wytrzymałościowe między odkształceniami, a siłami wewnętrznymi przyjmą postać :
  (związki te wyprowadzono na wykładzie nr 1.)

W stanie rzeczywistym:

$\Delta d\varphi = \frac{M}{EI_y} ds;$ $\qquad \Delta dh = \frac{\kappa\, T}{GA} ds;$ $\qquad \Delta ds = \frac{N}{EA} ds;$

W stanie wirtualnym:

$\overline{\Delta d\varphi} = \frac{\bar{M}}{EI_y} ds;$ $\qquad \overline{\Delta dh} = \frac{\kappa\, \bar{T}}{GA} ds;$ $\qquad \overline{\Delta ds} = \frac{\bar{N}}{EA} ds;$

- Podstawiając związki fizyczne do równań (*) i (**) otrzymujemy:

$$(*) \qquad \sum_n \bar{P}_{n\,i}\ \Delta_{n\,j} + \sum_m \bar{R}_{m\,i}\ \Delta_{r_{m\,j}} = \int \bar{M}^i \frac{M^j}{EI_y} ds + \int \bar{T}^i \frac{\kappa\, T^j}{GA} ds + \int \bar{N}^i \frac{N^j}{EA} ds$$

$$(**) \qquad \sum_n P_{k\,j}\ \bar{\Delta}_{k\,i} + \sum_m R_{m\,j}\ \bar{\Delta}_{r_{m\,j}} = \int M^j \frac{\bar{M}^i}{EI_y} ds + \int T^j \frac{\kappa\, \bar{T}^i}{GA} ds + \int N^j \frac{\bar{N}^i}{EA} ds$$

<u>Wniosek:</u>

Prawe strony powyższych równań są identyczne stąd lewe strony obu równań muszą być także sobie równe.

$$\boxed{\sum_n \bar{P}_{n\,i}\ \Delta_{n\,j} + \sum_m \bar{R}_{m\,i}\ \Delta_{r_{m\,j}} = \sum_k P_{k\,j}\ \bar{\Delta}_{k\,i} + \sum_m R_{m\,j}\ \bar{\Delta}_{r_{mi}}}$$

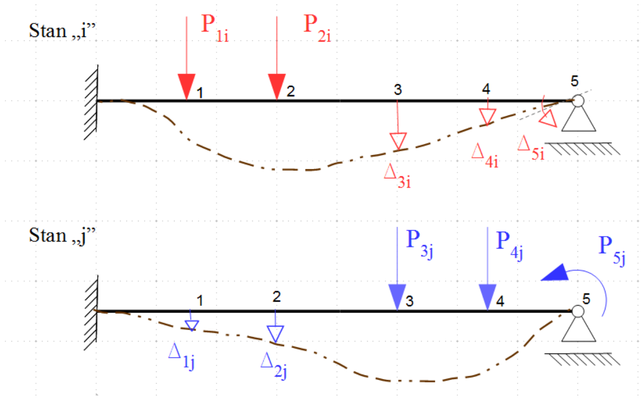
Twierdzenie Bettiego

Jeżeli na ustrój sprężysty działają dwa niezależne od siebie stany obciążeń spełniające warunki równowagi, to praca obciążeń jednego układu na przemieszczeniach wywołanych drugim układem obciążeń jest równa pracy obciążeń drugiego układu na przemieszczeniach wywołanych pierwszym układem obciążeń.

*Uwaga: Z uwagi na to, że stan rzeczywisty jest szczególnym przypadkiem stanu wirtualnego powyższe równanie opisujące twierdzenie Bettiego jest także słuszne dla dwóch różnych stanów rzeczywistych.

Przykłady

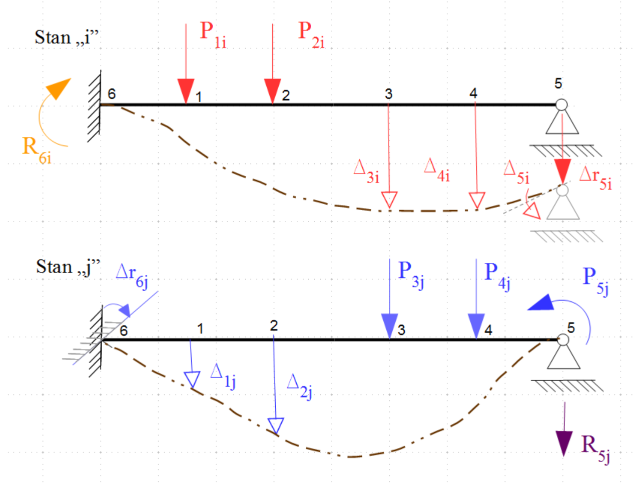
a)



$$P_{1i}\cdot\Delta_{1j}+P_{2i}\cdot\Delta_{2j} = P_{3j}\cdot\Delta_{3i}+P_{4j}\cdot\Delta_{4i}+P_{5j}\cdot\Delta_{5i}$$

$$\sum_{n=1}^{2} P_{ni}\ \Delta_{n\,j} = \sum_{k=3}^{5} P_{kj}\ \Delta_{k\,i}$$

b)



$$P_{1i}\cdot\Delta_{1j}+P_{2i}\cdot\Delta_{2j}+R_{6i}\cdot\Delta_{r\,6j} = P_{3j}\cdot\Delta_{3i}+P_{4j}\cdot\Delta_{4i}+\ P_{5j}\cdot\Delta_{5i} + R_{5j}\cdot\Delta_{r\,5i}$$

$$\sum_{n=1}^{2} P_{ni}\ \Delta_{n\,j}\ +\sum_{m=6}^{6} R_{mi}\ \Delta_{r_{m\,j}} = \sum_{k=3}^{5} P_{kj}\ \Delta_{k\,i}\ +\sum_{m=5}^{5} R_{mj}\ \Delta_{r_{m\,i}}$$

• Twierdzenie o wzajemności przemieszczeń (twierdzenie Maxwella)

- szczególny przypadek twierdzenia Bettiego

➢ Założenia ograniczające twierdzenie Bettiego

- W *stanie „i”* obciążeń i przemieszczenie:
  - podpory nie ulegają przesunięciom $\boldsymbol{\Delta_{r_{m\,i}}=0}$
  - działają jedynie siły jednostkowe $\boldsymbol{P_{n\,i}\ =1_{n\,i}}$

- W *stanie „j”* obciążeń i przemieszczenie:
  - podpory nie ulegają przesunięciom $\boldsymbol{\Delta_{r_{m\,j}}=0}$
  - działają jedynie siły jednostkowe $\boldsymbol{P_{k\,j}\ =1_{k\,j}}$

- Przekształcenie twierdzenie Bettiego po przyjętych założeniach:

$$\sum_n P_{n\,i}\ \Delta_{n\,j} + \sum_m R_{m\,i}\ \Delta_{r_{m\,j}} = \sum_k P_{k\,j}\ \Delta_{k\,i} + \sum_m R_{m\,j}\ \Delta_{r_{m\,i}}$$

$$\sum_n P_{n\,i}\ \Delta_{n\,j} = \sum_n P_{k\,j}\ \Delta_{k\,i}$$

$$\sum_n 1_{n\,i}\ \delta_{n\,\boldsymbol{j}} = \sum_n 1_{k\,j}\ \delta_{k\,\boldsymbol{i}}$$

Ostatecznie:

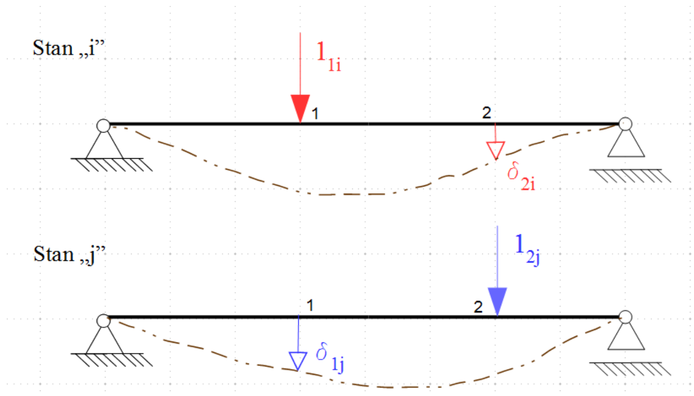
$$\boxed{\delta_{ij} = \delta_{ji}}$$

Twierdzenie o wzajemności przemieszczeń

Przemieszczenie w miejscu i na kierunku „i” wywołane jednostkowym obciążeniem działającym w miejscu i na kierunku „j” jest równe przemieszczeniu w miejscu i na kierunku „j” wywołanym jednostkowym obciążeniem działającym w miejscu i na kierunku „i”.

Przykłady

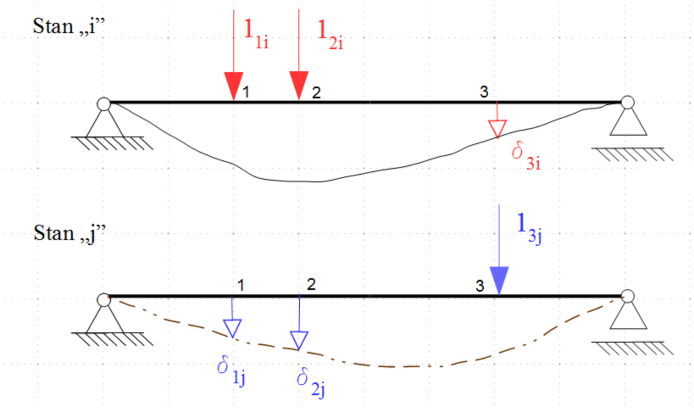
a)



$$1_{\,1i} \cdot \delta_{1j} = 1_{\,2j} \cdot \delta_{2i}$$

$$\delta_{1j} = \delta_{2i}$$

b)



$$1_{\,1i} \cdot \delta_{1j} + 1_{\,2i} \cdot \delta_{2j} = 1_{\,3j} \cdot \delta_{3i}$$

$$\delta_{ij} = \delta_{ji}$$

• Twierdzenie o wzajemności reakcji (twierdzenie Rayleigha)

- szczególny przypadek twierdzenia Bettiego

➢ Założenia ograniczające twierdzenie Bettiego

- W *stanie „i”* obciążeń i przemieszczenie:
  - obciążenia stanowią jednostkowe osiadania podpór $\Delta_{r_{m\,i}} = 1_{r_{m\,i}}$
  - siły obciążające są równe zero $P_{n\,i} = 0$
- W *stanie „j”* obciążeń i przemieszczenie:
  - obciążenia stanowią jednostkowe osiadania podpór $\Delta_{r_{m\,j}} = 1_{r_{m\,j}}$
  - siły obciążające są równe zero $P_{k\,j} = 0$

➢ Przekształcenie twierdzenie Bettiego po przyjętych założeniach:

$$\sum_n P_{n\,i}\ \Delta_{n\,j} + \sum_m R_{m\,i}\ \Delta_{r_{m\,j}} = \sum_k P_{k\,j}\ \Delta_{k\,i} + \sum_m R_{m\,j}\ \Delta_{r_{mi}}$$

$$\sum_m R_{m\,i}\ \Delta_{r_{m\,j}} = \sum_m R_{m\,j}\ \Delta_{r_{m\,i}}$$

$$\sum_n r'_{n\,i}\ 1_{r_{m\,j}} = \sum_n r'_{kj}\ 1_{r_{m\,i}}$$

<u>Ostatecznie:</u>

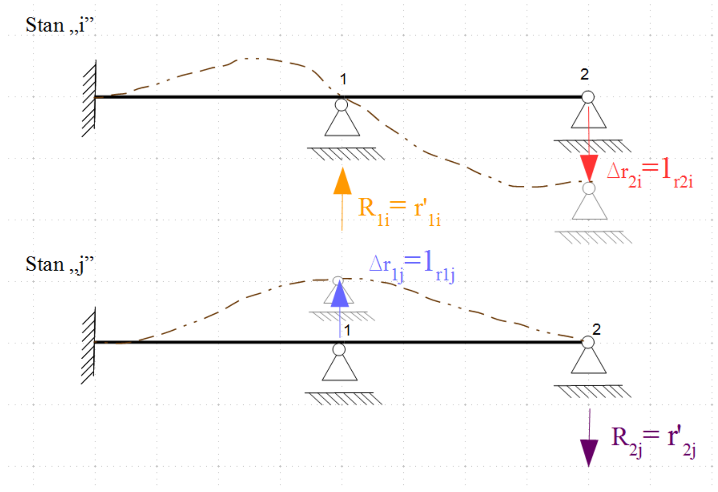
$$\boxed{r'_{ji} = r'_{ij}}$$

Twierdzenie o wzajemności reakcji

Reakcja w miejscu i na kierunku „j” wywołane jednostkowym przemieszczeniem zadanym w miejscu i na kierunku „i” jest równe reakcji w miejscu i na kierunku „i” wywołanej jednostkowym przemieszczeniem zadanym w miejscu i na kierunku „j”.

Przykłady

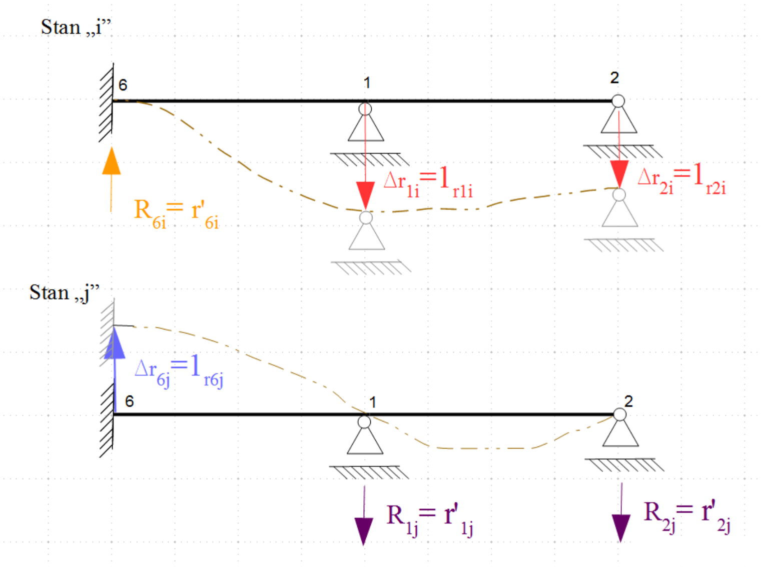
a)



$$1_{r\,2i} \cdot r'_{2j} = r'_{1i} \cdot 1_{r\,1j}$$

$$r'_{2j} = r'_{1i}$$

b)



$$1_{r\,1i}\cdot r'_{1j}+1_{r\,2i}\cdot r'_{2j} = r'_{6i}\cdot 1_{r\,6j}$$

$$r'_{ij}=r'_{ji}$$

- ## Twierdzenie o wzajemności reakcji i przemieszczeń

- szczególny przypadek twierdzenia Bettiego

➢ Założenia ograniczające twierdzenie Bettiego

- W *stanie „i"* obciążeń i przemieszczenie:
  - podpory nie ulegają przesunięciom $\boldsymbol{\Delta_{r_{m\,i}}=0}$
  - działają jedynie siły jednostkowe $\boldsymbol{P_{n\,i}=1_{n\,i}}$

- W *stanie „j"* obciążeń i przemieszczenie:
  - obciążenia stanowią jednostkowe osiadania podpór $\boldsymbol{\Delta_{r_{m\,j}}=1_{r_{m\,j}}}$
  - siły obciążające są równe zero $\boldsymbol{P_{k\,j}=0}$

➢ Przekształcenie twierdzenie Bettiego po przyjętych założeniach:

$$\sum_n P_{n\,i}\ \Delta_{n\,j}+\sum_m R_{m\,i}\ \Delta_{r_{m\,j}}=\sum_k P_{k\,j}\ \Delta_{k\,i}+\sum_m R_{m\,j}\ \Delta_{r_{mi}}$$

$$\sum_n P_{n\,i}\ \Delta_{n\,j}+\sum_m R_{m\,i}\ \Delta_{r_{m\,j}}=0$$

$$\sum_n P_{n\,i}\ \Delta_{n\,j}=-\sum_m R_{m\,i}\ \Delta_{r_{m\,j}}$$

$$\sum_n 1_{n\,i}\ \Delta_{n\,j}=-\sum_m R_{m\,i}\ 1_{r_{m\,j}}$$

$$\sum_n 1_{n\,i}\ \delta'_{nj}=-\sum_m r_{m\,i}\ 1_{r_{m\,j}}$$

<u>Ostatecznie:</u>

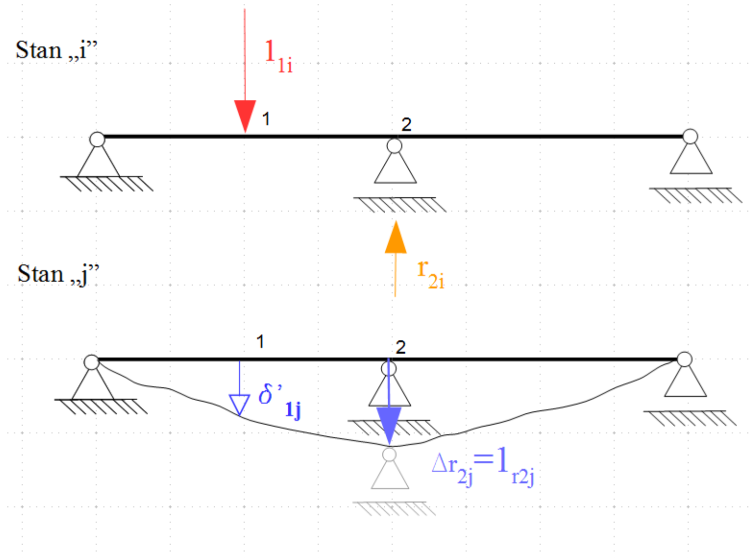
$$\boxed{\delta'_{ij} = -r_{ji}}$$

Twierdzenie o wzajemności reakcji i przemieszczeń

Przemieszczenie w miejscu i na kierunku „i" wywołane jednostkowym przemieszczeniem zadanym w miejscu i na kierunku „j" jest równe co do modułu ale przeciwna co do znaku reakcji w miejscu i na kierunku „j" wywołanej jednostkowym obciążeniem działającym w miejscu i na kierunku „i".

Przykłady

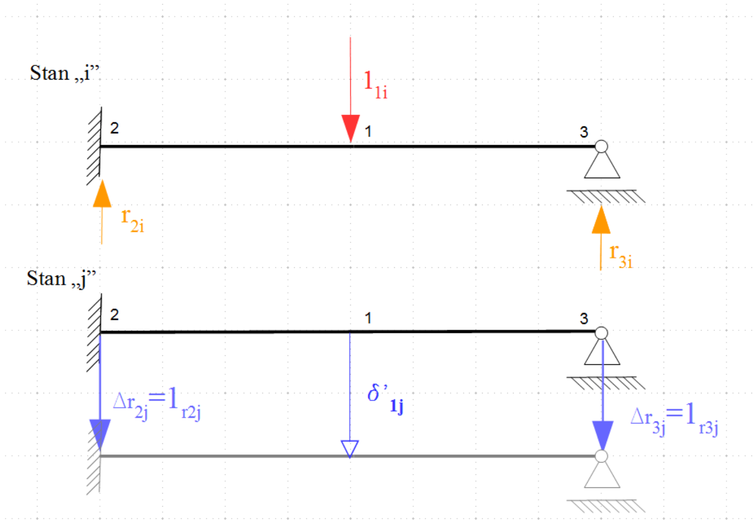
a)



$$1_{1i} \cdot \delta'_{1j} = -r_{2i} \cdot 1_{r\,2j}$$

$$\delta'_{ij} = -r_{ji}$$

b)



$$1_{1i} \cdot \delta'_{1j} = -r_{2i} \cdot 1_{r\,2j} - r_{3i} \cdot 1_{r\,3j}$$

$$\delta'_{ij} = -r_{ji}$$