

STATYKA BUDOWLI

„SB2”

materiały dydaktyczne

dla studentów Politechniki Wrocławskiej Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego

Opracowały:

dr hab. inż. Monika Podwórna, prof. uczelni

dr inż. Katarzyna Misiurek

dr inż. Olga Szyłko-Bigus

Wrocław, luty 2023 r

SPIS TREŚCI

SPIS TREŚCI.....	2
1. WPROWADZENIE	5
1.1. WARUNKI RÓWNOWAGI	6
1.1.1. Warunek równowagi sił i momentów	6
1.1.2. Warunek równowagi prac	6
1.2. PODSTAWOWE POJĘCIA	7
1.2.1. Statyczna dopuszczalność	7
1.2.2. Kinematyczna dopuszczalność	7
1.2.3. Więzy sprężyste	8
1.3. KINEMATYCZNA ANALIZA UKŁADÓW PŁASKICH.....	8
1.3.1. Statyczna wyznaczalność układu	9
1.3.2. Geometryczna niezmiennosc układu.....	9
1.3. UKŁADY STATYCZNIE WYZNACZALNE	10
1.4. UKŁADY STATYCZNIE NIEWYZNACZALNE.....	10
1.5. OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ	11
1.5.1. Zasada prac wirtualnych (przygotowanych).	11
1.5.2. Wzory numerycznego obliczania całek stosowane przy wyznaczaniu przemieszczeń	13
1.5.3. Algorytm obliczania przemieszczeń w układach statycznie wyznaczalnych	16
1.5.4. Algorytm obliczania przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczalnych przy zastosowaniu I twierdzenia redukcyjnego.....	17
1.6. METODY ROZWIĄZANIA UKŁADÓW STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH.....	17
1.6.1. Metoda sił.....	17
1.6.1.1. Układ podstawowy metody sił	18
1.6.1.2. Ogólna postać układu równań metody sił	19
1.6.1.3. Algorytm rozwiązania układu statycznie niewyznaczalnego (hiperstatycznego) z wykorzystaniem metody sił.....	20
1.6.2. Metoda przemieszczeń	22
1.6.2.1. Klasyfikacja prętów.....	22
1.6.2.2. Wzory transformacyjne	22
1.6.2.3. Określenie stopienia geometrycznej niewyznaczalności ustroju prętowego	23
1.6.2.4. Układ podstawowy metody przemieszczeń i jego rozwiązanie	24
1.6.2.5. Algorytm rozwiązania układu statycznie niewyznaczalnego (hiperstatycznego) z wykorzystaniem metody przemieszczeń	27

1.7. LINIE WPŁYWU	29
1.7.1. Informacje podstawowe	29
1.7.2. Algorytm sporządzania linii wpływu metodą statyczną.....	31
1.7.3. Algorytm sporządzania linii wpływu metodą kinematyczną	31
1.7.4. Obciążenie ruchome	32
2. PRZYKŁADY - UKŁADY STATYCZNIE WYZNACZALNE	33
2.1. RAMA	33
2.1.1. Sprawdzenie statycznej wyznaczalności i geometrycznej niezmienności układu	34
2.1.2. Rozwiązanie ramy od obciążenia mechanicznego	34
2.1.3. Rozwiązanie ramy od obciążenia temperaturą i osiadaniem podpory	35
2.1.4. Rozwiązanie ramy od obciążenia $P_u = 1 \text{ kN}$	36
2.1.5. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia $P_\varphi = 1 \text{ kNm}$	37
2.1.6. Wstępne projektowanie przekrojów prętów	38
2.1.7. Obliczenie szukanych przemieszczeń od obciążenia mechanicznego	39
2.1.8. Obliczenie szukanych przemieszczeń od obciążenia temperaturą	39
2.1.9. Obliczenie szukanych przemieszczeń od obciążenia osiadaniem podpory.....	39
2.1.9. Schematy przemieszczeń.....	40
2.2. KRATOWNICA.....	41
2.2.1. Sprawdzenie statycznej wyznaczalności i geometrycznej niezmienności układu	41
2.2.2. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia danego.....	42
2.2.3. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia $P_1=1 \text{ kN}$	44
2.2.4. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia $P_2=1 \text{ kNm}$	46
2.2.5. Wstępne projektowanie przekrojów prętów	48
2.2.6. Obliczenie szukanego przemieszczenia	49
2.2.7. Schematy przemieszczeń.....	50
3.PRZYKŁADY - UKŁADY STATYCZNIE NIETYCZNIE WYZNACZALNE.....	51
3.1. METODA SIŁ	51
3.1.1. Sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu i obliczenie stopnia statycznej niewyznaczalności.....	52
3.1.2. Przyjęcie układu podstawowego metody sił	52
3.1.3. Równania kanoniczne metody sił.....	53
3.1.4. Rozwiązanie ramy od obciążenia mechanicznego	53
3.1.6. Obliczenie przemieszczenia	67
3.2. METODA PRZEMIESZCZEŃ	70
3.2.1. Sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu i obliczenie stopnia statycznej niewyznaczalności.....	70
3.2.2. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu	71

3.2.3. Układ podstawowy metody przemieszczeń	73
3.2.4. Rozwiązanie układu podstawowego	74
3.2.5. Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń i jego rozwiązanie	80
3.2.6. Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów	82
3.2.7. Kontrola rozwiązania	87
3.3. PORÓWNANIE ROZWIĄZAŃ: METODA SIŁ I METODA PRZEMIESZCZEŃ	90
3.3.1. Sprawdzenie warunku ilościowego i jakościowego geometrycznej niezmienności układu	90
3.3.2. Rozwiązanie ramy z wykorzystaniem metody sił	91
3.3.3. Rozwiązanie ramy z wykorzystaniem Metody Przemieszczeń.....	96
3.3.4. Wyznaczenie szukanego przemieszczenia	104
4. PRZYKŁADY - LINIE WPŁYWU	106
4.1. RAMA	106
4.1.1. Metoda statyczna.....	106
4.1.2. Metoda kinematyczna	111
4.2. KRATOWNICA.....	115
4.2.1. Metoda statyczna.....	115
4.2.2. Metoda kinematyczna	120
4.3. OBCIĄŻANIE LINII WPŁYWU	127
5. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA	128
5.1. OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH SW.....	128
5.1.1. Rama.....	128
5.1.2. Kratownica	129
5.2. ROZWIĄZANIE UKŁADU SN Z WYKORZYSTANIEM MS.....	130
5.2.1. Dobór układu podstawowego metody sił	130
5.2.2. Wyznaczenie sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym	130
5.2.3. Obliczanie przemieszczeń w układzie statycznie niewyznaczalnym.....	131
5.3. ROZWIĄZANIE UKŁADU SN Z WYKORZYSTANIEM MP.....	133
5.3.1. Dobór układu podstawowego metody przemieszczeń	133
5.3.2. Wyznaczenie sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym	133
5.3. SPORZĄDZANIE LINII WPŁYWU	135
5.3.1. Kratownica płaska izostatyczna	135
5.3.2. Rama płaska izostatyczna.....	136
DODATKOWA LITERATURA KSIĄŻKOWA	137
SUPLEMENT	138

Bieżący materiał jest kontynuacją skryptu pt. **SB1**, opracowanego w ramach projektu pt.: *Atlas Zasobów Otwartej Nauki AZON*, jako pomoc dydaktyczna dla studentek i studentów Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego Politechniki Wrocławskiej.

1. WPROWADZENIE

Statyka budowli to dziedzina inżynierii, która zajmuje się analizowaniem konstrukcji budowlanych, takich jak budynki, mosty, kominy i inne. Nauka statyki jest istotna z punktu widzenia konstruktora, który analizuje czy konstrukcja będzie miała odpowiednią wytrzymałość, czy będzie stabilna i bezpieczna zarówno w normalnych warunkach, jak i w warunkach ekstremalnych. Statyka uwzględnia siły działające na obiekt budowlany, takie jak ciężar własny, obciążenia związane z użytkowaniem, obciążenia środowiskowe - wiatr, śnieg czy wpływy termiczne. Analiza statyczna jest kluczowym elementem projektowania konstrukcji budowlanych i pozwala inżynierom na określenie optymalnego rozwiązania konstrukcyjnego dla danej konstrukcji. Aby to osiągnąć, inżynierowie budowlani wykorzystują matematyczne modele i narzędzia, aby określić jak różne siły oddziałują na konstrukcję oraz jakie są skutki ich działania.

Przedmiot „Statyka Budowli” jest ważny dla studentów budownictwa, ponieważ jest to jeden z podstawowych przedmiotów, które umożliwiają zrozumienie teorii i praktyki projektowania oraz analizowania konstrukcji budowlanych. Ta wiedza jest niezbędna, aby umożliwić tworzenie stabilnych i bezpiecznych konstrukcji, które będą służyć ich użytkownikom przez wiele lat.

Warto wspomnieć o art. 5 u. 1 Ustawy *Prawo budowlane*:

1. Obiekt budowlany jako całość oraz jego poszczególne części, wraz ze związanymi z nim urządzeniami budowlanymi należy, biorąc pod uwagę przewidywany okres użytkowania, projektować i budować w sposób określony w przepisach, w tym techniczno-budowlanych, oraz zgodnie z zasadami wiedzy technicznej, zapewniając:

1) spełnienie podstawowych wymagań dotyczących obiektów budowlanych, dotyczących:

- a) **nośności i stateczności konstrukcji**,
- b) bezpieczeństwa pożarowego,
- c) higieny, zdrowia i środowiska,
- d) bezpieczeństwa użytkowania i dostępności obiektów,
- e) ochrony przed hałasem,
- f) oszczędności energii i izolacyjności cieplnej,
- g) zrównoważonego wykorzystania zasobów naturalnych.

Skrypt SB2, złożony z 5 części, napisany został z myślą o studentkach i studentach Wydziału Budownictwa Lądowego i Wodnego PWr, aby ułatwić im naukę *Statyki budowli*.

- Część 1 – krótkie wprowadzenie teoretyczne,
- Część 2 – rozwiązane przykłady płaskich układów statycznie wyznaczalnych,
- Część 3 – rozwiązane przykłady płaskich układów statycznie niewyznaczalnych,
- Część 4 – rozwiązane przykłady linii wpływów w płaskich ustrojach prętowych,
- Część 5 – przykłady do samodzielnego rozwiązania.

1.1. WARUNKI RÓWNOWAGI

Statyka budowli zajmuje się analizą wytrzymałościową ustrojów nośnych w stanie ich równowagi. Aby istniała równowaga układu muszą być spełnione odpowiednie warunki.

Warunki równowagi to zbiór matematycznych zasad, które muszą być spełnione, aby konstrukcja budowlana była w stanie zachować równowagę i bezpieczeństwo. Są to warunki, które określają, jak różne siły oddziałują na konstrukcję i jak one na siebie wpływają.

1.1.1. Warunek równowagi sił i momentów

Konstrukcja jest w równowadze sił i momentów, jeżeli jednocześnie dla każdego rozpatrywanego ustroju spełnione są warunki równowagi sił i momentów, tzn. by siła ogólna i moment ogólny wszystkich sił (zewnętrznych i wewnętrznych) działających na dany element równały się zero.

[por. SB1].

W płaskim układzie sił sprowadza się to do trzech równań równowagi:

- suma rzutów wszystkich sił na dwie prostopadłe osie równa się zero:

$$\sum S_X = 0,$$

$$\sum S_Y = 0,$$

gdzie: $S = P + F$ (P – siły zewnętrzne, F – siły wewnętrzne),

- suma momentów wszystkich sił względem dowolnego punktu równa się zero:

$$\sum M_0 = 0.$$

1.1.2. Warunek równowagi prac

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi jakiegokolwiek układu materialnego jest to, by suma prac wszystkich sił – zewnętrznych (P) i wewnętrznych (F) działających na układ i pracujących na dowolnych przemieszczeniach tego układu była równa zero.

$$\delta L_P + \delta L_F = 0$$

gdzie: δL_P – przyrost pracy sił zewnętrznych,

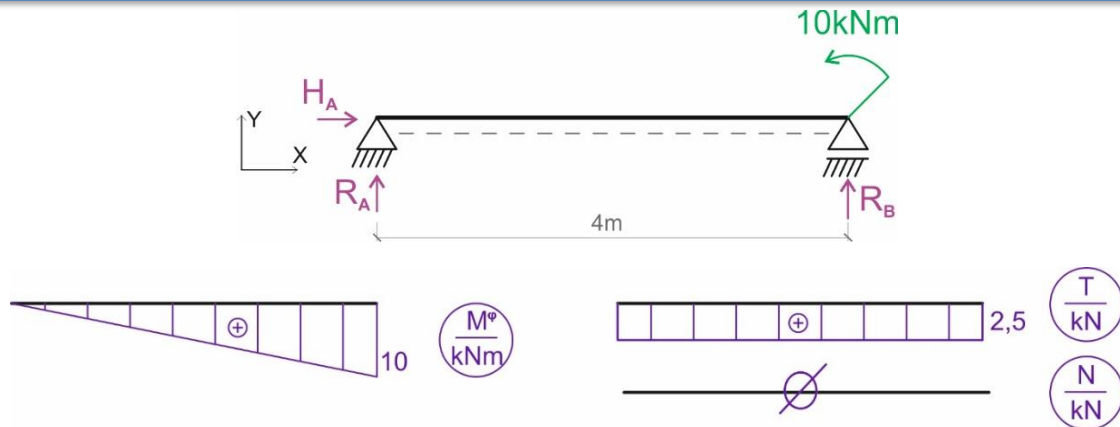
δL_F – przyrost pracy sił wewnętrznych.

Te warunki są podstawowymi narzędziami używanymi do analizy i projektowania konstrukcji budowlanych. Służą one do określenia, jak różne siły oddziałują na konstrukcję i jakie są ich skutki, co umożliwia optymalne zaprojektowanie konstrukcji.

1.2. PODSTAWOWE POJĘCIA

1.2.1. Statyczna dopuszczalność

Sily przekrojowe - momenty M , sily tnące T (lub V), sily osiowe N oraz reakcje podporowe R , które wraz z obciążeniem spełniają warunki równowagi sił są statycznie dopuszczalne.



Rys. 1.1. Schemat statyczny belki swobodnie podpartej wraz z wykresami sił przekrojowych

Reakcje podporowe: $\sum X = 0 \rightarrow H_A = 0$

$$\sum M_B = 0 \rightarrow R_A \cdot 4 \text{ m} - 1 \text{ kNm} = 0 \rightarrow R_A = -0,25 \text{ kN}$$

$$\sum Y = 0 \rightarrow R_A + R_B = 0 \rightarrow R_B = 0,25 \text{ kN}$$

Rozwiązania momentów, sił tnących i osiowych są statycznie dopuszczalne - wszystkie siły są w równowadze. Na żadnym etapie rozwiązania nie wystąpiły niejednoznaczności.

1.2.2. Kinematyczna dopuszczalność

Gdy przemieszczenia i odkształcenia wraz z przemieszczeniami kinematycznymi (np. osiadaniem podpór) spełniają następujące warunki:

- ➔ warunki podparcia (warunki ograniczające swobodę ruchu) - spełnienie warunków podparcia polega na tym, że układ odkształcony nie narusza ciągłości między konstrukcją, a nałożonymi więzami podporowymi,
- ➔ warunki ciągłości wewnętrznej - spełnienie warunków ciągłości wewnętrznej polega na tym, że układ odkształcony musi być ciągły i gładki we wszystkich punktach z wyjątkiem punktów, w których więzi wewnętrzne dopuszczają nieciągłość lub w punktach, w których nieciągłość jest zadana,

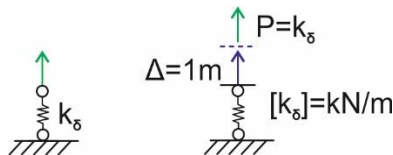
wówczas są kinematycznie dopuszczalne.

1.2.3. Wieże sprężyste

W niektórych konstrukcjach sposób podparcia lub zamocowania z podłożem, a także sposób połączenia elementów w schemacie statycznym modeluje się elementami konstrukcji zwanymi **wieżami (wieżami) sprężystymi**. Wprowadzają one sprężystość do układu i są stosowane, aby uzyskać dodatkową wytrzymałość i elastyczność konstrukcji, a także, aby zapobiec jej zerwaniu lub złamaniu w wyniku działania sił obciążających. Charakterystyką wieży sprężystych jest jej sztywność k_s , która jest równa sile lub momentowi powodującemu jednostkowe odkształcenie.

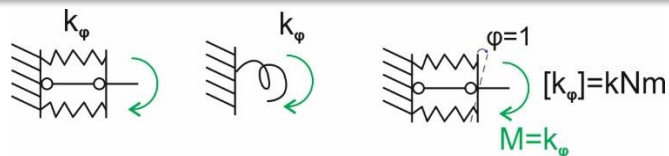
Rozróżniamy dwa rodzaje wieży sprężystych:

→ **wieże translacyjne** przenoszące tylko siły translacyjne. Sztywność wieży sprężystej translacyjnej wyrażana jest jako siła potrzebna do ściśnięcia bądź rozciągnięcia wieży o 1 m:
 $[k_\delta] = \left[\frac{\text{kN}}{\text{m}} \right]$.



Rys. 1.2. Wież sprężysta translacyjna

→ **wieże rotacyjne** przenoszące momenty zginające. Sztywność wieży sprężystej rotacyjnej wyrażana jest jako moment potrzebny do obrotu wieży o 1 rad: $[k_\varphi] = \left[\frac{\text{kNm}}{\text{rad}} \right]$.



Rys. 1.3. Wież sprężysta rotacyjna

1.3. Kinematyczna analiza układów płaskich

Analiza kinematyczna służy do określenia czy dany układ spełnia wszystkie warunki, aby być konstrukcją budowlaną. Od konstrukcji budowlanej wymaga się, aby nie była mechanizmem i pozostała nieruchoma pod wpływem obciążenia.

Aby spełnić te warunki należy odebrać jej wszystkie stopnie swobody. Robi się to przymocowując tarcze sztywne do nieruchomej tarczy podporowej (ostoi) za pomocą wieżów (wieży).

W przypadku rzeczywistych konstrukcji, tarczą podporową jest na przykład podłoże gruntowe. **Celem analizy kinematycznej jest sprawdzenie geometrycznej niezmienności oraz statycznej wyznaczalności układu.**

1.3.1. Statyczna wyznaczalność układu

Warunek statycznej wyznaczalności (SW) układu, zwany też *warunkiem ilościowym* jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym:

$$n_h = e - 3 \cdot t$$

gdzie, e – liczba wszystkich więzi w układzie, t – liczba tarcz otwartych.

W przypadku kratownicy płaskiej warunek statycznej wyznaczalności układu przyjmuje postać:

$$n_h = p + r - 2w$$

gdzie:

w – liczba węzłów,

p – liczba prętów,

r – liczba więzi podporowych.

Gdy $n_h = 0$ – analizowany układ jest statycznie wyznaczalny

gdy $n_h > 0$ – analizowany układ jest statycznie niewyznaczany (przesztywniony).

gdy $n_h < 0$ – analizowany układ jest geometrycznie zmienny.

[por. SB1].

1.3.2. Geometryczna niezmiennność układu

Warunek geometrycznej niezmienności układu zwany jest też *warunkiem jakościowym*. Układ tarcz nazywamy *geometrycznie niezmiennym* (GN), jeśli jest nieruchomy względem ostoi.

Najczęściej, do stwierdzenia GN układu stosowane są 2 podstawowe twierdzenia:

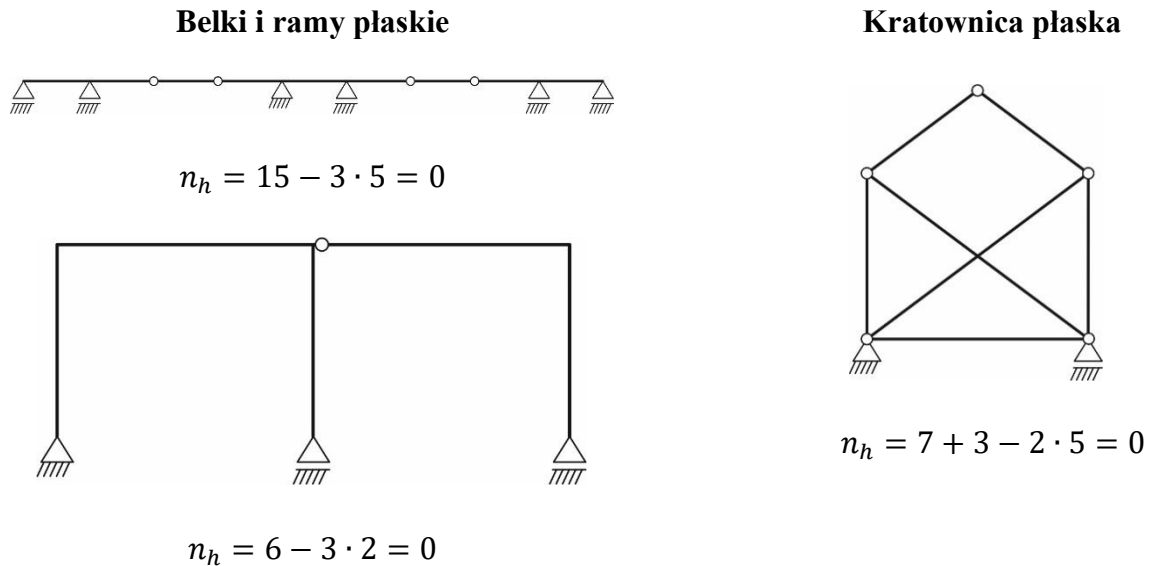
a) Twierdzenie o dwóch tarczach - Dwie tarcze tworzą jedną wspólną tarczę, gdy są połączone jednocześnie trzema niezbieżnymi i nierównoległymi więziami elementarnymi.

b) Twierdzenie o trzech tarczach – *Twierdzenie Aronholdta* - Trzy tarcze tworzą jedną wspólną tarczę, gdy są połączone między sobą (każda z każdą) dwoma więziami elementarnymi, których środki obrotu nie leżą na jednej prostej.

[por. SB1].

1.3. UKŁADY STATYCZNIE WYZNACZALNE

Układy statycznie wyznaczalne, to takie układy konstrukcyjne, które można rozwiązać, tzn. wyznaczyć reakcje podporowe oraz siły wewnętrzne (momenty, siły tnące oraz osiowe) z warunków równowagi. Stopień statycznej niewyznaczalności w tych układach wynosi 0 ($n_h = 0$).

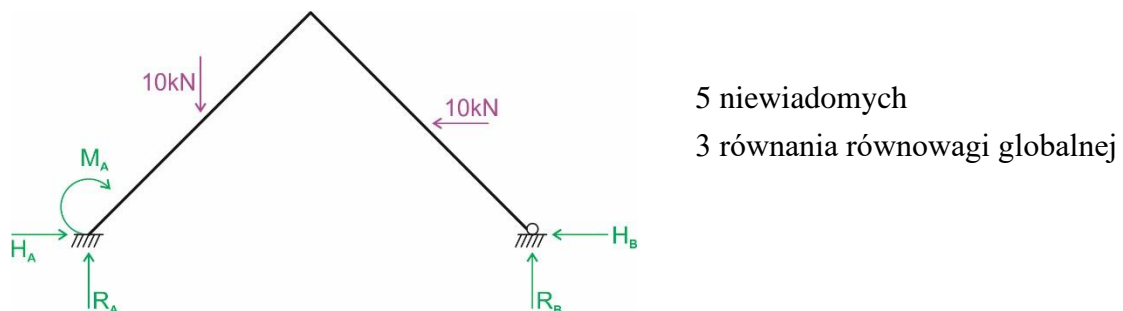


Rys. 1.4. Układy statycznie wyznaczalne

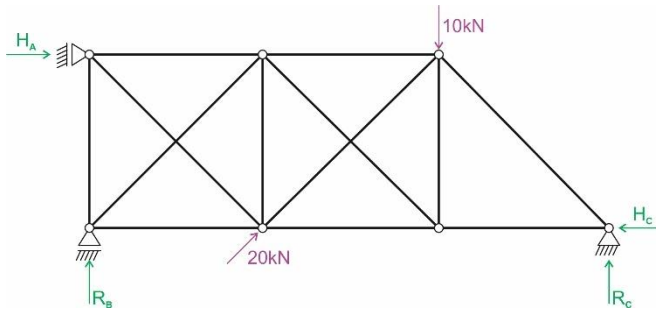
1.4. UKŁADY STATYCZNIE NIWYZNACZALNE

Układy statycznie niewyznaczalne to takie układy, w których liczba niewiadomych reakcji podporowych jest większa niż liczba równań równowagi.

Układy SN to takie układy konstrukcyjne można rozwiązać – wyznaczyć reakcje podporowe oraz siły wewnętrzne z warunków równowagi oraz dodatkowych warunków w zależności od przyjętego sposobu rozwiązania. Stopień statycznej niewyznaczalności w tych układach jest większy od 0 ($n_h > 0$).



Rys. 1.5. Rama statycznie niewyznaczalna (SN)



$$p = 13, r = 4, w = 7$$

$$p + r = 13 + 4 = 17 - \text{liczba niewiadomych}$$

$$2w = 2 \cdot 7 = 14 - \text{liczba równań równowagi}$$

Rys. 1.6. Kratownica statycznie niewyznaczalna (SN)

Stopień statycznej niewyznaczalności jest równy liczbie dodatkowych równań, które wraz z liczbą równań równowagi sił umożliwiają wyznaczenie wszystkich niewiadomych wielkości statycznych (reakcji i sił przekrojowych) w układzie statycznie niewyznaczalnym (SN) i geometrycznie niezmiennym (GN).

Podstawowe cechy układów statycznie niewyznaczalnych:

- wartości sił przekrojowych w układach statycznie niewyznaczalnych zależą od sztywności elementów (charakterystyk materiałowych i geometrycznych przekrojów) z jakich składa się układ;
- w ustrojach statycznie niewyznaczalnych rozwiązań statycznie dopuszczalnych może być nieskończenie wiele.

1.5. OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ

1.5.1. Zasada prac wirtualnych (przygotowanych).

Zasady prac wirtualnych (przygotowanych) należą do podstawowych zasad mechaniki budowli

Istnieją dwie zasady prac wirtualnych:

- I - zasada pracy rzeczywistych obciążeń na wirtualnych przemieszczeniach,
- II - zasada pracy wirtualnych obciążeń na rzeczywistych przemieszczeniach.

Szczegółowo omówiona zostanie II zasada prac wirtualnych, która wykorzystywana będzie w dalszych przykładach analitycznych.

Analizie poddany zostanie dowolny ustrój prętowy, poddany działaniu obciążeń rzeczywistych, którymi mogą być siły zewnętrzne (siły skupione, momenty skupione, obciążenie rozłożone, zmiany temperatury lub przemieszczenia podpór).

Obciążenia te wywołują w układzie *rzeczywiste siły przekroje* (wewnętrzne) oraz *rzeczywiste przemieszczenia* Δ_P , w tym przemieszczenia podpór Δ_R i odkształcenia $\Delta\varphi$, Δds , Δdh . Dla

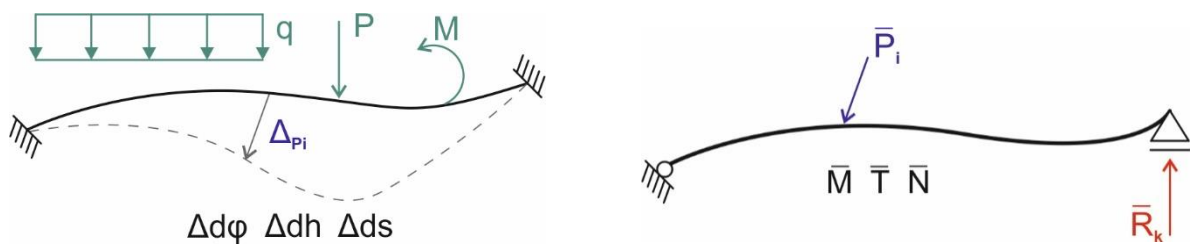
płaskiego układu prętowego siłami przekrojowymi są: moment zginający M , siły podłużne – osiowe N oraz siły poprzeczne – tnące T lub V .

Następnie układ prętowy obciążony został układem sił wirtualnych \bar{P}_i wywołujących *wirtualne reakcje* \bar{R}_k i *wirtualne siły przekrojowe* \bar{M} , \bar{T} oraz \bar{N} . Dla sił \bar{P}_i stanu wirtualnego zakłada się, że spełniają one wraz z reakcjami \bar{R}_k warunki równowagi statycznej. Co ważne, obciążenie wirtualne \bar{P}_i oraz odpowiadające mu reakcje \bar{R}_k nie muszą spełniać warunków granicznych i ciągłości konstrukcji. Jest to istotne, gdyż dla układów hiperstatycznych (statycznie niewyznaczalnych) można przyjąć różne reakcje wirtualne, które są w równowadze z wirtualnym obciążeniem (można np. przekształcić układ statycznie niewyznaczalny w dowolny układ statycznie wyznaczalny i jednocześnie geometrycznie niezmienny).

II Zasada Prac Wirtualnych

Praca zewnętrznych sił wirtualnych \bar{P}_i na rzeczywistych przemieszczeniach Δ_P i Δ_R jest równa pracy wirtualnych sił przekrojowych (\bar{M} , \bar{T} , \bar{N} , \bar{S}_s) na rzeczywistych odkształceniach ($\Delta\varphi$, Δds , Δdh).

$$\sum_i \bar{P}_i \cdot \Delta_{P_i} + \sum_k \bar{R}_k \cdot \Delta_{R_k} = \int \bar{M} \cdot \Delta d\varphi + \int \bar{N} \cdot \Delta ds + \int \bar{T} \cdot \Delta dh + \sum_s \frac{\bar{S}_s \cdot S_s}{k_s}$$



Rys. 1.7. Druga Zasada Prac Wirtualnych

$$\Delta d\varphi = \frac{M^F}{EI} ds,$$

$$\Delta ds = \frac{N^F}{EA} ds,$$

$$\Delta dh = \kappa \frac{T^F}{GA} ds.$$

E – moduł Younga, G – moduł Kirchhoffa, A – pole przekroju, I – moment bezwładności przekroju pręta względem osi obojętnej, współczynnik κ zależny od kształtu przekroju poprzecznego pręta, M^F , N^F , T^F – rzeczywiste siły przekrojowe.



W przypadku **obciążenia temperaturą**, II zasada prac wirtualnych w wersji uproszczonej (z pominięciem wpływu sił tnących i osiowych przy całkowaniu wykresów funkcji) wyrażona jest wzorem:

$$\sum_i \bar{P}_i \cdot \Delta P_i = \int \bar{M} \cdot \Delta d\varphi + \sum_s \frac{\bar{s}_s \cdot s_s^T}{k_s} + \sum_p \alpha_T \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}^i} + \sum_p \alpha_T \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}^i}.$$

α_T – współczynnik rozszerzalności termicznej materiału, h - wysokość przekroju kształtownika, ΔT_w – temperatura w włóknach wyróżnionych, ΔT_p - temperatura w włóknach przeciwnych do wyróżnionych, ΔT_0 – temperatura w osi pręta, $\Omega_{\bar{M}^i}$ - pole wykresu momentu zginającego w stanie wirtualnym, $\Omega_{\bar{N}^i}$ - pole wykresu siły osiowej w stanie wirtualnym.



W przypadku **osiadania podpór**, II zasada prac wirtualnych w wersji uproszczonej (z pominięciem wpływu sił tnących i osiowych przy całkowaniu wykresów funkcji) wyrażona jest wzorem:

$$\sum_i \bar{P}_i \cdot \Delta P_i = \int \bar{M} \cdot \Delta d\varphi + \sum_s \frac{\bar{s}_s \cdot s_s^\Delta}{k_s} - \sum_i \bar{R}_k \cdot \Delta R_k.$$

Uwaga: W literaturze zamiast terminu „wirtualne” zamiennie używany jest termin „przygotowane”, np. przemieszczenia przygotowane, obciążenia przygotowane, zasady prac przygotowanych.

1.5.2. Wzory numerycznego obliczania całek stosowane przy wyznaczaniu przemieszczeń

Całki występujące we wzorach stosowanych do wyznaczania przemieszczeń mogą być obliczane jako sumy całek obliczanych w przyjętych przedziałach całkowania, dla których sztywność pręta EI jest stała na długości przedziału.

$$\int \frac{M^i \cdot M^F}{EI} dx = \sum_j \int_{L_j} \frac{M^i \cdot M^F}{EI_j} dx = \sum_j \frac{1}{EI_j} \int_{L_j} F(x) \cdot f(x) \cdot dx,$$

gdzie $F(x) = M^F$, $f(x) = M^i$, $EI_j = \text{const}$.

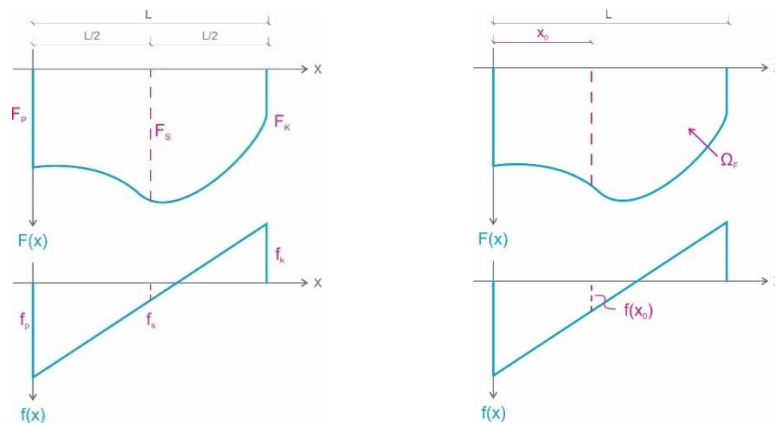
Funkcje $F(x)$ i $f(x)$ mogą ogólnie oznaczać siły przekrojowe – momenty zginające, siły osiowe lub siły tnące. Jeśli funkcje podcałkowe spełniają podane poniżej warunki to wyniki uzyskane z zastosowaniem tych wzorów są wynikami dokładnymi:

- funkcja $f(x)$ jest ciągła i gładka (ma ciągłą pochodną) i jest co najwyżej liniowa,
- funkcja $F(x)$:

➡ we **wzorze Simpsona** jest ciągła i gładka wraz z pochodnymi i najwyżej drugiego stopnia (parabola)

➡ we **wzorze trapezów** jest ciągła i gładka i najwyżej pierwszego stopnia (funkcja liniowa)

➡ we **wzorze Mohra (Wereszczagina)** jest dowolna ale taka, dla której znane jest położenie środka ciężkości (współrzędna x_0).



Rys. 1.8. Funkcje podcałkowe stosowane do wyznaczenia przemieszczenia

Wzór Simpsona

$$\int F(x) \cdot f(x) \cdot dx = \frac{L}{6} (F_p \cdot f_p + 4 \cdot F_s \cdot f_s + F_k \cdot f_k)$$

Wzór trapezów

$$\int F(x) \cdot f(x) \cdot dx = \frac{L}{6} [2 \cdot (F_p \cdot f_p + F_k \cdot f_k) + F_p \cdot f_k + F_k \cdot f_p]$$

Wzór Mohra (Wereszczagina)

$$\int F(x) \cdot f(x) \cdot dx = \Omega_F \cdot f(x_0)$$

F_p, f_p – wartość funkcji na początku przedziału

F_s, f_s – wartość funkcji w środku przedziału

F_k, f_k – wartość funkcji na końcu przedziału

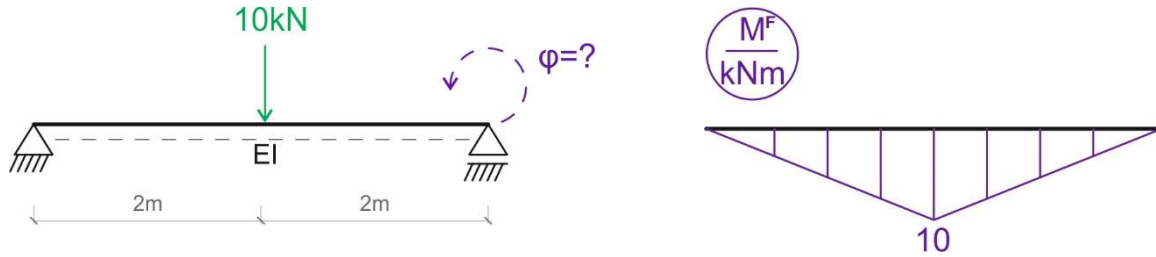
Ω_F – pole wykresu funkcji $F(x)$

$f(x_0)$ – wartość funkcji $f(x)$ w punkcie x_0 , w którym znajduje się środek ciężkości funkcji

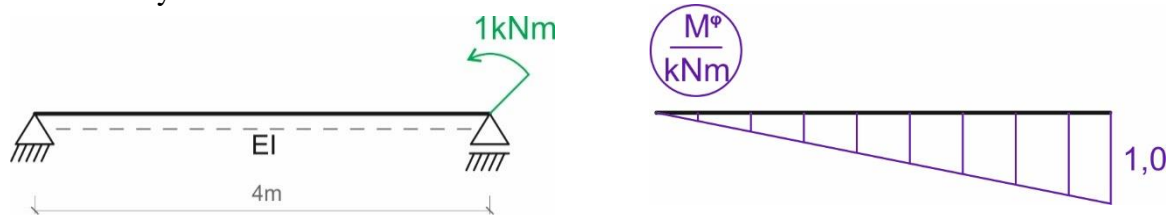
L – długość przedziału całkowania.

Przykład: Wyznaczyć obrót węzła na prawej podporze.

Stan rzeczywisty



Stan wirtualny



Rys. 1.9. Schemat układu

Należy zauważyć, że funkcja momentu dla obciążenia rzeczywistego nie jest ciągła na całej długości pręta. Funkcja ta jest ciągła na 2 przedziałach – od 0 do 2m i od 2m do 4m długości pręta. Przy obliczaniu przemieszczenia z wykorzystaniem wzoru Simpsona i trapezów, funkcje momentów zostaną podzielone na 2 przedziały całkowania.

Wzór Simpsona:

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_{\varphi} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{2m}{6} (1 \text{ kNm} \cdot 0 + 4 \cdot 0,75 \text{ kNm} \cdot 5 \text{ kNm} + 0,5 \text{ kNm} \cdot 10 \text{ kNm}) +$$

$$\frac{1}{EI} \cdot \frac{2m}{6} (0,5 \text{ kNm} \cdot 10 \text{ kNm} + 4 \cdot 0,25 \text{ kNm} \cdot 5 \text{ kNm} + 0 \cdot 0) = \left(\frac{20}{3} + \frac{10}{3}\right) \frac{(\text{kNm})^2 \cdot m}{EI} =$$

$$10 \frac{(\text{kNm})^2 \cdot m}{EI},$$

Wzór Trapezów:

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_{\varphi} = \frac{1}{EI} \cdot \frac{2m}{6} [2 \cdot (1 \text{ kNm} \cdot 0 + 0,5 \text{ kNm} \cdot 10 \text{ kNm}) + 0 \cdot 0,5 \text{ kNm} + 10 \text{ kNm} \cdot$$

$$1 \text{ kNm}] + \frac{1}{EI} \cdot \frac{2m}{6} [2 \cdot (10 \text{ kNm} \cdot 0,5 \text{ kNm} + 0 \cdot 0) + 0 \cdot 0,5 \text{ kNm} + 10 \text{ kNm} \cdot 0] =$$

$$\left(\frac{20}{3} + \frac{10}{3}\right) \frac{(\text{kNm})^2 \cdot m}{EI} = 10 \frac{(\text{kNm})^2 \cdot m}{EI},$$

Wzoru Mohra (Wereszczagina)

W przypadku obliczenia przemieszczenia z wykorzystaniem wzoru Mohra (Wereszczagina) nie ma konieczności podziału na dodatkowe przedziały całkowania, gdyż znane jest pole trójkąta równoramiennego dla funkcji M^F oraz położenia środka ciężkości figury ($x_0 = 2m$). Stąd:

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_\varphi = \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ m} \cdot 10 \text{ kNm} \cdot 0,5 \text{ kNm} = 10 \frac{(\text{kNm})^2 \cdot \text{m}}{EI}.$$

Ostatecznie, w każdym z analizowanych wzorów całkowych obrót węzła B wynosi $\Delta_\varphi = 10 \frac{\text{kNm}^2}{EI}$.

1.5.3. Algorytm obliczania przemieszczeń w układach statycznie wyznaczalnych**1. Rozwiązanie układu od obciążenia danego,**

- obliczenie reakcji podporowych R^F ,
- obliczenie sił w więziach sprężystych S_n^F (jeśli występują w układzie),
- obliczenie rzędnych charakterystycznych i sporządzenie wykresu momentów zginających M^F w ramie lub belce; w przypadku kratownicy - obliczenie i zestawienie sił osiowych N^F .

2. Rozwiązanie układu od obciążenia jednostkowego (wirtualnego) działającego w miejscu i na kierunku poszukiwanego przemieszczenia Δ_i ,

- obliczenie reakcji podporowych \bar{R}^i ,
- obliczenie sił w więziach sprężystych \bar{S}_n^i (jeśli występują w układzie),
- obliczenie rzędnych charakterystycznych i sporządzenie wykresu momentów zginających \bar{M}^i w ramie lub belce; w przypadku kratownicy - obliczenie i zestawienie sił osiowych \bar{N}^i .

3. Obliczenie poszukiwanego przemieszczenia od obciążenia mechanicznego ze wzoru

$$\Delta_i^F = \int \frac{M^i M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{S_n^i S_n^F}{k_n} \quad \text{w ramach i belkach}$$

$$\Delta_i^F = \sum_p \left(\frac{N^i N^F}{EA} L \right)_p + \sum_n \frac{S_n^i S_n^F}{k_n} \quad \text{w kratownicach}$$

4. Obliczenie poszukiwanego przemieszczenia od obciążenia temperaturą ze wzoru

$$\Delta_i^T = \sum_p \left(\alpha_T \cdot \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \cdot \Omega_{M^i} \right) + \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta T_0 \cdot \Omega_{N^i} \right) \quad \text{w ramach i belkach}$$

$$\Delta_i^T = \sum_p \left(\alpha_T \cdot \Delta T_0 \cdot N^i \right)_p \quad \text{w kratownicach.}$$

5. Obliczenie poszukiwanego przemieszczenia od osiadania podpór ze wzoru

$$\Delta_i^A = - \sum_r R^i \cdot \Delta r \quad \text{w ramach, belkach i kratownicach.}$$

1.5.4. Algorytm obliczania przemieszczeń w układach statycznie niewyznaczalnych przy zastosowaniu I twierdzenia redukcyjnego

1. Rozwiązanie układu statycznie niewyznaczalnego od obciążenia danego – metodą sił, metodą przemieszczeń lub inną

- obliczenie reakcji podporowych R^F i sił w więziach sprężystych S_n^F ,
- obliczenie rzędnych charakterystycznych i sporządzenie wykresu momentów zginających M^F w ramie i belce lub obliczenie i zestawienie sił osiowych N^F w kratownicy.

2. Rozwiązanie układu statycznie wyznaczalnego od obciążenia jednostkowego P_i działającego w miejscu i kierunku poszukiwanego przemieszczenia Δ_i ,

- obliczenie reakcji podporowych \bar{R}^i i sił w więziach sprężystych \bar{S}_n^i ,
- obliczenie rzędnych charakterystycznych i sporządzenie wykresu momentów zginających \bar{M}^i w ramie i belce lub obliczenie i zestawienie sił osiowych \bar{N}^i w kratownicy.

3. Obliczenie poszukiwanego przemieszczenia ze wzoru

- w ramach i belkach

$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i S_n^F}{k_n} + \sum_p \alpha_T \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}^i} + \sum_p \alpha_T \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}^i} - \sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n$$

- w kratownicach

$$\Delta_{iF} = \sum_p \left(\frac{\bar{N}^i N^F}{EA} L \right)_p + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i S_n^F}{k_n}$$

1.6. METODY ROZWIĄZANIA UKŁADÓW STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH

Aby móc rozwiązać w zakresie sił wewnętrznych i przemieszczeń układ statycznie niewyznaczalny i geometrycznie niezmienny należy wyznaczyć dodatkowych n_h równań, które wraz z równaniami równowagi sił pozwolą wyznaczyć wszystkie niewiadome siły statyczne. Sposób definiowania tych dodatkowych n_h równań uzależniony jest od wyboru metody analizy układu statycznie niewyznaczalnego.

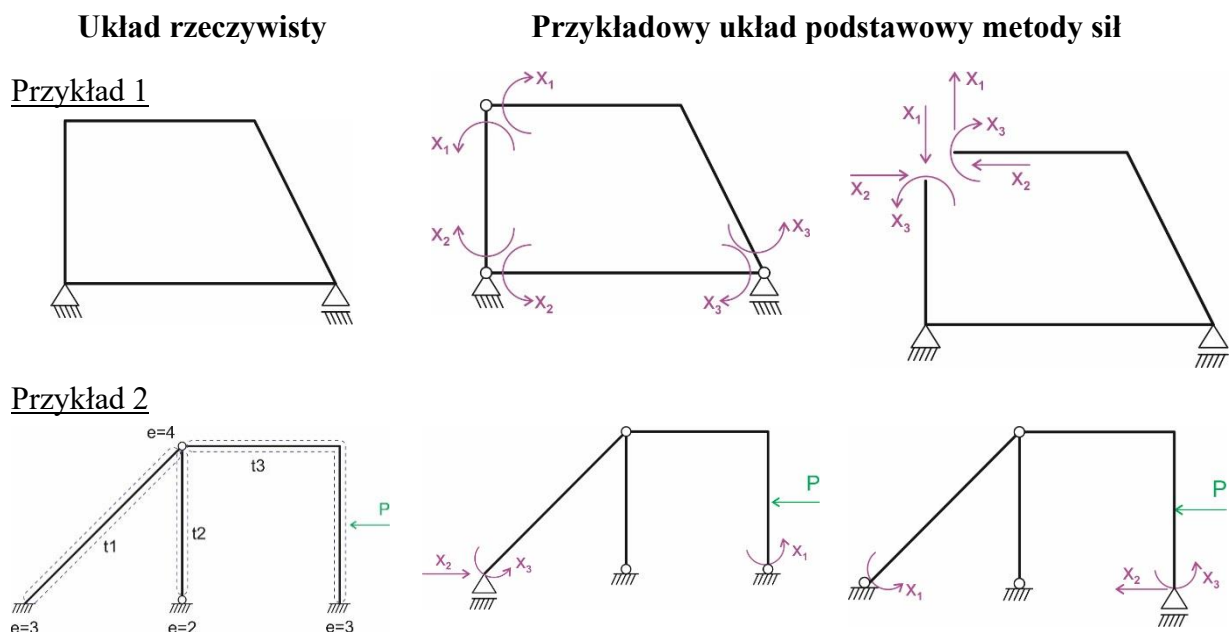
1.6.1. Metoda sił

Metoda sił jest jedną z metod wyznaczania rzeczywistych sił w układach statycznie niewyznaczalnych. Metoda ta służy do bezpośredniego wyznaczania sił w nadliczbowych więziach konstrukcji. W metodzie sił sposób definiowania dodatkowych n_h równań ma charakter kinematyczny – zgodność przemieszczeń w miejscu i na kierunku więzi hiperstatycznych.

1.6.1.1. Układ podstawowy metody sił

Niewiadomymi w metodzie sił są nadliczbowe siły, np. reakcje. Liczba niewiadomych odpowiada stopniowi statycznej niewyznaczalności ustroju. W metodzie sił należy dokonać uwolnienia ustroju rzeczywistego poprzez przecięcie lub usunięcie nadliczbowych więzów, otrzymując w ten sposób ustrój statycznie wyznaczalny. Powstały układ musi być geometrycznie niezmienny. Następnie tworzy się tzw. *układ podstawowy metody sił* (UPMS), który odpowiada ustrojowi rzeczywistemu łącznie z zadanym obciążeniem oraz uzewnętrznionymi niewiadomymi metody sił (oznaczanymi X_1, \dots, X_{n_h}), w miejscu i kierunku przeciętych więzów hiperstatycznych.

Układ podstawowy metody sił – układu utworzony z zadanego układu poprzez przecięcie lub usunięcie n_h więzi nadliczbowych i zastąpienie ich niewiadomymi siłami hiperstatycznymi (siły lub momenty) oznaczonymi przez X_1, X_2 , itd.



Rys. 1.10. Układy statycznie niewyznaczalne

W celu wyznaczenia wartości sił hiperstatycznych X_i należy zastosować warunek zgodności przemieszczeń i odkształceń między układem rzeczywistym, a układem podstawowym. Oznacza to, że wartości przemieszczeń w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku przeciętych lub usuniętych więzi hiperstatycznych $\Delta_i, i = \{1, \dots, n_h\}$, muszą być takie same jak w układzie rzeczywistym. W ten sposób zapewnia się identyczność przemieszczeń wszystkich punktów między układem podstawowym i rzeczywistym.

1.6.1.2. Ogólna postać układu równań metody sił

Ogólna postać układu równań metody sił (URMS):

$$\sum_j \delta_{ij} X_j + \delta_{iF} = \Delta_i^{rZ}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_h$$

gdzie:

Wzory dla ram i belek

Wzory dla kratownic płaskich

➔ Przeszczenie na kierunku i -tej więzi nadliczbowej od jednostkowej j -tej niewiadomej w układzie podstawowym

$$\delta_{ij} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \bar{M}^j}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^j}{k_n} \right\} / P_i$$

$$\delta_{ij} = \left\{ \sum_p \left(\frac{\bar{N}^i \bar{N}^j}{EA} L \right)_p + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^j}{k_n} \right\} / P_i$$

➔ Przeszczenie na kierunku i -tej więzi nadliczbowej od obciążenia mechanicznego w układzie podstawowym

$$\delta_{iF} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \bar{M}^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^F}{k_n} \right\} / P_i$$

$$\delta_{iF} = \sum_p \left(\frac{\bar{N}^i \bar{N}^F}{EA} L \right)_p + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^F}{k_n}$$

➔ Przeszczenie na kierunku i -tej więzi nadliczbowej od wpływu temperatury w układzie podstawowym

$$\delta_{iT} = \left\{ \sum_p \alpha_T \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}^i} + \sum_p \alpha_T \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}^i} \right\} / P_i$$

$$\delta_{iT} = \left\{ \sum_p \alpha_T \cdot \Delta T \cdot \bar{N}^i \right\} / P_i$$

➔ Przeszczenie na kierunku i -tej więzi nadliczbowej od wpływu osiadania podpór w układzie podstawowym

$$\delta_{i\Delta} = \left\{ - \sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n \right\} / P_i$$

Dzięki takiemu podejściu uzyskuje się n_h dodatkowych równań o charakterze przemieszczeniowym, które wraz z równaniami równowagi umożliwią wyznaczenie wszystkich niewiadomych reakcji, a następnie sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym.

Rzeczywiste reakcje oraz siły przekrojowe możemy otrzymać stosując jedno z dwóch podejść obliczeniowych:

- a) Rozwiązanie układu podstawowego przy jednoczesnym działaniu obciążenia danego i wyliczonych sił hiperstatycznych.
- b) Superpozycja rozwiązania.

$$\begin{aligned} R_i^F &= \bar{R}_i^1 \cdot X_1^F + \dots + \bar{R}_i^{n_h} \cdot X_{n_h}^F + \bar{R}_i^F, \\ M_{ij}^F &= \bar{M}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \dots + \bar{M}_{ij}^{n_h} \cdot X_{n_h}^F + \bar{M}_{ij}^F, \\ T_{ij}^F &= \bar{V}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \dots + \bar{T}_{ij}^{n_h} \cdot X_{n_h}^F + \bar{V}_{ij}^F, \\ N_{ij}^F &= \bar{N}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \dots + \bar{N}_{ij}^{n_h} \cdot X_{n_h}^F + \bar{N}_{ij}^F. \end{aligned}$$

Aby mieć pewność poprawności otrzymanych rozwiązań, należy przeprowadzić kontrolę poprawności rozwiązania. W przypadku układów statycznie niewyznaczalnych kontrola rozwiązania jest dwuetapowa:

1. Sprawdzenie statycznej dopuszczalności rozwiązania

Kontrola ta polega na sprawdzeniu czy siły wewnętrzne wraz z obciążeniem spełniają równania równowagi na elementach prętowych oraz w węzłach, a także kontrola równań równowagi układu jako całości. Wektory sił przekrojowych wskazują dodatnie wartości zgodnie z wyróżnionymi włóknami uprzywilejowanymi.

2. Sprawdzenie kinematycznej dopuszczalności rozwiązania

Kontrola ta polega na sprawdzeniu ciągłości konstrukcji - zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi np. w miejscach i na kierunkach usuniętych lub przeciętych więzi. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu. Kontrola musi być przeprowadzona w tylu przekrojach, ile wynosi stopień statycznej niewyznaczalności układu n_h .

1.6.1.3. Algorytm rozwiązania układu statycznie niewyznaczalnego (hiperstatycznego) z wykorzystaniem metody sił

1. Wyznaczenie stopnia statycznej niewyznaczalności układu

- przekształcenie układu w zbiór sztywnych tarcz otwartych, obliczenie liczby tarcz,
- obliczenie liczby więzi elementarnych podporowych i więzi między tarczami,
- obliczenie stopnia statycznej niewyznaczalności ze wzoru

$$n_h = e - 3t \quad \text{dla belek i ram}$$

$$n_h = 2w - p - r \quad \text{dla kratownicy płaskiej}$$

2. Dobranie układu podstawowego metody sił i rozpisanie ogólnej postaci układu równań metody sił

- przekształcenie zadanego układu rzeczywistego w układ podstawowy statycznie wyznaczalny, geometrycznie niezmienny
- narysowanie obciążenia wraz siłami hiperstatycznymi, podanie wymiarów i sztywności prętów, oznaczenie węzłów, wyróżnienie włóknień uprzywilejowane.
- zapisanie n_h równań opisujących przemieszczenia w przeciętych więziach w postaci:

$$\sum_j \delta_{ij} X_j + \delta_{iF} = \Delta_i^{rz}, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_h$$

3. Rozwiązanie układu podstawowego tylko od obciążenia danego ($X_1, \dots, X_{n_h} = 0$)

- szkic konstrukcji i obciążenia, zaznaczone zwroty reakcji podpór,
- wyznaczenie reakcji podpór \bar{R}^F ,
- obliczenie rzędnych charakterystycznych i sporządzenie wykresów sił przekrojowych \bar{M}^F , \bar{T}^F , \bar{N}^F .

4. Rozwiązanie układu podstawowego tylko od obciążenia siłą $X_1 = 1\text{kN}/1\text{kNm}$ ($X_2, \dots, X_{n_h} = 0$, obciążenie dane = 0)

- szkic konstrukcji i obciążenia, zaznaczone zwroty reakcji podpór,
- wyznaczenie reakcji podpór \bar{R}^1 ,
- obliczenie rzędnych charakterystycznych i sporządzenie wykresów sił przekrojowych \bar{M}^1 , \bar{T}^1 , \bar{N}^1 .

5. ... powtarzamy punkt 4 tyle razy ile wynosi stopień statycznej niewyznaczalności n_h

6. Obliczenie współczynników układu równań

- zastosowanie odpowiednich wzorów dla ram, belek i kratownic na współczynniki układu równań metody sił δ_{ij} ,
- zastosowanie odpowiednich wzorów dla ram, belek i kratownic w zależności od charakteru obciążenia do obliczenia wyrazów wolnych δ_{iF} , δ_{iT} lub $\delta_{i\Delta}$.

7. Szczegółowa postać układu równań i jego rozwiązanie

- wyznaczenie wartości sił hiperstatycznych X_1, \dots, X_{n_h}

8. Obliczenie reakcji podporowych, rzędnych charakterystycznych sił przekrojowych i sporządzenie wykresów M^F , V^F , N^F

9. Przeprowadzenie kontroli rozwiązania

- sprawdzenie statycznej dopuszczalności rozwiązania,
- sprawdzenie kinematycznej dopuszczalności rozwiązania.

1.6.2. Metoda przemieszczeń

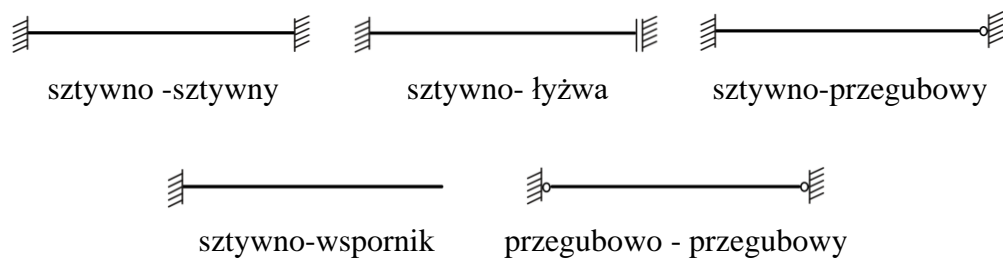
Metoda przemieszczeń jest jedną z podstawowych, obok metody sił, metodą rozwiązywania układów prętowych statycznie niewyznaczalnych. W analizowanych przypadkach należy założyć, że ustroje prętowe są płaskie, zbudowane z prętów przyzmatycznych, prostych oraz pomijana będzie odkształcalność osiowa ($EA = \infty$).

W metodzie przemieszczeń jako niewiadome przyjmuje się przemieszczenia uogólnione końców prętów (przemieszczenia liniowe – przesuw węzłów oraz przemieszczenia kątowe - obroty węzłów). Znajomość wartości tych przemieszczeń pozwala określić wartości sił brzegowych na końcach elementów. W metodzie przemieszczeń dzielimy układ na elementy prętowe i węzłowe, a wartościami niewiadomymi są przemieszczenia liniowe i kątowe węzłów elementów prętowych.

1.6.2.1. Klasyfikacja prętów

Podstawowa klasa prętów zależy od sposobu zamocowania pręta w węzłach wewnętrznych oraz podporowych. Przy założeniu stałej sztywności prętów $EI = const$.

Wyróżnia się następujące typy prętów:



Rys. 1.11. Klasyfikacja prętów w metodzie przemieszczeń

1.6.2.2. Wzory transformacyjne

Wzorami transformacyjnymi nazywamy zależności między siłami brzegowymi a przemieszczeniami brzegowymi w pręcie. Momenty brzegowe oraz siły tnące wywołane są obrotami końców pręta φ_i i φ_j oraz przemieszczeniami prostopadłymi do osi pręta $v_i = w_{ij}$ oraz $v_j = w_{ji}$. Momenty brzegowe M_{ij} i M_{ji} oraz siły tnące T_{ij} i T_{ji} są funkcjami kątów φ_i i φ_j oraz obrotu cięciwy $\psi_{ij} = \frac{w_{ji} - w_{ij}}{L_{ij}}$ a także obciążenia danego $p_{ij}(x)$. Wyrażone są wzorami:

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^0$$

$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^0$$

$$T_{ij} = \frac{EI_{ij}}{(L_{ij})^2} (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ij} \cdot \varphi_{ji} - d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + T_{ij}^0$$

$$T_{ji} = \frac{EI_{ij}}{(L_{ij})^2} (-c_{ji} \cdot \varphi_{ji} - c_{ji} \cdot \varphi_{ij} - d_{ji} \cdot \psi_{ij}) + T_{ji}^0$$

Gdzie współczynniki a_{ij} , a_{ji} , b_{ij} , b_{ji} , c_{ij} , c_{ji} , d_{ij} , d_{ji} w teorii I-go rzędu są liczbami zależnymi od przyjętego typu pręta.

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	c_{ij}	c_{ji}	$d_{ij} = d_{ji}$
		4	4	2	6	6	12
		3	0	0	3	0	3
		1	1	-1	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0

Należy zauważyć, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie. Również obrót pręta przyjmujemy dodatni, kiedy pręt obraca się w prawo.

1.6.2.3. Określenie stopienia geometrycznej niewyznaczalności ustroju prętowego - n_g

Stopień geometrycznej niewyznaczalności ustroju prętowego jest sumą niezależnych składowych przemieszczeń: obrotów węzłów n_φ i przesunięć węzłów n_δ . Przemieszczenia te w pełni określają warunki brzegowe prętów na które został podzielony układ.

$$n_g = n_\varphi + n_\delta$$

Chcąc wyznaczyć liczbę niezależnych składowych obrotów węzłów n_φ należy:

- podzielić układu na zbiór elementów, opisanych wzorami transformacyjnymi (należy pamiętać, że element prętowy ma stałą sztywność EI na całej długości elementu),
- określić, które obroty węzłów są zerowe (w związku ze sposobem zamocowania elementy z ostoją),
- wyznaczenie niezerowe kąty obrotu wynikające z zastosowanych elementów i sposobu podparcia układu danego.

Chcąc wyznaczyć liczbę niezależnych składowych przesunięć węzłów n_δ należy zbudować model przegubowy układu poprzez:

- ➔ odrzucenie więzi sprężystych,
- ➔ zamianę węzłów sztywnych na węzły przegubowe,
- ➔ należy odebrać stopnie swobody przesuwu prętom typu wspornik, oraz prętom o lewym końcem utwierdzonym a prawym utwierdzony z przesuwarem poprzecznym (należy dodać więź oznaczoną linią przerywaną),
- ➔ oszacowanie od dołu niezbędnej liczby niezależnych składowych przesuwarów węzłów

$$n_\delta \geq 2w - p - r$$

gdzie

w – liczba węzłów,

p – liczba prętów,

r – liczba elementarnych sztywnych więzi podporowych,

- ➔ określenie rzeczywistej liczby stopni swobody przesuwu węzłów po przeprowadzeniu analizy kinematycznej – sprawdzeniu warunku jakościowego geometrycznej niezmienności modelu przegubowego z dodanymi n_δ więziami.

1.6.2.4. Układ podstawowy metody przemieszczeń i jego rozwiązanie

Układ podstawowy metody przemieszczeń tworzymy z układu zadanego poprzez dodanie n_φ więzi rotacyjnych oraz n_δ więzi translacyjnych uniemożliwiających przemieszczenia w miejscach niezależnych składowych przemieszczeń określonych przy wyznaczaniu stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu.

Układ równań metody przemieszczeń opisuje reakcje w dołożonych więziach rotacyjnych i translacyjnych. Rozwiązania układu równań zapewnia się poprzez spełnienie warunku zerowania reakcji w dodanych więziach fikcyjnych, gdyż w rzeczywistym układzie one nie istnieją. Dla więzi rotacyjnych suma momentów wywołanych obrotem węzłów, przemieszczeniami liniowymi i obciążeniem zewnętrznym musi być równa zero, natomiast dla więzi translacyjnych suma sił wywołanych tymi przyczynami musi być równa zero.

$$K_i = \sum_{j=1}^{n_\varphi} k_{ij} \cdot \varphi_j + \sum_{J=I}^{n_\delta} k_{iJ} \cdot \delta_J + k_{i0} = 0 \text{ dla } i = 1, 2, \dots, n_\varphi$$

$$K_J = \sum_{j=1}^{n_\varphi} k_{jJ} \cdot \varphi_j + \sum_{J=I}^{n_\delta} k_{JJ} \cdot \delta_J + k_{J0} = 0 \text{ dla } J = I, II, \dots, n_\delta$$

gdzie,

k_{ij} - jest to reakcja momentowa w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „ i ”-tej więzi rotacyjnej wywołana jednostkowym prawoskrętnym obrotem „ j ”-tej więzi rotacyjnej,

k_{ij} - jest to reakcja momentowa w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „ i ”-tej więzi rotacyjnej wywołana jednostkowym przesuwem „ J ”-tej więzi translacyjnej,

k_{i0} - jest to reakcja momentowa w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „ i ”-tej więzi rotacyjnej wywołana zadaniem obciążeniem czynnym,

k_{JJ} - jest to reakcja siłowa w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „ J ”-tej więzi translacyjnej wywołana jednostkowym przesuwem „ J ”-tej więzi translacyjnej,

$k_{jJ} = k_{ij}$ - jest to reakcja siłowa w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „ J ”-tej więzi translacyjnej wywołana jednostkowym prawoskrętnym obrotem „ j ”-tej więzi rotacyjnej,

k_{J0} - jest to reakcja siłowa w układzie podstawowym w miejscu i na kierunku dodanej „ J ”-tej więzi translacyjnej wywołana zadaniem obciążeniem czynnym.

Dzięki takiemu podejściu uzyskuje się n_g dodatkowych równań, które wraz z równaniami równowagi umożliwią wyznaczenie wszystkich niewiadomych sił brzegowych w układzie statycznie niewyznaczalnym, a następnie wyliczenie reakcji podporowych.

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń w układzie podstawowym rozpatrywane są rozłącznie.

- Analizując stan od obciążenia danego zakłada się, że przemieszczenia węzłów równe są zero, tzn. $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ij} = 0$. Dla elementów prętowych przyjętych w układzie podstawowym stosuje się wówczas wzory na momenty brzegowe wyznaczone np. metodą sił i w zależności od charakteru obciążenia odczytuje się je z tablic.
- Analizując stan rotacyjny zakłada się, że element prętowy obciążony jest wymuszeniem obrotowym węzła $\varphi_{ij} = 1$. Równocześnie obciążenie dane jest równe zero oraz $\varphi_{ji} = \psi_{ij} = 0$.
- Analizując stan translacyjny zakłada się, że element prętowy obciążony jest wymuszeniem liniowym na kierunku dołożonej więzi $\delta_I = 1$. Równocześnie obciążenie dane jest równe zero oraz $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = 0$.

Współczynniki układu równań oblicza się jako suma momentów lub reakcji translacyjnych w poszczególnych dołożonych węzłach od poszczególnych przypadków obciążenia. Współczynniki każdej grupy oblicza się według poniższych wzorów:

$$\begin{aligned}
 k_{ii} &= \sum_j M_{ij}^i + k_\varphi^i, \\
 k_{ij} &= M_{ji}^i, \\
 k_{i\alpha} &= \sum_j M_{ij}^\alpha, \\
 k_{i0} &= \sum_j M_{ij}^0 - M_i^0, \\
 k_{\alpha i} &= -\sum_{i,j} (M_{ij}^i + M_{ji}^i) \cdot \psi_{ij}^\alpha, \\
 k_{\alpha\beta} &= -\sum_{i,j} (M_{ij}^\beta + M_{ji}^\beta) \cdot \psi_{ij}^\alpha + \sum_n k_{\delta n} \cdot \delta_{k\delta n}^\alpha \cdot \delta_{k\delta n}^\beta, \\
 k_{\alpha 0} &= -\sum_{i,j} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \cdot \psi_{ij}^\alpha - \sum_m P_m \delta_{P_m}^\alpha.
 \end{aligned}$$

Obliczenie momentów brzegowych

Znając rzeczywiste przemieszczenia końców prętów każdego elementu możemy wyznaczyć brzegowe momenty korzystając:

- z superpozycji $M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + \dots + M_{ij}^I \delta_I + \dots + M_{ij}^0$ lub
- ze wzorów transformacyjnych $M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} [a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}] + M_{ij}^0$,
gdzie rzeczywiste kąty obrotu cięciw obliczamy ze wzoru $\psi_{ij} = \sum_\alpha \psi_{ij}^\alpha \cdot \delta_\alpha$

Obliczenie sił osiowych i tnących oraz sporządzenie wykresów

- Siły tnące wyznacza się korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych, z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach.
- Siły osiowe wyznacza się ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów, z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących oraz obciążeń działających w węzłach.

W celu wyznaczenia sił tnących i osiowych układ dzieli się na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy obciążeniem danym, wyliczonymi momentami brzegowymi i na brzegach elementów odpowiednimi siłami przekrojowymi.

1.6.2.5. Algorytm rozwiązania układu statycznie niewyznaczalnego (hiperstatycznego) z wykorzystaniem metody przemieszczeń

1. Wyznaczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności

- podzielenie układu na zbiór elementów opisanych wzorami transformacyjnymi,
- wyznaczenie n_φ liczby stopni swobody obrotu węzłów,
- wyznaczenie n_δ stopni swobody przesuwu węzłów.
- obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności $n_g = n_\varphi + n_\delta$

2. Przyjęcie układu podstawowego metody przemieszczeń

- przyjęcie układu podstawowego metody przemieszczeń - dodanie n_φ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych do układu rzeczywistego (należy narysować obciążenia, podać wymiary i sztywności prętów, oznaczyć węzły oraz wyróżnić włókna uprzywilejowane).

3. Ogólna postać układu równań metody przemieszczeń:

- zapisanie n_φ równań opisujących reakcje w dodanych więziach rotacyjnych

$$\sum_{j=1}^{n_\varphi} k_{ij} \cdot \varphi_j + \sum_{\beta=1}^{n_\delta} k_{i\beta} \cdot \delta_\beta + k_{i0} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_\varphi,$$

- zapisanie n_δ równań opisujących reakcje w dodanych więziach translacyjnych

$$\sum_{j=1}^{n_\varphi} k_{\alpha j} \cdot \varphi_j + \sum_{\beta=1}^{n_\delta} k_{\alpha\beta} \cdot \delta_\beta + k_{\alpha 0} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n_\delta$$

4. Rozwiązanie układu podstawowego tylko od obciążenia danego

$$(\varphi_1, \dots, \varphi_{n_\varphi} = 0, \delta_1, \dots, \delta_{n_\delta} = 0)$$

- szkic konstrukcji i obciążenia,
- obliczenie momentów brzegowych dla poszczególnych elementów M_j^0 ,
- obliczenie równoważników obciążenia i zaznaczenie sił równoważnych na schemacie konstrukcji,
- sporządzenie wykresu momentów zginających w układzie podstawowym od obciążenia danego.

5. Rozwiązanie układu podstawowego tylko od kąta obrotu $\varphi_1 = 1$

$$(\varphi_2, \dots, \varphi_{n_\varphi} = 0, \delta_1, \dots, \delta_{n_\delta} = 0, \text{obciążenie dane} = 0)$$

- szkic konstrukcji i obciążenia,
- obliczenie momentów brzegowych poszczególnych elementów M_{ij}^1 ,

- sporządzenie wykresu momentów zginających w układzie podstawowym od obciążenia kątem obrotu węzła $\varphi_1 = 1$.
- 6. ... powtarzamy punkt 5 tyle razy ile wynosi n_φ**
 - 7. Rozwiązanie układu podstawowego tylko od przesunięcia węzła $\delta_I = 1$ ($\varphi_1, \dots, \varphi_{n_\varphi} = 0, \delta_{II}, \dots, \delta_{n_\delta} = 0, \text{obciążenie dane} = 0$)**
 - szkic konstrukcji i obciążenia,
 - sporządzenie planu przesunięć i obliczenie kątów obrotu cięciw ψ_{ij}^I ,
 - obliczenie momentów brzegowych poszczególnych elementów M_{ij}^I ,
 - sporządzenie wykresu momentów zginających w układzie podstawowym od obciążenia przesunięciem węzła $\delta_I = 1$.
 - 8. ... powtarzamy punkt 7 tyle razy ile wynosi n_δ**
 - 9. Obliczenie współczynników układu równań (reakcji w dołożonych więziach)**
 - $k_{ii}, k_{ij}, k_{i\alpha}, k_{i0}, k_{\alpha i}, k_{\alpha\beta}$ oraz $k_{\alpha 0}$
 - 10. Szczegółowa postać układu równań metody przemieszczeń oraz jego rozwiązanie**
 - wyliczenie niezależnych obrotów węzłów $\varphi_1, \dots, \varphi_{n_\varphi}$,
 - wyliczenie niezależnych przesułów węzłów $\delta_I, \dots, \delta_{n_\delta}$.
 - 11. Obliczenie momentów brzegowych i sił w więziach sprężystych**
 - wykorzystanie superpozycji rozwiązania lub wzorów transformacyjnych.
 - 12. Obliczenie brzegowych sił tnących**
 - wykorzystanie równań równowagi elementów prętowych obciążonych danym obciążeniem i momentami brzegowymi lub wzory transformacyjne.
 - 13. Obliczenie sił osiowych**
 - wykorzystanie równania równowagi węzłów, przy czym znane są siły tnące, obciążenia węzłów i wartości reakcji w więziach sprężystych.
 - 14. Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów zginających**
 - określenie wartości momentów zginających na brzegach elementów prętowych,
 - obliczenie momentów zginających w punktach charakterystycznych: pod siłą skupioną, w środku obciążenia rozłożonego lub maksimum, z 2 stron momentu skupionego
 - 15. Sporządzenie wykresów rzeczywistych sił przekrojowych M^F, V^F, N^F**
 - 16. Wyliczenie reakcji podporowych**
 - na podstawie sił przekrojowych oraz wartości sił w więziach sprężystych należy obliczyć wartości reakcji podporowych

17. Przeprowadzenie kontroli rozwiązania

- sprawdzenie statycznej dopuszczalności rozwiązania – kontrola równań równowagi układu jako całości,
- sprawdzenie kinematycznej dopuszczalności rozwiązania – kontrola zgodności przemieszczeń w n_h przekrojach.

1.7. LINIE WPŁYWU

1.7.1. Informacje podstawowe

Oprócz obciążenia, które ma niezmienną w czasie wartość i położenie (np. ciężar własny), konstrukcja budowlana poddawana jest także działaniu obciążenia ruchomego (obciążenia eksploatacyjne):

- mosty, kładki, belki podsuwnicowe, estakady,
- powierzchnie stropów, magazynów, biurowe, mieszkalne, połączenia dachowe czy powierzchnie zbiorników wielokomorowych.

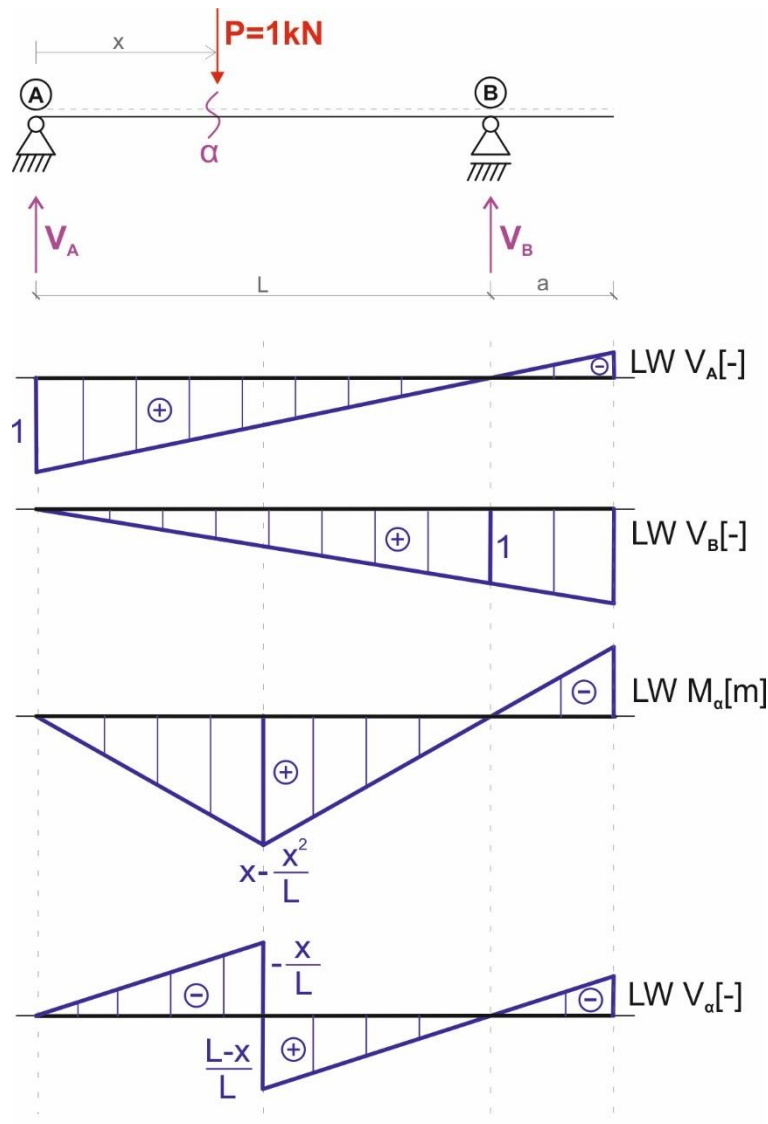
Zmiana położenia obciążenia wywołuje zmianę reakcji podporowych, sił wewnętrznych w przekrojach układu i przemieszczeń. W celu określenia ekstremalnych wartości sił wewnętrznych i najbardziej niekorzystnego położenia obciążenia sporządza się *linie wpływu*.

[por. SB1].

Linie wpływu to wykres przedstawiający zależność między wartością pewnej wielkości statycznej K (momentu zginającego, siły tnącej lub osiowej, reakcji podporowej) w danym przekroju a obciążeniem jednostkowym $P = 1$ kN, które zmienia swoje położenie po zadanym torze x .

Metody sporządzania linii wpływu:

- ➡ metoda statyczna, zwana też metodą rzędnych charakterystycznych bazująca na równaniach równowagi,
- ➡ metoda kinematyczna bazująca na kinematyce tarcz.



Rys.1.12. Linie wpływu dla belki swobodnie podpartej

Podstawowe cechy charakterystyczne linii wpływu:

- ➡ linia wpływu dotyczy zawsze tylko jednej wielkości statycznej, występującej w konkretnym przekroju,
- ➡ rzędne linii wpływu reakcji, sił tnących i sił osiowych są wielkościami bezwymiarowymi, mimo że układ jest obciążany siłą $P = 1\text{ kN}$,
- ➡ rzędne linii wpływu momentu zginającego oraz momentowej reakcji podporowej wyrażone są w metrach, mimo że układ jest obciążany siłą $P = 1\text{ kN}$,
- ➡ linie wpływu w układach statycznie wyznaczalnych składają się z odcinków prostych,
- ➡ linie wpływu w układach statycznie niewyznaczalnych są zawsze krzywoliniowe.

1.7.2. Algorytm sporządzania linii wpływu metodą statyczną

Sposób statyczny sporządzania linii wpływu wielkości statycznych jest sposobem bezpośrednim i wynika z definicji linii wpływu – jest to wykres obrazujący jak zmienia się wartość danej wielkości w zależności od położenia pionowej siły jednostkowej na wybranym torze. W układach statycznie wyznaczalnych linia wpływu składa się z odcinków prostych.

Dane, szukane

- szkic rozwiązywanej konstrukcji z wymiarami, zaznaczonym torem przemieszczania się siły – zaznaczone miejsce i rodzaj poszukiwanej wielkości statycznej

Tok postępowania:

1. ustalenie z ilu odcinków prostych będzie się składała linia wpływu szukanej wielkości (odpowiada liczbie tarcz w metodzie kinematycznej),
2. wybranie dla każdej prostej dwóch punktów charakterystycznych (punktów, w których po ustawieniu siły łatwo obliczyć wartość poszukiwanej wielkości; są nimi między innymi podpory zawierające pionowe więzi, przeguby, punkty wspólne tarcz),
3. obliczenie dla każdego odcinka prostej 2 wartości,
4. sporządzenie linii wpływu poszukiwanej wielkości (wykres musi być pod zwymiarowanym schematem statycznym, mieć opisane rzędne i znaki oraz być podpisany)

1.7.3. Algorytm sporządzania linii wpływu metodą kinematyczną

*Sposób kinematyczny sporządzania linii wpływu wielkości statycznych jest sposobem pośrednim i polega na wykorzystaniu **twierdzenia o wzajemności reakcji i przemieszczeń** (tw. Rayleigha), które brzmi:*

Reakcja r_{ji} w punkcie "j" wywołana siłą jednostkową działającą w punkcie "i" jest równa co do wartości i różna co do znaku przemieszczeniu δ_{ij} w punkcie "i" na kierunku działania siły wywołanemu przemieszczeniem jednostkowym zadany w punkcie "j" na kierunku reakcji.

$$r_{ji} = -\delta_{ij}$$

Dane, szukane

- szkic rozwiązywanej konstrukcji z wymiarami, zaznaczonym torem przemieszczania się siły – zaznaczone miejsce i rodzaj poszukiwanej wielkości statycznej

Tok postępowania:

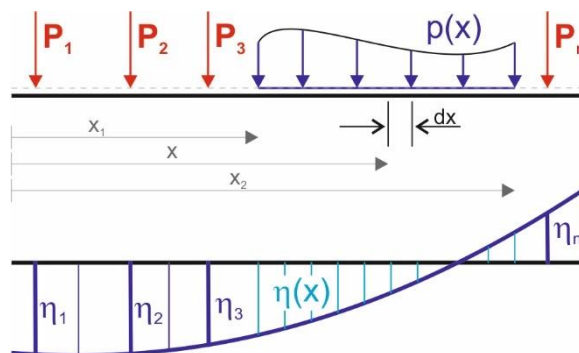
1. przecięcie więzi elementarnej odpowiadającej poszukiwanej wielkości statycznej (powstaje mechanizm) i zastąpienie jej poszukiwaną wielkością statyczną,
2. określenie tarcz mechanizmu,

3. znalezienie środków obrotów tarcz między sobą i z fundamentem (ostoją),
4. narysowanie linii odniesienia odpowiadającej fundamentowi, prostopadłej do siły obciążającej,
5. narysowanie wykresu przesunięć (równoległych do siły składowych przemieszczeń punktów tarcz),
6. skorygowanie wykresu przesunięć stosownie do toru poruszania się siły obciążającej,
7. określenie znaków i wartości rzędnych linii wpływu z wykorzystaniem zasady prac przygotowanych.

1.7.4. Obciążenie ruchome

Wartość wybranej wielkości statycznej, powstałej na skutek dowolnego obciążenia, możemy obliczyć obciążając wybraną linię wpływu. Możemy również określić położenie obciążenia, przy którym wielkości statyczne w analizowanych przekrojach osiągają ekstremalne wartości. Rzeczywiste obciążenie stałe lub zmienne stanowią zwykle siły skupione P oraz obciążenie rozłożone $p(x)$. Daną wielkość statyczną K otrzymuje się, odczytując z wykresu jej linii wpływu rzędne η pod obciążeniem, korzystając ze wzoru:

$$K = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i + \int_{x_1}^{x_2} p(x) \cdot \eta(x) dx,$$



Rys.1.13. Obciążona linia wpływu

W przypadku, gdy mamy do czynienia z obciążeniem o stałej intensywności ($p(x) = p$), powyższy wzór przybiera postać:

$$K = \sum_{i=1}^n P_i \cdot \eta_i + p \cdot \Omega_\eta,$$

gdzie Ω_η oznacza pole wykresu linii wpływu ograniczone rzędnymi, odpowiadającymi początkowi i końcowi odcinka, na którym działa obciążenie równomiernie rozłożone.

2. PRZYKŁADY - UKŁADY STATYCZNIE WYZNACZALNE

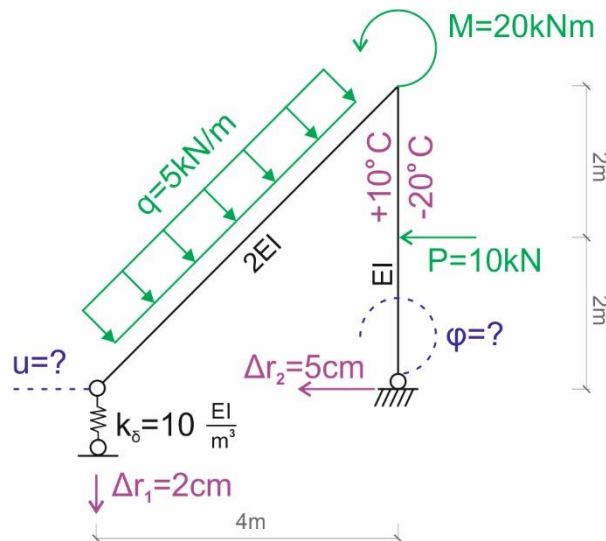
2.1. RAMA

Dana jest rama płaska izostaticzna o schemacie i obciążeniu mechanicznym i niemechanicznym jak na rysunku 2.1. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Wyznaczyć siły przekrojowe wywołane zadaniem obciążeniem.
- Obliczyć wartości zaznaczonych przemieszczeń od obciążenia.

W obliczeniach przyjąć:

- Współczynnik rozszerzalności termicznej $\alpha_T = \frac{0,000012}{^\circ\text{C}}$;
- Materiał: stal o własnościach: $E = 205 \text{ GPa}$, $f_d = 215 \text{ MPa}$;
- Przekroje: dwuteowniki normalne; EI – jeden dwuteownik, $2EI$ – 2 dwuteowniki,
- Współczynnik bezpieczeństwa $\gamma_f = 1,5$.



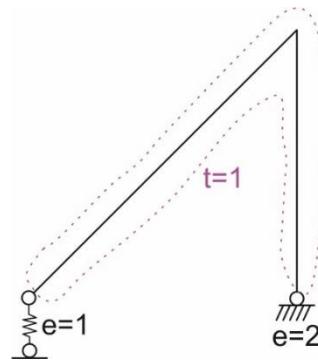
Rys. 2.1. Schemat statyczny z obciążeniami

2.1.1. Sprawdzenie statycznej wyznaczalności i geometrycznej niezmienności układu

- Warunek ilościowy [por. SB1]: $t = 1, e = 1 + 2 = 3,$

$$n_h = e - 3 \cdot t = 3 - 3 = 0$$

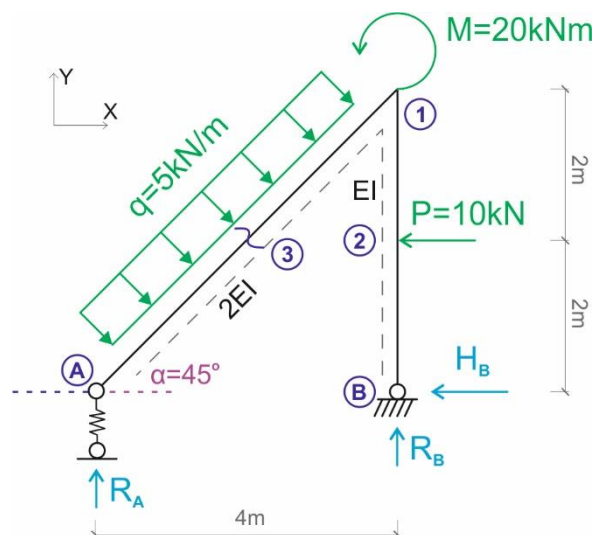
Wniosek: Układ jest statycznie wyznaczalny.



Rys. 2.2. Tarcze i więzi

- Warunek jakościowy [por. SB1]: Układ składa się z jednej tarczy połączonej z ostoją trzema więziami, niezbieżnymi i nierównoległymi więziami. Na podstawie *twierdzenia o dwóch tarczach*, cała rama wraz z ostoją tworzy układ *geometrycznie niezmienny*.

2.1.2. Rozwiązanie ramy od obciążenia mechanicznego



Rys. 2.3. Przyjęte zwroty reakcji podporowych

Obliczenie reakcji podporowych:

$$\sum X = q \cdot 4\sqrt{2} \text{ m} \cdot \cos 45^\circ - P - H_B = 0 \Rightarrow H_B = 10 \text{ kN},$$

$$\sum M_B = R_A \cdot 4 \text{ m} - q \cdot 4\sqrt{2} \text{ m} \cdot \cos 45^\circ + q \cdot 4\sqrt{2} \text{ m} \cdot \sin 45^\circ - M - P \cdot 2 \text{ m} = 0 \Rightarrow R_A = 10 \text{ kN},$$

$$\sum Y = -R_A - R_B + q \cdot 4\sqrt{2} \text{ m} \cdot \cos 45^\circ = 0 \Rightarrow R_B = 10 \text{ kN}.$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_2 = R_A \cdot 2 \text{ m} - R_B \cdot 2 \text{ m} + H_B \cdot 2 \text{ m} - M = [10 \cdot 2 - 10 \cdot 2 + 10 \cdot 2 - 20] \text{ kNm} = 0.$$

Siła w więzi sprężystej: $S_S^F = -R_A = -10 \text{ kN}$.

Obliczenie momentów zginających w punktach charakterystycznych:

$$M_A = 0 \text{ kNm},$$

$$M_3 = R_A \cdot 2 \text{ m} + q \cdot 2\sqrt{2} \text{ m} \cdot \sqrt{2} \text{ m} = 0 \text{ kNm},$$

$$M_{1A} = R_A \cdot 4 \text{ m} + q \cdot 4\sqrt{2} \text{ m} \cdot 2\sqrt{2} \text{ m} = -40 \text{ kNm},$$

$$M_B = 0 \text{ kNm},$$

$$M_2 = -H_B \cdot 2 \text{ m} = -20 \text{ kNm},$$

$$M_{1B} = -H_B \cdot 4 \text{ m} - P \cdot 2 \text{ m} = -60 \text{ kNm}.$$

Obliczenie sił tnących:

$$T_A = R_A \cdot \cos \alpha = 7,071 \text{ kN},$$

$$T_{1A} = R_A \cdot \cos \alpha - q \cdot 4\sqrt{2} \text{ m} = -21,213 \text{ kN},$$

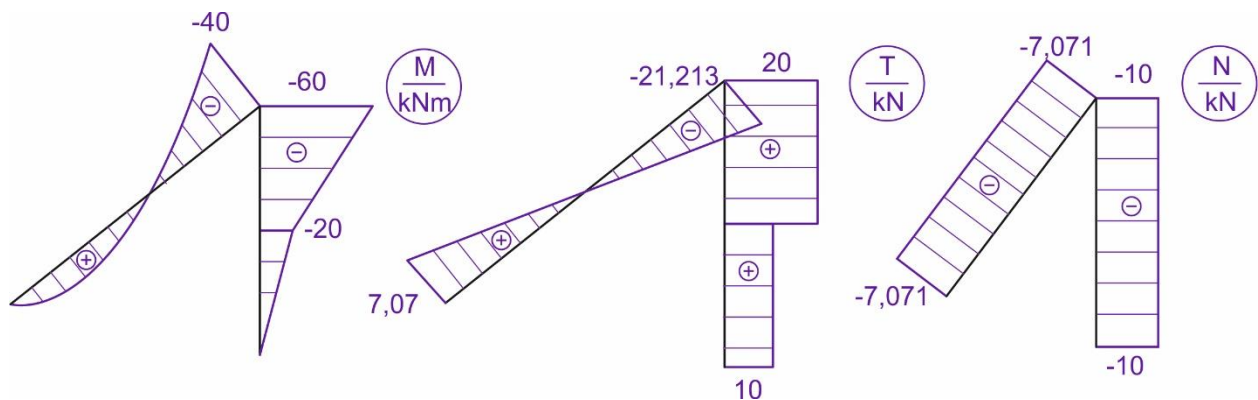
$$T_B = T_{2B} = H_B = 10 \text{ kN},$$

$$T_{21} = T_{1B} = H_B + P = 20 \text{ kN}.$$

Obliczenie sił osiowych:

$$N_A = N_{1A} = -R_A \cdot \sin \alpha = -7,071 \text{ kN},$$

$$N_B = N_2 = N_{12} = -R_B = -10 \text{ kN}.$$



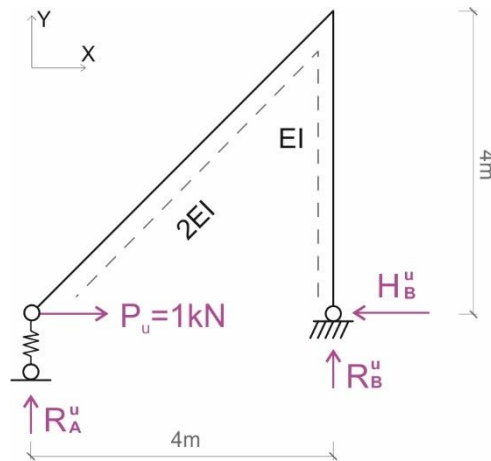
Rys. 2.4. Wykresy sił przekrojowych.

2.1.3. Rozwiązanie ramy od obciążenia temperaturą i osiadaniem podpory

W układach statycznie wyznaczalnych obciążenia niemechaniczne nie powodują powstawania sił przekrojowych.

2.1.4. Rozwiązanie ramy od obciążenia $P_u = 1 \text{ kN}$

W celu wyznaczenia przemieszczenia poziomego węzła A, należy rozwiązać ramę obciążoną siłą o wartości 1 kN, przyłożoną w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.



Rys. 2.5. Schemat statyczny z obciążeniem

Obliczenie reakcji podporowych:

$$\sum X = P_u - H_B^u = 0 \Rightarrow H_B^u = 1 \text{ kN},$$

$$\sum M_B = R_A^u \cdot 4 \text{ m} = 0 \Rightarrow R_A^u = 0 \text{ kN},$$

$$\sum Y = -R_A^u - R_B^u = 0 \Rightarrow R_B^u = 0 \text{ kN}.$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_2 = R_A^u \cdot 2 \text{ m} - R_B^u \cdot 2 \text{ m} + H_B^u \cdot 2 \text{ m} - P_u \cdot 2 \text{ m} = [0 - 0 + 1 \cdot 2 - 1 \cdot 2] \text{ kNm} = 0$$

Siła w więzi sprężystej: $S_s^F = -R_A^u = 0 \text{ kN}$.

Obliczenie momentów zginających w punktach charakterystycznych:

$$M_A^u = 0 \text{ kNm},$$

$$M_3^u = R_A^u \cdot 2 \text{ m} - P_u \cdot 2 \text{ m} = -2 \text{ kNm},$$

$$M_{1A}^u = R_A^u \cdot 4 \text{ m} - P_u \cdot 4 \text{ m} = -4 \text{ kNm},$$

$$M_B^u = 0 \text{ kNm},$$

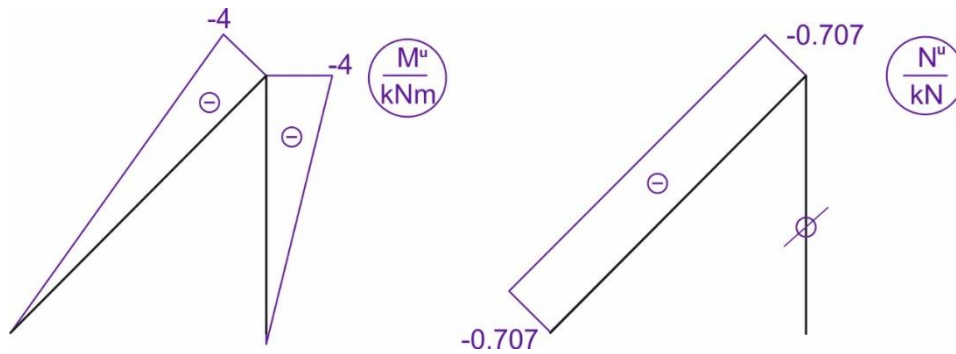
$$M_2^u = -H_B^u \cdot 2 \text{ m} = -2 \text{ kNm},$$

$$M_{1B}^u = -H_B^u \cdot 4 \text{ m} = -4 \text{ kNm}.$$

Obliczenie sił osiowych:

$$N_A^u = N_{1A}^u = -R_A^u \cdot \sin \alpha - P_u \cdot \cos \alpha = -0,707 \text{ kN},$$

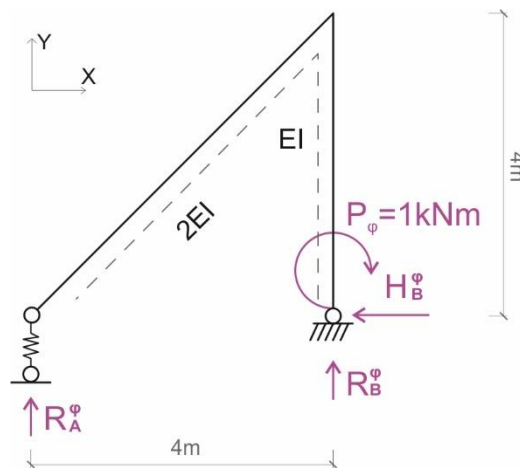
$$N_B^u = N_2^u = N_{1B}^u = -R_B^u = 0 \text{ kN}.$$



Rys. 2.6. Wykresy sił przekrojowych.

2.1.5. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia $P_\varphi = 1 \text{ kNm}$

W celu wyznaczenia obrotu węzła B , należy rozwiązać ramę obciążoną momentem skupionym o wartości 1 kNm , przyłożonego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.



Rys. 2.7. Schemat statyczny z obciążeniem

Obliczenie reakcji podporowych:

$$\sum X = -H_B^\varphi = 0 \Rightarrow H_B^\varphi = 0 \text{ kN},$$

$$\sum M_B = R_A^\varphi \cdot 4 \text{ m} + 1 \text{ kNm} = 0 \Rightarrow R_A^\varphi = -0,25 \text{ kN},$$

$$\sum Y = -R_A^\varphi - R_B^\varphi = 0 \Rightarrow R_B^\varphi = 0,25 \text{ kN}.$$

Sprawdzenie:

$$\sum M_2 = R_A^\varphi \cdot 2 \text{ m} - R_B^\varphi \cdot 2 \text{ m} + H_B^\varphi \cdot 2 \text{ m} + 1 \text{ kNm} = [-0,25 \cdot 2 - 0,25 \cdot 2 + 0 - 1] \text{ kNm} = 0.$$

Siła w więzi sprężystej: $S_s^F = -R_A^\varphi = 0,25 \text{ kN}$.

Obliczenie momentów zginających w punktach charakterystycznych:

$$M_A^\varphi = 0 \text{ kNm}.$$

$$M_3^\varphi = R_A^\varphi \cdot 2 \text{ m} = -0,5 \text{ kNm},$$

$$M_{1A}^{\varphi} = R_A^u \cdot 4 \text{ m} = -1,0 \text{ kNm},$$

$$M_B^{\varphi} = -P_{\varphi} = -1 \text{ kNm},$$

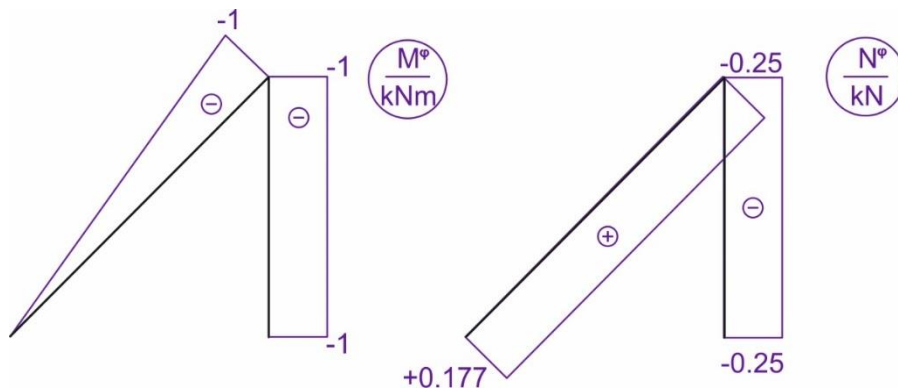
$$M_2^{\varphi} = -P_{\varphi} - H_B^{\varphi} \cdot 2 \text{ m} = -1 \text{ kNm},$$

$$M_{1B}^{\varphi} = -P_{\varphi} - H_B^{\varphi} \cdot 4 \text{ m} = -1 \text{ kNm}.$$

Obliczenie sił osiowych:

$$N_A^{\varphi} = N_{1A}^{\varphi} = -R_A^{\varphi} \cdot \sin \alpha = 0,177 \text{ kN},$$

$$N_B^{\varphi} = N_2^{\varphi} = N_{1B}^{\varphi} = -R_B^{\varphi} = -0,25 \text{ kN}.$$



Rys. 2.8. Wykresy sił przekrojowych

2.1.6. Wstępne projektowanie przekrojów prętów

$$W \geq \frac{|M_{max}| \cdot \gamma_f}{f_d}$$

Maksymalny moment zginający pręta o sztywności EI wynosi -60 kNm , o sztywności $2EI$ wynosi -40 kNm , wobec tego będziemy projektować przekrój na moment zginający równy -60 kNm .

$$W \geq \frac{|-60 \text{ kNm}| \cdot 1,5}{215 \cdot 10^3 \text{ kPa}} = 0,000419 \text{ m}^3 = 419 \text{ cm}^3.$$

Przyjęto I 260 dla pręta o sztywności EI oraz 2 I 260 dla prętów o sztywności $2EI$.

$$W_{I260} = 442 \text{ cm}^3, I_{I260} = 5740 \text{ cm}^4.$$

Sztywność więzi sprężystej:

$$k_{\delta} = 10 \frac{EI}{m^3} = 10 \cdot \frac{205 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 57,4 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4}{m^3} = 117670 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

2.1.7. Obliczenie szukanych przemieszczeń od obciążenia mechanicznego

Przemieszczenie poziome węzła A:

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_u^F = \int \frac{M^u \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{S_n^u \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{1}{2EI} \frac{4\sqrt{2} \text{ m}}{6} (0 + 4 \cdot 0 \cdot (-2 \text{ kNm}) + (-4 \text{ kNm}) \cdot (-40 \text{ kNm})) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{2 \text{ m}}{6} \cdot \left((-60 \text{ kNm}) \cdot (-4 \text{ kNm}) + 4 \cdot (-3 \text{ kNm}) \cdot \frac{(-60 \text{ kNm} - 20 \text{ kNm})}{2} + (-20 \text{ kNm}) \cdot (-2 \text{ kNm}) \right) + \frac{1}{EI} \cdot 2 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-20 \text{ kNm}) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-2 \text{ kNm}) + \frac{0 \text{ kN} \cdot (-10 \text{ kN})}{10 \frac{EI}{\text{m}^3}} \Rightarrow$$

$$\Delta_u^F = 355,425 \frac{\text{kNm}^3}{EI} = 0,0302 \text{ m.}$$

Obrót węzła B:

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_\varphi^F = \int \frac{M^\varphi \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{S_n^\varphi \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{1}{2EI} \frac{4\sqrt{2} \text{ m}}{6} (0 \cdot (-1 \text{ kNm}) + 4 \cdot 0 \cdot (-1 \text{ kNm}) + (-1 \text{ kNm}) \cdot (-40 \text{ kNm})) + \frac{1}{EI} \cdot 2 \text{ m} \cdot \frac{((-60 \text{ kNm}) + (-40 \text{ kNm}))}{2} \cdot (-1 \text{ kNm}) + \frac{1}{EI} \cdot 2 \text{ m} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-20 \text{ kNm}) \cdot (-1 \text{ kNm}) + \frac{0,25 \text{ kN} \cdot (-10 \text{ kN})}{10 \frac{EI}{\text{m}^3}} \Rightarrow \Delta_\varphi^F = 118,606 \frac{\text{kNm}^2}{EI} = 0,0101 = 0,5775^\circ.$$

2.1.8. Obliczenie szukanych przemieszczeń od obciążenia temperaturą

Przemieszczenie poziome węzła A:

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_u^T = \sum_p \alpha_T \cdot \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \cdot \Omega_{Mu} + \sum_p \alpha_T \cdot \Delta T_0 \cdot \Omega_{Nu} = 1,2 \cdot \frac{10^{-5}}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{10^\circ\text{C} - (-20^\circ\text{C})}{0,26 \text{ m}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ m} \cdot (-4 \text{ kNm}) \Rightarrow \Delta_u^T = -0,01108 \text{ m.}$$

Obrót węzła B:

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_\varphi^T = \sum_p \alpha_T \cdot \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \cdot \Omega_{M\varphi} + \sum_p \alpha_T \cdot \Delta T_0 \cdot \Omega_{N\varphi} = \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{10^\circ\text{C} - (-20^\circ\text{C})}{0,26 \text{ m}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ m} \cdot (-1 \text{ kNm}) + \frac{1,2 \cdot 10^{-5}}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{10^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C}}{2} \cdot 4 \text{ m} \cdot (-0,25 \text{ kN}) \Rightarrow \Delta_\varphi^T = -0,00548 = -0,314^\circ.$$

2.1.9. Obliczenie szukanych przemieszczeń od obciążenia osiadaniem podpory

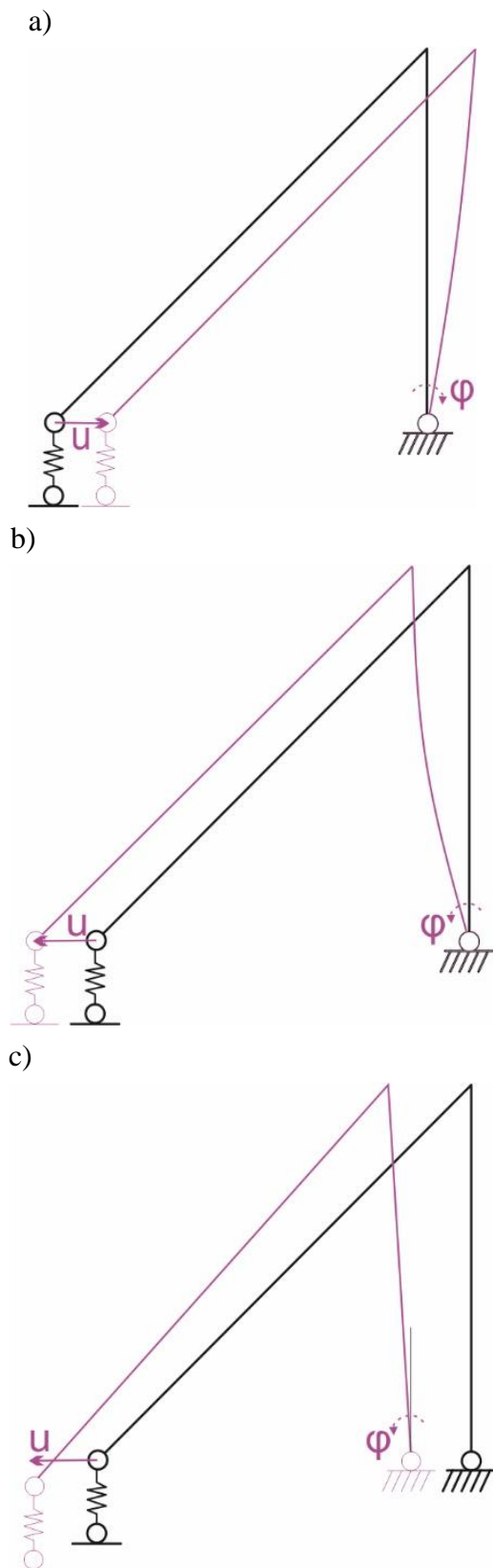
Przemieszczenie poziome węzła A:

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_u^\Delta = -\sum_r R_i^u \cdot \Delta r_i = -(R_A^u \cdot \Delta r_1 + H_B^u \cdot \Delta r_2) = -(0 \cdot 0,02 \text{ m} + 1 \text{ kN} \cdot 0,05 \text{ m}) \Rightarrow \Delta_u^\Delta = -0,05 \text{ m.}$$

Obrót węzła B:

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_\varphi^\Delta = -\sum_r R_i^\varphi \cdot \Delta r_i = -(R_A^\varphi \cdot \Delta r_1 + H_B^\varphi \cdot \Delta r_2) = -(0,25 \text{ kN} \cdot 0,02 \text{ m} + 0 \cdot 0,05 \text{ m}) \Rightarrow \Delta_\varphi^\Delta = -0,005 = -0,286^\circ.$$

2.1.10. Schematy przemieszczeń



Rys. 2.9. Symulacja deformacji w ramie:
 a) od wpływów mechanicznych, b) od temperatury, c) od osiadania podpór.

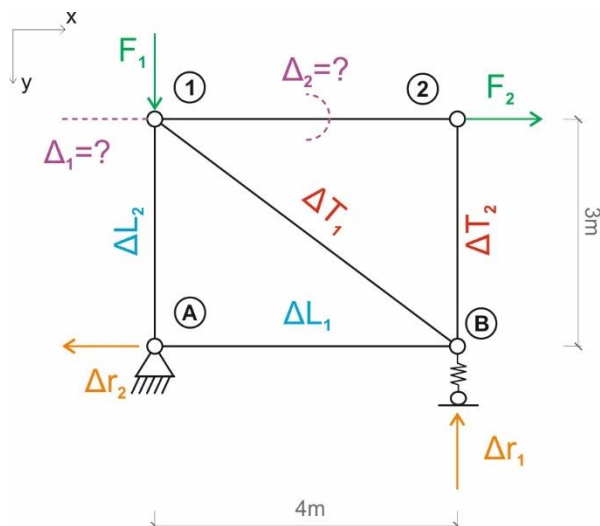
2.2. KRATOWNICA

Dana jest kratownica płaska izostatyczna o schemacie i obciążeniu mechanicznym i niemechanicznym jak na rysunku 2.9. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Wyznaczyć siły osiowe w prętach wywołane zadaniem obciążeniem.
- Zaprojektować wstępnie przekroje prętów tak by wystąpiły pręty o przynajmniej dwóch różnych polach przekroju poprzecznego.
- Obliczyć wartości zaznaczonych przemieszczeń od obciążenia.

W obliczeniach przyjmując:

- średni współczynnik obciążenia $g_f = 1,5$,
- wytrzymałość obliczeniową stali $f_d = 215$ MPa,
- współczynnik sprężystości podłużnej $E = 205$ GPa,
- współczynnik rozszerzalności termicznej $\alpha_T = 0,000012/^\circ\text{C}$.



Dane:

$$F_1 = 15 \text{ kN}; F_2 = 12 \text{ kN};$$

$$\Delta T_1 = 10 \text{ }^\circ\text{C}; \Delta T_2 = -20 \text{ }^\circ\text{C};$$

$$\Delta L_1 = 2 \text{ cm}; \Delta L_2 = -3 \text{ cm};$$

$$\Delta r_1 = 4 \text{ cm}; \Delta r_2 = 5 \text{ cm};$$

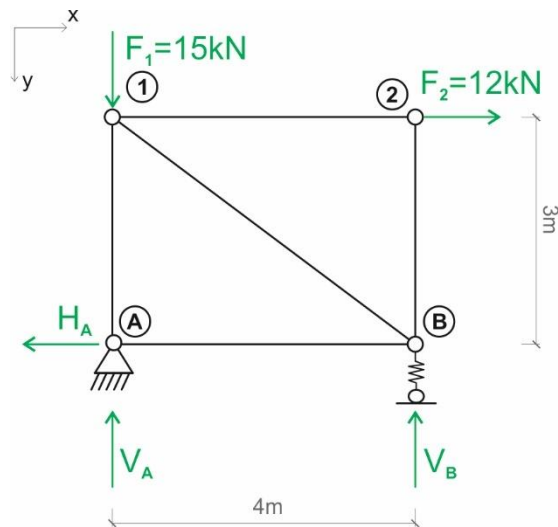
$$k_\delta = 0,5 \text{ EA/m}$$

Rys. 2.10. Schemat układu z obciążeniem

2.2.1. Sprawdzenie statycznej wyznaczalności i geometrycznej niezmienności układu

- Warunek ilościowy [por. SB1]: $w = 4, p = 5, r = 3$
 $n_h = 2w - p - r = 2 \cdot 4 - 5 - 3 = 0$. Układ jest *statycznie niewyznaczalny*
- Warunek jakościowy [por. SB1]: Układ składa się z jednej tarczy (budowa trójkątna kratownicy) połączonej z ostoją trzema więziami, niezbieżnymi i nierównoległymi więziami. Na podstawie twierdzenia o dwóch tarczach jest to układ *geometrycznie niezmienny*.

2.2.2. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia danego



Obliczenie reakcji:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_A + F_2 = 0 \Rightarrow H_A = 12 \text{ kN},$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 4 \text{ m} - F_2 \cdot 3 \text{ m} = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = 9 \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -V_A - V_B + F_1 = 0 \Rightarrow V_A = 6 \text{ kN}.$$

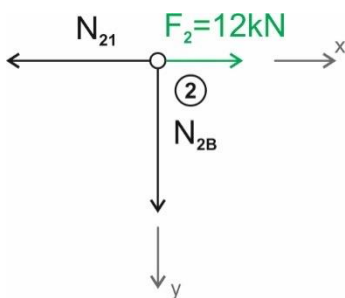
Siła w więzi sprężystej:

$$S_s^F = -V_B = -9 \text{ kN}.$$

Rys. 2.11. Przyjęte zwroty reakcji podporowych

Obliczenie wartości sił osiowych sposobem równoważenia węzłów i kontrola równań równowagi:

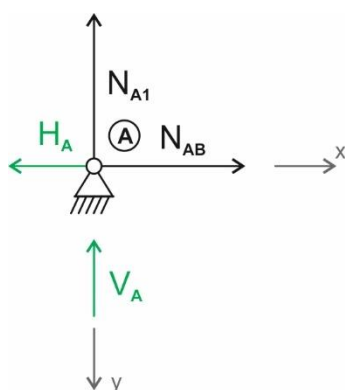
Węzeł 2



$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{12} - F_2 = 0 \Rightarrow N_{12} = 12 \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{2B} - 0 = 0 \Rightarrow N_{2B} = 0.$$

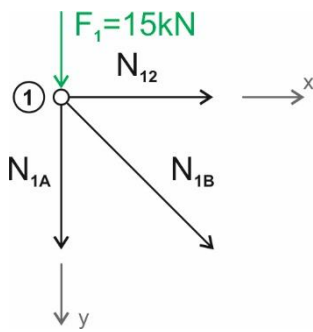
Węzeł A



$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_A + N_{AB} = 0 \Rightarrow N_{AB} = 12 \text{ kN},$$

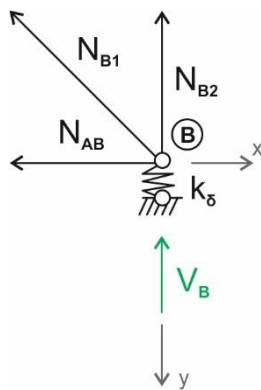
$$\sum Y = 0 \Rightarrow -V_A - N_{1A} = 0 \Rightarrow N_{1A} = -6 \text{ kN}.$$

Węzeł 1



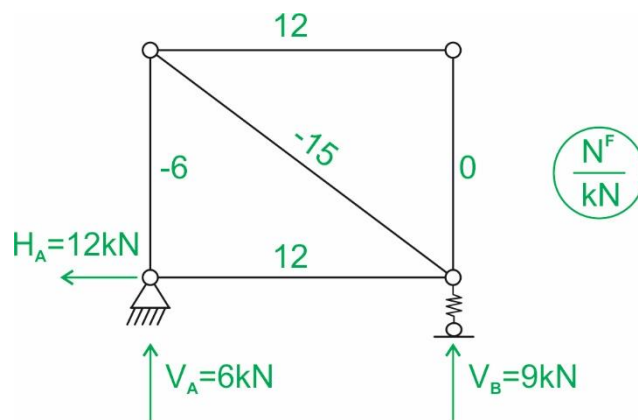
$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow N_{12} + N_{1B} \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow N_{1B} = -15 \text{ kN}, \\ \sum Y = 0 &\Rightarrow N_{1A} + N_{1B} \cdot \sin\alpha + F_1 = 0 \Rightarrow \\ &-6 \text{ kN} - 15 \text{ kN} \cdot 0,6 + 15 \text{ kN} = 0. \end{aligned} \quad (\text{kontrola})$$

Węzeł B



$$\begin{aligned} \sum X = 0 &\Rightarrow -N_{AB} - N_{1B} \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow \\ &-12 \text{ kN} - 15 \text{ kN} \cdot 0,8 = 0, \end{aligned} \quad (\text{kontrola})$$

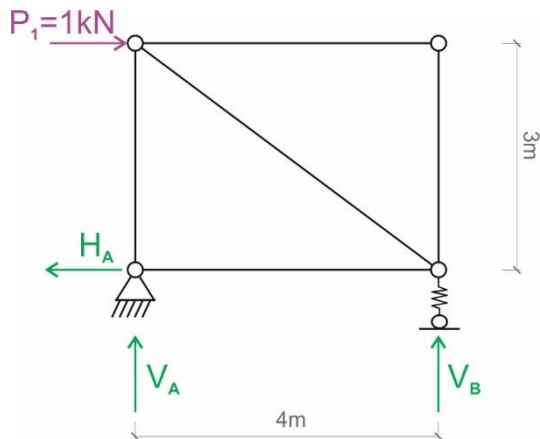
$$\begin{aligned} \sum Y = 0 &\Rightarrow -V_B - N_{2B} - N_{1B} \cdot 0,6 = 0 \Rightarrow \\ &-9 \text{ kN} - 0 - 15 \text{ kN} \cdot 0,6 = 0. \end{aligned} \quad (\text{kontrola})$$



Rys. 2.12. Siły osiowe od obciążenia danego

2.2.3. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia $P_1=1\text{ kN}$

W celu wyznaczenia przemieszczenia poziomego węzła 1, należy rozwiązać kratownicę obciążoną siłą o wartości 1kN. Siłę należy przyłożyć na kierunku szukanego przemieszczenia i w węźle, w którym przemieszczenie jest liczone.



Obliczenie reakcji:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_A + P_1 = 0 \Rightarrow H_A = 1\text{ kN},$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 4\text{ m} - P_1 \cdot 3\text{ m} = 0 \Rightarrow$$

$$V_B = 0,75\text{ kN},$$

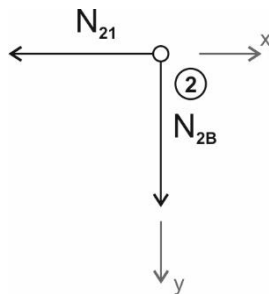
$$\sum Y = 0 \Rightarrow -V_A - V_B = 0 \Rightarrow V_A = -0,75\text{ kN}.$$

Siła w więzi sprężystej $S_s^1 = -V_B = 0$.

Rys. 2.13. Przyjęte zwroty reakcji podporowych

Obliczenie wartości sił osiowych sposobem równoważenia węzłów i kontrola równań równowagi:

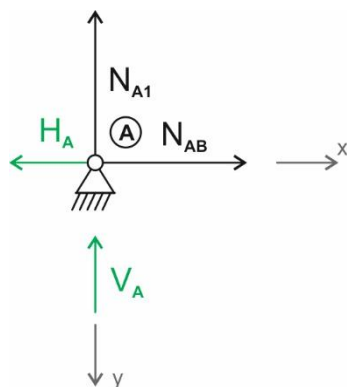
Węzeł 2



$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{12} = 0,$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{2B} = 0.$$

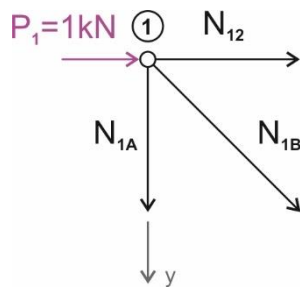
Węzeł A



$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_A + N_{AB} = 0 \Rightarrow N_{AB} = 1\text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -V_A - N_{1A} = 0 \Rightarrow N_{1A} = 0,75\text{ kN}.$$

Węzeł 1



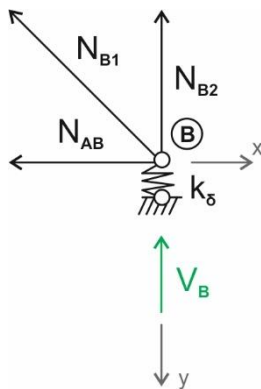
$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{12} + N_{1B} \cdot 0,8 + P_1 = 0 \Rightarrow N_{1B} = -1,25 \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{1A} + N_{1B} \cdot 0,6 = 0 \Rightarrow$$

$$0,75 \text{ kN} + (-1,25 \text{ kN}) \cdot 0,6 = 0$$

(kontrola),

Węzeł B



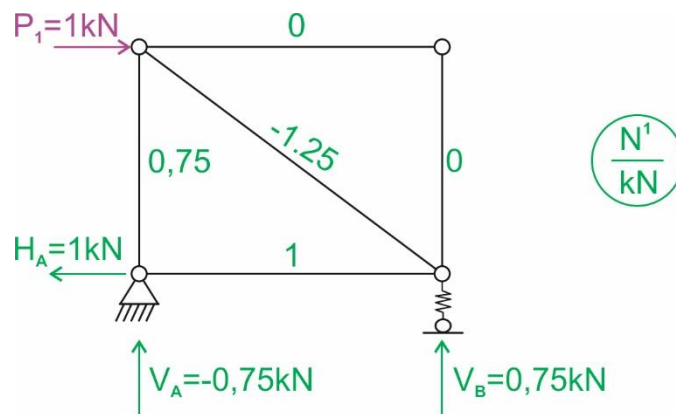
$$\sum X = 0 \Rightarrow -N_{AB} - N_{1B} \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow$$

$$-1 \text{ kN} - (-1,25 \text{ kN}) \cdot 0,8 = 0$$

(kontrola),

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -V_B - N_{2B} - N_{1B} \cdot 0,6 \Rightarrow$$

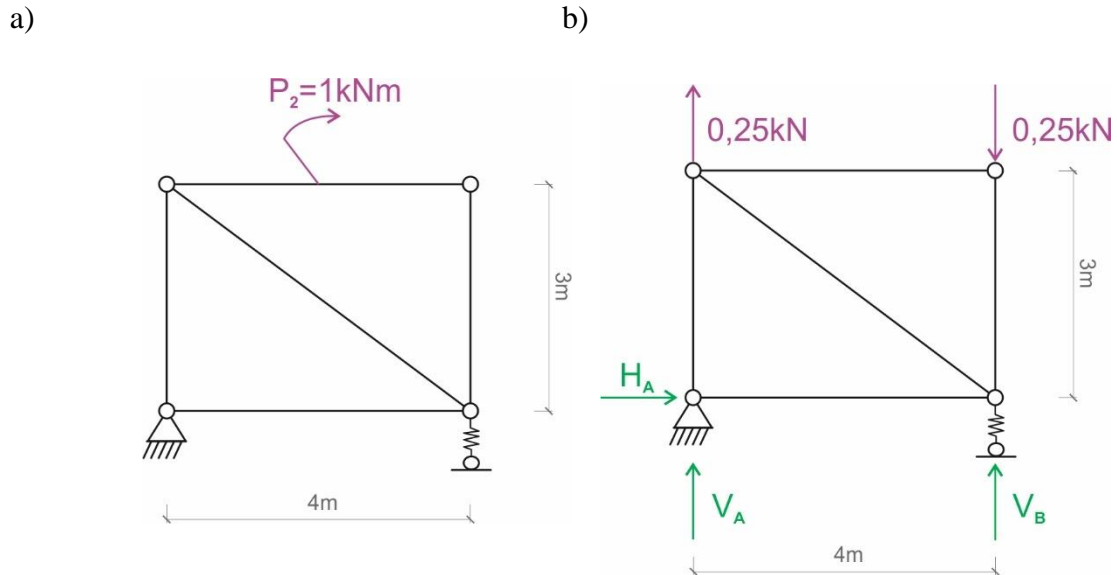
$$-0,75 \text{ kN} - 0 - (-1,25 \text{ kN}) \cdot 0,6 = 0$$



Rys. 2.14. Siły osiowe od P_1

2.2.4. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia $P_2=1 \text{ kNm}$

W celu wyznaczenia kąta obrotu pręta 1-2 należy rozwiązać kratownicę od obciążenia jednostkowym momentem. Moment przyłożony w środku rozpiętości pręta należy zastąpić parą sił prostopadłych do tego pręta i przyłożonych na obu jego końcach. Wartość każdej z sił jest równo jednostkowemu momentowi podzielonemu przez długość pręta, tj. $1 \text{ kNm}/4 \text{ m} = 0,25 \text{ kN}$.



Rys. 2.15. a) układ obciążony momentem jednostkowym, b) Przyjęte zwroty reakcji podporowych

Obliczenie reakcji:

$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_A = 0,$$

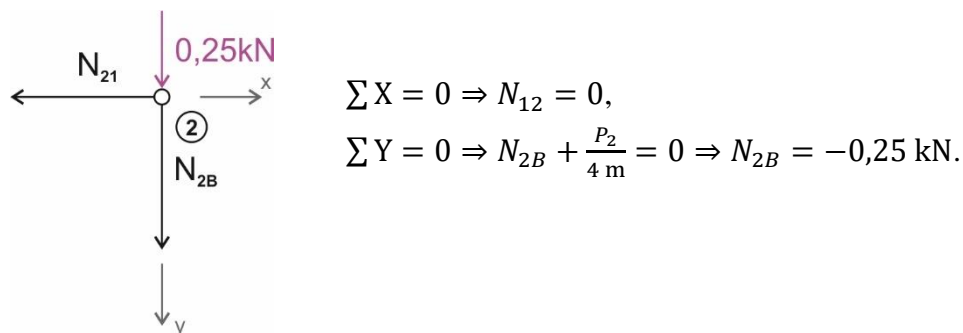
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B \cdot 4 \text{ m} - \frac{P_2}{4 \text{ m}} \cdot 4 \text{ m} = 0 \Rightarrow V_B = 0,25 \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -V_A - V_B = 0 \Rightarrow V_A = -0,25 \text{ kN}.$$

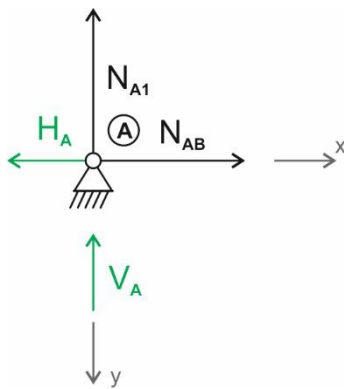
Siła w więzi sprężystej $S_2^2 = -V_B = 0,25 \text{ kN}$.

Obliczenie wartości sił osiowych sposobem równoważenia węzłów i kontrola równań równowagi

Węzeł 2



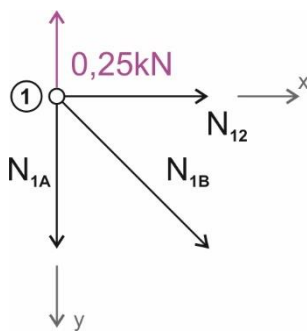
Węzeł A



$$\sum X = 0 \Rightarrow -H_A + N_{AB} = 0 \Rightarrow N_{AB} = 0,$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -V_A - N_{1A} = 0 \Rightarrow N_{1A} = 0,25 \text{ kN}.$$

Węzeł 1



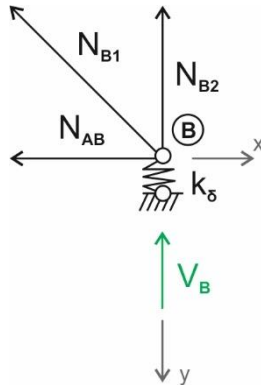
$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{12} + N_{1B} \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow N_{1B} = 0,$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{1A} + N_{1B} \cdot 0,6 - \frac{P_2}{4 \text{ m}} = 0 \Rightarrow$$

$$0,25 \text{ kN} + 0 \cdot 0,6 - 0,25 \text{ kN} = 0$$

(kontrola),

Węzeł B



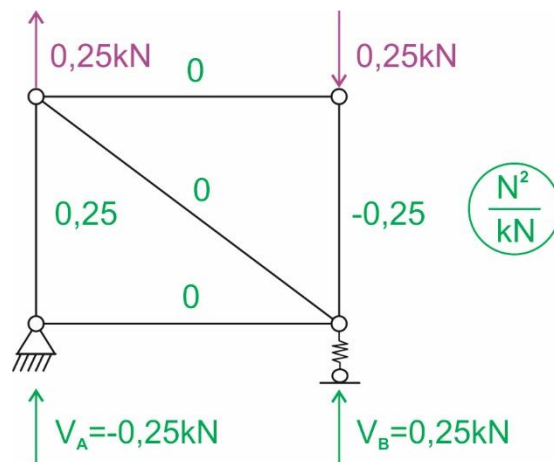
$$\sum X = 0 \Rightarrow -N_{AB} - N_{1B} \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow 0 - 0 \cdot 0,8 = 0$$

(kontrola),

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -V_B - N_{2B} - N_{1B} \cdot 0,6 = 0 \Rightarrow$$

$$-0,25 \text{ kN} - (-0,25 \text{ kN}) - 0 \cdot 0,6 = 0.$$

(kontrola),



Rys. 2.16. Siły osiowe od P_2

2.2.5. Wstępne projektowanie przekrojów prętów

Pręt 1-2 i A-B

Obydwa pręty są rozciągane. Wartość siły rozciągającej w obu prętach wynosi 12kN.

Pole przekroju jest obliczane wg wzoru

$$A^+ \geq \frac{N_{max} \cdot \gamma_f}{f_d}$$

$$A^+ \geq \frac{12 \text{ kN} \cdot 1,5}{215\,000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2}} = 0,83 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$\text{Przyjęto rurę R30x2,6} \Rightarrow A = 2,24 \text{ cm}^2 > 0,83 \text{ cm}^2$$

Pręt 1-A i 1-B

Obydwa pręty są ściskane. Wartość siły ściskającej jest większa w pręcie 1-B i wynosi 15 kN.

Przyjęto współczynnik wyboczeniowy $\varphi = 0,5$.

Pole przekroju pręta ściskanego jest obliczane wg wzoru

$$A^- \geq \frac{|N_{min}| \cdot \gamma_f}{f_d \cdot \varphi}$$

$$A^- \geq \frac{|-15 \text{ kN}| \cdot 1,5}{215\,000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 0,5} = 2,09 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2.$$

$$\text{Przyjęto rurę R30x2,9} \Rightarrow A = 2,47 \text{ cm}^2 > 2,09 \text{ cm}^2.$$

Pręt 2-B

Pręt 2-B nie przenosi siły osiowej. Przyjęto dla pręta 2-B rurę R30x2,9 $\Rightarrow A = 2,47 \text{ cm}^2$.

Sztywność więzi sprężystej

Ponieważ w warunkach zadania nie określono, dla którego pręta przyjąć $\frac{EA}{m}$, można wybrać dowolnie. Przyjęto $\frac{EA}{m}$ dla pręta 1-B, zatem sztywność więzi sprężystej wynosi:

$$k_\delta = 0,5 \frac{EA}{m} = 0,5 \cdot \frac{205 \cdot 10^6 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 2,47 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2}{\text{m}} = 25317,5 \frac{\text{kN}}{\text{m}}.$$

2.2.6. Obliczenie szukanego przemieszczenia

4.2.6.1. Obliczenie szukanego przemieszczenia od obciążenia mechanicznego

$$P_1 \cdot \Delta_{1F} = \sum_p \left(\frac{N^1 \cdot N^F}{EA} \cdot L \right)_p + \sum_s \frac{S_s^1 \cdot S_s^F}{k_s}, \quad P_2 \cdot \Delta_{2F} = \sum_p \left(\frac{N^2 \cdot N^F}{EA} \cdot L \right)_p + \sum_s \frac{S_s^2 \cdot S_s^F}{k_s}.$$

Pręt	EA	L	k_δ	N^F	N^1	N^2	Δ_{1F}	Δ_{2F}
	kN	m	kN/m	kN	kN	kN	m	-
1-2	45 920	4	-	12	0	0	0	0
1-A	50 635	3	-	-6	0,75	0,25	-0,00027	-0,000089
1-B	50 635	5	-	-15	-1,25	0	0,00185	0
A-B	45 920	4	-	12	1	0	0,00104	0
2-B	50 635	3	-	0	0	-0,25	0	0
Więż spr.			25317,5	-9	-0,75	-0,25	0,000027	0,000089
							0,0029	0

2.2.6.2. Obliczenie szukanego przemieszczenia od zmian temperatury

$$P_1 \cdot \Delta_{1T} = \sum_p (N^1 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T_0 \cdot L)_p, \quad P_2 \cdot \Delta_{2T} = \sum_p (N^2 \cdot \alpha_T \cdot \Delta T_0 \cdot L)_p.$$

Pręt	α_T	L	ΔT_0	N^1	N^2	Δ_{1T}	Δ_{2T}
	1/°C	m	°C	kN	kN	m	-
1-B	0,000012	5	10	-1,25	0	-0,00075	0
2-B	0,000012	3	-20	0	-0,25	0	0,00018
						-0,00075	0,00018

2.2.6.3. Obliczenie szukanego przemieszczenia od błędów montażu

$$P_1 \cdot \Delta_{1\Delta} = \sum_p (N^1 \cdot \Delta L^\Delta)_p, \quad P_2 \cdot \Delta_{2\Delta} = \sum_p (N^2 \cdot \Delta L^\Delta)_p.$$

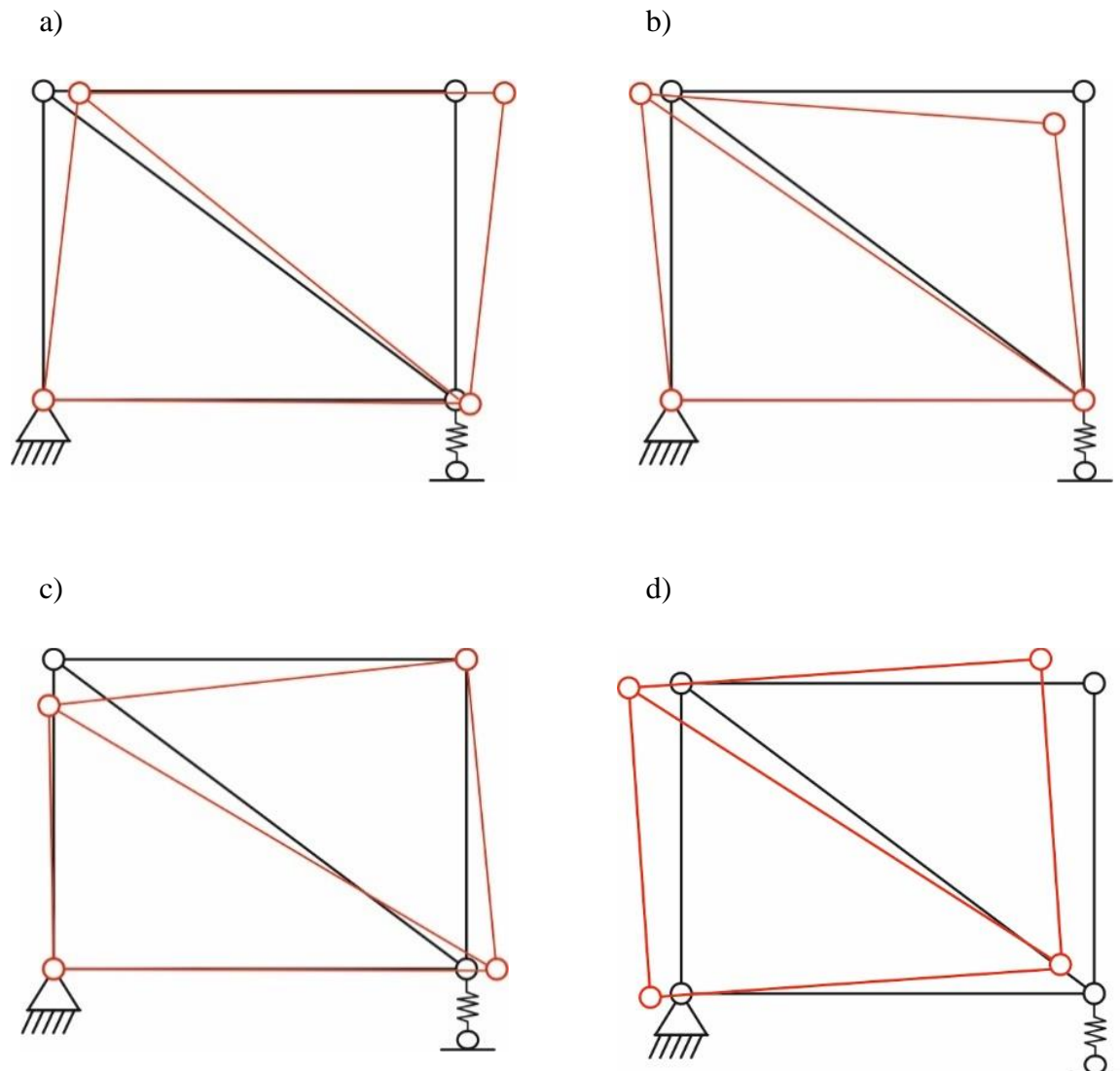
Pręt	ΔL	N^1	N^2	$\Delta_{1\Delta}$	$\Delta_{2\Delta}$
	M	kN	kN	m	-
1-A	-0,03	0,75	0,25	-0,0225	-0,0075
A-B	0,02	1	0	0,02	0
				-0,0025	-0,0075

2.2.6.4. Obliczenie szukanego przemieszczenia od osiadania podpór

$$P_1 \cdot \Delta_{1\Delta r} = -\sum_r (R_r^1 \cdot \Delta_r)_r, \quad P_2 \cdot \Delta_{2\Delta r} = -\sum_r (R_r^2 \cdot \Delta_r)_r.$$

Oznaczenie reakcji	Δr	N^1	N^2	$\Delta_{1\Delta r}$	$\Delta_{2\Delta r}$
	m	kN	kN	m	-
H_A	0,05	1	0	-0,05	0
V_B	0,04	0,75	0,25	-0,03	-0,01
				-0,08	-0,0475

2.2.7. Schematy przemieszczeń



Rys. 2.17. Symulacja deformacji kratownicy
 a) od wpływów mechanicznych,
 b) temperatury,
 c) błędów montażu,
 d) osiadania podpór.

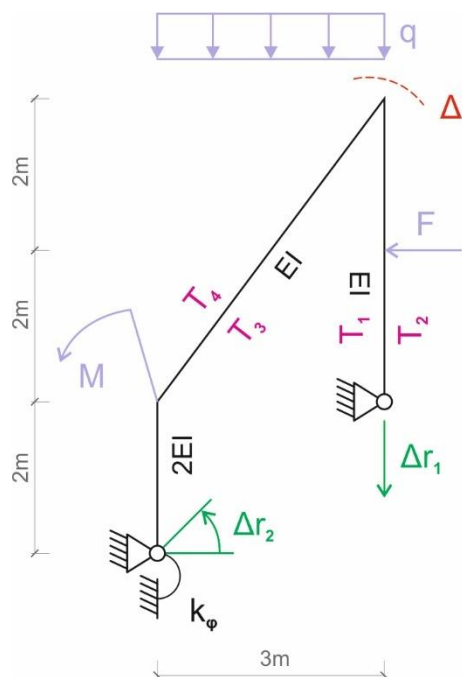
3. PRZYKŁADY - UKŁADY STATYCZNIE NIETYCZALNE

3.1. METODA SIŁ

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu mechanicznym i niemechanicznym jak na rysunku

3.1. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę sił rozwiązać ramę od zadanego obciążenia siłami.
- Rozwiązać zadany układ od obciążeń niemechanicznych dla przyjętego przekroju.
- Obliczyć wartość przemieszczenia w zaznaczonym miejscu oddzielnie od wszystkich obciążeń.



Rys. 3.1. Schemat statyczny

Dane do obliczeń: $F=10$ kN; $q=4$ kN/m; $M=20$ kNm; $k_{\varphi}=10$ EI/m; $T_1=10$ °C; $T_2=-20$ °C; $T_3=-15$ °C; $T_4=25$ °C; $\Delta r_1=4$ cm; $\Delta r_2=0,06$ rad.

UWAGA: Rozwiązując zadanie od wpływów niemechanicznych i obliczając przemieszczenia należy przyjąć, uwzględniając, że układ składa się z przętów o sztywności EI oraz $2EI$, dwuteownik równoległościenny IPE 160 dla przętów o sztywności EI oraz 2 IPE 160 dla przęta o sztywności $2EI$

$$W_{IPE\ 160} = 108,6\text{ cm}^3, I_{IPE\ 160} = 869,0\text{ cm}^4.$$

$$EI = 210000000\text{ kN/m}^2 * 869,0 * 10^{-8}\text{ m}^4 = 1824,9\text{ kNm}^2,$$

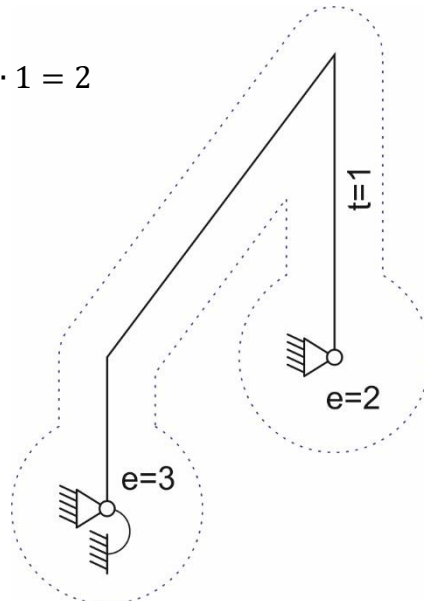
$$k_{\varphi} = 10\text{ EI/m} = 18249\text{ kNm/rad}.$$

3.1.1. Sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu i obliczenie stopnia statycznej niewyznaczalności

- Stopień statycznej niewyznaczalności [por. SB1].

$$t = 1, e = 3 + 2 = 5,$$

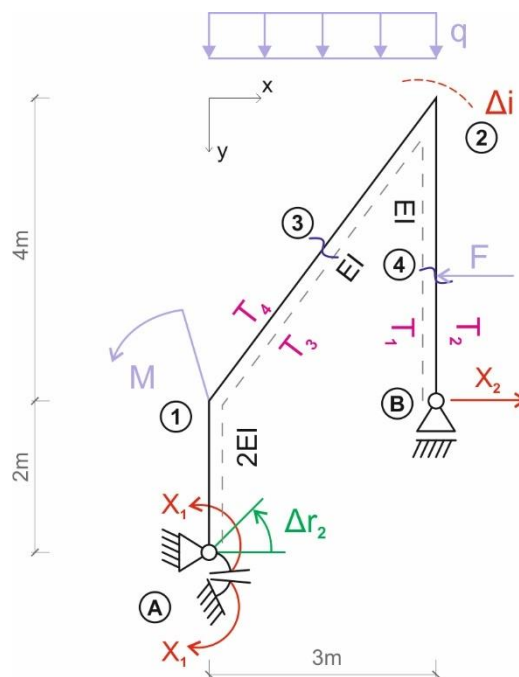
$$n_h = e - 3 \cdot t = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$



Rys. 3.2. Tarcze i więzi

- Układ składa się z jednej tarczy połączonej z ostoją pięcioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 3 niezbieżne i nierównoległe. Jest to układ *geometrycznie niezmienny*.

3.1.2. Przyjęcie układu podstawowego metody sił



Rys. 3.3. Układ podstawowy metody sił (UPMS)

3.1.3. Równania kanoniczne metody sił

Równania kanoniczne metody sił są równaniami przemieszczeniowymi. Ogólna postać układu równań metody sił (URMS) ma postać:

Od obciążenia mechanicznego:

$$\delta_{11}X_1^F + \delta_{12}X_2^F + \delta_{1F} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1^F + \delta_{22}X_2^F + \delta_{2F} = 0.$$

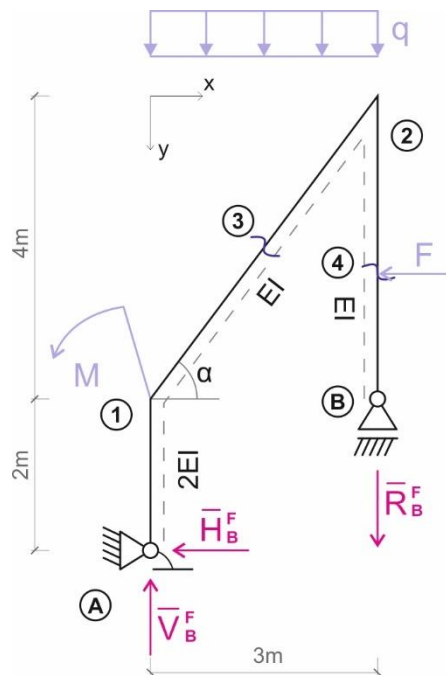
Od zmian temperatury i osiadania podpór:

$$\delta_{11}X_1^N + \delta_{12}X_2^N + \delta_{1T} + \delta_{1\Delta} = 0,$$

$$\delta_{21}X_1^N + \delta_{22}X_2^N + \delta_{2T} + \delta_{2\Delta} = 0.$$

3.1.4. Rozwiązanie ramy od obciążenia mechanicznego

3.1.4.1. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia mechanicznego



Rys. 3.4. Reakcje od obciążenia siłami w układzie podstawowym

Obliczenie reakcji:

$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{H}_A^F = -10 \text{ kN},$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^F \cdot 3 \text{ m} - F \cdot 4 \text{ m} + q \cdot 3 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} - M = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^F = 14 \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^F - \bar{V}_A^F + q \cdot 3 \text{ m} = 0 \Rightarrow \bar{V}_A^F = 26 \text{ kN}.$$

Obliczenie momentów zginających:

$$\bar{M}_{A1}^F = 0,$$

$$\bar{M}_{1A}^F = \bar{H}_A^F \cdot 2 \text{ m} = -10 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = -20 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{12}^F = \bar{H}_A^F \cdot 2 \text{ m} - M = -10 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 20 \text{ kNm} = -40 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_3^F = \bar{H}_A^F \cdot 4 \text{ m} + \bar{V}_A^F \cdot 1,5 \text{ m} - M - q \cdot 1,5 \text{ m} \cdot 0,75 \text{ m} = -10 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} + 26 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} - 20 \text{ kNm} - 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 1,5 \text{ m} \cdot 0,75 \text{ m} = -25,5 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{21}^F = \bar{H}_A^F \cdot 6 \text{ m} + \bar{V}_A^F \cdot 3 \text{ m} - M - q \cdot 3 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} = -10 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} + 26 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} - 20 \text{ kNm} - 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} = -20 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{2B}^F = -F \cdot 2 \text{ m} = -10 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = -20 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{B2}^F = \bar{M}_4^F = 0.$$

Obliczenie sił tnących:

$$\bar{V}_{A1}^F = \bar{V}_{1A}^F = \bar{H}_A^F = -10 \text{ kN},$$

$$\bar{V}_{12}^F = \bar{H}_A^F \cdot 0,8 + \bar{V}_A^F \cdot 0,6 = -10 \text{ kN} \cdot 0,8 + 26 \text{ kN} \cdot 0,6 = 7,6 \text{ kN},$$

$$\bar{V}_{21}^F = \bar{H}_A^F \cdot 0,8 + \bar{V}_A^F \cdot 0,6 - q \cdot 3 \text{ m} \cdot 0,6 = -10 \text{ kN} \cdot 0,8 + 26 \text{ kN} \cdot 0,6 - 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot 0,6 = 0,4 \text{ kN},$$

$$\bar{V}_{B4}^F = \bar{V}_{4B}^F = 0,$$

$$\bar{V}_{42}^F = \bar{V}_{24}^F = F = 10 \text{ kN}.$$

Obliczenie sił osiowych:

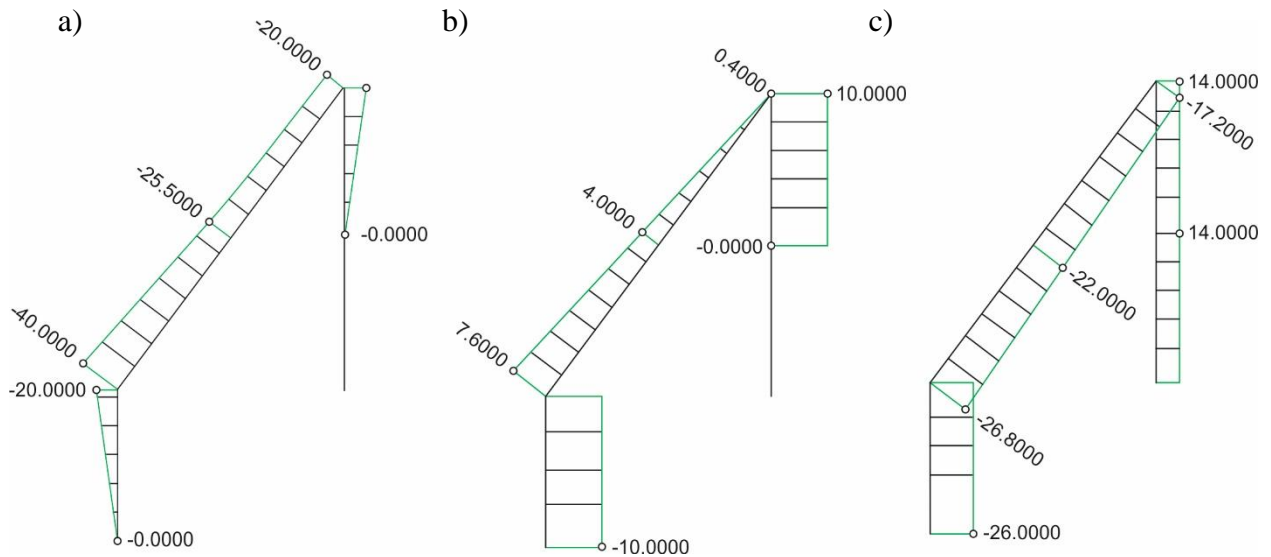
$$\bar{N}_{A1}^F = \bar{N}_{1A}^F = -\bar{V}_A^F = -26 \text{ kN},$$

$$\bar{N}_{12}^F = \bar{H}_A^F \cdot 0,6 - \bar{V}_A^F \cdot 0,8 = -10 \text{ kN} \cdot 0,6 - 26 \text{ kN} \cdot 0,8 = -26,8 \text{ kN},$$

$$\bar{N}_{21}^F = \bar{H}_A^F \cdot 0,6 - \bar{V}_A^F \cdot 0,8 + q \cdot 3 \text{ m} \cdot 0,8 = -10 \text{ kN} \cdot 0,6 - 26 \text{ kN} \cdot 0,8 + 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot 0,8 = -17,2 \text{ kN},$$

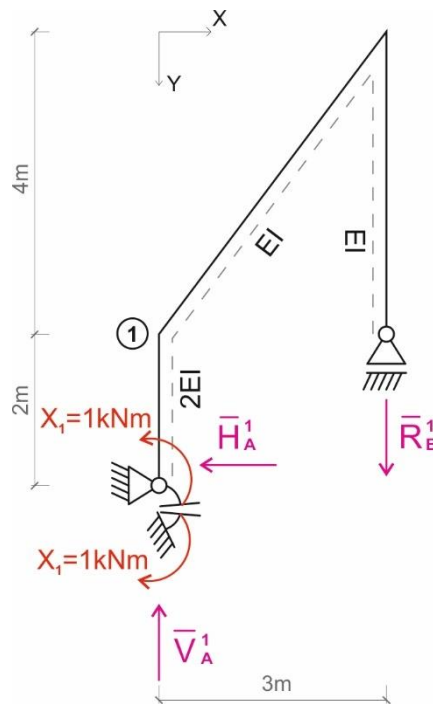
$$\bar{N}_{B2}^F = \bar{N}_{2B}^F = \bar{R}_B^F = 14 \text{ kN}.$$

Moment zginający w więzi sprężystej: $\bar{S}_\phi^F = 0 \text{ kNm}$.



Rys. 3.5. Wykresy sił przekrojowych od obciążenia danego:
a) M^F kNm, b) V^F w kN, c) N^F w kN

3.1.4.2. Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$ kNm



Rys. 3.6. Reakcje od $X_1=1$ kNm

Obliczenie reakcji:

$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{H}_{1A}^1 = 0 \text{ kN,}$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^1 \cdot 3 \text{ m} - X_1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^1 = \frac{1}{3} \text{ kN,}$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^1 - \bar{V}_A^1 = 0 \Rightarrow \bar{V}_A^1 = \frac{1}{3} \text{ kN.}$$

Obliczenie momentów zginających:

$$\bar{M}_{A1}^1 = \bar{M}_{1A}^1 = \bar{M}_{12}^1 = -X_1 = -1 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{B2}^1 = \bar{M}_{2B}^1 = \bar{M}_{21}^1 = 0.$$

Obliczenie sił tnących:

$$\bar{V}_{A1}^1 = \bar{V}_{1A}^1 = \bar{H}_A^1 = 0,$$

$$\bar{V}_{12}^1 = \bar{V}_{21}^1 = \bar{H}_A^1 \cdot 0,8 + \bar{V}_A^1 \cdot 0,6 = 0 \text{ kN} \cdot 0,8 + \frac{1}{3} \text{ kN} \cdot 0,6 = 0,2 \text{ kN},$$

$$\bar{V}_{B2}^1 = \bar{V}_{2B}^1 = 0.$$

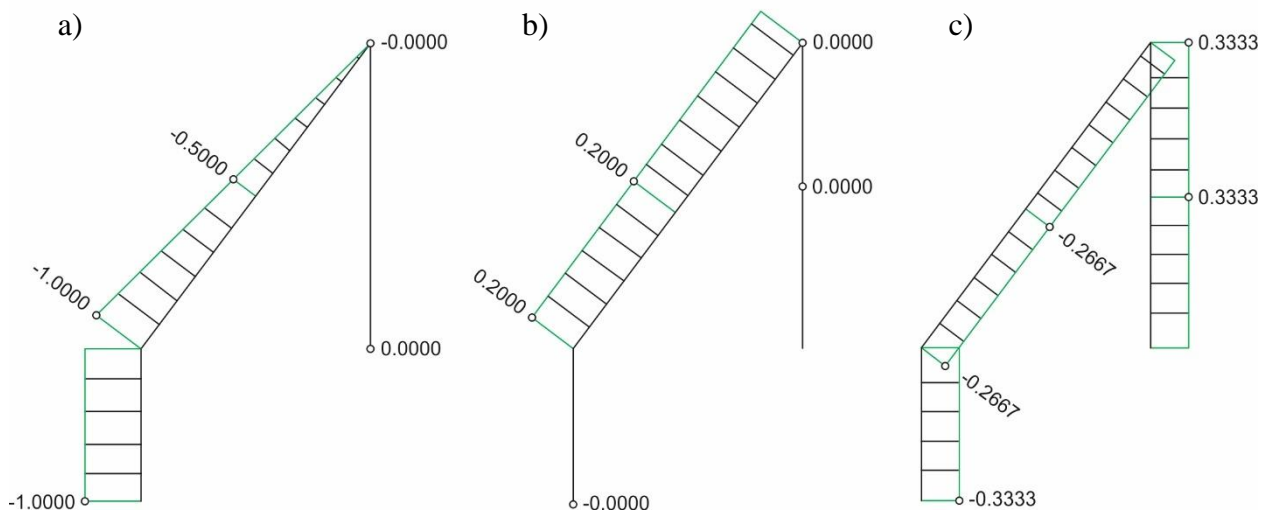
Obliczenie sił osiowe:

$$\bar{N}_{A1}^1 = \bar{N}_{1A}^1 = -\bar{V}_A^1 = -0,3333 \text{ kN},$$

$$\bar{N}_{12}^1 = \bar{N}_{21}^1 = \bar{H}_A^1 \cdot 0,6 - \bar{V}_A^1 \cdot 0,8 = 0 \text{ kN} \cdot 0,6 - \frac{1}{3} \text{ kN} \cdot 0,8 = -0,2667 \text{ kN},$$

$$\bar{N}_{B2}^1 = \bar{V}_{2B}^1 = \bar{R}_B^1 = 0,3333 \text{ kN}.$$

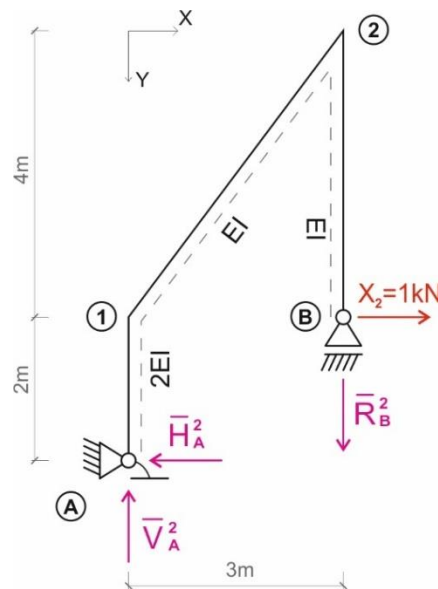
Moment zginający w więzi sprężystej: $\bar{S}_\varphi^1 = X_1 = 1 \text{ kNm}$.



Rys. 3.7. Wykresy sił przekrojowych od X_1 :

a) M^l kNm, b) V^l w kN, c) N^l w kN

3.1.4.3. Rozwiązanie układu podstawowego od $X_2=1$ kN



Rys. 3.8. Reakcje od $X_2=1$ kN

Obliczenie reakcji:

$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{H}_A^2 = X_2 = 1 \text{ kN},$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^2 \cdot 3 \text{ m} + X_2 \cdot 2 \text{ m} = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^2 = -\frac{2}{3} \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^2 - \bar{V}_A^2 = 0 \Rightarrow \bar{V}_A^2 = -\frac{2}{3} \text{ kN}.$$

Obliczenie momentów zginających:

$$\bar{M}_{A1}^2 = 0 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{1A}^2 = \bar{M}_{12}^2 = \bar{H}_A^2 \cdot 2 \text{ m} = 1 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = 2 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{21}^2 = \bar{M}_{2B}^2 = X_2 \cdot 4 \text{ m} = 4 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{B2}^2 = 0.$$

Obliczenie sił tnących:

$$\bar{V}_{A1}^2 = \bar{V}_{1A}^2 = \bar{H}_A^2 = 1 \text{ kN},$$

$$\bar{V}_{12}^2 = \bar{V}_{21}^2 = \bar{H}_A^2 \cdot 0,8 + \bar{V}_A^2 \cdot 0,6 = 1 \text{ kN} \cdot 0,8 - \frac{2}{3} \text{ kN} \cdot 0,6 = 0,4 \text{ kN},$$

$$\bar{V}_{B2}^2 = \bar{V}_{2B}^2 = -X_2 = -1 \text{ kN}.$$

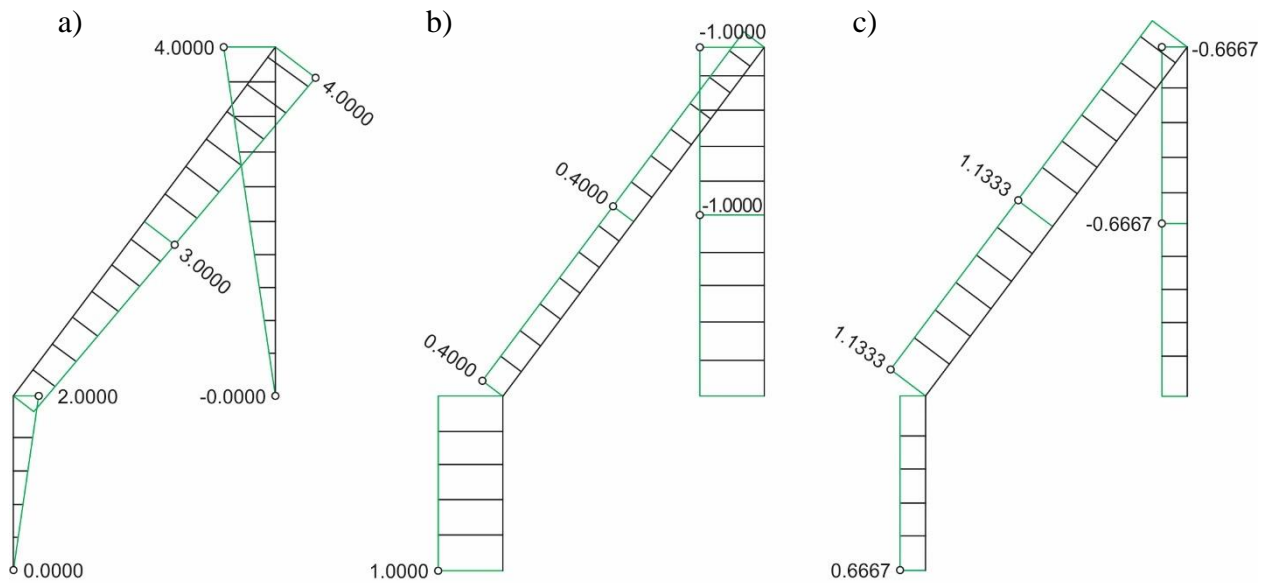
Obliczenie sił osiowe:

$$\bar{N}_{A1}^2 = \bar{N}_{1A}^2 = -\bar{V}_A^2 = 0,6667 \text{ kN},$$

$$\bar{N}_{12}^2 = \bar{N}_{21}^2 = \bar{H}_A^2 \cdot 0,6 - \bar{V}_A^2 \cdot 0,8 = 1 \text{ kN} \cdot 0,6 + \frac{2}{3} \text{ kN} \cdot 0,8 = 1,1333 \text{ kN},$$

$$\bar{N}_{B2}^2 = \bar{V}_{2B}^2 = \bar{R}_B^2 = -0,6667 \text{ kN}.$$

Moment zginający w więzi sprężystej: $\bar{S}_\varphi^2 = 0 \text{ kNm}$.



Rys. 3.9. Wykresy sił przekrojowych od X_2 :
a) M^2 kNm, b) V^2 w kN, c) N^2 w kN

3.1.4.4. Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych układu równań metody sił

Do obliczenia całek we wzorach podanych w p. 3.1.3 zastosowano wzory uproszczonego całkowania (wzór Simpsona lub wzór Wereszczagina por. 1.5.2. SB2).

$$X_1 \cdot \delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot (-1 \text{ kNm}) \cdot 2 \text{ m} \cdot (-1 \text{ kNm}) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1 \text{ kNm}) \cdot 5 \text{ m} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-1 \text{ kNm}) + \frac{1 \text{ kNm} \cdot 1 \text{ kNm}}{10 \frac{EI}{\text{m}}} \Rightarrow \delta_{11} = 2,7667 \frac{\text{kNm}^2}{EI},$$

$$X_1 \cdot \delta_{12} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kNm} \cdot 2 \text{ m} \cdot (-1 \text{ kNm}) + \frac{5 \text{ m}}{EI \cdot 6} \cdot [(-1 \text{ kNm}) \cdot 2 \text{ kNm} + 4 \cdot (-0,5 \text{ kNm}) \cdot 3 \text{ kNm} + 0 \cdot 4 \text{ kNm}] + \frac{0 \cdot 1 \text{ kNm}}{10 \frac{EI}{\text{m}}} \Rightarrow \delta_{12} = -7,6667 \frac{\text{kNm}^2}{EI},$$

$$X_1 \cdot \delta_{1F} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot (-1 \text{ kNm}) \cdot \frac{2}{3} \cdot (-20 \text{ kNm}) + \frac{5 \text{ m}}{EI \cdot 6} \cdot [(-1 \text{ kNm}) \cdot (-40 \text{ kNm}) + 4 \cdot (-0,5 \text{ kNm}) \cdot (-25,5 \text{ kNm}) + 0 \cdot (-20 \text{ kNm})] + \frac{0 \cdot 1 \text{ kNm}}{10 \frac{EI}{\text{m}}} \Rightarrow \delta_{1F} = 85,8333 \frac{\text{kNm}^2}{EI},$$

$$X_2 \cdot \delta_{21} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ kNm} \cdot 2 \text{ m} \cdot (-1 \text{ kNm}) + \frac{5 \text{ m}}{2EI \cdot 6} [(-1 \text{ kNm}) \cdot 2 \text{ kNm} + 4 \cdot (-0,5 \text{ kNm}) \cdot 3 \text{ kNm} + 0 \cdot 4 \text{ kNm}] + \frac{0 \cdot 1 \text{ kNm}}{10 \frac{EI}{\text{m}}} \Rightarrow \delta_{21} = -7,6667 \frac{\text{kNm}^2}{EI},$$

$$X_2 \cdot \delta_{22} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kNm} \cdot 2 \text{ m} \cdot \frac{2}{3} \cdot 2 \text{ kNm} + \frac{5 \text{ m}}{2EI \cdot 6} \cdot [2 \text{ kNm} \cdot 2 \text{ kNm} + 4 \cdot 3 \text{ kNm} \cdot 3 \text{ kNm} + 4 \text{ kNm} \cdot 4 \text{ kNm}] + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ kNm} \cdot 4 \text{ m} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \text{ kNm} + \frac{0 \cdot 0}{10 \frac{EI}{\text{m}}} \Rightarrow \delta_{22} = 69,3333 \frac{\text{kNm}^3}{EI},$$

$$X_2 \cdot \delta_{2F} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ kNm} \cdot 2 \text{ m} \cdot \frac{2}{3} \cdot (-20 \text{ kNm}) + \frac{5 \text{ m}}{EI \cdot 6} \cdot [2 \text{ kNm} \cdot (-40 \text{ kNm}) + 4 \cdot 3 \text{ kNm} \cdot (-25,5 \text{ kNm}) + 4 \text{ kNm} \cdot (-20 \text{ kNm} \cdot \text{m})] + \frac{2 \text{ m}}{EI \cdot 6} [4 \text{ kNm} \cdot (-20 \text{ kNm}) + 4 \cdot 3 \text{ kNm} \cdot (-10 \text{ kNm}) + 2 \text{ kNm} \cdot 0] + \frac{0 \cdot 0}{10 \frac{EI}{\text{m}}} \Rightarrow \delta_{22} = -468,333 \frac{\text{kNm}^3}{EI},$$

3.1.4.5. Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie

$$2,7667 \frac{\text{kNm}^2}{EI} \cdot X_1^F - 7,6667 \frac{\text{kNm}^2}{EI} \cdot X_2^F + 85,8333 \frac{\text{kNm}^2}{EI} = 0,$$

$$-7,6667 \frac{\text{kNm}^3}{EI} \cdot X_1^F + 69,3333 \frac{\text{kNm}^3}{EI} \cdot X_2^F - 468,3333 \frac{\text{kNm}^3}{EI} = 0,$$

$$X_1^F = -17,7422, \quad X_2^F = 4,7929.$$

3.1.4.6. Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów

Rzeczywiste reakcje i siły przekrojowe można obliczyć rozwiązując układ podstawowy od obciążenia i obliczonych w pkt. 3.1.4.5 sił hiperstatycznych. Innym sposobem, jest obliczenie reakcji i sił przekrojowych korzystając z zasady superpozycji:

$$R_i^F = \bar{R}_i^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_i^2 \cdot X_2^F + \bar{R}_i^F,$$

$$M_{ij}^F = \bar{M}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{M}_{ij}^2 \cdot X_2^F + \bar{M}_{ij}^F,$$

$$V_{ij}^F = \bar{V}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{V}_{ij}^2 \cdot X_2^F + \bar{V}_{ij}^F,$$

$$N_{ij}^F = \bar{N}_{ij}^1 \cdot X_1^F + \bar{N}_{ij}^2 \cdot X_2^F + \bar{N}_{ij}^F.$$

Reakcje:

$$V_A^F = \bar{V}_A^1 \cdot X_1^F + \bar{V}_A^2 \cdot X_2^F + \bar{V}_A^F = \frac{1}{3} \text{ kN} \cdot (-17,7422) + \left(-\frac{2}{3} \text{ kN}\right) \cdot 4,7929 + 26 \text{ kN} = 16,8904 \text{ kN},$$

$$H_A^F = \bar{H}_A^1 \cdot X_1^F + \bar{H}_A^2 \cdot X_2^F + \bar{H}_A^F = 0 \cdot (-17,7422) + 1 \text{ kN} \cdot 4,7929 - 10 \text{ kN} = -5,2071 \text{ kN},$$

$$R_B^F = \bar{R}_B^1 \cdot X_1^F + \bar{R}_B^2 \cdot X_2^F + \bar{R}_B^F = \frac{1}{3} \text{ kN} \cdot (-17,7422) + \left(-\frac{2}{3} \text{ kN}\right) \cdot 4,7929 + 14 \text{ kN} = 4,8907 \text{ kN}.$$

Momenty zginające:

$$M_{A1}^F = \bar{M}_{A1}^1 \cdot X_1^F + \bar{M}_{A1}^2 \cdot X_2^F + \bar{M}_{A1}^F = (-1 \text{ kNm}) \cdot (-17,7422) + 0 \cdot 4,7929 + 0 = 17,7422 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{1A}^F = (-1 \text{ kNm}) \cdot (-17,7422) + 2 \text{ kNm} \cdot 4,7929 + (-20 \text{ kNm}) = 7,3280 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{12}^F = (-1 \text{ kNm}) \cdot (-17,7422) + 2 \text{ kNm} \cdot 4,7929 + (-40 \text{ kNm}) = -12,6720 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_3^F = \left(-\frac{1}{2} \text{ kNm}\right) \cdot (-17,7422) + 3 \text{ kNm} \cdot 4,7929 + (-25,5 \text{ kNm}) = -2,2502 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{21}^F = 0 \cdot (-17,7422) + 4 \text{ kNm} \cdot 4,7929 + (-20 \text{ kNm}) = -0,8284 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{B2}^F = 0 \cdot (-17,7422) + 0 \cdot 4,7929 + 0 = 0 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$\bar{M}_4^F = 0 \cdot (-17,7422) + 2 \text{ kNm} \cdot 4,7929 + 0 = 9,5858 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{2B}^F = 0 \cdot (-17,7422) + 4 \text{ kNm} \cdot 4,7929 + (-20 \text{ kNm}) = -0,8284 \text{ kNm}.$$

Siły tnące:

$$V_{A1}^F = \bar{V}_{A1}^1 \cdot X_1^F + \bar{V}_{A1}^2 \cdot X_2^F + \bar{V}_{A1}^F = 0 \cdot (-17,7422) + 1 \text{ kN} \cdot 4,7929 + (-10 \text{ kN}) = -5,2071 \text{ kN} = V_{1A}^F,$$

$$V_{12}^F = 0,2 \text{ kN} \cdot (-17,7422) + 0,4 \text{ kN} \cdot 4,7929 + 7,6 \text{ kN} = 5,9687 \text{ kN},$$

$$V_{21}^F = 0,2 \text{ kN} \cdot (-17,7422) + 0,4 \text{ kN} \cdot 4,7929 + 0,4 \text{ kN} = -1,2313 \text{ kN},$$

$$V_{B4}^F = 0 \cdot (-17,7422) + (-1 \text{ kN}) \cdot 4,7929 + 0 = -4,7929 \text{ kN} = V_{4B}^F,$$

$$V_{42}^F = 0 \cdot (-17,7422) + (-1 \text{ kN}) \cdot 4,7929 + 10 \text{ kN} = 5,2071 \text{ kN} = V_{24}^F.$$

Siły osiowe:

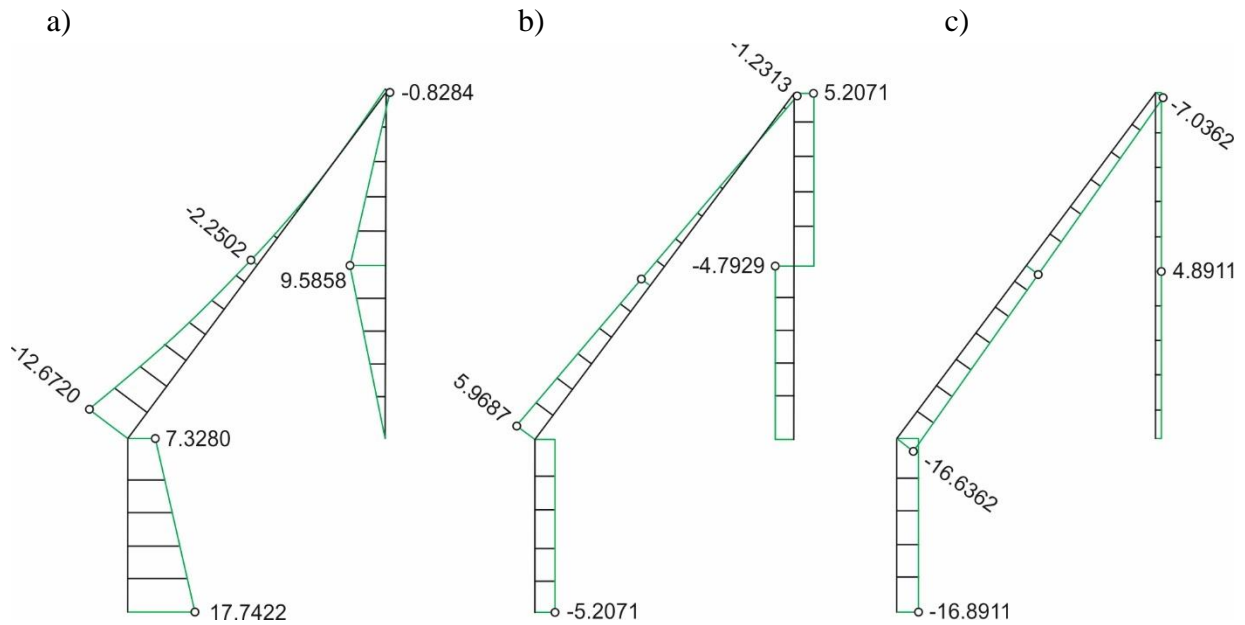
$$N_{A1}^F = \bar{N}_{A1}^1 \cdot X_1^F + \bar{N}_{A1}^2 \cdot X_2^F + \bar{N}_{A1}^F = (-0,3333 \text{ kN}) \cdot (-17,7422) + 0,6667 \text{ kN} \cdot 4,7929 + (-26 \text{ kN}) = -16,8911 \text{ kN} = N_{1A}^F,$$

$$N_{12}^F = (-0,2667 \text{ kN}) \cdot (-17,7422) + 1,1333 \text{ kN} \cdot 4,7929 + (-26,8 \text{ kN}) = -16,6362 \text{ kN},$$

$$N_{21}^F = (-0,2667 \text{ kN}) \cdot (-17,7422) + 1,1333 \text{ kN} \cdot 4,7929 + (-17,2 \text{ kN}) = -7,0362 \text{ kN},$$

$$N_{B2}^F = 0,3333 \text{ kN} \cdot (-17,7422) + (-0,6667 \text{ kN}) \cdot 4,7929 + 14 \text{ kN} = 4,8911 \text{ kN} = N_{2B}^F.$$

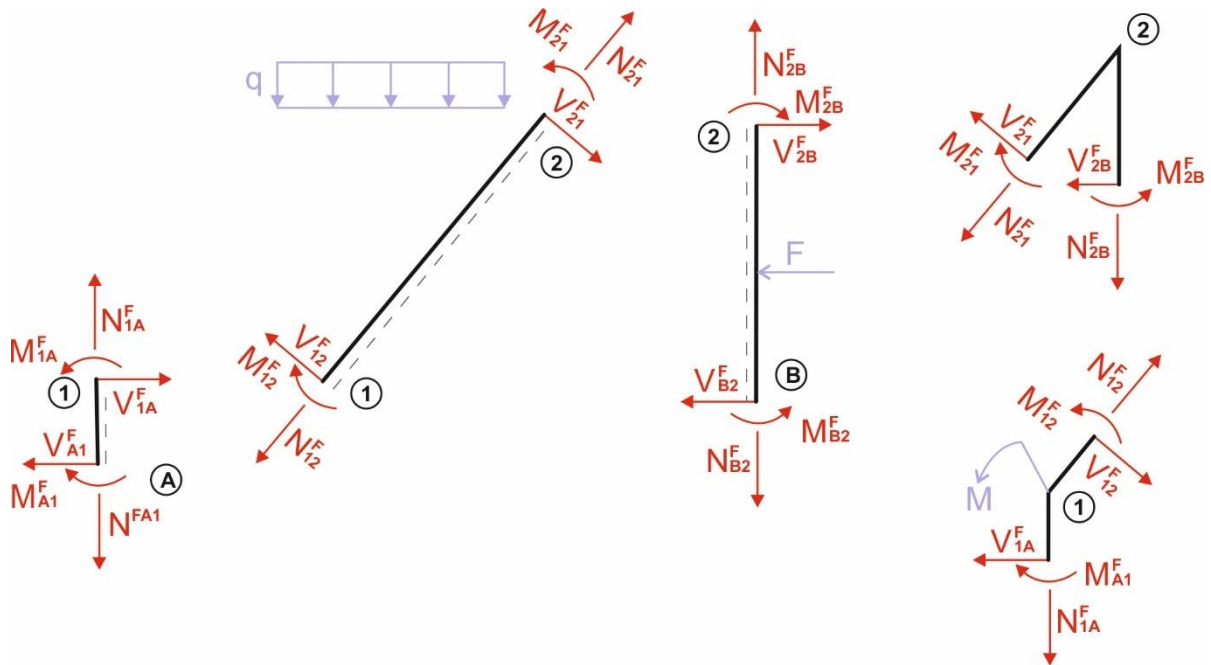
Moment zginający w więzi sprężystej: $\bar{S}_\varphi^F = \bar{S}_\varphi^1 \cdot X_1^F = 1 \text{ kNm} \cdot (-17,7422) = -17,7422 \text{ kNm}.$



Rys. 3.10. wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od obciążenia mechanicznego:
a) M w kNm, b) V w kN, c) N w kN

3.1.4.7. Kontrola poprawności rozwiązania

3.1.4.7.1. Kontrola statyczna rozwiązania



Rys. 3.11. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12}^F - M_{21}^F + V_{21}^F \cdot 5 \text{ m} + q \cdot 3 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} = -12,6720 \text{ kNm} - (-0,8284 \text{ kNm}) + (-1,2313 \text{ kN}) \cdot 5 \text{ m} + 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} \approx 0,$$

$$\sum V = V_{12}^F - V_{21}^F - q \cdot 3 \text{ m} \cdot \cos \alpha = 5,9687 \text{ kN} - (-1,2313 \text{ kN}) - 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot 0,6 = 0,$$

$$\sum N = N_{12}^F - N_{21}^F + q \cdot 3 \text{ m} \cdot \sin \alpha = -16,6362 \text{ kN} - (-7,0362 \text{ kN}) + 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot 0,8 = 0.$$

Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{1A}^F - M_{12}^F - M = 7,3280 \text{ kNm} - (-12,6720 \text{ kNm}) - 20 \text{ kNm} = 0,$$

$$\sum X = -V_{1A}^F + V_{12}^F \cdot \sin \alpha + N_{12}^F \cdot \cos \alpha = 5,2071 \text{ kN} + 5,9687 \text{ kN} \cdot 0,8 + (-16,6362 \text{ kN}) \cdot 0,6 = 0,0003 \text{ kN},$$

$$\sum Y = N_{1A}^F - N_{12}^F \sin \alpha + V_{12}^F \cdot \cos \alpha = -16,8911 \text{ kN} - (-16,6362 \text{ kN}) \cdot 0,8 + 5,9687 \text{ kN} \cdot 0,6 = -0,0002 \text{ kN}.$$

3.1.4.7.2. Kontrola kinematyczna rozwiązania

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach usuniętych lub przeciętych więzi. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu.

$$P_i \cdot \Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n}$$

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \Delta_{1F} &= \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{2 \text{ m}}{6 \cdot 2EI} [(-1 \text{ kNm}) \cdot 17,7422 \text{ kNm} + 4 \cdot (-1 \text{ kNm}) \cdot \\ &12,5351 \text{ kNm} + (-1 \text{ kNm}) \cdot 7,3280 \text{ kNm}] + \frac{5 \text{ m}}{6EI} [(-1 \text{ kNm}) \cdot (-12,6720 \text{ kNm}) + 4 \cdot \\ &(-0,5 \text{ kNm}) \cdot (-2,2502 \text{ kNm}) + 0] + \frac{1 \text{ kNm} \cdot (-17,7422 \text{ kNm})}{10 \frac{EI}{\text{m}}} \Rightarrow \Delta_{1F} = 0,0010 \frac{\text{kNm}^2}{EI} \approx 0. \end{aligned}$$

3.1.5. Rozwiązanie układu od temperatury i osiadania podpór

3.1.5.1. Rozwiązanie układu podstawowego od temperatury i osiadania podpór

W układach statycznie wyznaczalnych obciążenia niemechaniczne nie powodują powstawania sił przekrojowych.

3.1.5.2 Rozwiązanie układu podstawowego od $X_1=1$ kNm

Jak w punkcie 3.1.4.2.

3.1.5.3. Rozwiązanie układu podstawowego od $X_2=1$ kN

Jak w punkcie 3.1.4.3.

3.1.5.4. Obliczenie wyrazów wolnych układu równań metody sił od obciążenia temperaturą

Wyrazy wolne δ_{iT} należy obliczyć według wzoru

$$X_i \cdot \delta_{iT} = \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}^i},$$

gdzie ΔT_w to temperatura po stronie włókien uprzywilejowanych, ΔT_p to temperatura po stronie przeciwnej do włókien uprzywilejowanych a $\Delta T_0 = (\Delta T_w + \Delta T_p)/2$ jest temperą w osi pręta symetrycznego, h to wysokość przekroju. Do obliczeń przyjmujemy: $\alpha = 0.000012/^\circ\text{C}$, $h_{\text{IPE } 160} = 0,16$ m

$$\Delta T_{0,12} = \left[\frac{-15+25}{2} \right] ^\circ\text{C} = 5 ^\circ\text{C},$$

$$\Delta T_{0,2B} = \left[\frac{10-20}{2} \right] ^\circ\text{C} = -5 ^\circ\text{C},$$

$$\Omega_{\bar{M}_{12}^1} = \left(-1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \right) \text{ kNm}^2 = -2,5 \text{ kNm}^2,$$

$$\Omega_{\bar{M}_{12}^2} = \left((4 + 2) \cdot 5 \cdot \frac{1}{2} \right) \text{ kNm}^2 = 15 \text{ kNm}^2,$$

$$\Omega_{\bar{M}_{2B}^1} = 0,$$

$$\Omega_{\bar{M}_{2B}^2} = \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \right) \text{ kNm}^2 = 8 \text{ kNm}^2,$$

$$\Omega_{\bar{N}_{12}^1} = (-0,2667 \cdot 5) \text{ kNm} = -1,3335 \text{ kNm},$$

$$\Omega_{\bar{N}_{12}^2} = (1,1333 \cdot 5) \text{ kNm} = 5,6665 \text{ kNm},$$

$$\Omega_{\bar{N}_{2B}^1} = (0,3333 \cdot 4) \text{ kNm} = 1,3332 \text{ kNm},$$

$$\Omega_{\bar{N}_{2B}^2} = (-0,6667 \cdot 4) \text{ kN m} = -2,6668 \text{ kNm}.$$

$$X_1 \cdot \delta_{1T} = \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}^1} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}^1} = 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-15^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}}{0,16 \text{ m}} \cdot (-2,5 \text{ kNm}^2) + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{10^\circ\text{C} - (-20^\circ\text{C})}{0,16 \text{ m}} \cdot 0 + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 5^\circ\text{C} \cdot (-1,3335 \text{ kNm}) + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (-5^\circ\text{C}) \cdot 1,3332 \text{ kNm} \Rightarrow \delta_{1T} = 7,34 \cdot 10^{-3},$$

$$X_2 \cdot \delta_{2T} = \frac{\left[\sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}^2} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}^2} \right]}{P_2} = 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-15^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}}{0,16 \text{ m}} \cdot 15 \text{ kNm}^2 + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{10^\circ\text{C} - (-20^\circ\text{C})}{0,16 \text{ m}} \cdot 8 \text{ kNm}^2 + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 5^\circ\text{C} \cdot 5,6665 \text{ kNm} + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (-5^\circ\text{C}) \cdot (-2,6668 \text{ kNm}) \Rightarrow \delta_{2T} = -0,0265 \text{ m}.$$

3.1.5.5. Obliczenie wyrazów wolnych układu równań metody sił od osiadania podpór

Wyrazy wolne $\delta_{i\Delta}$ należy obliczyć według wzoru

$$X_i \cdot \delta_{i\Delta} = - \sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n,$$

Przemieszczenia podpory występują w węźle A (obrót Δr_2) oraz w węźle B (pionowe Δr_1).

$$\bar{R}_A^1 = \bar{S}_\varphi^1 = 1 \text{ kNm},$$

$$\bar{R}_A^2 = \bar{S}_\varphi^2 = 0,$$

$$\bar{R}_B^1 = \frac{1}{3} \text{ kN},$$

$$\bar{R}_B^2 = -\frac{2}{3} \text{ kN}.$$

$$X_1 \cdot \delta_{1\Delta} = - \sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n = -\bar{R}_B^1 \Delta r_1 - \bar{S}_\varphi^1 \Delta r_2 = -\frac{1}{3} \text{ kN} \cdot 0,04 \text{ m} - 1 \text{ kNm} \cdot 0,06$$

$$\Rightarrow \delta_{1\Delta} = -0,0733,$$

$$X_2 \cdot \delta_{2\Delta} = - \sum_n \bar{R}_n^2 \Delta r_n = -\bar{R}_B^2 \Delta r_1 = -\left(-\frac{2}{3} \text{ kN}\right) \cdot 0,04 \text{ m} \Rightarrow \delta_{2\Delta} = 0,0267 \text{ m}.$$

3.1.5.6. Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie

$$2,7667 \frac{\text{kNm}^2}{EI} X_1^N - 7,6667 \frac{\text{kNm}^2}{EI} X_2^N + 7,3400 \cdot 10^{-3} - 0,0733 = 0,$$

$$-7,6667 \frac{\text{kNm}^3}{EI} X_1^N + 69,3333 \frac{\text{kNm}^3}{EI} X_2^N - 0,0265 \text{ m} + 0,0267 \text{ m} = 0.$$

$$X_1^N = 0,0343 \frac{EI}{\text{kNm}^2} = 0,0343 \frac{1824,9 \text{ kNm}^2}{\text{kNm}^2} = 62,7098,$$

$$X_2^N = 0,0038 \frac{EI}{\text{kNm}^2} = 0,0038 \frac{1824,9 \text{ kNm}^2}{\text{kNm}^2} = 6,9335.$$

3.1.5.7. Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów

Reakcji i sił przekrojowe obliczono korzystając z zasady superpozycji:

$$\begin{aligned}R_i^N &= \bar{R}_i^1 \cdot X_1^N + \bar{R}_i^2 \cdot X_2^N, \\M_{ij}^N &= \bar{M}_{ij}^1 \cdot X_1^N + \bar{M}_{ij}^2 \cdot X_2^N, \\V_{ij}^N &= \bar{V}_{ij}^1 \cdot X_1^N + \bar{V}_{ij}^2 \cdot X_2^N, \\N_{ij}^N &= \bar{N}_{ij}^1 \cdot X_1^N + \bar{N}_{ij}^2 \cdot X_2^N.\end{aligned}$$

Reakcje:

$$\begin{aligned}V_A^N &= \bar{V}_A^1 \cdot X_1^N + \bar{V}_A^2 \cdot X_2^N = \frac{1}{3} \text{ kN} \cdot 62,7098 + \left(-\frac{2}{3} \text{ kN}\right) \cdot 6,9335 = 16,2838 \text{ kN}, \\H_A^N &= \bar{H}_A^1 \cdot X_1^N + \bar{H}_A^2 \cdot X_2^N = 0 \cdot 62,7098 + 1 \text{ kN} \cdot 6,9335 = 6,9335 \text{ kN}, \\R_B^N &= \bar{R}_B^1 \cdot X_1^N + \bar{R}_B^2 \cdot X_2^N = \frac{1}{3} \text{ kN} \cdot 62,7098 + \left(-\frac{2}{3} \text{ kN}\right) \cdot 6,9335 = 16,2838 \text{ kN}.\end{aligned}$$

Momenty zginające:

$$\begin{aligned}M_{A1}^N &= \bar{M}_{A1}^1 \cdot X_1^N + \bar{M}_{A1}^2 \cdot X_2^N = (-1 \text{ kNm}) \cdot 62,7098 + 0 \cdot 6,9335 = -62,7098 \text{ kNm}, \\M_{1A}^N &= \bar{M}_{1A}^1 \cdot X_1^N + \bar{M}_{1A}^2 \cdot X_2^N = (-1 \text{ kNm}) \cdot 62,7098 + 2 \text{ kNm} \cdot 6,9335 = -48,8515 \text{ kNm} = \\&= \bar{M}_{12}^N, \\M_{21}^N &= \bar{M}_{21}^1 \cdot X_1^N + \bar{M}_{21}^2 \cdot X_2^N = 0 \cdot 62,7098 + 4 \text{ kNm} \cdot 6,9335 = 27,7166 \text{ kNm} = \bar{M}_{2B}^N, \\M_{B2}^N &= \bar{M}_{B2}^1 \cdot X_1^N + \bar{M}_{B2}^2 \cdot X_2^N = 0 \cdot 62,7098 + 0 \cdot 6,9335 = 0 \text{ kNm}.\end{aligned}$$

Siły tnące:

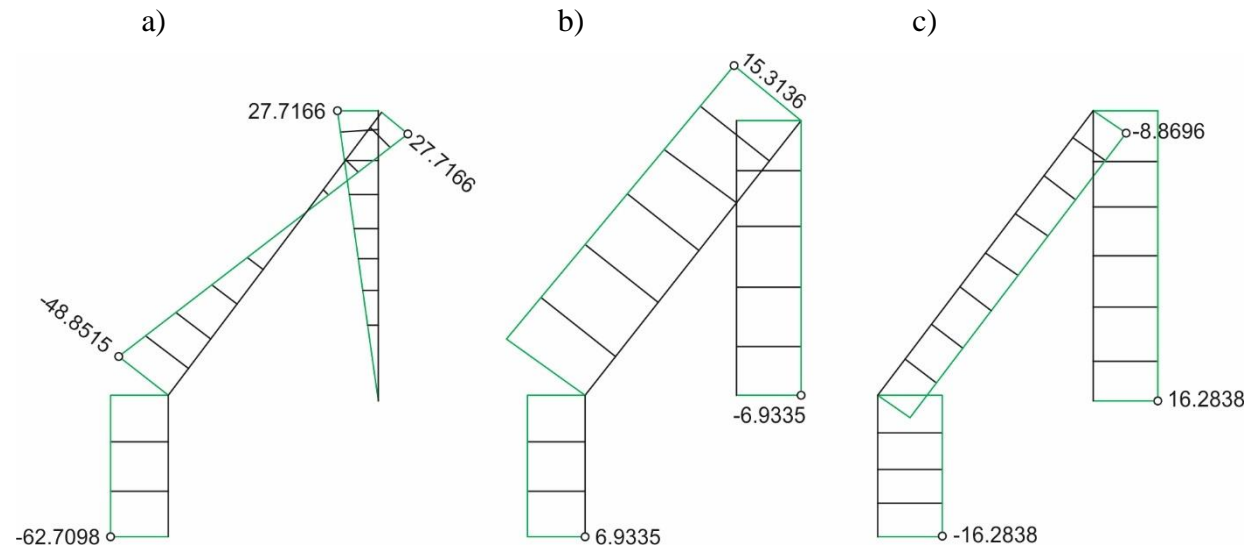
$$\begin{aligned}V_{A1}^N &= \bar{V}_{A1}^1 \cdot X_1^N + \bar{V}_{A1}^2 \cdot X_2^N = 0 \cdot 62,7098 + 1 \text{ kN} \cdot 6,9335 = 6,9335 \text{ kN} = V_{1A}^N, \\V_{12}^N &= \bar{V}_{12}^1 \cdot X_1^N + \bar{V}_{12}^2 \cdot X_2^N = 0,2 \text{ kN} \cdot 62,7098 + 0,4 \text{ kN} \cdot 6,9335 = 15,3136 \text{ kN} = V_{21}^N, \\V_{B2}^N &= \bar{V}_{B2}^1 \cdot X_1^N + \bar{V}_{B2}^2 \cdot X_2^N = 0 \cdot 62,7098 + (-1 \text{ kN}) \cdot 6,9335 = -6,9335 \text{ kN} = V_{2B}^N.\end{aligned}$$

Siły osiowe:

$$\begin{aligned}N_{A1}^N &= \bar{N}_{A1}^1 \cdot X_1^N + \bar{N}_{A1}^2 \cdot X_2^N = (-0,3333 \text{ kN}) \cdot 62,7098 + 0,6667 \text{ kN} \cdot 6,9335 = \\&= -16,2838 \text{ kN} = N_{1A}^N, \\N_{12}^N &= \bar{N}_{12}^1 \cdot X_1^N + \bar{N}_{12}^2 \cdot X_2^N = (-0,2667 \text{ kN}) \cdot 62,7098 + 1,1333 \text{ kN} \cdot 6,9335 = \\&= -8,8696 \text{ kN} = N_{21}^N, \\N_{B2}^N &= \bar{N}_{B2}^1 \cdot X_1^N + \bar{N}_{B2}^2 \cdot X_2^N = 0,3333 \text{ kN} \cdot 62,7098 + (-0,6667 \text{ kN}) \cdot 6,9335 = \\&= 16,2838 \text{ kN} = N_{2B}^N,\end{aligned}$$

Moment zginający w więzi sprężystej rotacyjnej:

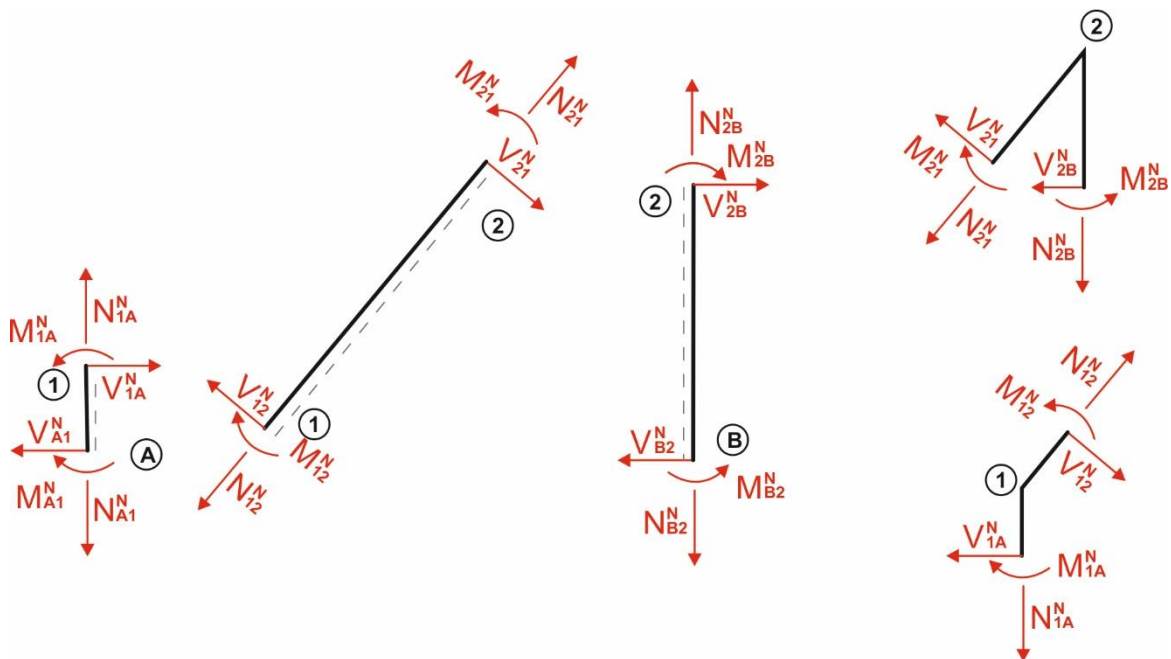
$$\bar{S}_\varphi^N = \bar{S}_\varphi^1 \cdot X_1^N = 1 \text{ kNm} \cdot 62,7098 = 62,7098 \text{ kNm}.$$



Rys. 3.12. Wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od obciążenia temperaturą i osiadaniem podpór
 a) M^N w kNm, b) V^N w kN, c) N^N w kN

3.1.5.8. Kontrola poprawności rozwiązania

3.1.5.8.1. Kontrola statyczna rozwiązania



Rys. 3.13. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12}^N - M_{21}^N + V_{21}^N \cdot 5m = -48,8515 \text{ kNm} - 27,7166 \text{ kNm} + 15,3136 \text{ kN} \cdot 5m = 0,$$

$$\sum V = V_{12}^N - V_{21}^N = 15,3136 \text{ kN} - 15,3136 \text{ kN} = 0,$$

$$\sum N = N_{12}^N - N_{21}^N = -8,8696 \text{ kN} - (-8,8696 \text{ kN}) = 0.$$

Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{1A}^N - M_{12}^N = -48,8515 \text{ kNm} + (-48,8515 \text{ kNm}) = 0,$$

$$\sum X = -V_{1A}^N + V_{12}^N \cdot \sin \alpha + N_{12}^N \cdot \cos \alpha = -6,9335 \text{ kN} + 15,3136 \text{ kN} \cdot 0,8 + (-8,8696 \text{ kN}) \cdot 0,6 = 0,$$

$$\sum Y = N_{1A}^N - N_{12}^N \cdot \sin \alpha + V_{12}^N \cdot \cos \alpha = 16,2838 \text{ kN} - (-8,8696 \text{ kN}) \cdot 0,8 + 15,3136 \text{ kN} \cdot 0,6 = -0,0000.$$

3.1.5.8.2. Kontrola kinematyczna rozwiązania

$$X_i \cdot \Delta_{iN} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^N}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{s}_n^i \cdot s_n^N}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}^i} - \sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n.$$

$$\begin{aligned} X_1 \cdot \Delta_{1N} &= \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^N}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{s}_n^1 \cdot s_n^N}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}^1} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}^1} - \sum_n \bar{R}_n^1 \Delta r_n = \\ &= \frac{2 \text{ m}}{6 \cdot 2EI} [(-1 \text{ kNm}) \cdot (-62,7098 \text{ kNm}) + 4 \cdot (-1 \text{ kNm}) \cdot (-55,7807 \text{ kNm}) + (-1 \text{ kNm}) \cdot \\ & \quad (-48,5815 \text{ kNm})] + \frac{5 \text{ m}}{6EI} [(-1 \text{ kNm}) \cdot (-48,8515 \text{ kNm}) + 4 \cdot (-0,5 \text{ kNm}) \cdot \\ & \quad (-10,5675 \text{ kNm}) + 0 \cdot 27,7166 \text{ kNm}] + \frac{1 \text{ kNm} \cdot 62,7098 \text{ kNm}}{10 \frac{EI}{\text{m}}} + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-15^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}}{0,16 \text{ m}} \cdot \\ & \quad (-2,5 \text{ kNm}^2) + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{10^\circ\text{C} - (-20^\circ\text{C})}{0,16 \text{ m}} \cdot 0 + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 5^\circ\text{C} \cdot (-1,3335 \text{ kNm}) + \\ & \quad 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (-5^\circ\text{C}) \cdot 1,3332 \text{ kNm} - \frac{1}{3} \text{ kN} \cdot 0,04 \text{ m} - 1 \text{ kNm} \cdot 0,06 = \\ & \quad 120,125 \frac{\text{kNm}^2}{1825,4019 \text{ kNm}^2} + 7,44 \cdot 10^{-3} - 0,0733 \Rightarrow \Delta_{1N} = \mathbf{0,0001}. \end{aligned}$$

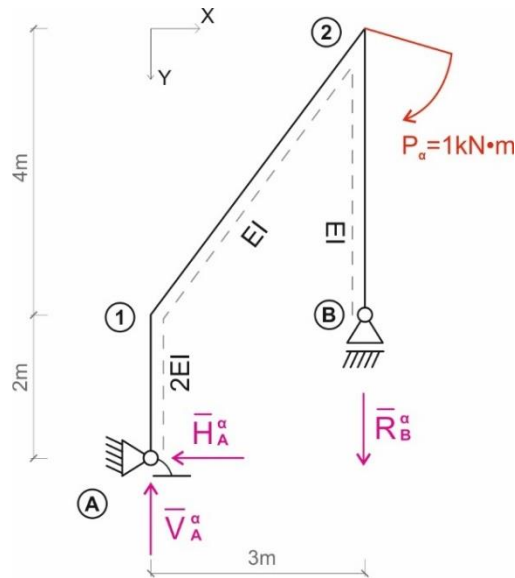
3.1.6. Obliczenie przemieszczenia

Do wyznaczenia przemieszczeń wykorzystano twierdzenie redukcyjne, które pozwala na to, aby jedno z otrzymanych rozwiązań było w układzie statycznie wyznaczalnym. Ponieważ rzeczywiste siły wewnętrzne zostały uzyskane we wcześniejszych punktach, należy rozwiązać dowolny układ podstawowy od siły jednostkowej w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia. Gdy znane jest rozwiązanie układu hiperstatycznego, przemieszczenia wyznaczane są ze wzorów:

$$P_\alpha \cdot \Delta_{\alpha F} = \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{s}_n^\alpha \cdot s_n^F}{k_n},$$

$$P_\alpha \cdot \Delta_{\alpha N} = \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^T}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{s}_n^\alpha \cdot s_n^T}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}^\alpha} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}^\alpha} - \sum_n \bar{R}_n^\alpha \Delta r_n.$$

3.1.6.1. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia jednostkowego w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia



Rys. 3.14. Reakcje od $P_\alpha=1 \text{ kN}\cdot\text{m}$

Obliczenie reakcji:

$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{H}_{1A}^\alpha = 0 \text{ kN},$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^\alpha \cdot 3 \text{ m} + P_\alpha = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^\alpha = -\frac{1}{3} \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \bar{R}_B^\alpha - \bar{V}_A^\alpha = 0 \Rightarrow \bar{V}_A^\alpha = -\frac{1}{3} \text{ kN}.$$

Obliczenie momentów zginających:

$$\bar{M}_{A1}^\alpha = \bar{M}_{1A}^\alpha = \bar{M}_{12}^\alpha = 0,$$

$$\bar{M}_{21}^\alpha = -P_\alpha = 1 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_{B2}^\alpha = \bar{M}_{2B}^\alpha = 0.$$

Obliczenie sił tnących:

$$\bar{V}_{A1}^\alpha = \bar{V}_{1A}^\alpha = \bar{H}_A^\alpha = 0,$$

$$\bar{V}_{12}^\alpha = \bar{V}_{21}^\alpha = \bar{H}_A^\alpha \cdot 0,8 + \bar{V}_A^\alpha \cdot 0,6 = 0 \text{ kN} \cdot 0,8 + \left(-\frac{1}{3} \text{ kN}\right) \cdot 0,6 = -0,2 \text{ kN},$$

$$\bar{V}_{B2}^\alpha = \bar{V}_{2B}^\alpha = 0.$$

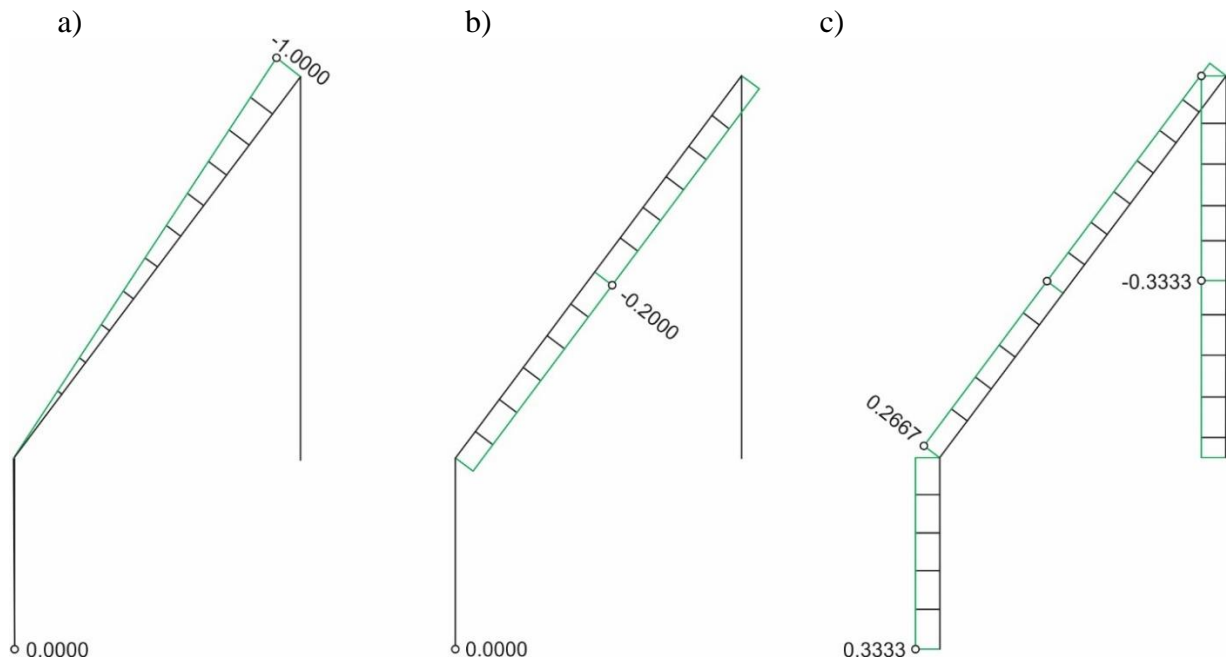
Obliczenie sił osiowe:

$$\bar{N}_{A1}^\alpha = \bar{N}_{1A}^\alpha = -\bar{V}_A^\alpha = 0,3333 \text{ kN},$$

$$\bar{N}_{12}^\alpha = \bar{N}_{21}^\alpha = \bar{H}_A^\alpha \cdot 0,6 - \bar{V}_A^\alpha \cdot 0,8 = 0 \text{ kN} \cdot 0,6 - \left(-\frac{1}{3} \text{ kN}\right) \cdot 0,8 = 0,2667 \text{ kN},$$

$$\bar{N}_{B2}^\alpha = \bar{V}_{2B}^\alpha = \bar{R}_B^\alpha = -0,3333 \text{ kN}.$$

Moment zginający w więzi sprężystej: $\bar{S}_\varphi^\alpha = 0$.



Rys. 3.15. Wykresy sił przekrojowych od P_α :
a) M^α kNm, b) V^α w kN, c) N^α w kN

3.1.6.2. Przemieszczenie od obciążeń siłami

$$P_\alpha \cdot \Delta_{1F} = \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^\alpha \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{5 \text{ m}}{6EI} [0 \cdot (-12,6720 \text{ kNm}) + 4 \cdot (-0,5 \text{ kNm}) \cdot (-2,2502 \text{ kNm}) + (-1 \text{ kNm}) \cdot (-0,8284 \text{ kNm})] + \frac{0 \cdot (-17,7422 \text{ kNm})}{10 \frac{EI}{\text{m}}} \Rightarrow$$

$$\Delta_{\alpha F} = 4,4407 \frac{\text{kNm}^2}{EI} = \frac{4,4407 \text{ kNm}^2}{1824,9 \text{ kNm}^2} = 0,0024 \text{ rad.}$$

3.1.6.3. Przemieszczenie od zmian temperatury i osiadania podpór

$$P_\alpha \cdot \Delta_{\alpha N} = \int \frac{\bar{M}^\alpha \cdot M^N}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^\alpha \cdot S_n^N}{k_n} + \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}^\alpha} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}^\alpha} - \sum_n \bar{R}_n^\alpha \Delta r_n =$$

$$+ \frac{5 \text{ m}}{6EI} [0 \cdot (-48,8515 \text{ kNm}) + 4 \cdot (-0,5 \text{ kNm}) \cdot (-10,5675 \text{ kNm}) + (-1 \text{ kNm}) \cdot (-27,7166 \text{ kNm})] + \frac{0,62,7098 \text{ kNm}}{10 \frac{EI}{\text{m}}} + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{-15^\circ\text{C} - 25^\circ\text{C}}{0,16 \text{ m}} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ m} \cdot (-1 \text{ kNm}) +$$

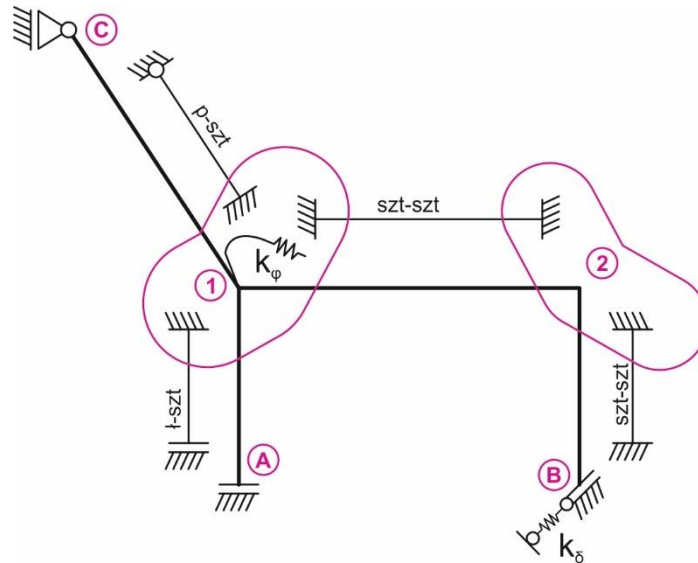
$$0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot \frac{10^\circ\text{C} - (-20^\circ\text{C})}{0,16 \text{ m}} \cdot 0 + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot 5^\circ\text{C} \cdot 5 \text{ m} \cdot 0,2667 \text{ kN} + 0,000012 \frac{1}{^\circ\text{C}} \cdot (-5^\circ\text{C}) \cdot 4 \text{ m} \cdot (-0,3333 \text{ kN}) - \left(-\frac{1}{3} \text{ kN}\right) \cdot 0,04 \text{ m} - 0 \cdot 0,06 = -5,4847 \frac{\text{kN}^2\text{m}^3}{EI} +$$

$$(0,0077 + 0,0133) \text{ kNm} = -5,4847 \frac{\text{kN}^2\text{m}^3}{1824,9 \text{ kNm}^2} + 0,0210 \text{ kNm} \Rightarrow \Delta_{1N} = 0,0180 \text{ rad,}$$

- Układ składa się z jednej tarczy połączonej z ostoją siedmioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 3 niezbędne i nierównoległe. Jest to układ *geometrycznie niezmienny*.

3.2.2. Obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności układu

3.2.2.1. Podział układu na elementy, dla których dane są wzory transformacyjne i wyznaczenie liczby stopni swobody obrótu węzłów



Rys. 3.18. Numeracja węzłów i podział na typy prętów

Z przyjętego podziału na pręty wynika, że:

- Dla prętów i-j stosowane będą wzory transformacyjne w postaci:

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^O$$

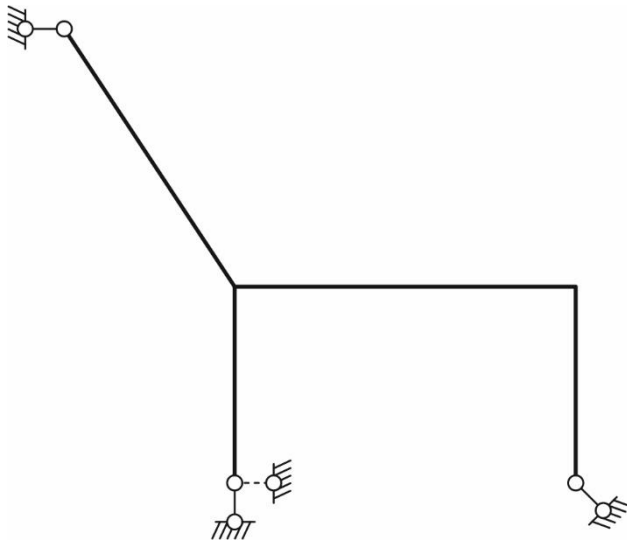
$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^O$$

Uwzględniając, że $\varphi_{1A} = \varphi_{1C} = \varphi_{12} = \varphi_1$, $\varphi_{2B} = \varphi_{21} = \varphi_2$, stwierdzono, że liczba stopni swobody obrótu węzłów $n_\varphi = 2$.

3.2.2.2. wyznaczenie liczby stopni swobody przesuwu węzłów

Do wyznaczenia liczby stopni swobody przesuwu węzłów budowany jest model przegubowy. Należy:

- zwolnić więzi przenoszące momenty
- pominąć więzi sprężyste
- należy odebrać stopnie swobody przesuwu prętom typu wspornik, oraz prętom o lewym końcu utwierdzonym a prawym utwierdzony z przesuwarem poprzecznym (należy dodać więź oznaczoną linią przerywaną)



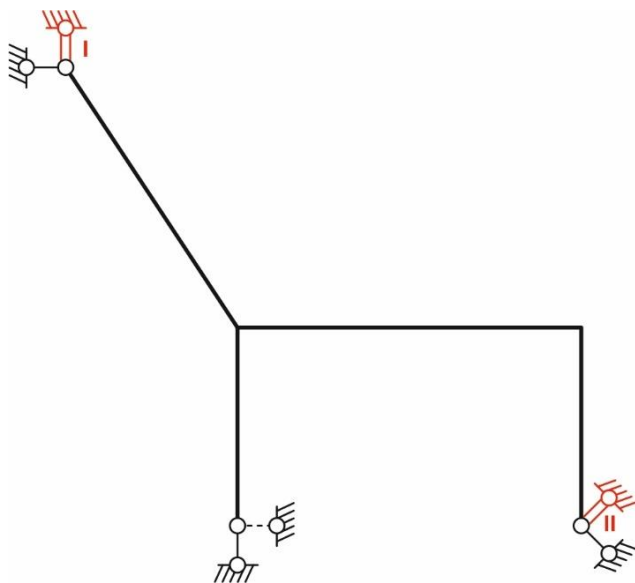
Oszacowanie liczby stopni swobody przesuwu węzłów

$$n_{\delta} \geq 2 \cdot w - p - r = 2 \cdot 9 - 8 - 8 = 2$$

gdzie: $w = 9$ - liczba węzłów modelu,
 $p = 8$ - liczba prętów w modelu,
 $r = 8$ - liczba więzi podporowych modelu.

Rys. 3.19. Model przegubowy

Oznacza to, że aby układ o węzłach przegubowych był geometrycznie niezmienny należy dodać co najmniej dwie więzi.

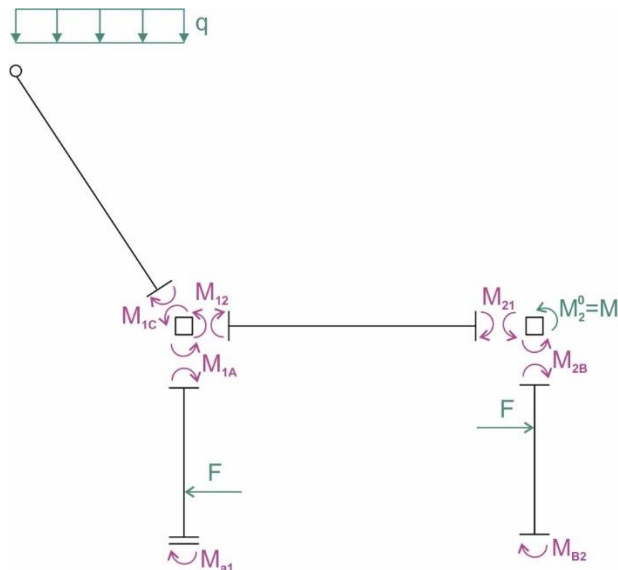


Dopiero analiza kinematyczna potwierdza, że model przegubowy po dodaniu 2 więzi jest geometrycznie niezmienny, tak więc stopień swobody przesuwu węzłów $n_{\delta} = 2$.

Rys. 3.20. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

3.2.4. Rozwiązanie układu podstawowego

3.2.4.1. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia mechanicznego



Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążenie danych towarzyszy $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$.

Dla elementów przyjętych w punkcie 3.1. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

Rys. 3.22. Momenty brzegowe od obciążenia zewnętrznego

$$M_{1A}^O = -FL\xi \left(1 - \frac{\xi}{2}\right) = -8 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} \cdot \frac{3}{4} \cdot \left(1 - \frac{3}{4 \cdot 2}\right) = -15 \text{ kNm},$$

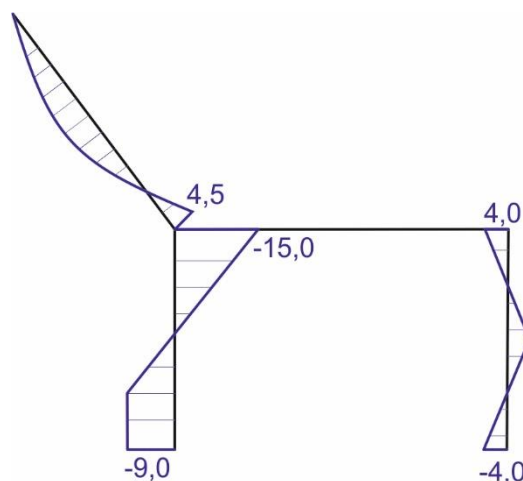
$$M_{A1}^O = -\frac{FL\xi^2}{2} = -8 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = -9 \text{ kNm},$$

$$M_{1C}^O = \frac{qL^2}{8} = \frac{4 \text{ kN/m} \cdot (3\text{m})^2}{8} = 4,5 \text{ kNm},$$

$$M_{2B}^O = \frac{FL}{8} = \frac{8 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m}}{8} = 4 \text{ kNm},$$

$$M_{B2}^O = -\frac{FL}{8} = -\frac{8 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m}}{8} = -4 \text{ kNm},$$

$$M_{C1}^O = M_{12}^O = M_{21}^O = 0.$$



Rys. 3.23. Wykres momentów M^O w kNm.

3.2.4.2. Pierwszy stan rotacyjny

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_I = \varphi_{Ij} = 1$, $\varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{1j}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{1j} \cdot \varphi_{1j} + b_{1j} \cdot \varphi_{j1}),$$

$$M_{j1}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{j1} \cdot \varphi_{j1} + b_{j1} \cdot \varphi_{1j}).$$

Momenty węzłowe wynoszą:

$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6 \text{ m}} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{2EI}{3 \text{ m}},$$

$$M_{21}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{EI}{6 \text{ m}} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{1EI}{3 \text{ m}},$$

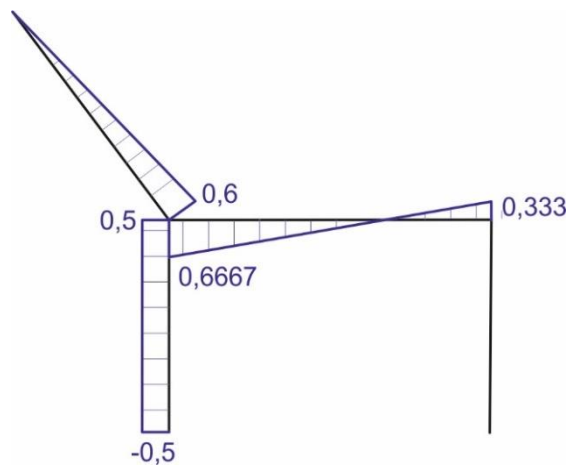
$$M_{1A}^1 = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}} (a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \varphi_{A1}) = \frac{2EI}{4 \text{ m}} (1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = \frac{1EI}{2 \text{ m}},$$

$$M_{A1}^1 = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}} (a_{A1} \cdot \varphi_{A1} + b_{A1} \cdot \varphi_{1A}) = \frac{2EI}{4 \text{ m}} (4 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -\frac{1EI}{2 \text{ m}},$$

$$M_{1C}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}} (a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{C1}) = \frac{EI}{5 \text{ m}} (3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = \frac{3EI}{5 \text{ m}},$$

$$M_{C1}^1 = 0, M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$

Siła w więzi sprężystej: $S_{\varphi_1}^1 = k_1^\varphi \cdot \varphi_1 = 10 \frac{EI}{\text{m}} \cdot 1 = 10 \frac{EI}{\text{m}}$.



Rys. 3.24. Wykres momentów M^I w EI/m .

3.2.4.3. Drugi stan rotacyjny

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_2 = \varphi_{2j} = 1$, $\varphi_1 = \delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{2j}^2 = \frac{EI_{2j}}{L_{2j}} (a_{2j} \cdot \varphi_{2j} + b_{2j} \cdot \varphi_{j2}),$$

$$M_{j2}^2 = \frac{EI_{2j}}{L_{2j}} (a_{j2} \cdot \varphi_{j2} + b_{j2} \cdot \varphi_{2j}).$$

Momenty brzegowe wynoszą:

$$M_{21}^2 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{EI}{6 \text{ m}} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{2EI}{3 \text{ m}},$$

$$M_{12}^2 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6 \text{ m}} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{1EI}{3 \text{ m}},$$

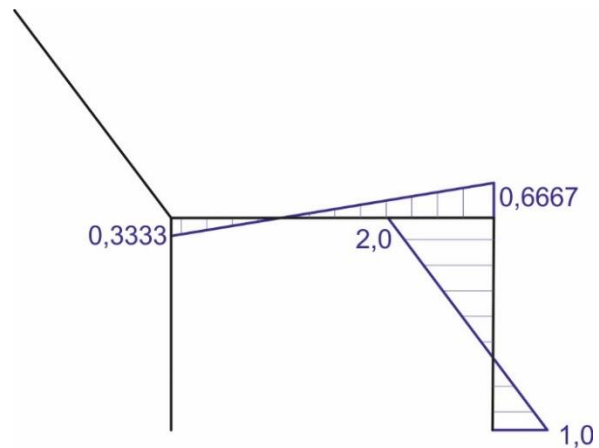
$$M_{2B}^2 = \frac{EI_{1B}}{L_{1B}} (a_{2B} \cdot \varphi_{2B} + b_{2B} \cdot \varphi_{B2}) = \frac{2EI}{4 \text{ m}} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = 2 \frac{EI}{\text{m}},$$

$$M_{B2}^2 = \frac{EI_{B2}}{L_{B2}} (a_{B2} \cdot \varphi_{B2} + b_{B2} \cdot \varphi_{2B}) = \frac{2EI}{4 \text{ m}} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = 1 \frac{EI}{\text{m}},$$

$$M_{C1}^2 = M_{1C}^2 = M_{1A}^2 = M_{A1}^2 = 0.$$

Siła w więzi sprężystej:

$$S_{\varphi_1}^2 = k_1^{\varphi} \cdot \varphi_1 = 10 \frac{EI}{\text{m}} \cdot 0 = 0.$$



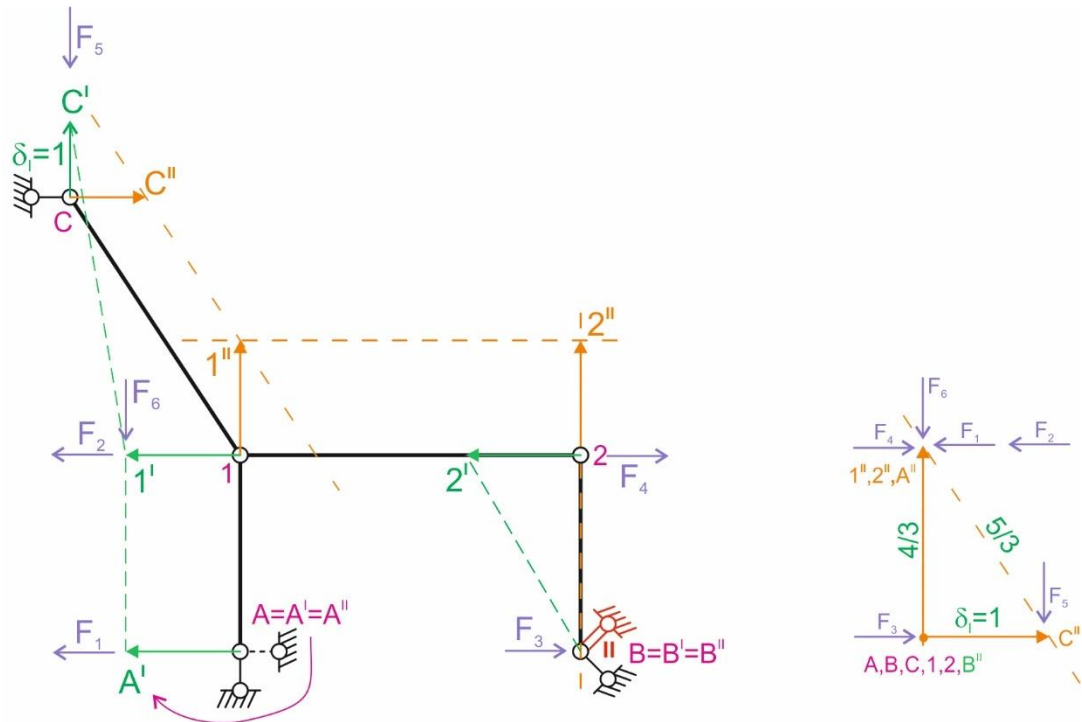
Rys. 3.25. Wykres momentów M^2 w EI/m .

3.2.4.4. Pierwszy stan translacyjny

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_I = 1$. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I, \quad M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I.$$

W celu wyznaczenia szukanych kątów obrotu cięciw prętów rozpatrywany jest przegubowy model układy z dodanymi więzami translacyjnymi oraz wymuszane jest przesunięcie o wartości 1 w miejscu i na kierunku dodanej więzi I. Aby wyznaczyć szukane przemieszczenia oraz kąty obrotu cięciw prętów sporządzany jest biegunowy plan przesunięć obróconych (BPPO) [por. SB1].



Rys. 3.26. a) plan przemieszczeń obróconych (‘’) i możliwych (rzeczywistych ‘), b) BPPO.

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\begin{aligned} \Delta_{2B}^I &= -|2''B''| = -\frac{4}{3} && („-” ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo), \\ \Delta_{1C}^I &= +|1''C''| = +\frac{5}{3} && („+” ponieważ obrót pręta nastąpił w prawo), \\ \Delta_{12}^I &= |1''2''| = 0, \\ \Delta_{1A}^I &= |1''A''| = 0. \end{aligned}$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\begin{aligned} \psi_{2B}^I &= \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4 \text{ m}} = -\frac{1}{3 \text{ m}}, \\ \psi_{1C}^I &= \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5 \text{ m}} = \frac{1}{3 \text{ m}}, \\ \psi_{1A}^I &= \psi_{12}^I = 0, \end{aligned}$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_l wynoszą:

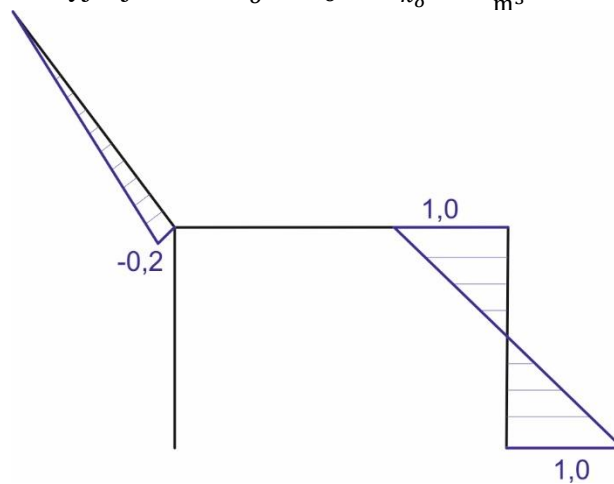
$$\begin{aligned} M_{2B}^I &= M_{B2}^I = -\frac{EI_{2B}}{L_{2B}} \cdot c_{2B} \cdot \psi_{2B}^I = -\frac{2EI}{4 \text{ m}} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{3 \text{ m}}\right) = 1 \frac{EI}{\text{m}^2}, \\ M_{1C}^I &= -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{1C} \cdot \psi_{1C}^I = -\frac{EI}{5 \text{ m}} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3 \text{ m}} = -\frac{1}{5} \frac{EI}{\text{m}^2}, \\ M_{C1}^I &= -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{C1} \cdot \psi_{1C}^I = -\frac{EI}{5 \text{ m}} \cdot 0 \cdot \frac{1}{3 \text{ m}} = 0, \\ M_{1A}^I &= M_{A1}^I = M_{12}^I = M_{21}^I = 0. \end{aligned}$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1^I = \frac{4}{3}, \quad \delta_2^I = \frac{4}{3}, \quad \delta_3^I = 0, \quad \delta_4^I = -\frac{4}{3}, \quad \delta_5^I = -1, \quad \delta_6^I = 0.$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L_{k_\delta}^I = 0$

Siła w więzi sprężystej translacyjnej: $S_\delta^I = k_\delta \cdot \Delta L_{k_\delta}^I = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0 = 0$



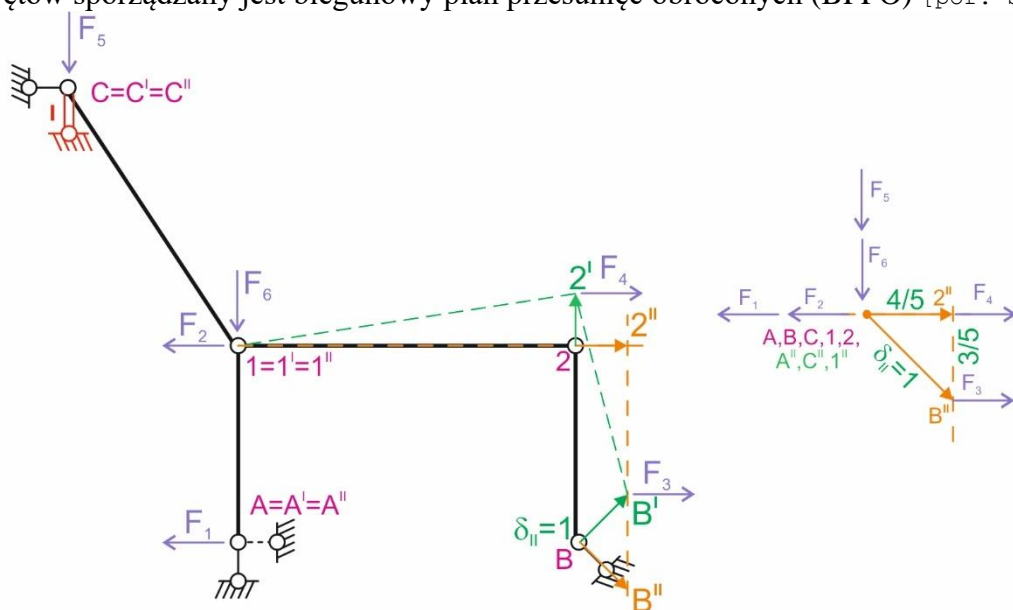
Rys. 3.27. Wykres momentów M^I w EI/m^2 .

3.2.4.5. Drugi stan translacyjny

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_I = \varphi_2 = \delta_I = 0$, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_{II} = 1$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij}^{II} = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^{II}, \quad M_{ji}^{II} = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ji}^{II}.$$

W celu wyznaczenia szukanych kątów obrotu cięciw prętów rozpatrywany jest przegubowy model układy z dodanymi więzami translacyjnymi oraz wymuszone przesunięcie o wartości 1 w miejscu i na kierunku dodanej więzi II. Aby wyznaczyć szukane przemieszczenia oraz kąty obrotu cięciw prętów sporządzany jest biegunowy plan przesunięć obroconych (BPPO) [por. SB1].



Rys. 3.28. a) plan przesunięć obroconych (‘’) i możliwych (rzeczywistych ‘), b) BPPO

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\begin{aligned} \Delta_{12}^{II} &= -|1''2''| = -\frac{4}{5} && („-” ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo), \\ \Delta_{2B}^{II} &= -|2''B''| = -\frac{3}{5} && („-” ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo), \\ \Delta_{1A}^{II} &= |1''A''| = 0, \\ \Delta_{1C}^{II} &= |1''C''| = 0. \end{aligned}$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^{II} = \frac{\Delta_{ij}^{II}}{L_{ij}}$):

$$\begin{aligned} \psi_{12}^{II} &= \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6 \text{ m}} = -\frac{2}{15 \text{ m}}, \\ \psi_{2B}^{II} &= \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4 \text{ m}} = -\frac{3}{20 \text{ m}}, \\ \psi_{1A}^{II} &= \psi_{1C}^{II} = 0. \end{aligned}$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_l wynoszą:

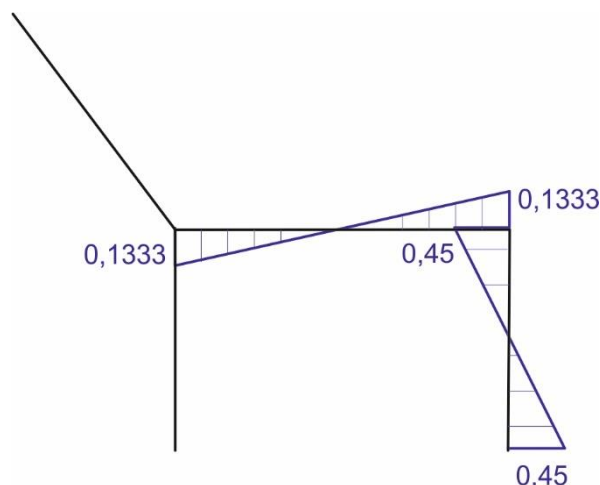
$$\begin{aligned} M_{12}^{II} &= M_{21}^{II} = -\frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot c_{12} \cdot \psi_{12}^{II} = -\frac{EI}{6 \text{ m}} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{2}{15 \text{ m}}\right) = \frac{2}{15} \frac{EI}{\text{m}^2}, \\ M_{2B}^{II} &= M_{B2}^{II} = -\frac{EI_{2B}}{L_{2B}} \cdot c_{2B} \cdot \psi_{2B}^{II} = -\frac{2EI}{4 \text{ m}} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{3}{20 \text{ m}}\right) = \frac{9}{20} \frac{EI}{\text{m}^2}, \\ M_{1A}^{II} &= M_{A1}^{II} = M_{1C}^{II} = M_{C1}^{II} = 0. \end{aligned}$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1^{II} = 0, \quad \delta_2^{II} = 0, \quad \delta_3^{II} = \frac{3}{5}, \quad \delta_4^{II} = 0, \quad \delta_5^{II} = 0, \quad \delta_6^{II} = 0.$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L_{k\delta}^{II} = 1$.

$$\text{Siła w więzi sprężystej: } S_{\delta}^{II} = k_{\delta} \cdot \Delta L_{k\delta}^{II} = 8 \frac{EI}{\text{m}^3} \cdot 1 = 8 \frac{EI}{\text{m}^3}.$$



Rys. 3.29. Wykres momentów M^{II} w EI/m^2 .

3.2.5. Układ równań kanonicznych metody przemieszczeń i jego rozwiązanie

3.2.5.1. Postać ogólna układu równań

$$\begin{aligned}k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} &= 0, \\k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} &= 0, \\k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I I} \cdot \delta_I + k_{I II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} &= 0, \\k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II I} \cdot \delta_I + k_{II II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} &= 0.\end{aligned}$$

3.2.5.2. Obliczenie współczynników układu równań

$$k_{11} = \sum_j M_{1j}^1 + k_1^\varphi = M_{12}^1 + M_{1A}^1 + M_{1C}^1 + k_1^\varphi = (0,6667 + 0,5 + 0,6 + 10) \frac{EI}{m} = \frac{53 EI}{30 m} = 11,7667 \frac{EI}{m},$$

$$k_{12} = \sum_j M_{1j}^2 = M_{12}^2 + M_{1A}^2 + M_{1C}^2 = (0,3333 + 0 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m},$$

$$k_{1I} = \sum_j M_{1j}^I = M_{12}^I + M_{1A}^I + M_{1C}^I = 0 + 0 + \left(-\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2}\right) = -0,2 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1II} = \sum_j M_{1j}^{II} = M_{12}^{II} + M_{1A}^{II} + M_{1C}^{II} = \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + 0 + 0 = 0,1333 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1o} = \sum_j M_{1j}^o = M_{12}^o + M_{1A}^o + M_{1C}^o = 0 - 15 \text{ kNm} + 4,5 \text{ kNm} = -10,5 \text{ kNm},$$

$$k_{21} = \sum_j M_{2j}^1 = M_{21}^1 + M_{2B}^1 = (0,3333 + 0) \frac{EI}{m} = 0,3333 \frac{EI}{m},$$

$$k_{22} = \sum_j M_{2j}^2 + k_2^\varphi = M_{21}^2 + M_{2B}^2 + k_2^\varphi = \left(\frac{2}{3} + 2 + 0\right) \frac{EI}{m} = \frac{8}{3} \frac{EI}{m} = 2,6667 \frac{EI}{m},$$

$$k_{2I} = \sum_j M_{2j}^I = M_{21}^I + M_{2B}^I = 0 + 1 \frac{EI}{m^2} = 1 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{2II} = \sum_j M_{2j}^{II} = M_{21}^{II} + M_{2B}^{II} = \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2} = \frac{7}{12} \frac{EI}{m^2} = 0,5833 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{2o} = \sum_j M_{2j}^o - M_2^o = M_{21}^o + M_{2B}^o - (-M) = [0 + 4 - (-20)] \text{ kNm} = 24 \text{ kNm},$$

$$\begin{aligned}k_{I1} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi_{ij}^I = -(M_{12}^1 + M_{21}^1) \psi_{12}^I - (M_{1A}^1 + M_{A1}^1) \psi_{1A}^I - (M_{1C}^1 + M_{C1}^1) \psi_{1C}^I - \\&\quad (M_{2B}^1 + M_{B2}^1) \psi_{2B}^I = -\left(0,6667 \frac{EI}{m} + 0,3333 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - \left(0,5 \frac{EI}{m} - 0,5 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - \left(0,6 \frac{EI}{m} + 0\right) \cdot \\&\quad \frac{1}{3 m} - (0 + 0) \cdot \left(-\frac{1}{3 m}\right) = -0,2 \frac{EI}{m^2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{I2} &= -\sum_{ij}(M_{ij}^2 + M_{ji}^2)\psi_{ij}^I = -(M_{12}^2 + M_{21}^2)\psi_{12}^I - (M_{1A}^2 + M_{A1}^2)\psi_{1A}^I - (M_{1C}^2 + M_{C1}^2)\psi_{1C}^I - \\
&\quad (M_{2B}^2 + M_{B2}^2)\psi_{2B}^I = -\left(0,3333 \frac{EI}{m} + 0,6667 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot \frac{1}{3m} - \\
&\quad \left(1 \frac{EI}{m} + 2 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = 1 \frac{EI}{m^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{II} &= -\sum_{ij}(M_{ij}^I + M_{ji}^I)\psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \Delta L_{k_\delta}^I \cdot \Delta L_{k_\delta}^I = -(M_{12}^I + M_{21}^I)\psi_{12}^I - (M_{1A}^I + M_{A1}^I)\psi_{1A}^I - \\
&\quad (M_{1C}^I + M_{C1}^I)\psi_{1C}^I - (M_{2B}^I + M_{B2}^I)\psi_{2B}^I + k_\delta \cdot \Delta L_{k_\delta}^I \cdot \Delta L_{k_\delta}^I = -(0 + 0) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot 0 - \\
&\quad \left(-\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2} + 0\right) \cdot \frac{1}{3m} - \left(1 \frac{EI}{m^2} + 1 \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) + 8 \frac{EI}{m} \cdot 0 \cdot 0 = 0,7333 \frac{EI}{m^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{III} &= -\sum_{ij}(M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II})I\psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \Delta L_{k_\delta}^I \cdot \Delta L_{k_\delta}^{II} = -(M_{12}^{II} + M_{21}^{II})\psi_{12}^I - (M_{1A}^{II} + \\
&\quad M_{A1}^{II})\psi_{1A}^I - (M_{1C}^{II} + M_{C1}^{II})\psi_{1C}^I - (M_{2B}^{II} + M_{B2}^{II})\psi_{2B}^I + k_\delta \cdot \Delta L_{k_\delta}^I \cdot \Delta L_{k_\delta}^{II} = \\
&\quad -\left(\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot 0 - (0 - 0) \cdot 0 - (-0 + 0) \cdot 0 - \left(\frac{9}{20} \frac{EI}{m^2} + \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) + 8 \frac{EI}{m} \cdot \\
&\quad 0 \cdot 1 = 0,3 \frac{EI}{m^3},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{Io} &= -\sum_{ij}(M_{ij}^o + M_{ji}^o)\psi_{ij}^I - \sum_P P_P \cdot \delta_P^I = -(M_{12}^o + M_{21}^o)\psi_{12}^I - (M_{1A}^o + M_{A1}^o)\psi_{1A}^I - \\
&\quad (M_{1C}^o + M_{C1}^o)\psi_{1C}^I - (M_{2B}^o + M_{B2}^o)\psi_{2B}^I - P_1 \cdot \delta_1^I - P_2 \cdot \delta_2^I - P_3 \cdot \delta_3^I - P_4 \cdot \delta_4^I - P_5 \cdot \delta_5^I - \\
&\quad P_6 \cdot \delta_6^I = -(0 + 0) \cdot 0 - (-15 \text{ kNm} - 9 \text{ kNm}) \cdot 0 - (0 + 4,5 \text{ kNm}) \cdot \frac{1}{3m} - \\
&\quad (4 \text{ kNm} - 4 \text{ kNm}) \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) - 6 \text{ kN} \cdot \frac{4}{3} - 2 \text{ kN} \cdot \frac{4}{3} - 4 \text{ kN} \cdot 0 - 4 \text{ kN} \cdot \left(-\frac{4}{3}\right) - 6 \text{ kN} \cdot \\
&\quad (-1) - 6 \text{ kN} \cdot 0 = -0,8333 \text{ kN},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{III} &= -\sum_{ij}(M_{ij}^1 + M_{ji}^1)\psi_{ij}^{II} = -(M_{12}^1 + M_{21}^1)\psi_{12}^{II} - (M_{1A}^1 + M_{A1}^1)\psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^1 + M_{C1}^1)\psi_{1C}^{II} - \\
&\quad (M_{2B}^1 + M_{B2}^1)\psi_{2B}^{II} = -\left(0,6667 \frac{EI}{m} + 0,3333 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - \left(0,5 \frac{EI}{m} - 0,5 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 - \\
&\quad \left(0,6 \frac{EI}{m} + 0\right) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} = 0,1333 \frac{EI}{m^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{II2} &= -\sum_{ij}(M_{ij}^2 + M_{ji}^2)\psi_{ij}^{II} = -(M_{12}^2 + M_{21}^2)\psi_{12}^{II} - (M_{1A}^2 + M_{A1}^2)\psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^2 + M_{C1}^2)\psi_{1C}^{II} - \\
&\quad (M_{2B}^2 + M_{B2}^2)\psi_{2B}^{II} = -\left(0,3333 \frac{EI}{m} + 0,6667 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - (0 - 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 - \\
&\quad \left(1 \frac{EI}{m} + 2 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = 0,5833 \frac{EI}{m^2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
k_{III} &= -\sum_{ij}(M_{ij}^I + M_{ji}^I)\psi_{ij}^{II} + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \Delta L_{k_\delta}^I \cdot \Delta L_{k_\delta}^{II} = -(M_{12}^I + M_{21}^I)\psi_{12}^{II} - (M_{1A}^I + M_{A1}^I)\psi_{1A}^{II} - \\
&\quad (M_{1C}^I + M_{C1}^I)\psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^I + M_{B2}^I)\psi_{2B}^{II} + k_\delta \cdot \Delta L_{k_\delta}^I \cdot \Delta L_{k_\delta}^{II} = -(0 + 0) \cdot \left(-\frac{4}{30m}\right) - \\
&\quad (0 - 0) \cdot 0 - \left(-\frac{1}{5} \frac{EI}{m^2} + 0\right) \cdot 0 - \left(1 \frac{EI}{m^2} + 1 \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 0 = 0,3 \frac{EI}{m^3},
\end{aligned}$$

$$k_{II II} = -\sum_{ij}(M_{ij}^{II} + M_{ji}^{II})\psi_{ij}^{II} + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^{II} \cdot \delta_s^{II} = -(M_{12}^{II} + M_{21}^{II})\psi_{12}^{II} - (M_{1A}^{II} + M_{A1}^{II})\psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^{II} + M_{C1}^{II})\psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^{II} + M_{B2}^{II})\psi_{2B}^{II} + k^\delta \cdot \delta^{II} \cdot \delta^{II} = -\left(\frac{2}{15} \frac{EI}{m^2} + \frac{2}{15} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{4}{30 m}\right) - (0 - 0) \cdot 0 - (0 + 0) \cdot 0 - \left(\frac{9}{20} \frac{EI}{m^2} + \frac{9}{20} \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{3}{20 m}\right) + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 1 = 8,1705 \frac{EI}{m^3},$$

$$k_{II 0} = -\sum_{ij}(M_{ij}^0 + M_{ji}^0)\psi_{ij}^{II} - \sum_P P_P \cdot \delta_P^{II} = -(M_{12}^0 + M_{21}^0)\psi_{12}^{II} - (M_{1A}^0 + M_{A1}^0)\psi_{1A}^{II} - (M_{1C}^0 + M_{C1}^0)\psi_{1C}^{II} - (M_{2B}^0 + M_{B2}^0)\psi_{2B}^{II} - P_1 \cdot \delta_1^{II} - P_2 \cdot \delta_2^{II} - P_3 \cdot \delta_3^{II} - P_4 \cdot \delta_4^{II} - P_5 \cdot \delta_5^{II} - P_6 \cdot \delta_6^{II} = -(0 + 0) \cdot \left(-\frac{4}{30 m}\right) - (-15 \text{ kNm} - 9 \text{ kNm}) \cdot 0 - (0 + 4,5 \text{ kNm}) \cdot 0 - (4 \text{ kNm} - 4 \text{ kNm}) \cdot \left(-\frac{3}{20 m}\right) - 6 \text{ kN} \cdot 0 - 2 \text{ kN} \cdot 0 - 4 \text{ kN} \cdot \frac{3}{5} - 4 \text{ kN} \cdot 0 - 6 \text{ kN} \cdot 0 - 6 \text{ kN} \cdot 0 = -2,4 \text{ kN}.$$

3.2.5.3. Szczegółowa postać układu równań metody sił i jego rozwiązanie

$$\begin{aligned} 11,7667 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 - 0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} - 10,5 \text{ kNm} &= 0, \\ 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 2,66671 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_2 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II} + 24 \text{ kNm} &= 0, \\ -0,2 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,7333 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 0,8333 \text{ kN} &= 0, \\ 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 0,5833 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_2 + 0,3 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 8,1705 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II} - 2,4 \text{ kN} &= 0. \end{aligned}$$

$$\varphi_1 = 1,9538 \frac{\text{kN m}^2}{EI}, \quad \varphi_2 = -20,2854 \frac{\text{kN m}^2}{EI},$$

$$\delta_I = 29,0682 \frac{\text{kN m}^3}{EI}, \quad \delta_{II} = 0,6428 \frac{\text{kN m}^3}{EI}.$$

3.2.6. Obliczenie wartości sił przekrojowych i sporządzenie wykresów

3.2.6.1. Obliczenie momentów brzegowych i sił w więziach sprężystych

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^2 \cdot \varphi_2 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{ij}^0,$$

Momenty brzegowe:

$$\begin{aligned} M_{12} = M_{12}^1 \cdot \varphi_1 + M_{12}^2 \cdot \varphi_2 + M_{12}^I \cdot \delta_I + M_{12}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{12}^0 &= 0,6667 \frac{EI}{m} \cdot 1,9538 \frac{\text{kNm}^2}{EI} + \\ + 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot \left(-20,2854 \frac{\text{kN m}^2}{EI}\right) + 0 \cdot 29,0682 \frac{\text{kN m}^3}{EI} + 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot 0,6428 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 0 &= \\ -5,3736 \text{ kNm}, \end{aligned}$$

$$M_{21} = M_{21}^1 \cdot \varphi_1 + M_{21}^2 \cdot \varphi_2 + M_{21}^I \cdot \delta_I + M_{21}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{21}^o = 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot 1,9538 \frac{\text{kNm}^2}{EI} + 0,6667 \frac{EI}{m} \cdot \left(-20,2854 \frac{\text{kNm}^2}{EI}\right) + 0 \cdot 29,0682 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot 0,6428 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 0 = -12,7866 \text{ kNm},$$

$$M_{1A} = M_{1A}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1A}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1A}^I \cdot \delta_I + M_{1A}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1A}^o = 0,5 \frac{EI}{m} \cdot 1,9538 \frac{\text{kNm}^2}{EI} + 0 \cdot \left(-20,2854 \frac{\text{kNm}^2}{EI}\right) + 0 \cdot 29,0682 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 0 \cdot 0,6428 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + (-15 \text{ kNm}) = -14,0231 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{A1} = M_{A1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{A1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{A1}^I \cdot \delta_I + M_{A1}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{A1}^o = -0,5 \frac{EI}{m} \cdot 1,9538 \frac{\text{kNm}^2}{EI} + 0 \cdot \left(-20,2854 \frac{\text{kNm}^2}{EI}\right) + 0 \cdot 29,0682 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 0 \cdot 0,6428 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + (-9 \text{ kNm}) = -9,9769 \text{ kNm},$$

$$M_{1C} = M_{1C}^1 \cdot \varphi_1 + M_{1C}^2 \cdot \varphi_2 + M_{1C}^I \cdot \delta_I + M_{1C}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1C}^o = 0,6 \frac{EI}{m} \cdot 1,9538 \frac{\text{kNm}^2}{EI} + 0 \cdot \left(-20,2854 \frac{\text{kNm}^2}{EI}\right) + \left(-0,2 \frac{EI}{m^2}\right) \cdot 29,0682 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 0 \cdot 0,6428 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 4,5 \text{ kNm} = -0,1414 \text{ kN m},$$

$$M_{C1} = M_{C1}^1 \cdot \varphi_1 + M_{C1}^2 \cdot \varphi_2 + M_{C1}^I \cdot \delta_I + M_{C1}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{C1}^o = 0 \cdot 1,9538 \frac{\text{kNm}^2}{EI} + 0 \cdot \left(-20,2854 \frac{\text{kNm}^2}{EI}\right) + 0 \cdot 29,0682 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 0 \cdot 0,6428 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 0 = 0,$$

$$M_{2B} = M_{2B}^1 \cdot \varphi_1 + M_{2B}^2 \cdot \varphi_2 + M_{2B}^I \cdot \delta_I + M_{2B}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{2B}^o = 0 \cdot 1,9538 \frac{\text{kNm}^2}{EI} + 2 \frac{EI}{m} \cdot \left(-20,2854 \frac{\text{kNm}^2}{EI}\right) + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot 29,0682 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 0,45 \frac{EI}{m^2} \cdot 0,6428 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 4 \text{ kNm} = -7,2134 \text{ kNm},$$

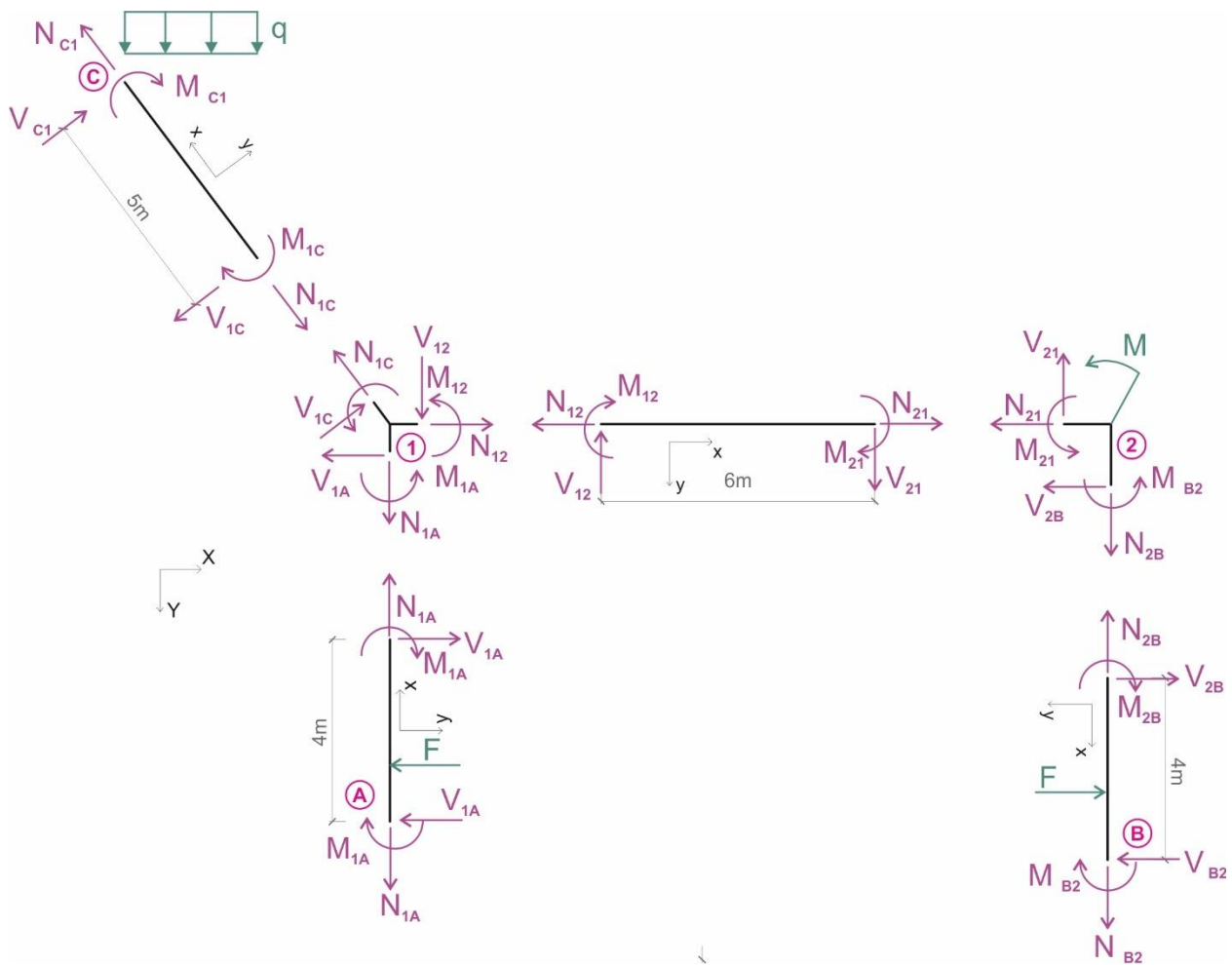
$$M_{B2} = M_{B2}^1 \cdot \varphi_1 + M_{B2}^2 \cdot \varphi_2 + M_{B2}^I \cdot \delta_I + M_{B2}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{B2}^o = 0 \cdot 1,9538 \frac{\text{kNm}^2}{EI} + 1 \frac{EI}{m} \cdot \left(-20,2854 \frac{\text{kNm}^2}{EI}\right) + 1 \frac{EI}{m^2} \cdot 29,0682 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 0,45 \frac{EI}{m^2} \cdot 0,6428 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + (-4 \text{ kNm}) = 5,0720 \text{ kNm},$$

Moment zginający w więzi sprężystej:

$$S_\varphi = S_{\varphi_1}^1 \cdot \varphi_1 + S_{\varphi_1}^2 \cdot \varphi_2 = 10 \frac{EI}{m} \cdot 1,9538 \frac{\text{kNm}^2}{EI} + 0 \cdot \left(-20,2854 \frac{\text{kNm}^2}{EI}\right) = 19,538 \text{ kNm},$$

$$S_\delta = S_\delta^I \cdot \delta_I + S_\delta^{II} \cdot \delta_{II} = 0 \cdot 29,0682 \frac{\text{kNm}^3}{EI} + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 0,6428 \frac{\text{kNm}^3}{EI} = 5,1426 \text{ kN}.$$

3.2.6.2. Obliczenie sił osiowych i tnących oraz sporządzenie wykresów



Rys. 3.30. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12} + M_{21} + V_{21} \cdot 6\text{ m} = -5,3736\text{ kNm} + (-12,7866\text{ kNm}) + V_{21} \cdot 6\text{ m} = 0 \Rightarrow$$

$$V_{21} = 3,0267\text{ kN},$$

$$\sum V = V_{12} - V_{21} = V_{12} - 3,0267\text{ kN} = 0 \Rightarrow V_{12} = 3,0267\text{ kN},$$

$$\sum N = N_{12} - N_{21} = 0 \Rightarrow N_{12} = N_{21}.$$

Pręt 1-A

$$\sum V = -V_{1A} + F = -V_{1A} + 8\text{ kN} = 0 \Rightarrow V_{1A} = 8\text{ kN},$$

$$\sum M_A = M_{A1} + M_{1A} + V_{1A} \cdot 4\text{ m} - F \cdot 1\text{ m} = -9,9769\text{ kNm} + (-14,0231\text{ kNm}) + 8\text{ kN} \cdot 4\text{ m} - 8\text{ kN} \cdot 1\text{ m} = 0,$$

$$\sum N = N_{A1} - N_{1A} = 0 \Rightarrow N_{A1} = N_{1A}.$$

Pręt 1-C

$$\sum M_C = M_{1C} + V_{1C} \cdot 5 \text{ m} + q \cdot 3 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} = -0,1414 \text{ kNm} + V_{1C} \cdot 5 \text{ m} + 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} = 0 \Rightarrow V_{1C} = -3,5717 \text{ kN},$$

$$\sum M_1 = M_{1C} + V_{C1} \cdot 5 \text{ m} - q \cdot 3 \text{ m} \cdot \cos \alpha = -0,1414 \text{ kN} + V_{C1} \cdot 5 \text{ m} - 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot 1,5 \text{ m} = 0 \Rightarrow V_{C1} = 3,6283 \text{ kN},$$

$$\sum N = N_{1C} - N_{C1} + q \cdot 3 \text{ m} \cdot \cos \alpha = N_{1C} - N_{C1} + 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow N_{C1} = N_{1C} + 9,6 \text{ kN}.$$

Pręt 2-B

$$\sum M_B = M_{B2} + M_{2B} + V_{2B} \cdot 4 \text{ m} + F \cdot 2 \text{ m} = 5,0720 \text{ kNm} + (-7,2134 \text{ kNm}) + V_{2B} \cdot 4 \text{ m} + 8 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = 0 \Rightarrow V_{2B} = -3,4647 \text{ kN},$$

$$\sum V = V_{2B} - V_{B2} + F = -3,4647 \text{ kN} - V_{B2} + 8 \text{ kN} = 0 \Rightarrow V_{B2} = 4,5354 \text{ kN},$$

$$\sum N = N_{B2} - N_{2B} = 0 \Rightarrow N_{B2} = N_{2B},$$

Węzeł 2

$$\sum M_2 = M_{21} + M_{2B} + M = (-12,7866 \text{ kNm}) + (-7,2134 \text{ kNm}) + 24 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0,$$

$$\sum X = V_{2B} + N_{21} = -3,4647 \text{ kN} + N_{21} = 0 \Rightarrow N_{21} = 3,4647 \text{ kN},$$

$$\sum Y = V_{21} - N_{2B} = 3,0267 \text{ kN} - N_{2B} = 0 \Rightarrow N_{2B} = 3,0267 \text{ kN}.$$

Z trzeciego równania dla pręta 2-B: $N_{B2} = N_{2B} = 3,0267 \text{ kN}$.Z trzeciego równania dla pręta 1-2: $N_{12} = N_{21} = 3,4647 \text{ kN}$.

Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{12} + M_{1A} + M_{1A} + S_\varphi = (-5,3736 \text{ kNm}) + (-14,0231 \text{ kNm}) + (-0,1414 \text{ kNm}) + 19,538 \text{ kNm} = -0,0001,$$

$$\sum X = N_{12} - V_{1A} + V_{1C} \cdot \sin \alpha - N_{1C} \cdot \cos \alpha = 3,4647 \text{ kN} - 8 \text{ kN} + (-3,5717 \text{ kN}) \cdot 0,8 - N_{1C} \cdot 0,6 = 0 \Rightarrow N_{1C} = -12,3211 \text{ kN},$$

$$\sum Y = V_{12} + N_{1A} - V_{1C} \cdot \cos \alpha - N_{1C} \cdot \sin \alpha = 3,0267 \text{ kN} + N_{1A} - (-3,5717 \text{ kN}) \cdot 0,6 - (-12,3211 \text{ kN}) \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow N_{1A} = -15,0267 \text{ kN}.$$

Z trzeciego równania dla pręta 1-A: $N_{A1} = N_{1A} \Rightarrow N_{A1} = -15,0267 \text{ kN}$.Z trzeciego równania dla pręta 1-C: $N_{C1} = N_{1C} + 9,6 \text{ kN} = -12,3211 \text{ kN} + 9,6 \text{ kN} = -2,7211 \text{ kN}$.

Obliczenie momentów zginających:

$$M_{zgin,12} = M_{12} = -5,3736 \text{ kNm},$$

$$M_{zgin,21} = -M_{21} = 12,7866 \text{ kNm},$$

$$M_{zgin,1A} = -M_{1A} = 14,0231 \text{ kNm},$$

$$M_{zgin,A1} = M_{A1} = -9,9769 \text{ kNm},$$

$$M_{zgin,1C} = -M_{1C} = 0,1414 \text{ kNm},$$

$$M_{zgin,C1} = -M_{C1} = 0,$$

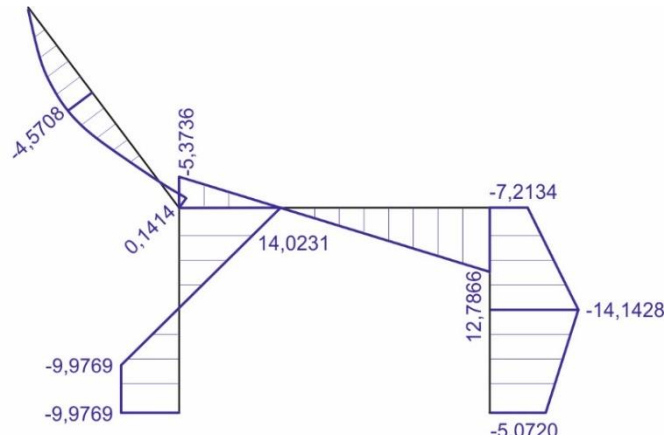
$$M_{zgin,2B} = M_{2B} = -7,2134 \text{ kNm},$$

$$M_{zgin,B2} = -M_{B2} = -5,0720 \text{ kNm},$$

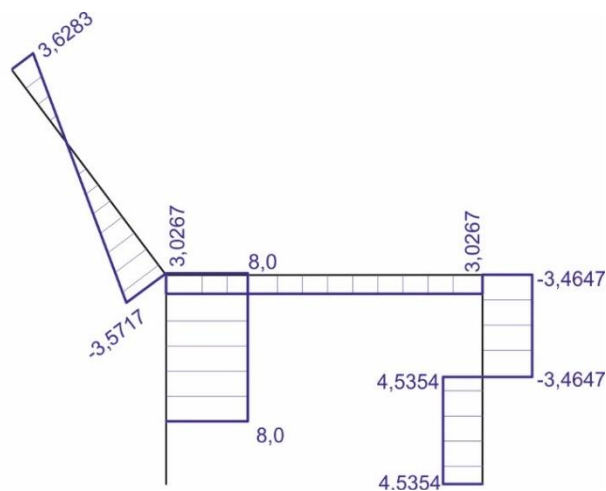
$$M_{zgin,4} = -V_{C1} \cdot 2,5 \text{ m} + q \cdot 1,5 \text{ m} \cdot \frac{1,5 \text{ m}}{2} = -3,6283 \text{ kN} \cdot 2,5 \text{ m} + 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 1,5 \text{ m} \cdot 0,75 \text{ m} = -4,5708 \text{ kNm},$$

$$M_{zgin,5} = M_{2B,zgin} + V_{2B} \cdot 2 \text{ m} = -7,2134 \text{ kNm} - 3,4647 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = -14,1428 \text{ kNm}.$$

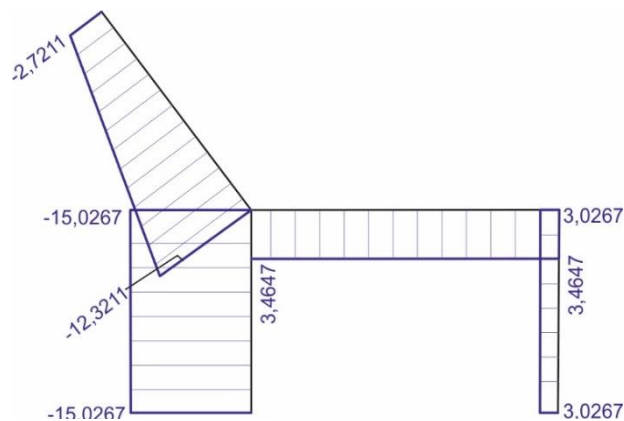
a)



b)



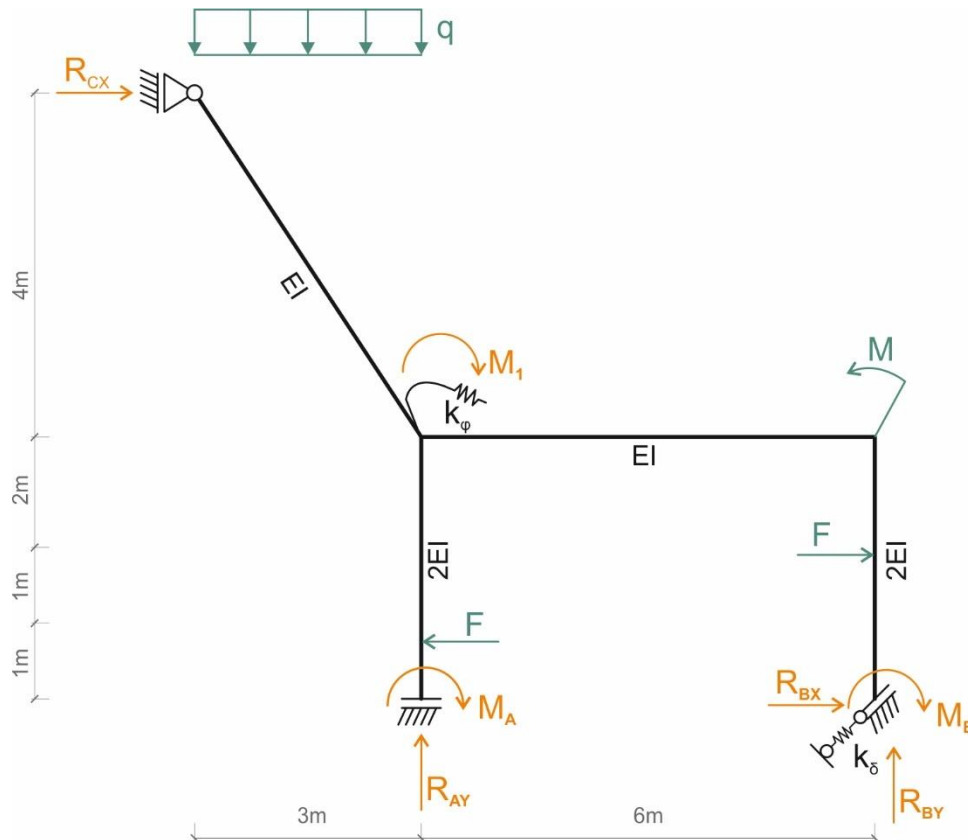
c)



Rys. 3.31. Wykres a) momentów zginających M w kNm, b) sił tnących V w kN, c) sił osiowych N w kN

3.2.7. Kontrola rozwiązania

3.2.7.1. Kontrola statyczna rozwiązania



Rys. 3.32. Przyjęte zwroty reakcji podporowych

Obliczenie reakcji:

$$R_{Ay} = -N_{A1} = 15,0267 \text{ kN},$$

$$M_{A1} = M_{A1} = -9,9769 \text{ kNm},$$

$$M_1 = -S_\varphi = -19,538 \text{ kNm},$$

$$R_{Bx} = -V_{B2} = -4,5354 \text{ kN},$$

$$R_{By} = -N_{B2} = -3,0267 \text{ kN},$$

$$M_B = M_{B2} = 5,0720 \text{ kNm},$$

$$R_{Cx} = V_{C1} \cdot \cos \alpha - N_{C1} \cdot \sin \alpha = 3,6283 \text{ kN} \cdot 0,8 - (-2,7211 \text{ kN}) \cdot 0,6 = 4,5353 \text{ kN},$$

Globalne równania równowagi:

$$\sum X = R_{Bx} + N_{Cx} - F + F = -4,5354 \text{ kN} + 4,5354 \text{ kN} + 8 \text{ kN} - 8 \text{ kN} = 0,$$

$$\sum Y = R_{Ay} + R_{By} - q \cdot 3\text{m} = 15,0267 \text{ kN} - 3,0267 \text{ kN} - 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} = 0,$$

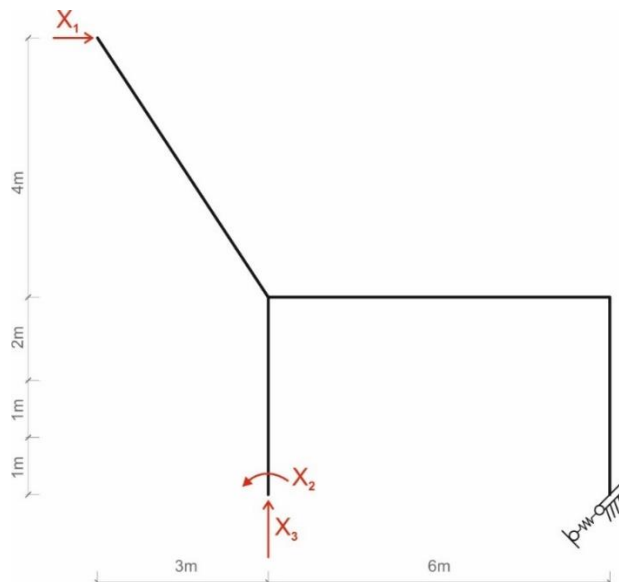
$$\begin{aligned} \sum M_B = M_1 + M_A + M_B + R_{Ay} \cdot 6\text{m} + R_{Cx} \cdot 8 \text{ m} - q \cdot 3 \text{ m} \cdot 7,5 \text{ m} + F \cdot 2 \text{ m} - F \cdot 1 \text{ m} - M = \\ -19,538 \text{ kNm} - 9,9769 \text{ kNm} + 5,0720 \text{ kNm} + 15,0267 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} + 4,5353 \text{ kN} \cdot \\ 8 \text{ m} - 4 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 3 \text{ m} \cdot 7,5 \text{ m} + 8 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 8 \text{ kN} \cdot 1 \text{ m} - 20 \text{ kNm} = 0,0003. \end{aligned}$$

3.2.7.2. Kontrola kinematyczna rozwiązania

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach przeciętych więzi. W tym celu dobierany jest układ podstawowy metody sił. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu. Ponieważ dany układ jest pięciokrotnie statycznie niewyznaczalny dobrano układ podstawowy przecinając pięć więzi podporowych.

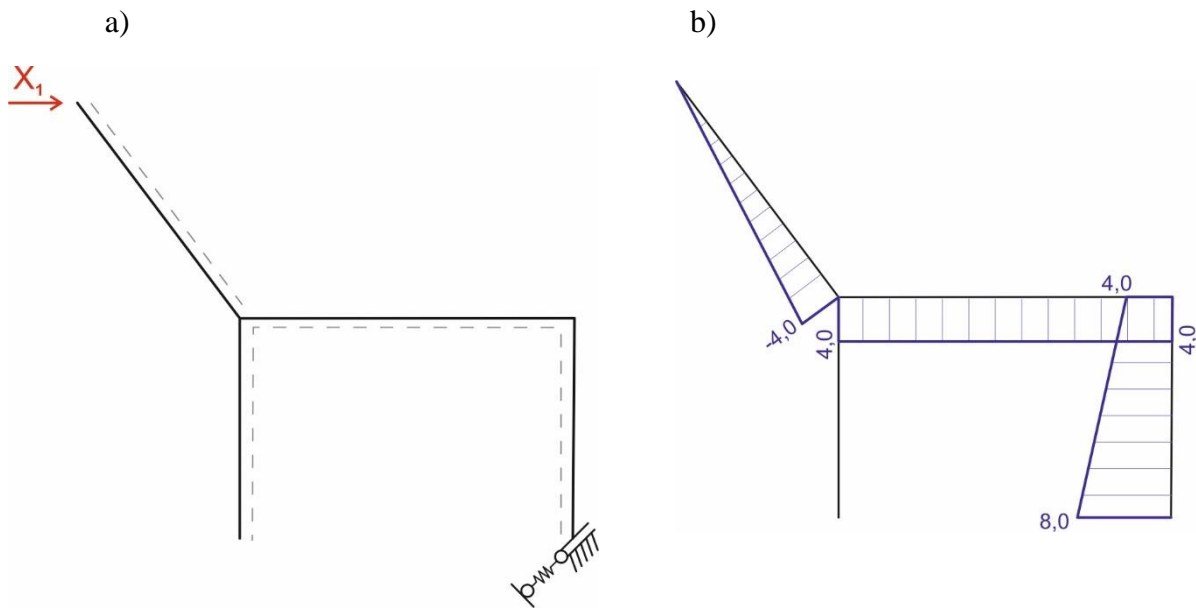
Przemieszczenia obliczane są za pomocą wzoru:

$$P_i \cdot \Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n}$$



Rys. 3.33. Układ podstawowy metody sił bez obciążenia danego

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_1=1$ kN



Rys. 3.34. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_1=1$ kN, b) wykres momentów zginających \bar{M}^1 w kN·m.

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^1 = 1 \cdot 0,6 = 0,6$.

$$X_1 \cdot \Delta_{1F} = \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{6 \text{ m}}{6 \cdot EI} [4 \text{ kNm} \cdot (-5,3736 \text{ kNm}) + 4 \cdot 4 \text{ kNm} \cdot 3,7065 \text{ kNm} + 4 \text{ m} \cdot 12,7866 \text{ kNm}] + \frac{2 \text{ m}}{6 \cdot 2EI} [4 \text{ kNm} \cdot (-7,2134 \text{ kNm}) + 4 \cdot 5 \text{ kNm} \cdot (-10,6781 \text{ kNm}) + 6 \text{ kNm} \cdot (-14,1428 \text{ kNm})] + \frac{2 \text{ m}}{6 \cdot 2EI} [6 \text{ kNm} \cdot (-14,1428 \text{ kNm}) + 4 \cdot 7 \text{ kNm} \cdot (-9,6074 \text{ kNm}) + 8 \text{ kNm} \cdot (-5,0720 \text{ kNm})] + \frac{5 \text{ m}}{6 \cdot EI} [0 \cdot 0 + 4 \cdot 2 \text{ kNm} \cdot (-4,5708 \text{ kNm}) + 4 \text{ kNm} \cdot (-0,1414 \text{ kNm})] + \frac{0,6 \cdot 5,1426 \text{ kN}}{8 \frac{EI}{\text{m}^3}} \Rightarrow \Delta_{1F} = 0,$$

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_2=1$ kNm

$$X_2 \cdot \Delta_{2F} = \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^F}{k_n} \Rightarrow \Delta_{2F} = 0,$$

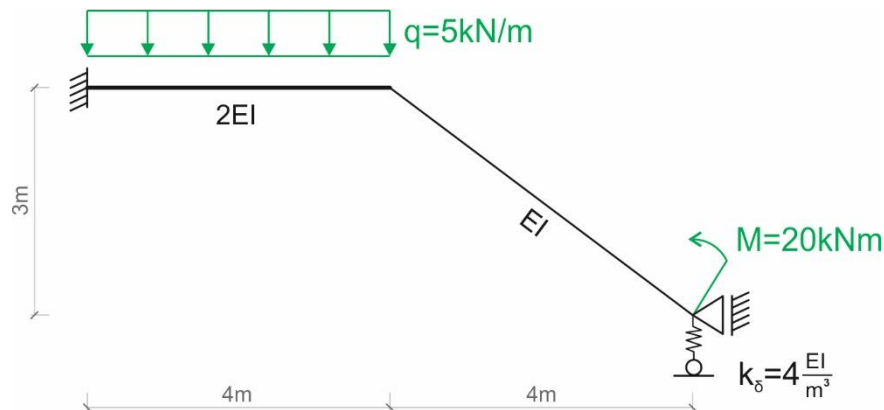
- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_3=1$ kN

$$X_3 \cdot \Delta_{3F} = \int \frac{\bar{M}^3 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^3 \cdot S_n^F}{k_n} \Rightarrow \Delta_{3F} = 0,$$

3.3. PORÓWNANIE ROZWIĄZAŃ: METODA SIŁ I METODA PRZEMIESZCZEŃ

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku 3.35. Należy:

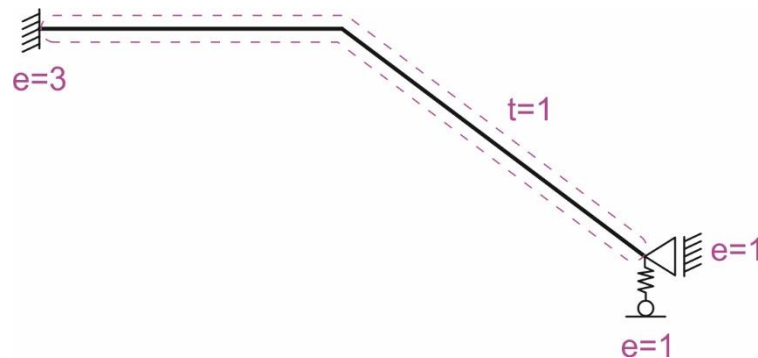
- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę sił oraz metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od zadanego obciążenia siłami.
- Obliczyć wartość przemieszczenia w zaznaczonym miejscu



Rys. 3.35. Schemat statyczny

3.3.1. Sprawdzenie warunku ilościowego i jakościowego geometrycznej niezmienności układu

- Warunek ilościowy: $t = 1$, $e = 3 + 2 = 5$,
 $n_h = e - 3 \cdot t = 5 - 3 = 2 > 0$ Układ jest dwukrotnie statycznie niewyznaczalny

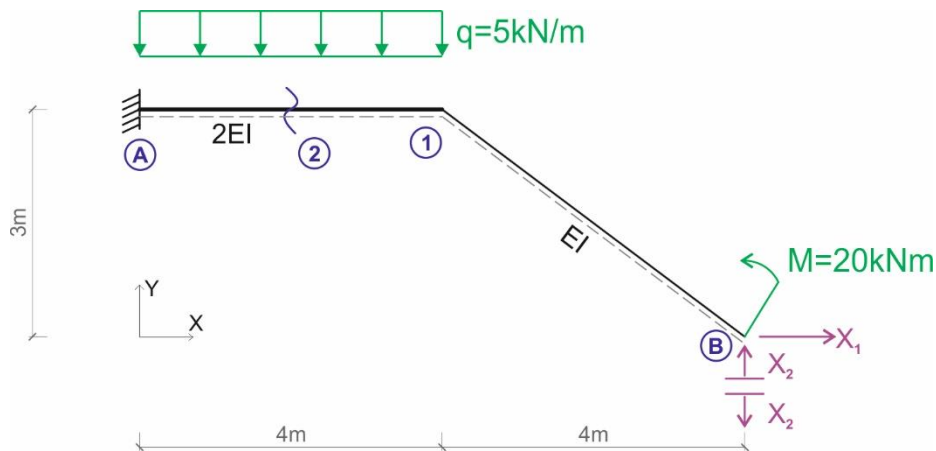


Rys. 3.36. Tarcze i więzi

- Warunek jakościowy: Układ składa się z jednej tarczy połączonej z ostoją pięcioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 3 niezbieżne i nierównoległe. Jest to układ *geometrycznie niezmienny*.

3.3.2. Rozwiązanie ramy z wykorzystaniem metody sił.

3.3.2.1. Przyjęcie układu podstawowego metody sił

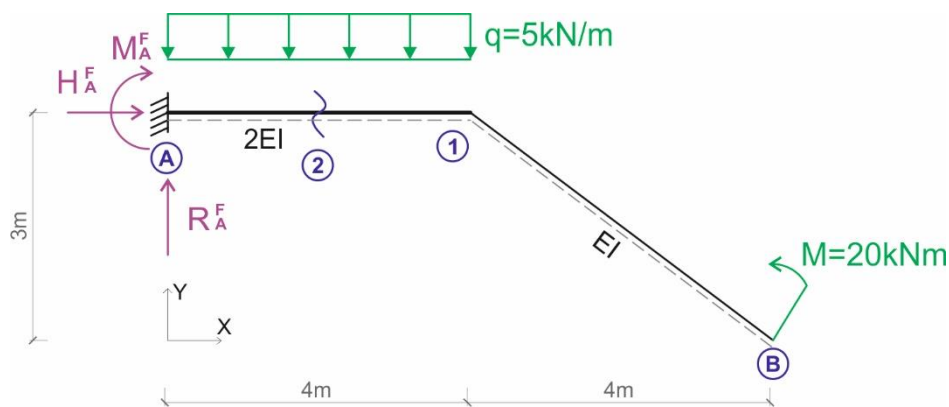


Rys. 3.37. Układ podstawowy Metody Sił.

Postać ogólna układu równań kanonicznych metody sił

$$\begin{aligned} \delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{12} \cdot X_2 + \delta_{1F} &= 0, \\ \delta_{21} \cdot X_1 + \delta_{22} \cdot X_2 + \delta_{2F} &= 0. \end{aligned}$$

3.3.2.2. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia danego



Rys. 3.38. Schemat układu podstawowego od obciążenia siłami

Obliczenie reakcji

$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{H}_A^F = 0 \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -\bar{R}_A^F + q \cdot 4 \text{ m} = 0 \Rightarrow \bar{R}_A^F = 20 \text{ kN},$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A^F - 20 \text{ kNm} + q \cdot 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = 0 \Rightarrow \bar{M}_A^F = -20 \text{ kNm}.$$

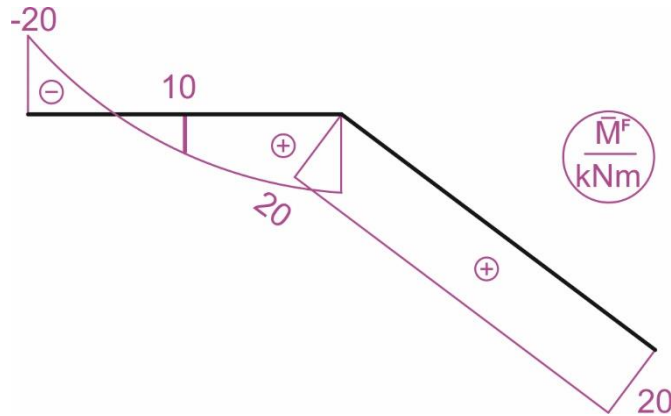
Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^F = 0$.

Obliczenie momentów zginających

$$\bar{M}_B^F = \bar{M}_1^F = M = 20 \text{ kNm},$$

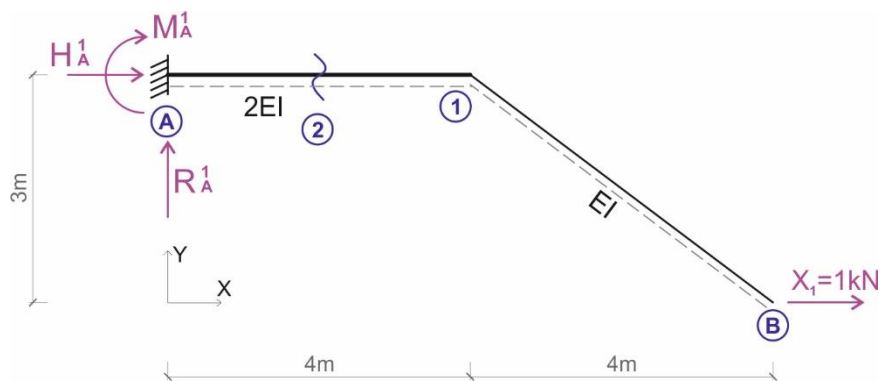
$$\bar{M}_2^F = M - q \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 20 \text{ kNm} - 5 \text{ kN/m} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 10 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_A^F = -20 \text{ kNm}.$$



Rys. 3.39. Wykres momentów zginających \bar{M}^F .

3.3.2.3. Rozwiązanie UPMS od $X_1 = 1 \text{ kN}$



Rys. 3.40. Schemat układu podstawowego od obciążenia $X_1 = 1 \text{ kN}$

Wyznaczenie reakcji podporowych

$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{H}_A^1 + 1 \text{ kN} = 0 \text{ kN}, \Rightarrow \bar{H}_A^1 = -1 \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \bar{R}_A^1 = 0,$$

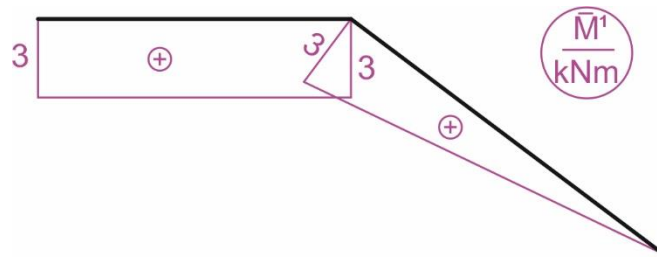
$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A^1 - 1 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} = 0 \Rightarrow \bar{M}_A^1 = 3 \text{ kNm}.$$

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^1 = 0$.

Obliczenie momentów zginających

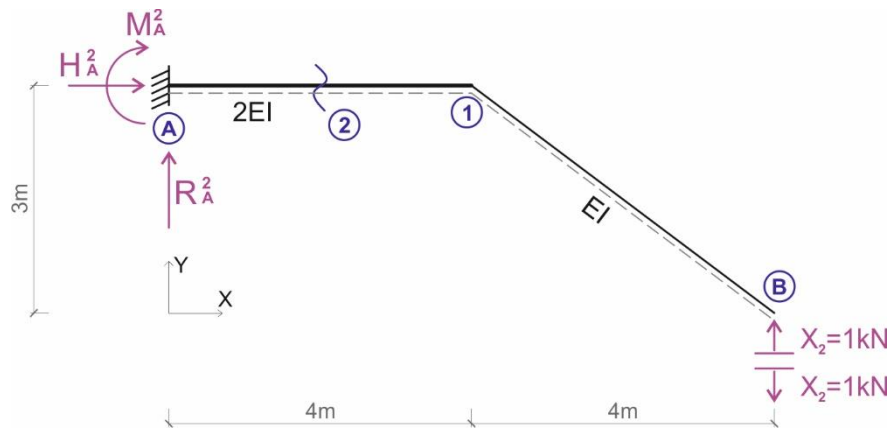
$$\bar{M}_B^1 = 0,$$

$$\bar{M}_1^1 = \bar{M}_2^1 = \bar{M}_A^1 = X_1 \cdot 3 \text{ m} = 3 \text{ kNm}.$$



Rys. 3.41. Wykres momentów zginających od $X_1 = 1 \text{ kN}$.

3.3.2.4. Rozwiązanie układu podstawowego od $X_2 = 1 \text{ kN}$



Rys. 3.42. Schemat układu podstawowego od obciążenia $X_2 = 1 \text{ kN}$

Wyznaczenie reakcji podporowych

$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{H}_A^2 = 0 \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \bar{R}_A^2 + 1 \text{ kN} = 0 \Rightarrow \bar{R}_A^2 = -1 \text{ kN},$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A^2 - 1 \text{ kN} \cdot 8 \text{ m} = 0 \Rightarrow \bar{M}_A^2 = 8 \text{ kNm}.$$

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^2 = -1 \text{ kN}$

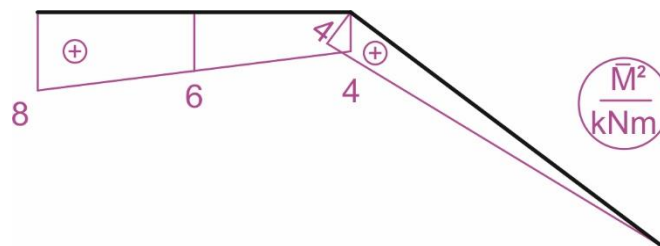
Obliczenie momentów zginających

$$\bar{M}_B^2 = 0,$$

$$\bar{M}_1^2 = X_2 \cdot 4 \text{ m} = 4 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_2^2 = X_2 \cdot 6 \text{ m} = 6 \text{ kNm},$$

$$\bar{M}_A^2 = X_2 \cdot 8 \text{ m} = 8 \text{ kNm}.$$



Rys. 3.43. Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym od $X_2 = 1 \text{ kN}$.

3.3.2.5. Obliczenie współczynników i wyrazów wolnych URMS

$$X_1 \cdot \delta_{11} = \frac{1}{2EI} \cdot 3 \text{ kNm} \cdot 4 \text{ m} \cdot 3 \text{ kNm} + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \text{ kNm} \cdot 5 \text{ m} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \text{ kNm} \Rightarrow \delta_{11} = 3 \frac{\text{kNm}^3}{EI},$$

$$X_1 \cdot \delta_{12} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{4 \text{ m}}{6} (8 \text{ kNm} \cdot 3 \text{ kNm} + 4 \cdot 6 \text{ kNm} \cdot 3 \text{ kNm} + 4 \text{ kNm} \cdot 3 \text{ kNm}) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ kNm} \cdot 5 \text{ m} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 \text{ kNm} \Rightarrow \delta_{12} = 56 \frac{\text{kNm}^3}{EI} = \delta_{21},$$

$$X_2 \cdot \delta_{22} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{4 \text{ m}}{6} \cdot ((8 \text{ kNm})^2 + 4 \cdot (6 \text{ kNm})^2 + (4 \text{ kNm})^2) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \text{ kNm} \cdot 5 \text{ m} \cdot \frac{2}{3} \cdot 4 \text{ kNm} + \frac{(-1 \text{ kN}) \cdot (-1 \text{ kN})}{4 \frac{EI}{\text{m}^3}} \Rightarrow \delta_{22} = 101,583 \frac{\text{kNm}^3}{EI},$$

$$X_1 \cdot \delta_{1F} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{4 \text{ m}}{6} \cdot (-20 \text{ kNm} \cdot 3 \text{ kNm} + 4 \cdot 10 \text{ kNm} \cdot 3 \text{ kNm} + 20 \text{ kNm} \cdot 3 \text{ kNm}) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ m} \cdot 3 \text{ kNm} \cdot 20 \text{ kNm} \Rightarrow \delta_{1F} = 190 \frac{\text{kNm}^3}{EI},$$

$$X_2 \cdot \delta_{2F} = \frac{1}{2EI} \cdot \frac{4 \text{ m}}{6} \cdot (-20 \text{ kNm} \cdot 8 \text{ kNm} + 4 \cdot 10 \text{ kNm} \cdot 6 \text{ kNm} + 20 \text{ kNm} \cdot 4 \text{ kNm}) + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \text{ m} \cdot 4 \text{ kNm} \cdot 20 \text{ kNm} \Rightarrow \delta_{22} = 253,333 \frac{\text{kNm}^3}{EI}.$$

3.3.2.6. Szczegółowa postać URMS i jego rozwiązanie

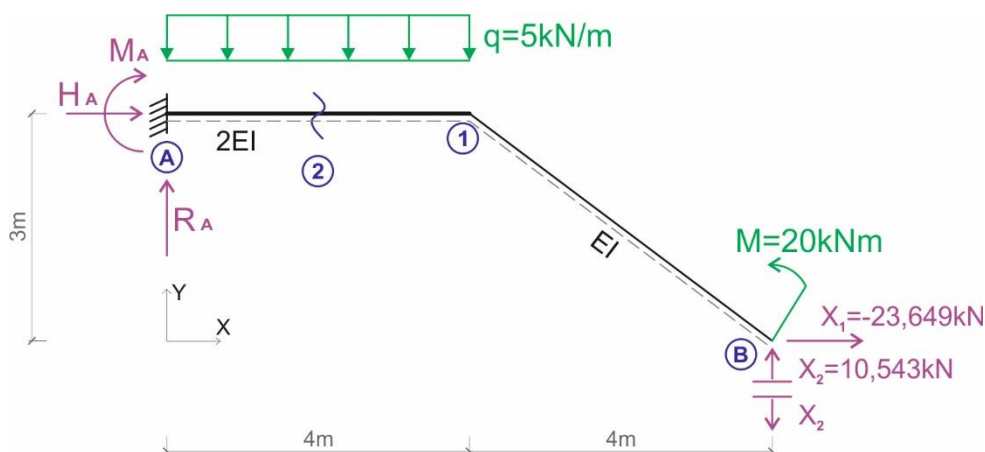
$$3 \frac{\text{kNm}^3}{EI} \cdot X_1 + 56 \frac{\text{kNm}^3}{EI} \cdot X_2 + 190 \frac{\text{kNm}^3}{EI} = 0,$$

$$56 \frac{\text{kNm}^3}{EI} \cdot X_1 + 101,583 \frac{\text{kNm}^3}{EI} \cdot X_2 + 253,333 \frac{\text{kNm}^3}{EI} = 0.$$

$$X_1 = -23,649$$

$$X_2 = 10,543$$

3.3.2.7. Wyznaczenie rzeczywistych sił przekrojowych



Rys. 3.44. Schemat układu podstawowego wraz z obciążeniem i siłami hiperstatycznymi

Obliczenie reakcji

$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A + X_1 = 0 \text{ kN} \Rightarrow H_A = 23,649 \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow -R_A + q \cdot 4 \text{ m} - X_2 = 0 \Rightarrow R_A = 9,456 \text{ kN},$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A - 20 \text{ kNm} + \frac{5 \text{ kN}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} - X_1 \cdot 3 \text{ m} + X_2 \cdot 8 \text{ m} = 0 \Rightarrow M_A = -6,601 \text{ kNm}.$$

Siła w więzi sprężystej: $S_\delta = -X_2 = -10,543 \text{ kN}$.

Obliczenie momentów zginających

$$M_B = M = 20 \text{ kNm},$$

$$M_1 = 20 \text{ kNm} - X_1 \cdot 3 \text{ m} + X_2 \cdot 4 \text{ m} = -8,775 \text{ kNm},$$

$$M_2 = 20 \text{ kNm} - X_1 \cdot 3 \text{ m} + X_2 \cdot 6 \text{ m} - 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 2,312 \text{ kNm},$$

$$M_A = -6,601 \text{ kNm}.$$

Obliczenie sił tnących

$$T_B = T_{1B} = X_2 \cdot \cos \alpha + X_1 \cdot \sin \alpha = 5,755 \text{ kN},$$

$$T_{1B} = 20 \text{ kNm} - X_1 \cdot 3 \text{ m} + X_2 \cdot 4 \text{ m} = -8,775 \text{ kNm},$$

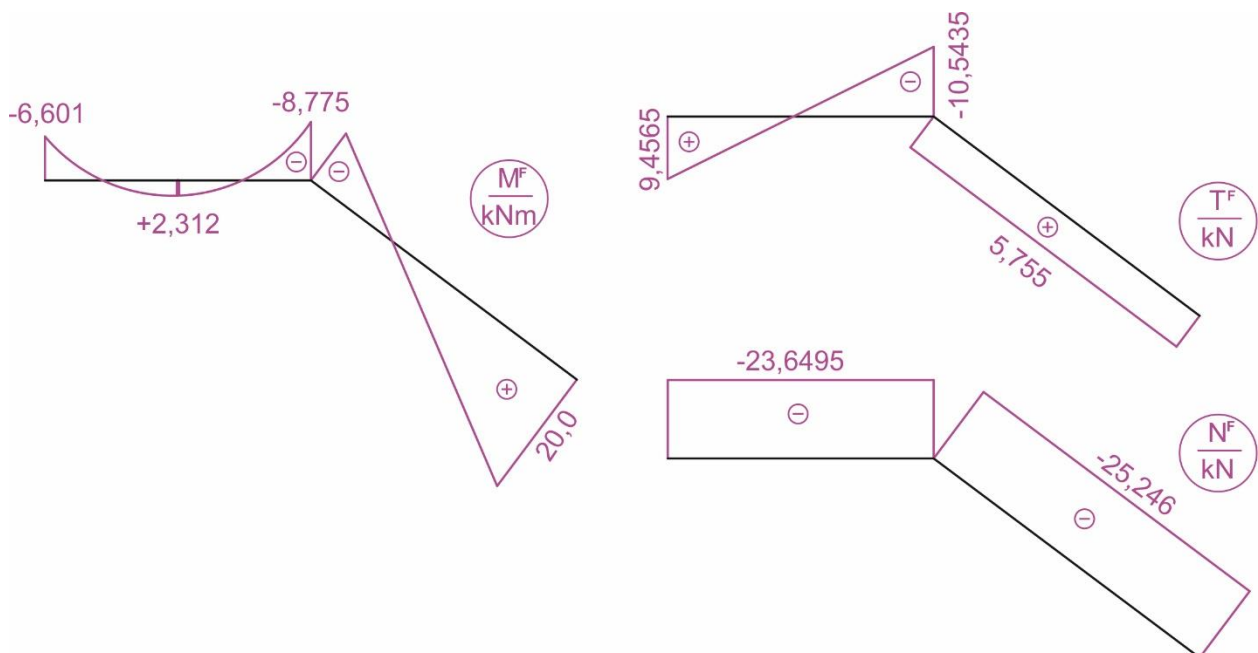
$$T_{1A} = -X_2 = 10,543 \text{ kN},$$

$$T_A = R_A = 9,456 \text{ kN}.$$

Obliczenie sił osiowych

$$N_B = N_{1B} = -X_2 \cdot \sin \alpha - X_1 \cdot \cos \alpha = -25,2457 \text{ kN},$$

$$N_A = N_{1A} = -H_A = -23,6495 \text{ kN}.$$

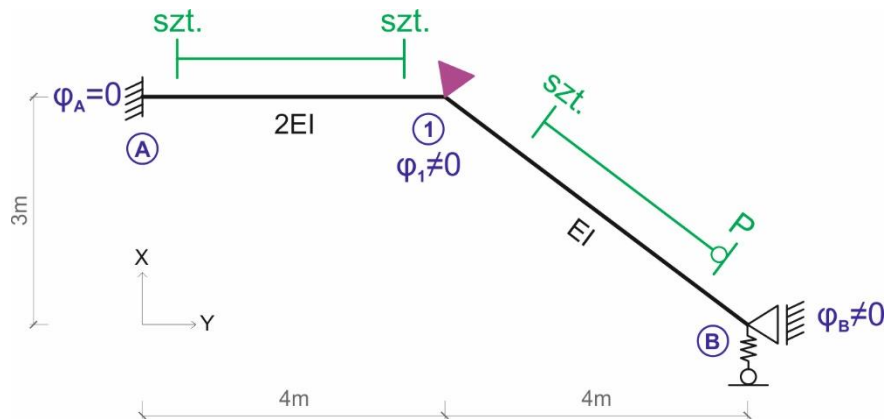


Rys. 3.45. Wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od obciążenia mechanicznego

3.3.3. Rozwiązanie ramy z wykorzystaniem Metody Przemieszczeń

3.3.3.1. Obliczenie stopnia geometrycznej niezmienności układu

a) Podział układu na elementy, dla których dane są wzory transformacyjne i wyznaczenie liczby stopni swobody obrotu węzłów n_φ



Rys. 3.46. Numeracja węzłów i podział na typy prętów

Z przyjętego podziału na pręty wynika, że:

$$M_{A1} = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot \varphi_{A1} + 2 \cdot \varphi_{1A} - 6 \cdot \psi_{A1}) + M_{A1}^0 = \frac{EI}{2m} (2 \cdot \varphi_{1A} - 6 \cdot \psi_{A1}) + M_{A1}^0$$

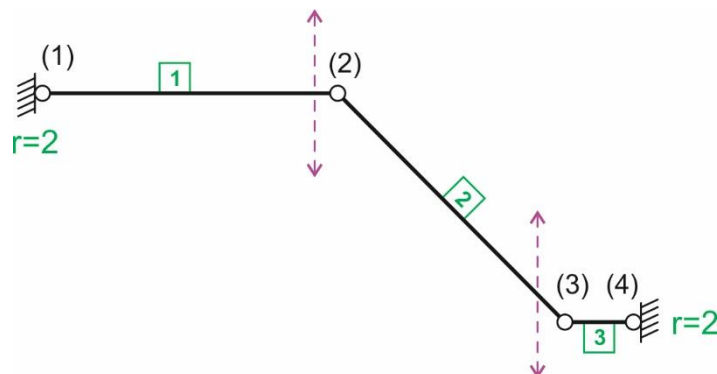
$$M_{1A} = \frac{2EI}{4m} (4 \cdot \varphi_{1A} + 2 \cdot \varphi_{A1} - 6 \cdot \psi_{1A}) + M_{1A}^0 = \frac{EI}{2m} (4 \cdot \varphi_{1A} - 6 \cdot \psi_{1A}) + M_{1A}^0$$

$$M_{1B} = \frac{EI}{5m} (3 \cdot \varphi_{1B} + 0 \cdot \varphi_{B1} - 3 \cdot \psi_{1B}) + M_{B1}^0 = \frac{EI}{5m} (3 \cdot \varphi_{1B} - 3 \cdot \psi_{1B}) + M_{B1}^0$$

$$M_{B1} = 0$$

Uwzględniając, że $\varphi_{1A} = \varphi_{1B} = \varphi_1$, stwierdzono, że liczba stopni swobody obrotu węzłów $n_\varphi = 1$.

a) Wyznaczenie liczby stopni swobody przesuwu węzłów

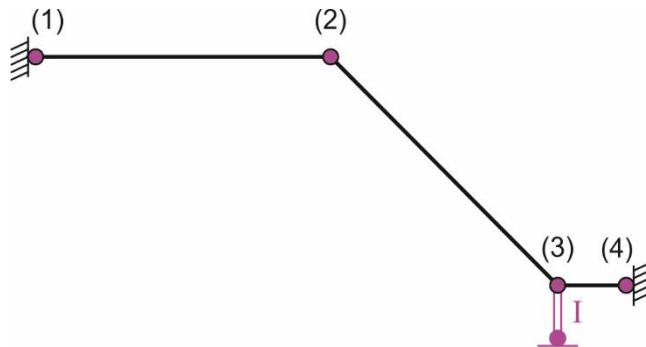


Rys. 3.47. Model przegubowy

Oszacowanie $n_\delta \geq 2w - p - r$, gdzie: $w = 4$ (liczba węzłów modelu), $p = 3$ (liczba prętów w modelu), $r = 4$ (liczba więzi podporowych modelu)

$$n_\delta \geq 2 \cdot 4 - 3 - 4 = 1$$

Oznacza to, że aby układ o węzłach przegubowych był geometrycznie niezmienny należy dodać co najmniej jedną więź.



Rys. 3.48. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

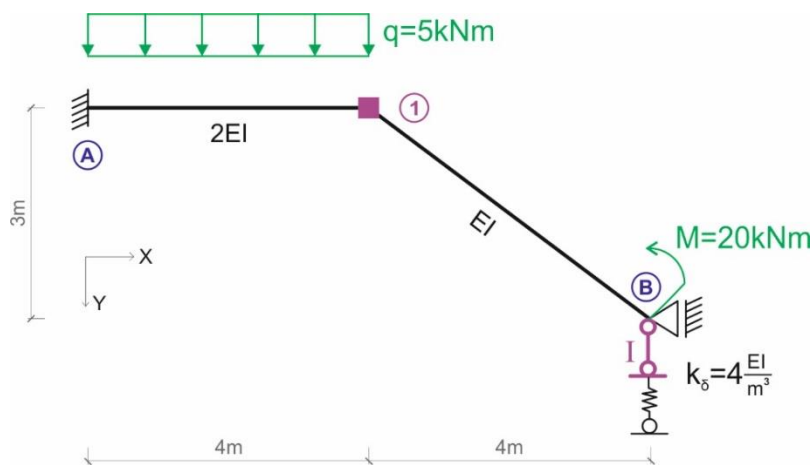
Analiza kinematyczna potwierdza, że model przegubowy po dodaniu 1 więzi jest geometrycznie niezmienny, tak więc stopień swobody przesuwu węzłów $n_\delta = 1$.

b) Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu

Stopień geometrycznej niewyznaczalności układu wynosi:

$$n_g = n_\varphi + n_\delta = 1 + 1 = 2.$$

3.3.3.2. Przyjęcie układu podstawowego metody przemieszczeń



Rys. 3.49. Układ podstawowy Metody Przemieszczeń (UPMP)

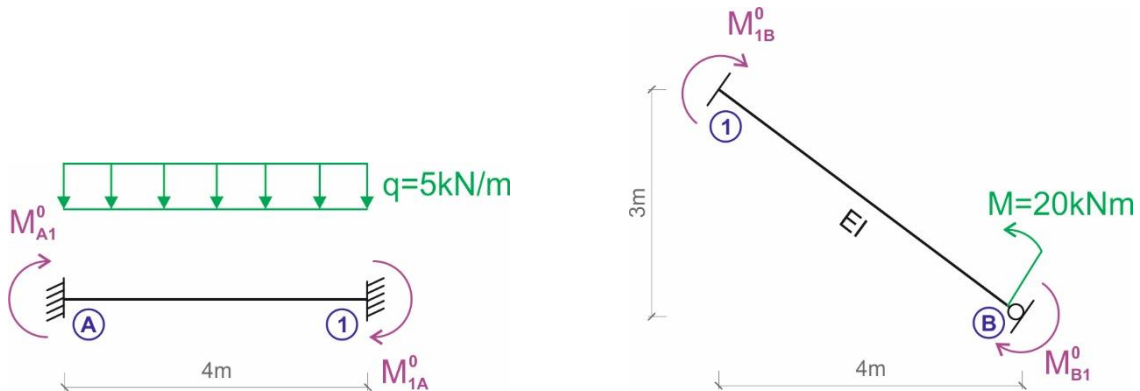
Postać ogólna układu równań kanonicznych MP:

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{10} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{I0} = 0$$

3.3.3.3. Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia danego

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie. W analizowanym przypadku zakładamy, że $\varphi_1 = \delta_I = 0$.



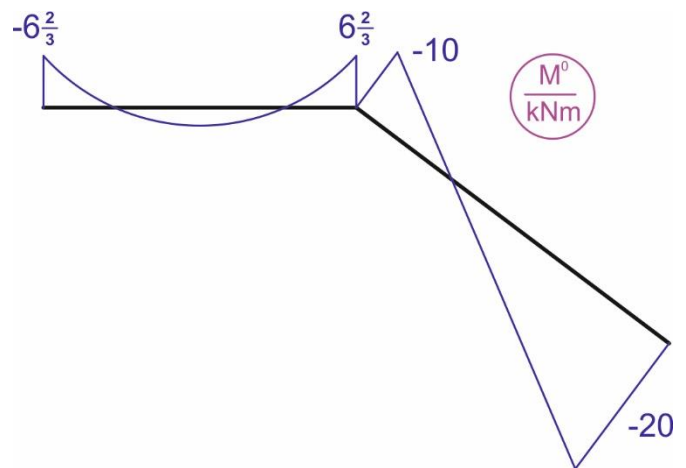
Rys. 3.50. Momenty brzegowe od obciążenia zewnętrznego

$$M_{A1}^0 = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{5 \text{ kN/m} \cdot (4 \text{ m})^2}{12} = -6\frac{2}{3} \text{ kNm},$$

$$M_{1A}^0 = \frac{qL^2}{12} = \frac{5 \text{ kN/m} \cdot (4 \text{ m})^2}{12} = 6\frac{2}{3} \text{ kNm},$$

$$M_{1B}^0 = -\frac{M}{2} = -\frac{20 \text{ kNm}}{2} = -10 \text{ kNm},$$

$$M_{B1}^0 = 0.$$



Rys. 3.51. Wykres momentów brzegowych

3.3.3.4. Rozwiązanie UPMP od stanu rotacyjnego $\varphi_1 = 1$

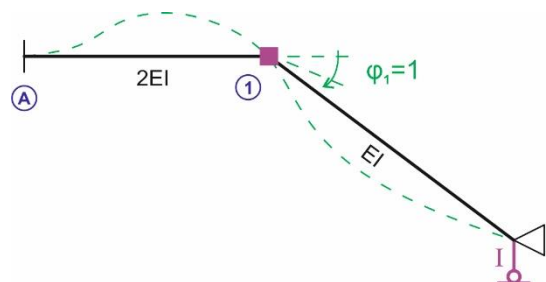
W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_1 = 1$, $\delta_I = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

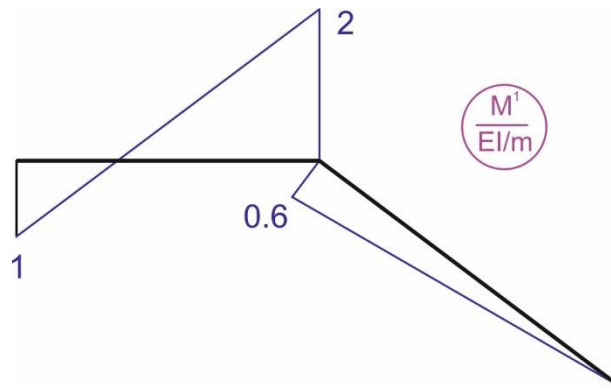
$$M_{A1}^1 = \frac{EI}{2m} (2 \cdot 1 - 6 \cdot 0) = 1 \frac{EI}{m},$$

$$M_{1A}^1 = \frac{EI}{2m} (4 \cdot 1 - 6 \cdot 0) = 2 \frac{EI}{m},$$

$$M_{1B}^1 = \frac{EI}{5m} (3 \cdot 1 - 3 \cdot 0) = \frac{3EI}{5m},$$

$$M_{B1}^1 = 0.$$

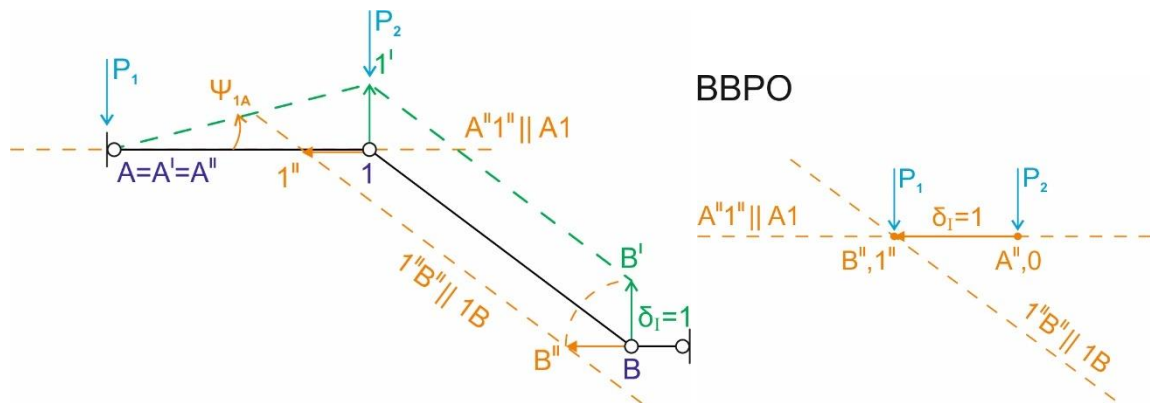




Rys. 3.52. Wykres momentów M^1 w $\frac{EI}{m}$.

3.3.3.5. Rozwiązanie UPMP od stanu translacyjnego $\delta_1 = 1$

Do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\delta_1 = 1$, $\varphi_1 = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_1 = 1$ w miejscu i na kierunku dodanej więzi translacyjnej I.



Rys. 3.53. a) plan przemieszczeń obroconych (‘’) i możliwych (rzeczywistych ‘), b) BPPO.

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{1A}^I = -|1''A''| = -1 \text{ („-” ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo),}$$

$$\Delta_{1B}^I = 0.$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{1A}^I = \frac{\Delta_{1A}^I}{L_{1A}} = -\frac{1}{4 \text{ m}}, \quad \psi_{1B}^I = 0.$$

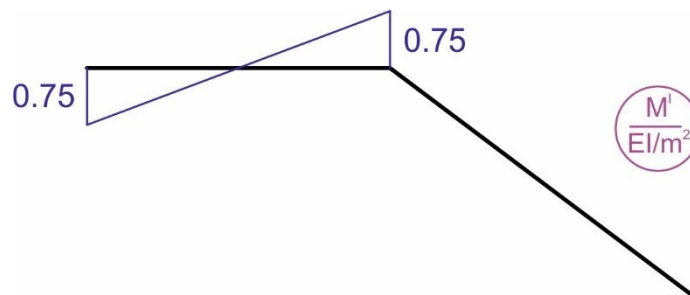
Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_1 wynoszą:

$$M_{A1}^I = M_{1A}^I = \frac{EI}{2 \text{ m}} (-6 \cdot \psi_{1A}^I) = -\frac{EI}{2 \text{ m}} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{4 \text{ m}}\right) = \frac{3 \text{ EI}}{4 \text{ m}^2},$$

$$M_{1B}^I = M_{B1}^I = 0.$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_{P1}^I = 0, \quad \delta_{P2}^I = -1, \quad \delta_{P3}^I = 0.$$



Rys. 3.54. Wykres momentów M^I w $\frac{EI}{m^2}$.

3.3.3.6. Obliczenie współczynników układu równań

$$\mathbf{k}_{11} = \sum_j M_{1j}^1 + k_1^\varphi = M_{1A}^1 + M_{1B}^1 + k_1^\varphi = 2 \frac{EI}{m} + \frac{3EI}{5m} + 0 = \mathbf{2,6 \frac{EI}{m}},$$

$$\mathbf{k}_{1I} = \sum_j M_{1j}^I = M_{1A}^I + M_{1B}^I = \frac{3EI}{4m^2} + 0 = \mathbf{0,75 \frac{EI}{m^2}},$$

$$\mathbf{k}_{10} = \sum_j M_{1j}^0 = M_{1A}^0 + M_{1B}^0 = 6 \frac{2}{3} \text{ kNm} - 10 \text{ kNm} = \mathbf{-3 \frac{1}{3} \text{ kNm}},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{I1} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi_{ij}^I = -(M_{1A}^1 + M_{A1}^1) \psi_{1A}^I - (M_{1B}^1 + M_{B1}^1) \psi_{1B}^I = -\left(2 \frac{EI}{m} + 1 \frac{EI}{m}\right) \cdot \\ &\quad \left(-\frac{1}{4m}\right) - \left(\frac{3EI}{5m} + 0 \frac{EI}{m}\right) \cdot 0 = \frac{3EI}{4m^2} = \mathbf{k}_{1I}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{II} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \Delta L_{k_s}^I \cdot \Delta L_{k_s}^I = -(M_{1A}^I + M_{A1}^I) \psi_{1A}^I - (M_{1B}^I + M_{B1}^I) \psi_{1B}^I + \\ &\quad k_\delta \cdot \Delta L_{k_\delta}^I \cdot \Delta L_{k_\delta}^I = -\left(\frac{3EI}{4m^2} + \frac{3EI}{4m^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) - (0 - 0) \cdot 0 + 4 \frac{EI}{m} \cdot 1 \cdot 1 = \mathbf{4,375 \frac{EI}{m^3}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_{I0} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \psi_{ij}^I - \sum_P P_P \cdot \delta_P^I = -(M_{1A}^0 + M_{A1}^0) \psi_{1A}^I - (M_{1B}^0 + M_{B1}^0) \psi_{1B}^I - P_1 \cdot \delta_1^I - \\ &\quad P_2 \cdot \delta_2^I - P_3 \cdot \delta_3^I = -\left(-6 \frac{2}{3} \text{ kNm} + 6 \frac{2}{3} \text{ kNm}\right) \cdot \left(-\frac{1}{4m}\right) - (-10 \text{ kNm} + 0) \cdot 0 - \\ &\quad 10 \text{ kN} \cdot 0 - 10 \text{ kN} \cdot (-1) - 20 \text{ kNm} \cdot 0 = \mathbf{10 \text{ kN}}. \end{aligned}$$

3.3.3.6. Szczegółowa postać URMP i jego rozwiązanie

$$2,6 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,75 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I - 3 \frac{1}{3} \text{ kNm} = 0$$

$$0,75 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 4,375 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I + 10 \text{ kN} = 0$$

$$\varphi_1 = \mathbf{2,0424 \frac{kNm^2}{EI}} \quad \delta_I = \mathbf{-2,6358 \frac{kNm^3}{EI}}$$

3.3.3.7. Obliczenie wartości sił przekrojowych

a) Momenty brzegowe

Momenty brzegowe określamy korzystając ze wzorów transformacyjnych dla każdego z prętów.

$$M_{A1} = \frac{EI}{2m} (2 \cdot \varphi_{1A} - 6 \cdot \psi_{1A}^I \cdot \delta_I) + M_{A1}^O = \frac{EI}{2m} \left(2 \cdot 2,0424 \frac{kNm^2}{EI} - 6 \cdot \left(-\frac{1}{4m} \right) \cdot \left(-2,6358 \frac{kNm^3}{EI} \right) \right) - 6 \frac{2}{3} kNm = -6,601 kNm,$$

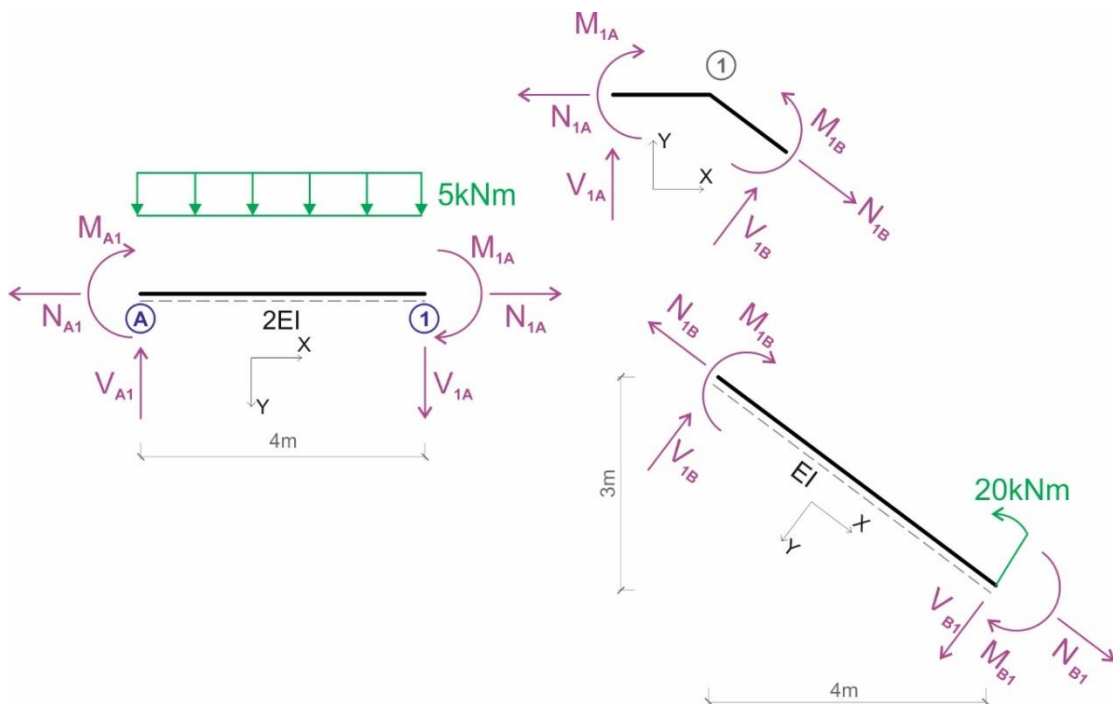
$$M_{1A} = \frac{EI}{2m} (4 \cdot \varphi_{1A} - 6 \cdot \psi_{1A}^I \cdot \delta_I) + M_{1A}^O = \frac{EI}{2m} \left(4 \cdot 2,0424 \frac{kNm^2}{EI} - 6 \cdot \left(-\frac{1}{4m} \right) \cdot \left(-2,6358 \frac{kNm^3}{EI} \right) \right) + 6 \frac{2}{3} kNm = 8,775 kNm,$$

$$M_{1B} = \frac{EI}{5m} (3 \cdot \varphi_{1B} - 3 \cdot \psi_{1B}^I \cdot \delta_I) + M_{1B}^O = \frac{EI}{5m} \left(3 \cdot 2,0424 \frac{kNm^2}{EI} - 3 \cdot 0 \cdot \left(-2,6358 \frac{kNm^3}{EI} \right) \right) - 10 kNm = -8,775 kNm,$$

$$M_{B1} = 0.$$

a) Siły tnące i siły osiowe

Brzegowe siły tnące i osiowe wyznaczamy z równań równowagi prętów i węzłów przy wyznaczonych już momentach brzegowych z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach.



Rys. 3.55. Podział układu na pręty i węzły

Pręt A-1

$$\sum M_1 = M_{A1} + M_{1A} + V_{A1} \cdot 4 \text{ m} - 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m} \cdot 2 \text{ m} = [-6,601 + 8,775 + 4 \cdot V_{A1} - 40] \text{ kNm} =$$

$$0 \Rightarrow V_{A1} = 9,456 \text{ kN},$$

$$\sum Y = V_{1A} - V_{A1} + 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 4 \text{ m} = [V_{1A} - 9,456 + 20] \text{ kN} = 0 \Rightarrow V_{1A} = -10,544 \text{ kN},$$

$$\sum X = N_{1A} - N_{A1} = 0 \Rightarrow N_{1A} = N_{A1}.$$

Pręt 1-B

$$\sum M_B = M_{1B} + M_{B1} + V_{1B} \cdot 5 \text{ m} - 20 \text{ kNm} = [-8,775 + 0 + 5 \cdot V_{1B} - 20] \text{ kNm} = 0 \Rightarrow V_{1B} =$$

$$5,755 \text{ kN},$$

$$\sum Y = -V_{1B} + V_{B1} = [-5,755 + V_{B1}] \text{ kN} = 0 \Rightarrow V_{B1} = 5,755 \text{ kN},$$

$$\sum X = N_{B1} - N_{1B} = 0 \Rightarrow N_{1B} = N_{B1}.$$

Węzeł nr 1

$$\sum Y = -V_{1A} + V_{1B} \cdot \cos\alpha + N_{1B} \cdot \sin\alpha = [-(-10,544) + 5,755 \cdot 0,8 + N_{1B} \cdot 0,6] \text{ kN} = 0 \Rightarrow$$

$$N_{1B} = -25,247 \text{ kN} = N_{B1},$$

$$\sum X = -N_{1A} + N_{1B} \cdot \cos\alpha - V_{1B} \cdot \sin\alpha = [-N_{1A} + (-25,247) \cdot 0,8 - 5,755 \cdot 0,6] \text{ kN} = 0 \Rightarrow$$

$$N_{1A} = -23,651 \text{ kN} = N_{A1}.$$

d) Momenty zginające:

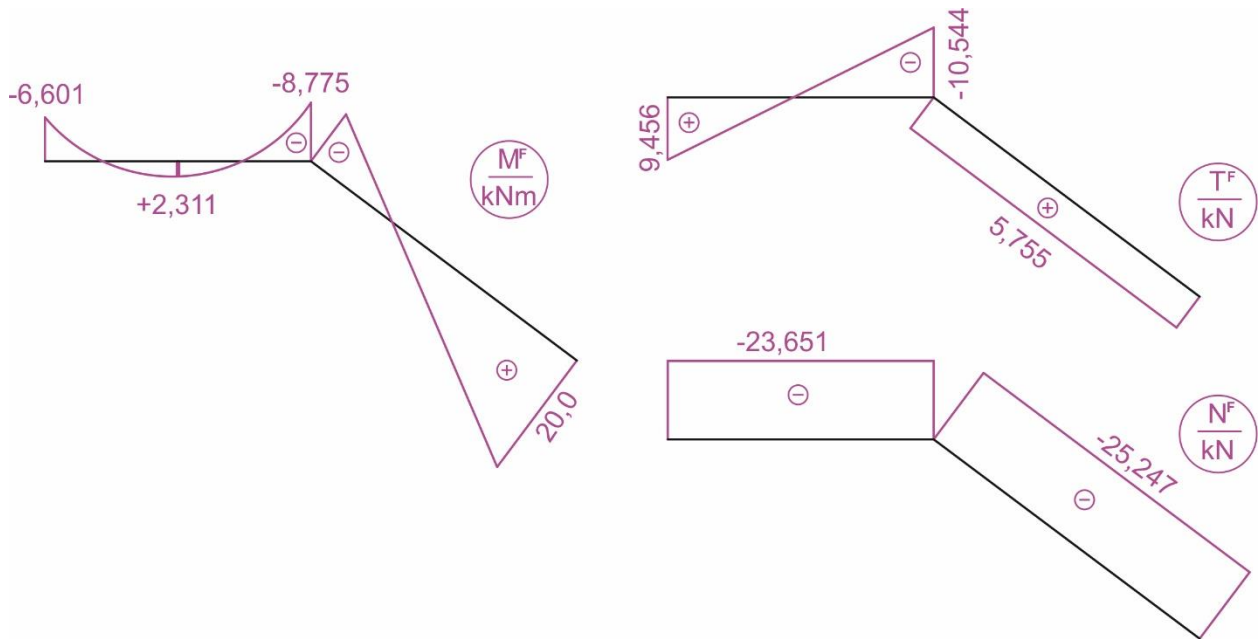
$$M_{zgin,A1} = M_{1A} = -6,601 \text{ kNm},$$

$$M_{zgin,1A} = -M_{1A} = -8,775 \text{ kNm},$$

$$M_{zgin,1B} = M_{1B} = -8,775 \text{ kNm},$$

$$M_{zgin,B1} = M_{B1} + M = 20 \text{ kNm},$$

$$M_{zgin,2} = M_{A1} + V_{A1} \cdot 2 \text{ m} - 5 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot 2 \text{ m} \cdot 1 \text{ m} = 2,311 \text{ kNm}.$$



Rys. 3.56. Wykresy rzeczywistych sił przekrojowych

3.3.3.8. Wyznaczenie reakcji podporowych

Reakcje podporowe wyznaczamy na podstawie obliczonych sił przekrojowych.

$$R_A = V_{A1} = 9,456 \text{ kN},$$

$$H_A = -H_{A1} = 23,651 \text{ kN},$$

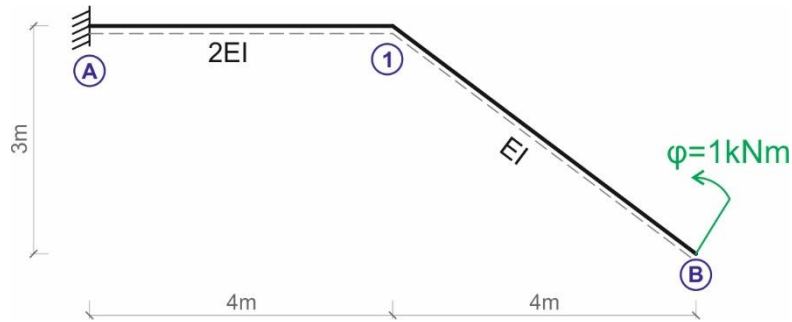
$$M_A = M_{zgin,A1} = -6,601 \text{ kNm},$$

$$R_B = -V_{B1} \cdot \cos\alpha - N_{B1} \cdot \sin\alpha = [-5,755 \cdot 0,8 - (-25,247) \cdot 0,6] \text{ kN} = 10,544 \text{ kN},$$

$$H_B = V_{B1} \cdot \sin\alpha - N_{B1} \cdot \cos\alpha = [-5,755 \cdot 0,8 - (-25,247) \cdot 0,6] \text{ kN} = 23,650 \text{ kN}.$$

3.3.4. Wyznaczenie szukanego przemieszczenia

3.3.4.1. Obliczenie przemieszczenia z wykorzystaniem Metody Sił



Rys. 3.57. Układ statycznie wyznaczalny z obciążeniem jednostkowym $P_\varphi = 1 \text{ kNm}$

Obliczenie reakcji podporowych

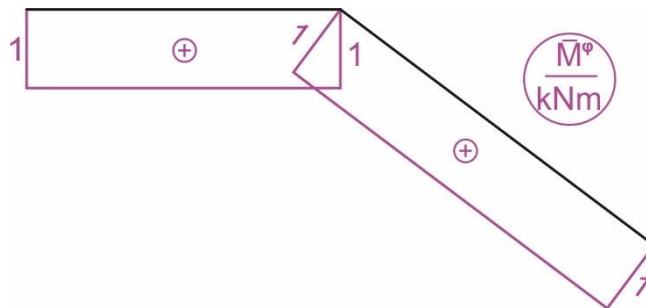
$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{H}_A^\varphi = 0 \text{ kN},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow \bar{R}_A^\varphi = 0 \text{ kN},$$

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow \bar{M}_A^\varphi - 1 \text{ kNm} = 0 \Rightarrow \bar{M}_A^\varphi = 1 \text{ kNm}.$$

Obliczenie momentów zginających

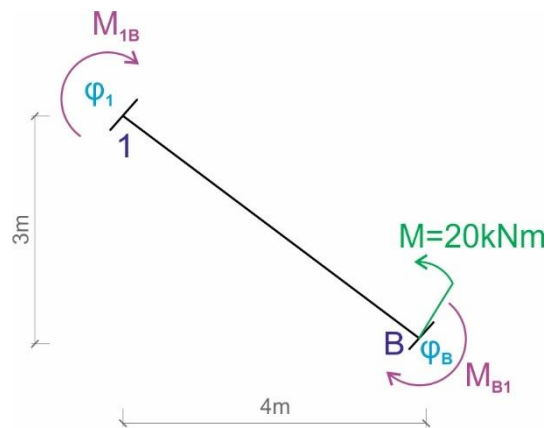
$$\bar{M}_B^\varphi = \bar{M}_1^\varphi = \bar{M}_2^\varphi = \bar{M}_A^\varphi = 1 \text{ kNm},$$



Rys. 3.58. Wykresy momentów zginających w układzie podstawowym od obciążenia danego

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_\varphi = \int \frac{\bar{M}^\varphi \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^\varphi \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{1}{2EI} \frac{4 \text{ m}}{6} (1 \cdot (-6,601 \text{ kNm}) + 4 \cdot 1 \text{ kNm} \cdot 2,312 \text{ kNm} + 1 \text{ kNm} \cdot (-8,775 \text{ kNm})) + \frac{1}{EI} \frac{5 \text{ m}}{6} (1 \text{ kNm} \cdot (-8,775 \text{ kNm}) + 4 \cdot 1 \text{ kNm} \cdot \frac{(-8,775+20) \text{ kNm}}{2} + 1 \text{ kNm} \cdot 20 \text{ kNm}) + \frac{0 \cdot (-10,543 \text{ kN})}{4 \frac{EI}{\text{m}^3}} \Rightarrow \Delta_\varphi = 26,0198 \frac{\text{kNm}^2}{EI}.$$

3.3.4.2. Obliczenie przemieszczenia z wykorzystaniem Metody Przemieszczeń



Rys. 3.59. Pręt 1-B jako typ pręta sztywno sztywnego

Przyjęto zmieniony typ pręta 1-B, dla którego znany jest rzeczywisty kąt obrotu $\varphi_1 = 2,0424 \frac{\text{kNm}^2}{EI}$ oraz przemieszczenie liniowe $\delta_l = -2,6358 \frac{\text{kNm}^3}{EI}$ policzone z wykorzystaniem metody przemieszczeń. Znany jest również moment brzegowy $M_{1B} = -8,775 \text{ kNm}$.

Dla zmienionego typu pręta 1-B wzór transformacyjny przyjmuje postać:

$$M_{1B} = \frac{EI}{5m} (4 \cdot \varphi_{1B} + 2 \cdot \varphi_{B1} - 6 \cdot \psi_{1B}) + M_{B1}^0 =$$

$$\frac{EI}{5m} \left(4 \cdot 2,0424 \frac{\text{kNm}^2}{EI} + 2 \cdot \varphi_{B1} - 6 \cdot 0 \cdot 2,0424 \frac{\text{kNm}^2}{EI} \right) = -8,775 \text{ kNm},$$

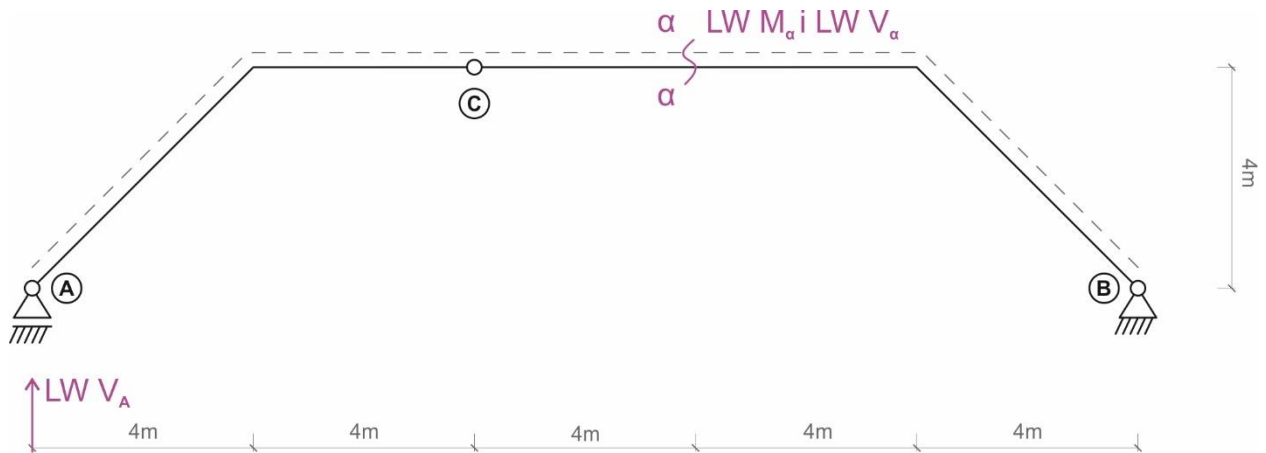
$$2 \cdot \varphi_{B1} = -43,875 \text{ kNm} - 8,1696 \text{ kNm} \Rightarrow \varphi_{B1} = -26,0223 \frac{\text{kNm}^2}{EI}$$

(znak „-” informuje, że obrót nastąpił w lewą stronę).

4. PRZYKŁADY - LINIE WPŁYWU

4.1. RAMA

Dla układu ramowego izostaticznego o schemacie jak na rysunku 4.1. należy sporządzić linie wpływu zaznaczonych 3 wielkości statycznych metodą statyczną i kinematyczną.

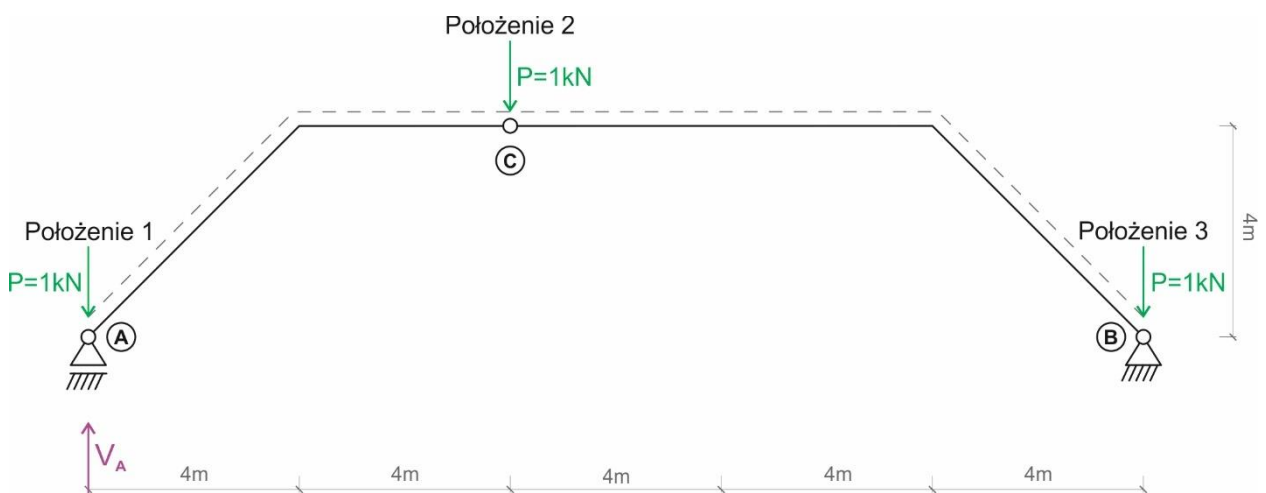


Rys. 4.1 Schemat statyczny ramy

4.1.1. Metoda statyczna

4.1.1.1. Sporządzenie linii wpływu V_A

Linia wpływu będzie składała się z dwóch odcinków prostych co odpowiada dwóm tarczom, z których zbudowany jest układ ramowy. Dla każdej z tarcz przykładane są dwie siły jednostkowe w punktach charakterystycznych (rys. 4.2). Dla każdego położenia siły jednostkowej obliczana jest (oddzielny przypadek) szukana wielkość statyczna.



Rys. 4.2. Ustawienie siły jednostkowej

Położenie 1:

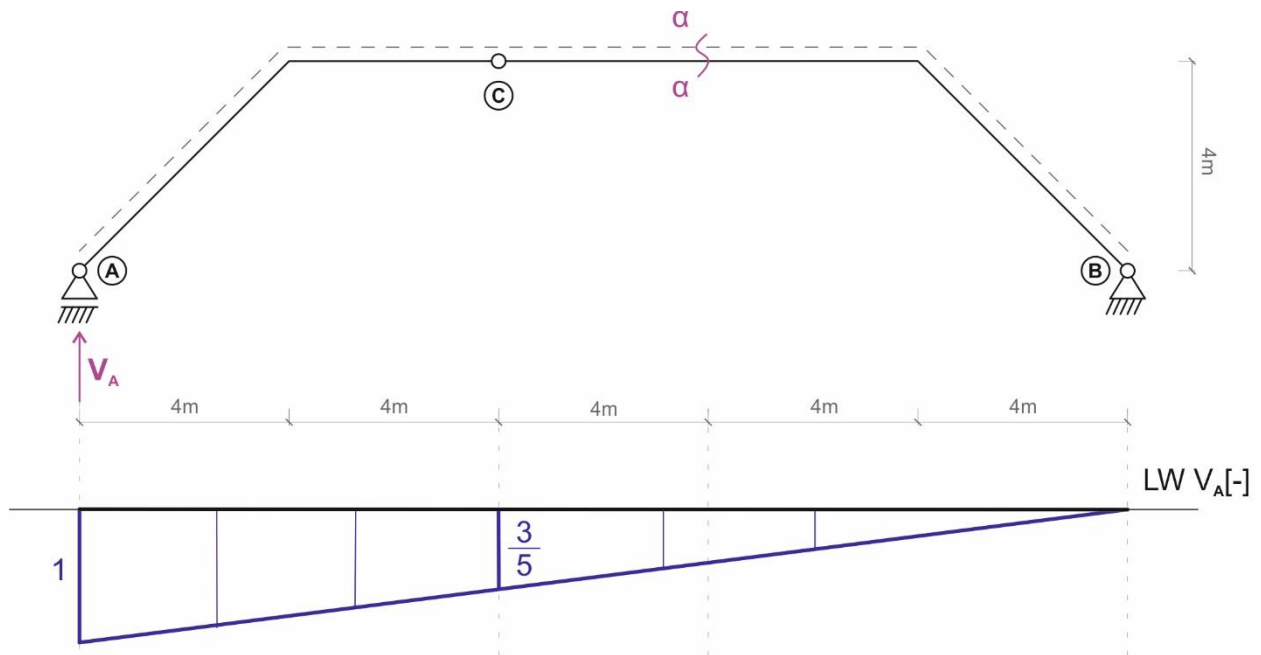
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot 20 \text{ m} - 1 \text{ kN} \cdot 20 \text{ m} \Rightarrow V_A = 1 \text{ kN}.$$

Położenie 2:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot 20 \text{ m} - 1 \text{ kN} \cdot 12 \text{ m} \Rightarrow V_A = \frac{3}{5} \text{ kN}.$$

Położenie 3:

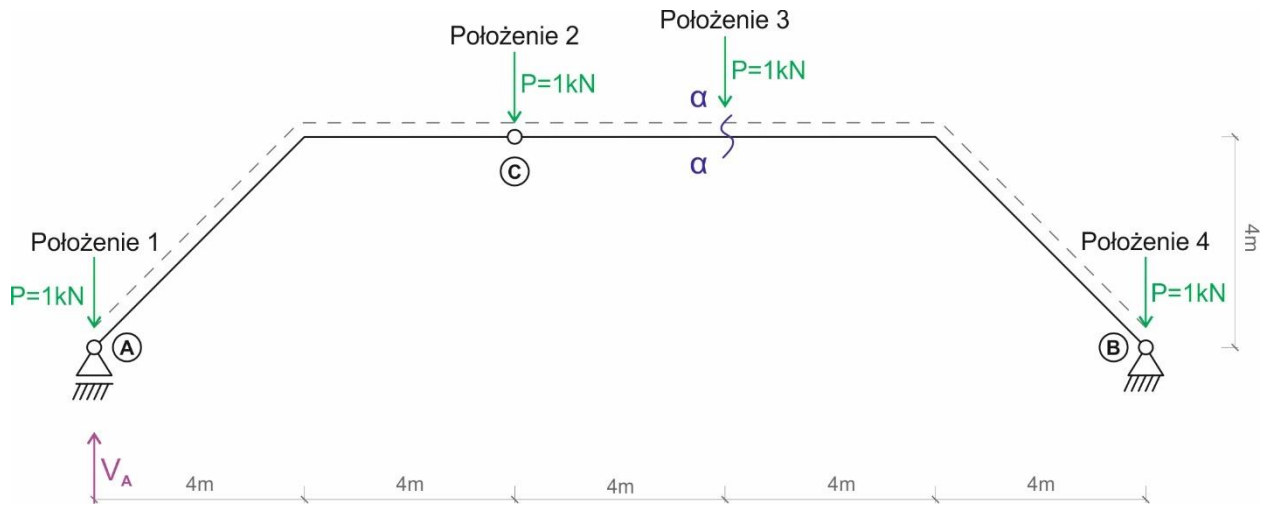
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A \cdot 20 \text{ m} = 0 \Rightarrow V_A = 0.$$



Rys. 4.3. Lina wpływu LWV_A

4.1.1.2. Sporządzenie linii wpływu M_α

Linia wpływu będzie składała się trzech odcinków prostych co odpowiada trzem tarczom, z których zbudowany jest układ ramowy. Dla każdej z tarcz przykładane są dwie siły jednostkowe w punktach charakterystycznych (rys. 4.4). Dla każdego położenia siły jednostkowej obliczana jest (oddzielny przypadek) szukana wielkość statyczna.



Rys. 4.4. Ustawienie siły jednostkowej

Położenie 1:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A = 1 \text{ kN},$$

$$\sum M_C^l = 0 \Rightarrow H_A = 0,$$

$$M_\alpha = V_A \cdot 12 \text{ m} - H_A \cdot 4 \text{ m} - 1 \text{ kN} \cdot 12 \text{ m} \Rightarrow \mathbf{M_\alpha = 0}.$$

Położenie 2:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A = \frac{3}{5} \text{ kN},$$

$$\sum M_C^l = 0 \Rightarrow V_A \cdot 8 \text{ m} - H_A \cdot 4 \text{ m} = 0 \Rightarrow \frac{3}{5} \text{ kN} \cdot 8 \text{ m} - H_A \cdot 4 \text{ m} = 0 \Rightarrow H_A = \frac{6}{5} \text{ kN},$$

$$M_\alpha = V_A \cdot 12 \text{ m} - H_A \cdot 3 \text{ m} - 1 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} = \frac{3}{5} \text{ kN} \cdot 12 \text{ m} - \frac{6}{5} \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} - 1 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} \Rightarrow$$

$$\mathbf{M_\alpha = -\frac{8}{5} \text{ kNm}.$$

Położenie 3:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A = \frac{2}{5} \text{ kN},$$

$$\sum M_C^l = 0 \Rightarrow V_A \cdot 8 \text{ m} - H_A \cdot 4 \text{ m} = 0 \Rightarrow \frac{2}{5} \text{ kN} \cdot 8 \text{ m} - H_A \cdot 4 \text{ m} = 0 \Rightarrow H_A = \frac{4}{5} \text{ kN},$$

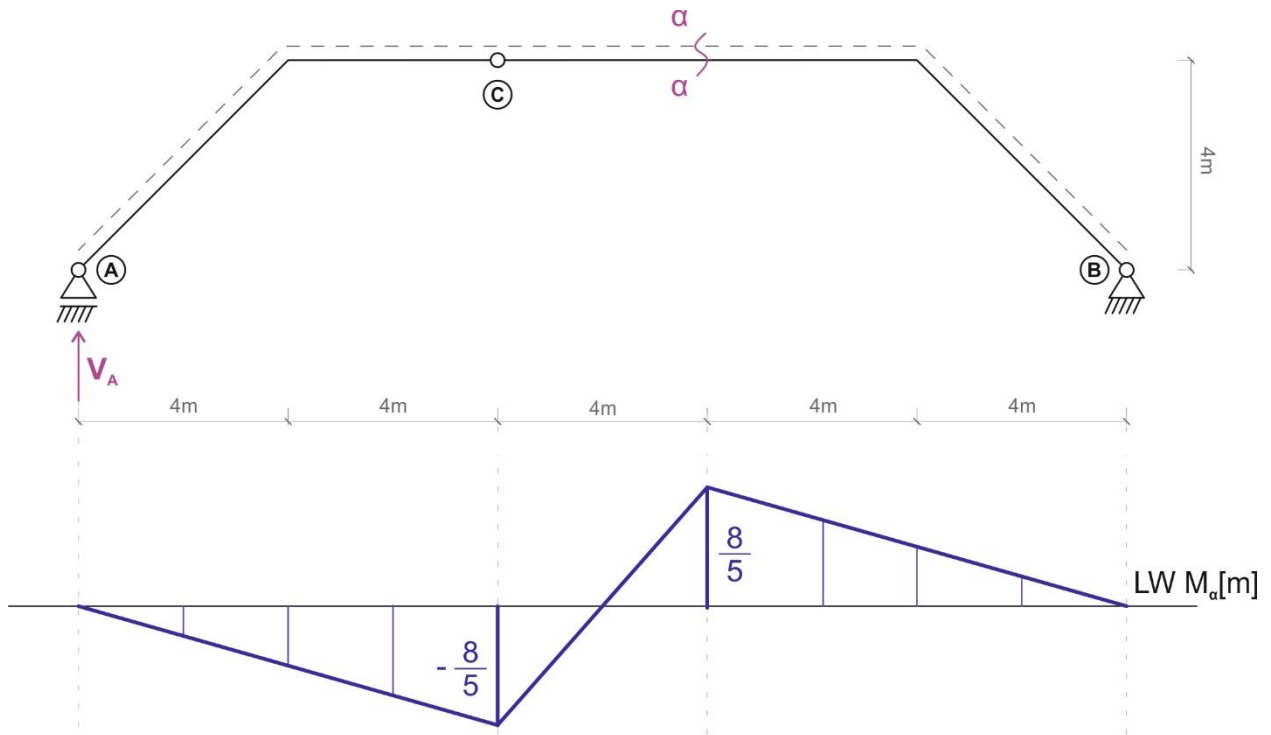
$$M_\alpha = V_A \cdot 12 \text{ m} - H_A \cdot 4 \text{ m} = \frac{2}{5} \text{ kN} \cdot 12 \text{ m} - \frac{4}{5} \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} \Rightarrow \mathbf{M_\alpha = \frac{8}{5} \text{ kNm}.$$

Położenie 4:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A = 0,$$

$$\sum M_C^l = 0 \Rightarrow H_A = 0,$$

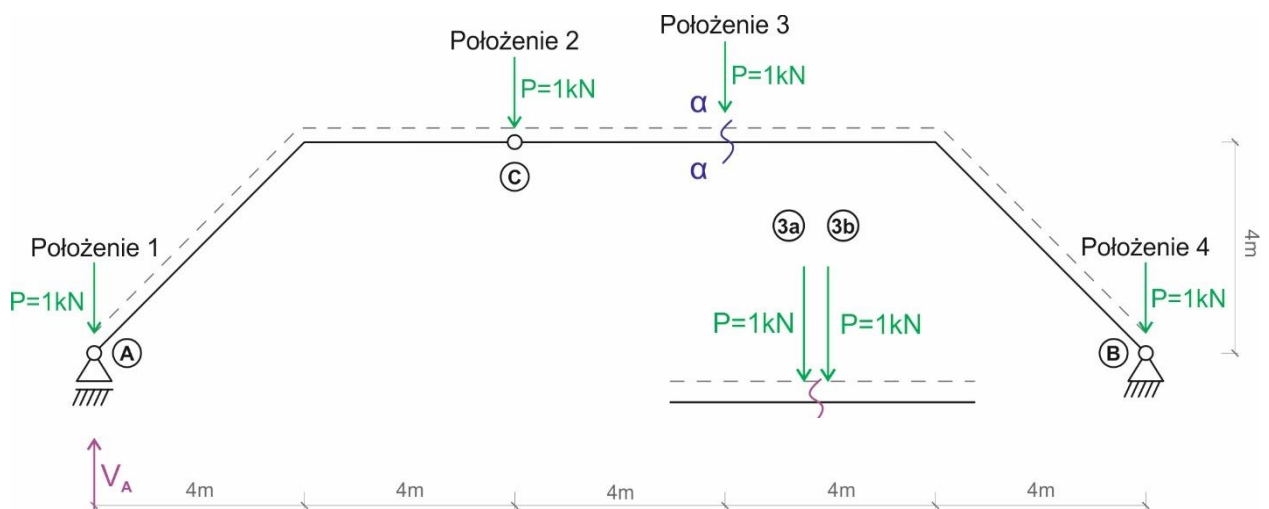
$$\mathbf{M_\alpha = 0}.$$



Rys. 4.5. Lina wpływu LWM_α w m

4.1.1.3. Sporządzenie linii wpływu V_α

Linia wpływu będzie składała się trzech odcinków prostych co odpowiada trzem tarczom, z których zbudowany jest układ ramowy. Dla każdej z tarcz przykładane są dwie siły jednostkowe w punktach charakterystycznych (rys. 4.6). Dla każdego położenia siły jednostkowej obliczana jest (oddzielny przypadek) szukana wielkość statyczna.



Rys. 4.6. Ustawienie siły jednostkowej

Położenie 1:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A = 1 \text{ kN},$$

$$V_\alpha = V_A - 1 \text{ kN} \Rightarrow V_\alpha = \mathbf{0}.$$

Położenie 2:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A = \frac{3}{5} \text{ kN},$$

$$V_\alpha = V_A - 1 \text{ kN} = \frac{3}{5} \text{ kN} - 1 \text{ kN} \Rightarrow V_\alpha = -\frac{2}{5} \text{ kN}.$$

Położenie 3a:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A = \frac{2}{5} \text{ kN},$$

$$V_\alpha = V_A - 1 \text{ kN} = \frac{2}{5} \text{ kN} - 1 \text{ kN} \Rightarrow V_\alpha = -\frac{3}{5} \text{ kN}.$$

Położenie 3b:

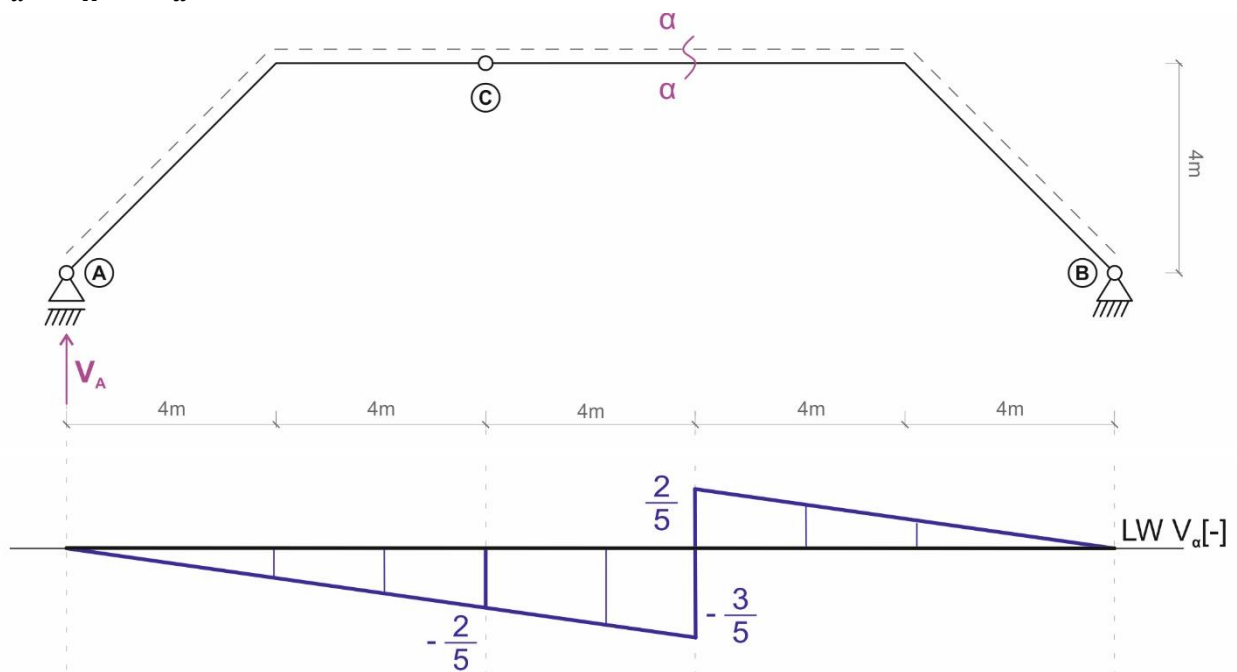
$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A = \frac{2}{5} \text{ kN},$$

$$V_\alpha = V_A \Rightarrow V_\alpha = \frac{2}{5} \text{ kN}.$$

Położenie 4:

$$\sum M_B = 0 \Rightarrow V_A = 0,$$

$$V_\alpha = V_A \Rightarrow V_\alpha = \mathbf{0}.$$



Rys. 4.7. Lina wpływu LWV_α

4.1.2. Metoda kinematyczna

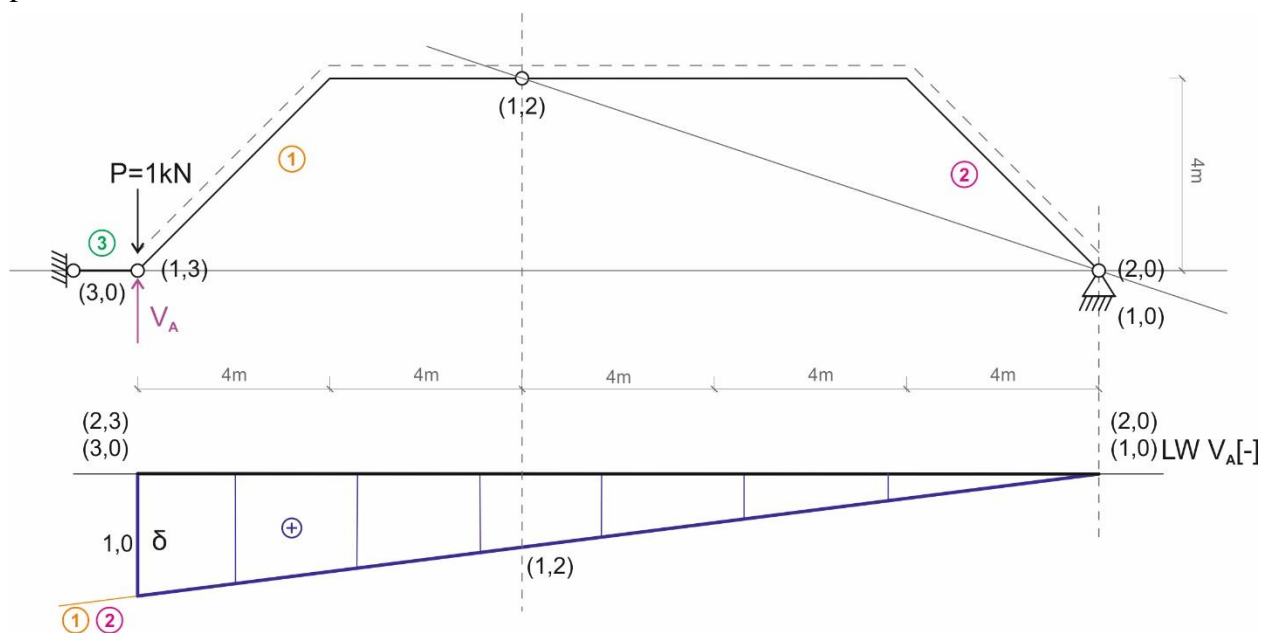
4.1.2.1. Sporządzenie linii wpływu V_A

Przecinamy więź odpowiadającą reakcji V_A zastępując ją siłą skupioną (rys. 4.8a). Układ statycznie wyznaczalny został zamieniony na *mechanizm* (układ o jednym stopniu swobody). Wyznaczamy *środki obrotu tarcz* między sobą a fundamentem. Środek obrotu tarczy 1 i 0 wyznaczamy wykorzystując fakt, że łącznikami między tarczami 1 i 0 są tarcze 2 i 3 (znane są środki obrotów (3,0), (3,1), (1,2) i (2,0)). W zapisie skrótowym: $(1_3^2 0) \Rightarrow (1,0)$ [por. SB1].

Rysujemy poziomą linię odniesienia, która odpowiada tarczy 0 (rys. 4.8b). Rzutujemy na nią środki obrotu tarcz względem ostoi ((1,0), (2,0), (3,0)). Nadajemy obrót jednej z tarcz (wybrano tarczę nr 2) i rysujemy prostą odpowiadającą obrotowi tej tarczy przechodzącą przez środek obrotu (2,0). Aby narysować prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 1 rzutujemy na prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 2 biegun chwilowego obrotu (1,2). Rysujemy prostą przechodzącą przez (1,0) i (1,2) co odpowiada obrotowi tarczy 1.

Rysujemy odcinki prostych odpowiadających torowi przemieszczania się siły jednostkowej, tj. odcinek między środkami obrotu (1,3) a (1,2) oraz (1,2) a (2,0). Otrzymaliśmy wykres, który ma kształt szukanej linii wpływu reakcji V_A (jest to wykres przesunięć toru siły jednostkowej, którego rzędnymi są rzuty przesunięć poszczególnych punktów na kierunek siły jednostkowej).

Aby określić rzędne i znaki linii wpływu zapisujemy równanie prac przygotowanych dla wybranego ustawienia siły jednostkowej. W rozpatrywanym przypadku siłą jednostkowa została ustawiona w punkcie (1,3). Pracę wykonuje siła jednostkowa P oraz reakcja V_A na przemieszczeniu δ .



Rys. 4.8. a) Mechanizm odpowiadający wielkości reakcji V_A b) Lina wpływu $LW V_A$

Równanie prac przygotowanych:

$$-V_A \cdot \delta + P \cdot \delta = 0 \Rightarrow V_A = 1 \text{ kN.}$$

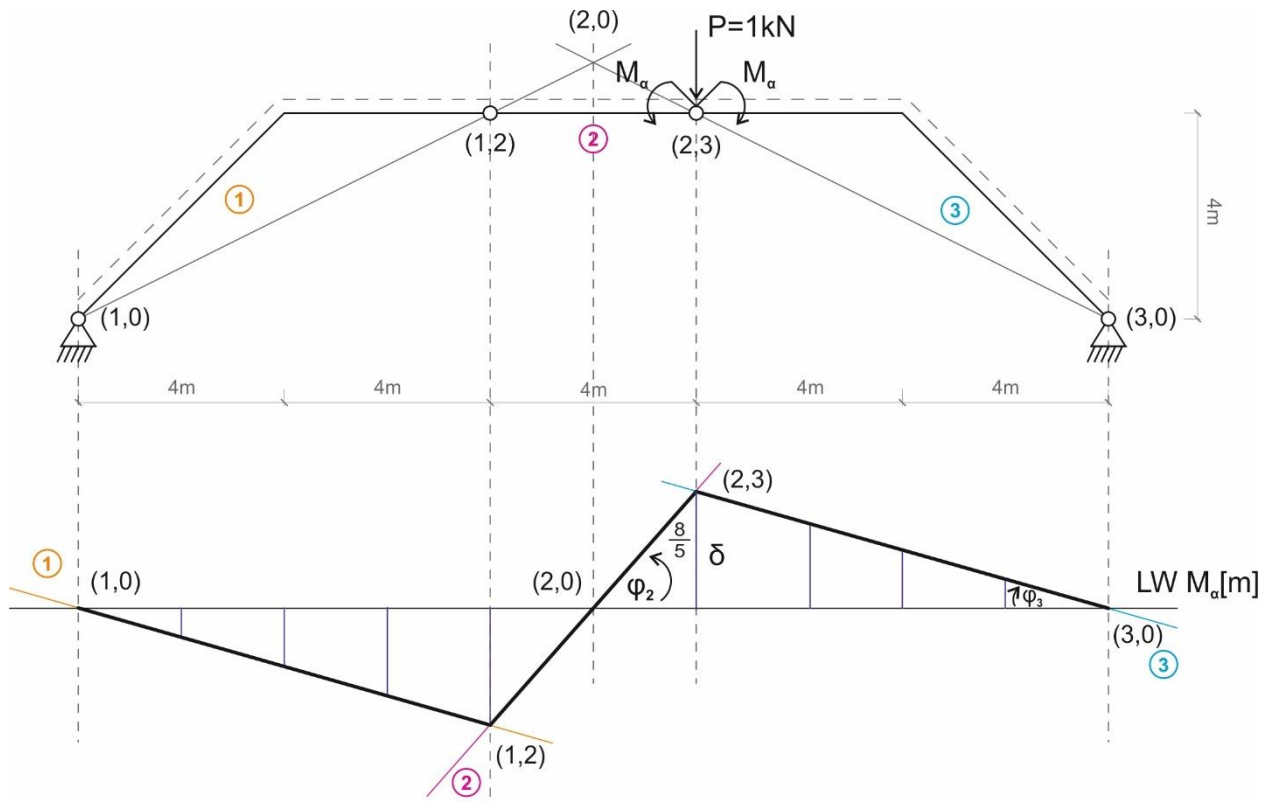
4.1.2.2. Sporządzenie linii wpływu M_α

Przecinamy więź odpowiadającą momentowi M_α (wstawiamy przegub w przekroju α) i zastępując ją momentami (rys. 4.9a). Układ statycznie wyznaczalny został zamieniony na mechanizm. Wyznaczamy środki obrotu tarcz między sobą a fundamentem. Środek obrotu tarczy (1,0) oraz (3,0) są znane. Wiemy, gdzie znajdują się środki obrotu (1,2) oraz (2,3). Wyznaczamy środek obrotu (2,0) wykorzystując fakt, że łącznikami między tarczami 2 i 0 są tarcze 1 i 3, w zapisie skrótowym: $(2 \frac{1}{3} 0) \Rightarrow (2,0)$ [por. SB1].

Rysujemy poziomą linię odniesienia, która odpowiada tarczy 0 (rys. 4.9b). Rzutujemy na nią środki obrotu tarcz względem ostoi ((1,0), (2,0), (3,0)). Nadajemy obrót jednej z tarcz (wybrano tarczę 1) i rysujemy prostą odpowiadającą obrotowi tej tarczy przechodzącą przez środek obrotu (1,0) o dowolny kąt. Aby narysować prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 2, rzutujemy na prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 1 biegun chwilowego obrotu (1,2). Rysujemy prostą przechodzącą przez (2,0) i (1,2) co odpowiada obrotowi tarczy 2. Następnie, aby narysować prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 3, rzutujemy na prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 2 biegun chwilowego obrotu (2,3). Rysujemy prostą przechodzącą przez (2,3) i (3,0) co odpowiada obrotowi tarczy 3.

Rysujemy odcinki prostych odpowiadających torowi przemieszczania się siły jednostkowej, tj. odcinek między środkami obrotu (1,0) a (1,2), (1,2) a (2,3) oraz (2,3) a (3,0). Otrzymaliśmy wykres, który ma kształt szukanej linii wpływu reakcji M_α (jest to wykres przesunięć toru siły jednostkowej, którego rzędnymi są rzuty przesunięć poszczególnych punktów na kierunek siły jednostkowej).

Aby określić rzędne i znaki linii wpływu zapisujemy równanie prac przygotowanych dla wybranego ustawienia siły jednostkowej. W rozpatrywanym przypadku siłą jednostkowa została ustawiona w punkcie (2,3). Pracę wykonują momenty M_α na kontaktach obrotu φ_2 i φ_3 oraz siła jednostkowa P na przesunięciu punktu jej przyłożenia δ .



Rys. 4.9. a) Mechanizm odpowiadający wielkości reakcji M_α b) Lina wpływu LW M_α

Równanie prac przygotowanych:

$$M_\alpha \cdot \varphi_2 + M_\alpha \cdot \varphi_3 - P \cdot \delta = 0,$$

gdzie: $\varphi_2 = \frac{\delta}{2m}$, $\varphi_3 = \frac{\delta}{8m}$, stąd:

$$M_\alpha \cdot \frac{\delta}{2m} + M_\alpha \cdot \frac{\delta}{8m} - P \cdot \delta = 0 \Rightarrow M_\alpha = \frac{8}{5} m.$$

4.1.2.2. Sporządzenie linii wpływu V_α

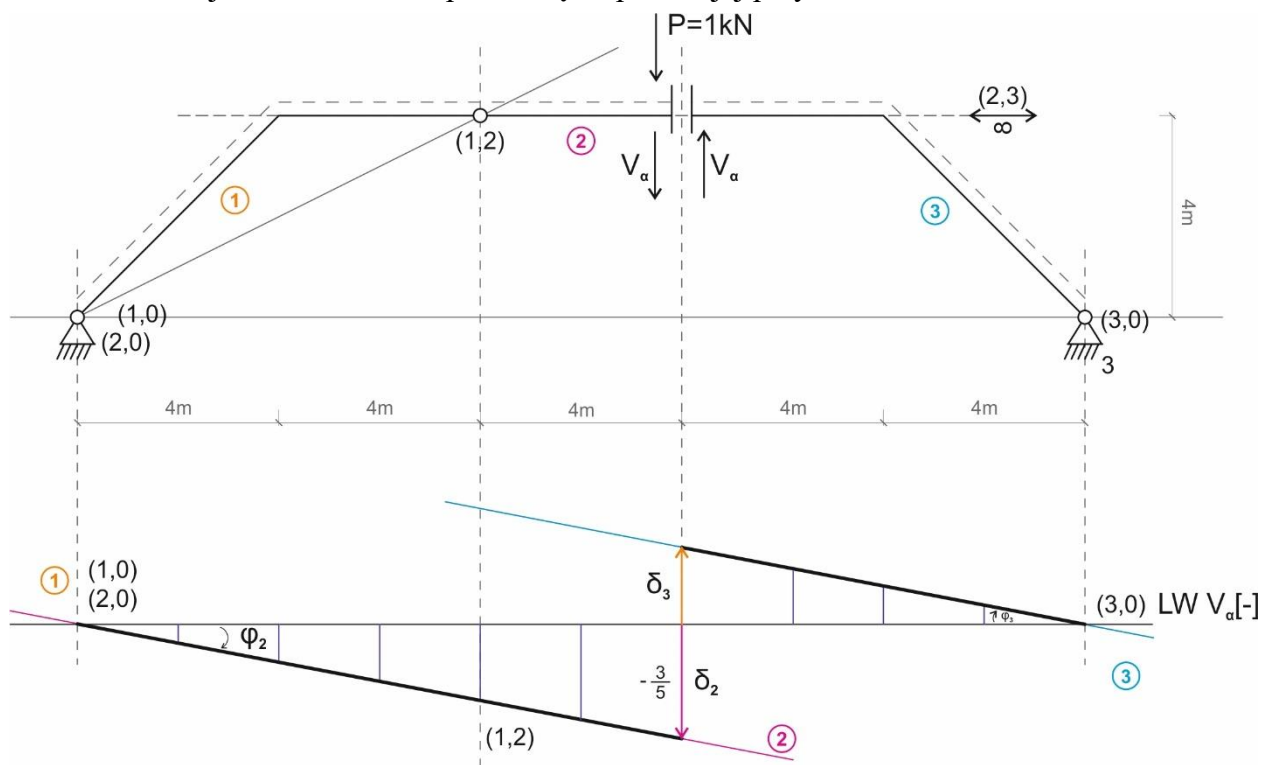
Przecinamy więź w przekroju α odpowiadającą sile tnącej (wstawiamy łyżwę w przekroju α) i zastępujemy ją siłami V_α (rys. 4.10a). Układ statycznie wyznaczalny został zamieniony na mechanizm. Wyznaczamy środki obrotu tarcz między sobą a fundamentem. Środek obrotu tarczy (1,0) oraz (3,0) są znane. Wiemy, gdzie znajdują się środki obrotu (1,2). Wyznaczamy środek chwilowego obrotu tarcz (2,3) z wykorzystaniem twierdzenia o trzech tarczach (leży on w nieskończoności na prostej prostopadłej do kierunku działania siły tnącej). Wyznaczamy środek obrotu (2,0) wykorzystując fakt, że łącznikami między tarczami 2 i 0 są tarcze 1 i 3, w zapisie skrótowym: $(2_3^1 0) \Rightarrow (2,0)$ [por. SB1].

Rysujemy poziomą linię odniesienia, która odpowiada terczy 0 (rys. 4.10b). Rzutujemy na nią środki obrotu tarcz względem ostoi ((1,0), (2,0), (3,0)). Nadajemy obrót jednej z tarcz (wybrano tarczę nr 1) i rysujemy prostą odpowiadającą obrotowi tej tarczy przechodzącą przez środek obrotu

(1,0) o dowolny kąt. Aby narysować prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 2, rzutujemy na prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 1 biegun chwilowego obrotu (1,2). Rysujemy prostą przechodzącą przez (2,0) i (1,2) co odpowiada obrotowi tarczy 2 ((2,0) i (1,2) leżą na prostej odpowiadającej obrotowi tarczy 1, stąd obrót tarcz i 1 2 jest o ten sam kąt). Następnie, rysujemy prostą równoległą do prostej 2, ale przechodzącą przez środek obrotu (3,0) (proste 2 i 3 są względem siebie równoległe, ponieważ ich punkt wspólny leży w nieskończoności)

Rysujemy odcinki prostych odpowiadających torowi przemieszczania się siły jednostkowej, tj. odcinek między środkami obrotu (1,0) a (1,2) na prostej 1, (1,2) a α na prostej 2, oraz między α a (3,0) na prostej 3. Otrzymaliśmy wykres, który ma kształt szukanej linii wpływu reakcji V_α (jest to wykres przesunięć toru siły jednostkowej, którego rzędnymi są rzuty przesunięć poszczególnych punktów na kierunek siły jednostkowej).

Aby określić rzędne i znaki linii wpływu zapisujemy równanie prac przygotowanych dla wybranego ustawienia siły jednostkowej. W rozpatrywanym przypadku siła jednostkowa została ustawiona w nieskończoności blisko przekroju α na tarczy 2. Pracę wykonują siły V_α na przesunięciu δ_2 i δ_3 oraz siła jednostkowa P na przesunięciu punktu jej przyłożenia δ_2 .



Rys. 4.10. a) Mechanizm odpowiadający wielkości reakcji V_α b) Lina wpływu LW V_α

Równanie prac przygotowanych:

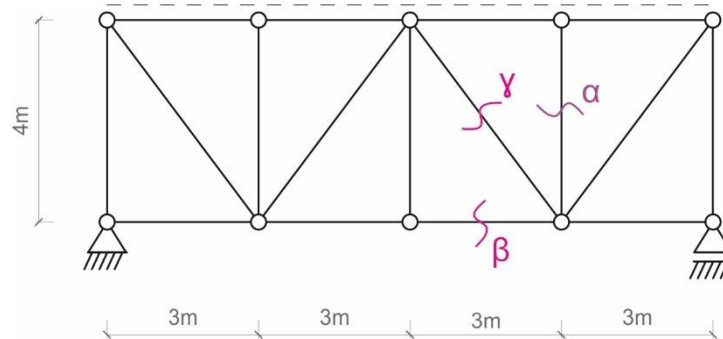
$$V_\alpha \cdot \delta_2 + V_\alpha \cdot \delta_3 + P \cdot \delta_2 = 0,$$

gdzie: $\varphi_2 = \frac{\delta_2}{12 m}$, $\varphi_2 = \frac{\delta_3}{8 m}$, $\varphi_2 = \varphi_3$, stąd:

$$V_\alpha \cdot \delta_2 + V_\alpha \cdot \frac{8}{12} \delta_2 + P \cdot \delta_2 = 0 \Rightarrow V_\alpha = -\frac{3}{5}.$$

4.2. KRATOWNICA

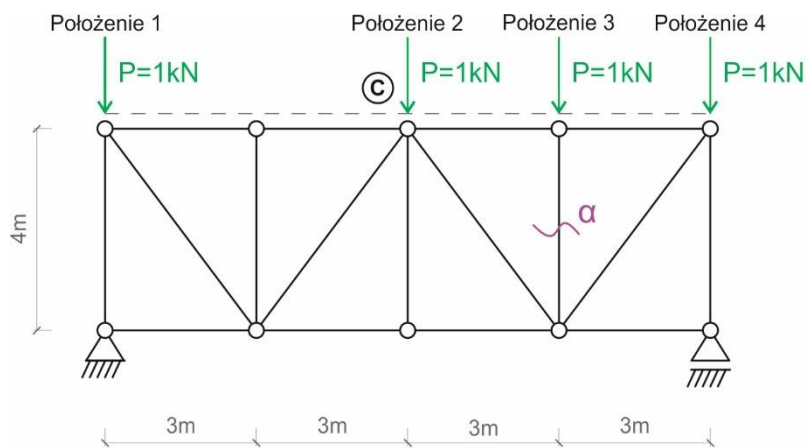
Dla kratownicy płaskiej o schemacie jak na rysunku 4.11. należy sporządzić linie wpływu zaznaczonych trzech wielkości statycznych metodą statyczną i kinematyczną.



Rys. 4.11. Schemat statyczny kratownicy

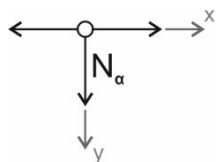
4.2.1. Metoda statyczna

4.2.1.1. Sporządzenie linii wpływu siły N_α



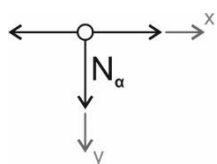
Rys. 4.12. Ustawienie siły jednostkowej

Położenie 1:



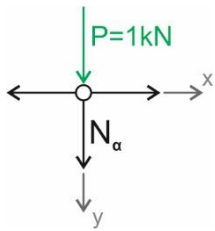
$$\sum Y_C = 0 \Rightarrow N_\alpha = 0.$$

Położenie 2:



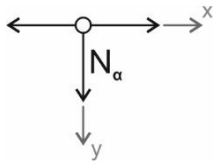
$$\sum Y_C = 0 \Rightarrow N_\alpha = 0.$$

Położenie 3:

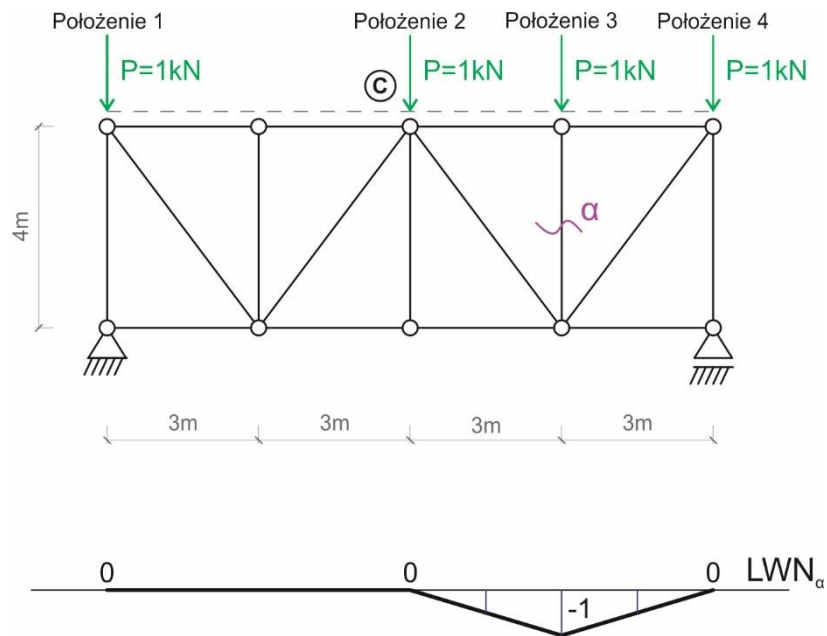


$$\sum Y_C = 0 \Rightarrow N_\alpha + 1 = 0 \Rightarrow N_\alpha = -1.$$

Położenie 4:

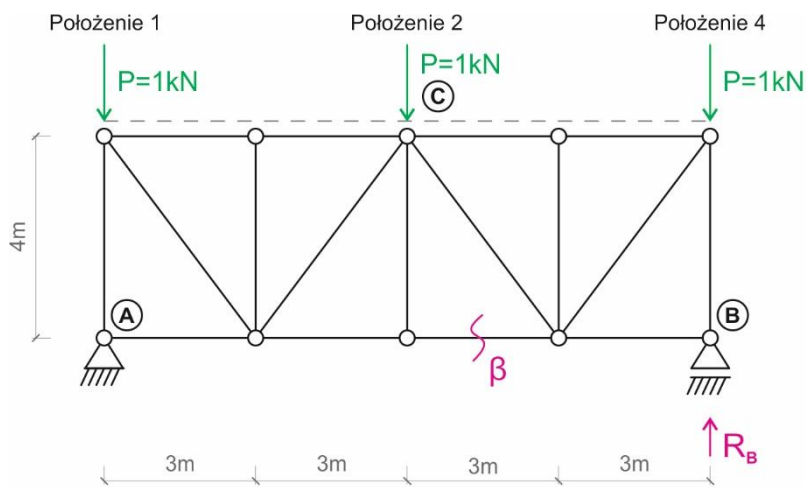


$$\sum Y_C = 0 \Rightarrow N_\alpha = 0.$$



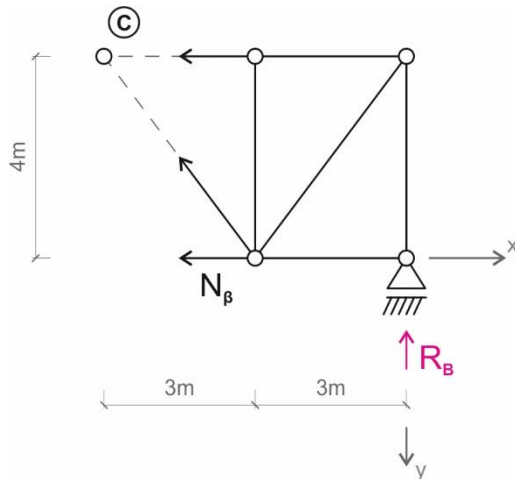
Rys. 4.13. Lina wpływu LWN_α

4.2.1.2. Sporządzenie linii wpływu siły N_β



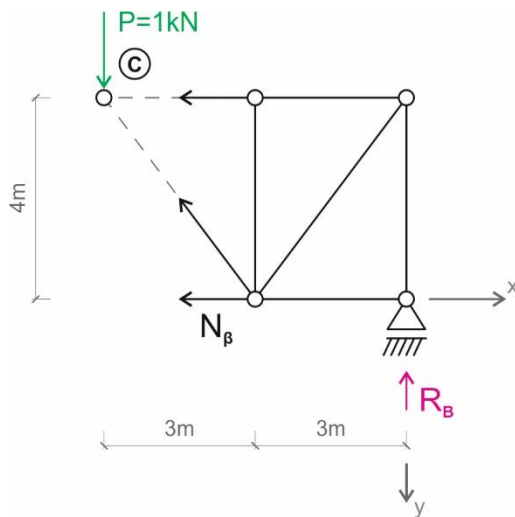
Rys. 4.14. Ustawienie siły jednostkowej

Położenie 1:



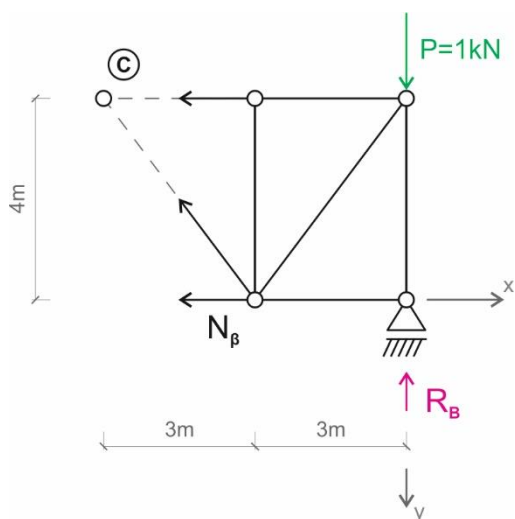
$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow R_B \cdot 12 \text{ m} - 1 \cdot 0 \text{ m} = 0 \Rightarrow R_B = 0, \\ \sum M_C^P = 0 &\Rightarrow N_\beta \cdot 4 \text{ m} - R_B \cdot 6 \text{ m} = 0 \Rightarrow N_\beta = 0. \end{aligned}$$

Położenie 2:

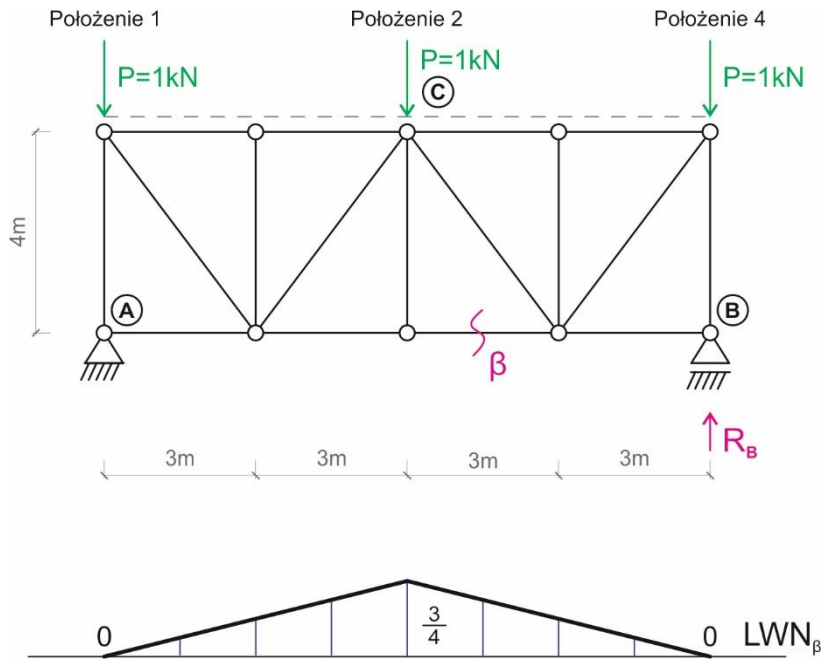


$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow R_B \cdot 12 \text{ m} - 1 \cdot 6 \text{ m} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{1}{2} \text{ kN}, \\ \sum M_C^P = 0 &\Rightarrow N_\beta \cdot 4 \text{ m} - R_B \cdot 6 \text{ m} = 0 \Rightarrow \\ &N_\beta \cdot 4 \text{ m} - \frac{1}{2} \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} = 0 \Rightarrow \\ &N_\beta = \frac{3}{4} \text{ kN}. \end{aligned}$$

Położenie 3:

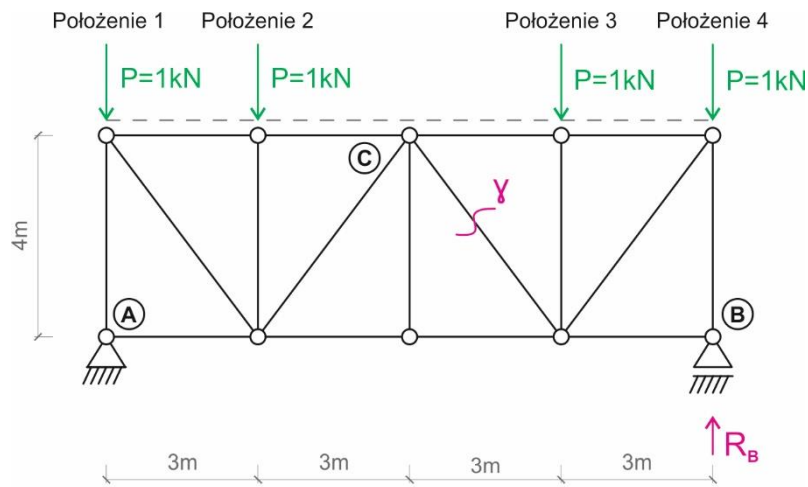


$$\begin{aligned} \sum M_A = 0 &\Rightarrow R_B \cdot 12 \text{ m} - 1 \cdot 12 \text{ m} = 0 \Rightarrow R_B = 1, \\ \sum M_C^P = 0 &\Rightarrow N_\beta \cdot 4 \text{ m} - R_B \cdot 6 \text{ m} + P \cdot 6 \text{ m} = 0 \Rightarrow \\ &N_\beta \cdot 4 \text{ m} - 1 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} + 1 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} = 0 \Rightarrow \\ &N_\beta = 0. \end{aligned}$$

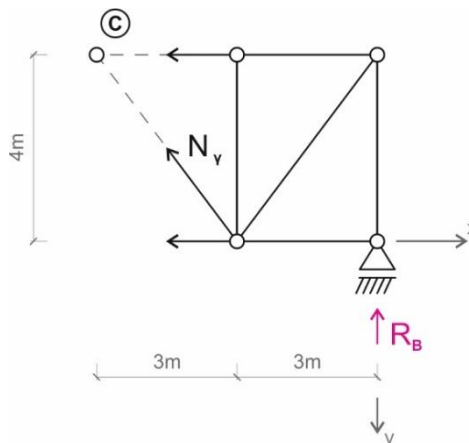


Rys. 3.15. Lina wpływu LWN_{β}

4.2.1.3. Sporządzenie linii wpływu siły N_{γ}



Rys. 4.16. Ustawienie siły jednostkowej

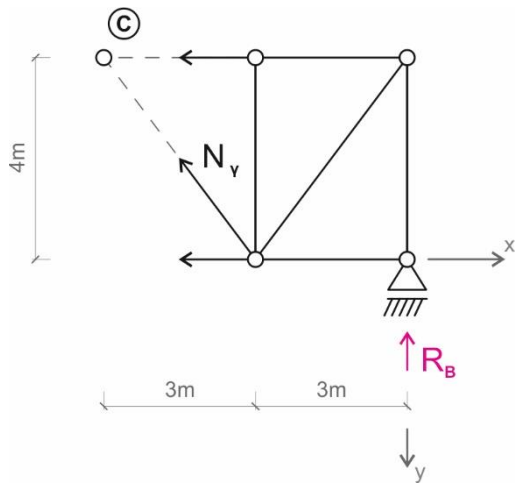


Położenie 1:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \cdot 12\text{ m} - 1 \cdot 0\text{ m} = 0 \Rightarrow R_B = 0,$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_{\gamma} \cdot \cos\varphi + R_B = 0 \Rightarrow N_{\gamma} = 0.$$

Położenie 2:

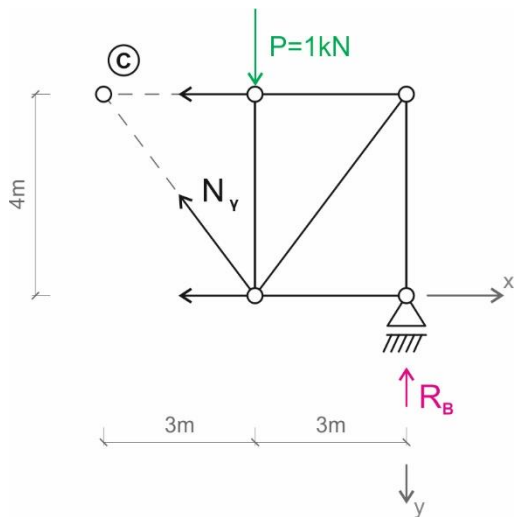


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \cdot 12 \text{ m} - 1 \cdot 3 \text{ m} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{1}{4},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_Y \cdot \cos\varphi + R_B = 0 \Rightarrow N_Y \cdot \frac{4}{5} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow$$

$$N_Y = -\frac{5}{16}.$$

Położenie 3:

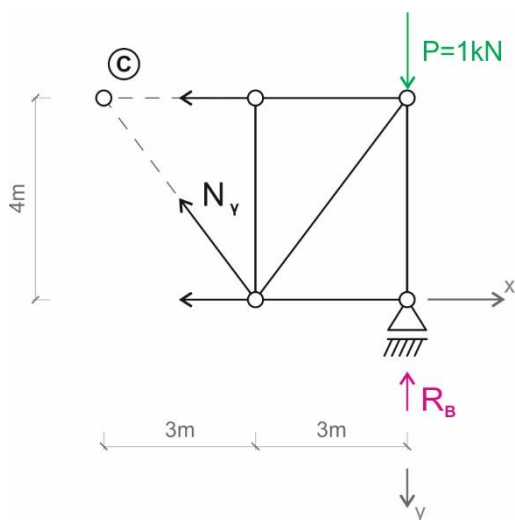


$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \cdot 12 \text{ m} - 1 \text{ kN} \cdot 9 \text{ m} = 0 \Rightarrow R_B = \frac{3}{4},$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_Y \cdot \cos\varphi + R_B - 1 = 0 \Rightarrow$$

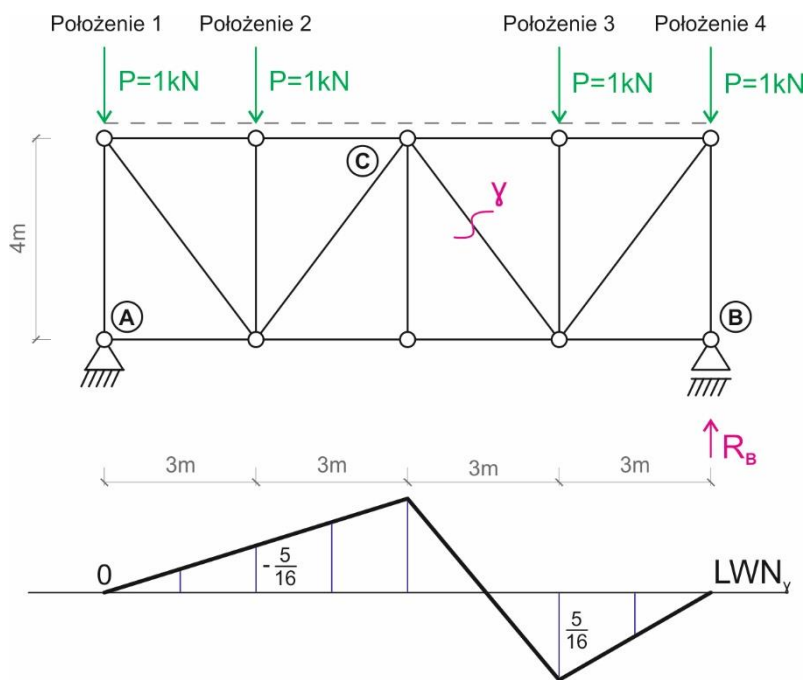
$$N_Y \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{4} - 1 = 0 \Rightarrow N_Y = \frac{5}{16}.$$

Położenie 4:



$$\sum M_A = 0 \Rightarrow R_B \cdot 12 \text{ m} - 1 \cdot 12 \text{ m} = 0 \Rightarrow R_B = 1,$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow N_Y \cdot \cos\varphi + R_B - 1 = 0 \Rightarrow N_Y \cdot \frac{4}{5} + 1 - 1 = 0 \Rightarrow N_Y$$



Rys. 4.17. Lina wpływu LWN_y

4.2.2. Metoda kinematyczna

4.2.2.1. Sporządzenie linii wpływu N_α

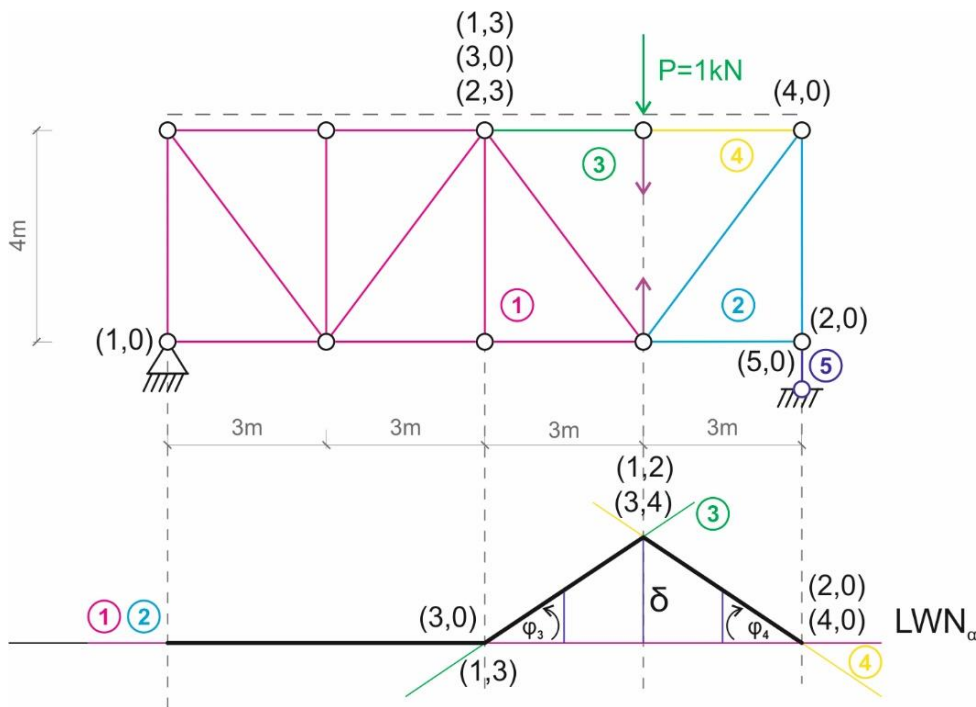
Pręt α zastępujemy siłami N_α . Grupujemy pręty tworzące tarcze, numerujemy je (rys. 4.18a), opisujemy środki obrotu tarcz względem siebie i względem ostoi. Środek obrotu tarczy (1,0) oraz (5,0) są znane. Wiemy też, gdzie znajdują się środki obrotu (1,2), (1,3), (3,4), (4,2). Wyznaczamy środek chwilowego obrotu tarcz (2,0) wykorzystując fakt, że łącznikami między tarczami 2 i 0 są tarcze 1 i 5 zapisie skrótowym: $(2_5^1 0) \Rightarrow (2,0)$. Wyznaczamy środek chwilowego obrotu tarcz (2,3) wykorzystując fakt, że łącznikami między tarczami 2 i 3 są tarcze 1 i 4, w zapisie skrótowym: $(2_4^1 3) \Rightarrow (2,3)$. Wyznaczamy środek chwilowego obrotu tarcz (3,0) wykorzystując fakt, że łącznikami między tarczami 3 i 0 są tarcze 1 i 2, w zapisie skrótowym: $(3_2^1 0) \Rightarrow (3,0)$. Wyznaczamy środek chwilowego obrotu tarcz (4,0) wykorzystując fakt, że łącznikami między tarczami 4 i 0 są tarcze 2 i 3, w zapisie skrótowym: $(4_3^2 0) \Rightarrow (4,0)$ [por. SB1].

Rysujemy poziomą linię odniesienia, która odpowiada tarczy 0 (rys. 4.18b). Rzutujemy na nią środki obrotu tarcz względem ostoi ((1,0), (2,0), (3,0) i (4,0)). Nadajemy obrót jednej z tarcz (wybrano tarczę 3) i rysujemy prostą odpowiadającą obrotowi tej tarczy przechodzącą przez środek obrotu (3,0) o dowolny kąt. Aby narysować prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 1, rzutujemy na prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 3 biegun chwilowego obrotu (1,3). Rysujemy prostą przechodzącą przez (1,0) i (1,3) co odpowiada obrotowi tarczy 1 ((1,0) i (1,3) leżą na prostej odpowiadającej obrotowi tarczy 0, stąd wniosek, że tarcza 1 jest nieruchoma). Aby narysować prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 4, rzutujemy na prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 3 biegun chwilowego obrotu (3,4). Rysujemy prostą przechodzącą przez (4,0) i (3,4) co odpowiada

obrotowi tarczy 4. Aby narysować prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 2, rzutujemy na prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 1 biegun chwilowego obrotu (1,2). Rysujemy prostą przechodzącą przez (2,0) i (1,2) co odpowiada obrotowi tarczy 2 ((2,0) i (1,2) leżą na prostej odpowiadającej obrotowi tarczy 0, stąd wniosek, że tarcza 2 jest nieruchoma).

Rysujemy odcinki prostych odpowiadających torowi przemieszczania się siły jednostkowej, tj. odcinek między środkami obrotu (1,0) a (1,3) na prostej 1, (1,3) a (3,4) na prostej 3, oraz między (3,4) a (4,0) na prostej 4. Otrzymaliśmy wykres, który ma kształt szukanej linii wpływu reakcji N_α .

Aby określić rzędne i znaki linii wpływu zapisujemy równanie prac przygotowanych dla wybranego ustawienia siły jednostkowej. W rozpatrywanym przypadku siłą jednostkowa została ustawiona w punkcie (3,4). Pracę wykonują siły N_α działająca na tarczy 3 na przesunięciu δ oraz N_α działająca na tarczy 1 na przesunięciu zerowym oraz siła jednostkowa P na przesunięciu punktu jej przyłożenia, tj. δ .



Rys. 4.18. a) Mechanizm odpowiadający wielkości reakcji N_α b) Lina wpływu $LWN_\alpha[-]$

Równanie prac przygotowanych

$$N_\alpha \cdot \delta + P \cdot \delta = 0 \Rightarrow N_\alpha = -1 \text{ kN.}$$

4.2.2.2. Sporządzenie linii wpływu N_β

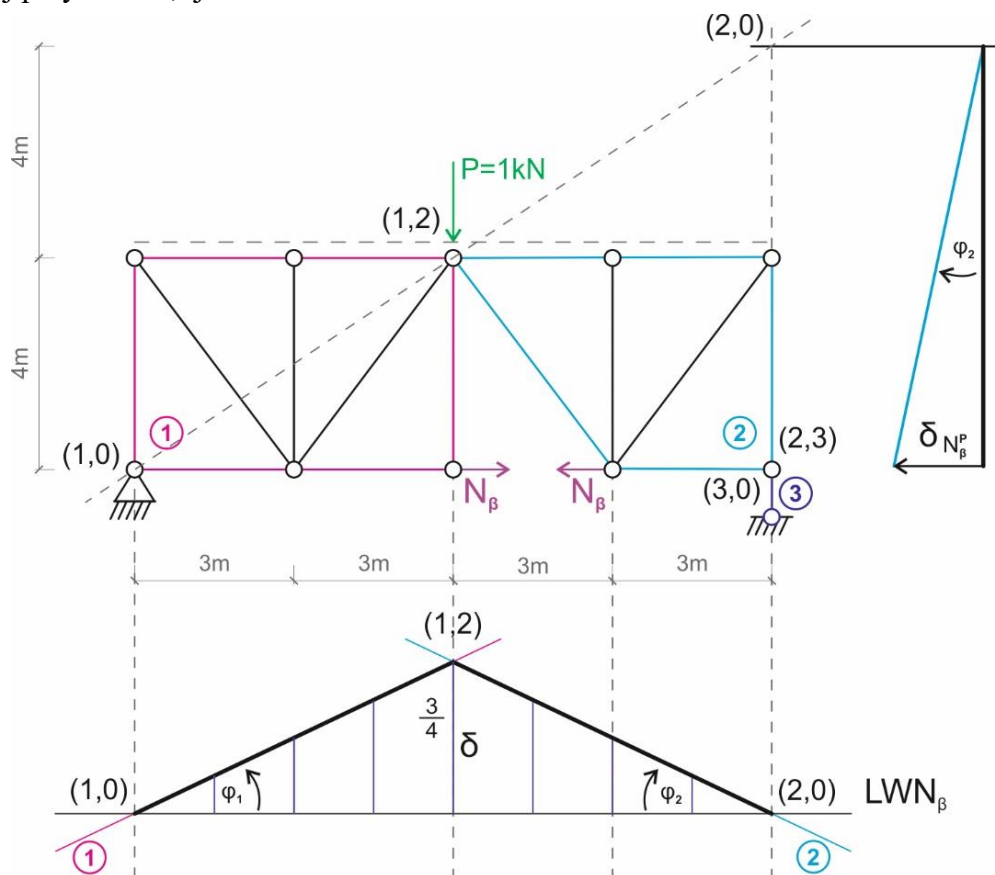
Pręt β zastępujemy siłami N_β . Grupujemy pręty tworzące tarcze, numerujemy je (rys. 4.19a), opisujemy środki obrotu tarcz względem siebie i względem ostoi. Środek obrotu tarczy (1,0) oraz (3,0) są znane. Wiemy też, gdzie znajdują się środki obrotu (1,2), (2,3), (3,0). Wyznaczamy środek

chwilowego obrotu tarcz (2,0) wykorzystując fakt, że łącznikami między tarczami 2 i 0 są tarcze 1 i 3, w zapisie skrótowym: $(2_3^1 0) \Rightarrow (2,0)$. [por. SB1].

Rysujemy poziomą linię odniesienia, która odpowiada tarczy 0 (rys. 4.19b). Rzutujemy na nią środki obrotu tarcz względem ostoi $((1,0), (2,0))$. Nadajemy obrót jednej z tarcz (wybrano tarczę 1) i rysujemy prostą odpowiadającą obrotowi tej tarczy przechodzącą przez środek obrotu (1,0) o dowolny kąt. Aby narysować prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 2 rzutujemy na prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 1 biegun chwilowego obrotu (1,2). Rysujemy prostą przechodzącą przez (2,0) i (1,2) co odpowiada obrotowi tarczy 2.

Rysujemy odcinki prostych odpowiadających torowi przemieszczania się siły jednostkowej, tj. odcinek między środkami obrotu (1,0) a (1,2) na prostej 1, (1,2) a (2,0) na prostej 2. Otrzymaliśmy wykres, który ma kształt szukanej linii wpływu reakcji N_β .

Aby określić rzędne i znaki linii wpływu zapisujemy równanie prac przygotowanych dla wybranego ustawienia siły jednostkowej. W rozpatrywanym przypadku siłą jednostkowa została ustawiona w punkcie (1,0). Pracę wykonują siły N_β działająca na tarczy 1 na przesunięciu zerowym i N_α działająca na tarczy 2 na przesunięciu $\delta_{N_\beta^P}$ oraz siła jednostkowa P na przesunięciu punktu jej przyłożenia, tj. δ .



Rys. 4.19. a) Mechanizm odpowiadający wielkości reakcji N_β b) Lina wpływu $LWN_\beta[-]$

Równanie prac przygotowanych

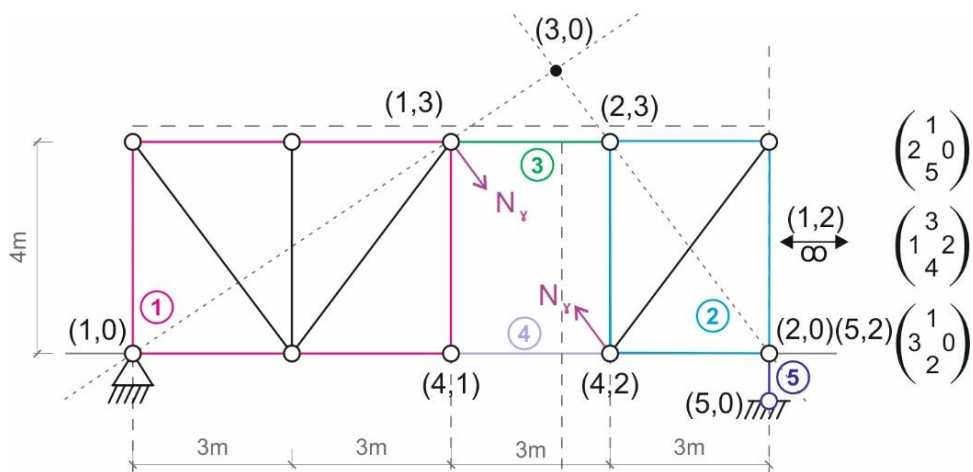
$$N_{\beta}^P \cdot \delta_{N_{\beta}^P} + N_{\beta}^L \cdot \delta_{N_{\beta}^L} - P \cdot \delta = 0,$$

gdzie: $\delta_{N_{\beta}^L} = 0$, $\varphi_2 = \frac{\delta_{N_{\beta}^P}}{8 \text{ m}} = \frac{\delta}{6 \text{ m}}$, stąd:

$$N_{\beta}^P \cdot \varphi_2 \cdot 8 \text{ m} + N_{\beta}^L \cdot 0 - 1 \text{ kN} \cdot \varphi_2 \cdot 6 \text{ m} = 0 \Rightarrow N_{\beta} = \frac{3}{4} \text{ kN}.$$

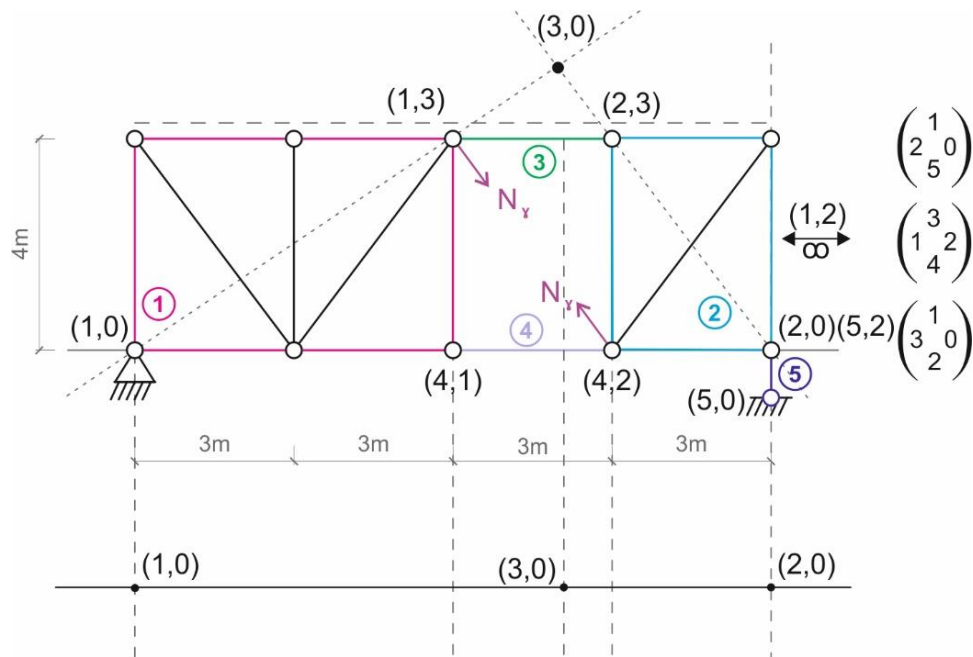
4.2.2.3. Sporządzenie linii wpływu N_{γ}

Pręt γ zastępujemy rozciągającymi siłami N_{γ} . Grupujemy pręty tworzące tarcze, numerujemy je (rys. 4.20), opisujemy środki obrotu tarcz względem siebie i względem ostoi. Środek obrotu tarczy (1,0) oraz (5,0) są znane. Wiemy, gdzie znajdują się środki obrotu (1,3), (2,3), (1,4) i (4,0). Wyznaczymy środek chwilowego obrotu tarcz (1,2) wykorzystując fakt, że łącznikami między tarczami 1 i 2 są tarcze 3 i 4. Z twierdzenia o trzech tarczach dla tarcz 1, 3 i 2 oraz 1, 4 i 2 otrzymujemy, że biegun chwilowego obrotu tarcz 1 i 2 względem siebie leży na przecięciu prostych przechodzących przez punkty (1,3) i (3,2) oraz (1,4) i (4,2), tj. w nieskończoności, ponieważ proste te są równoległe. W zapisie skrótowym: $(1_4^3 2) \Rightarrow (2,3)$. Wyznaczymy środek chwilowego obrotu tarcz (2,0) wykorzystując fakt, że łącznikami między tarczami 2 i 0 są tarcze 5 i 1. W zapisie skrótowym: $(2_5^1 0) \Rightarrow (2,0)$. [por. SB1].



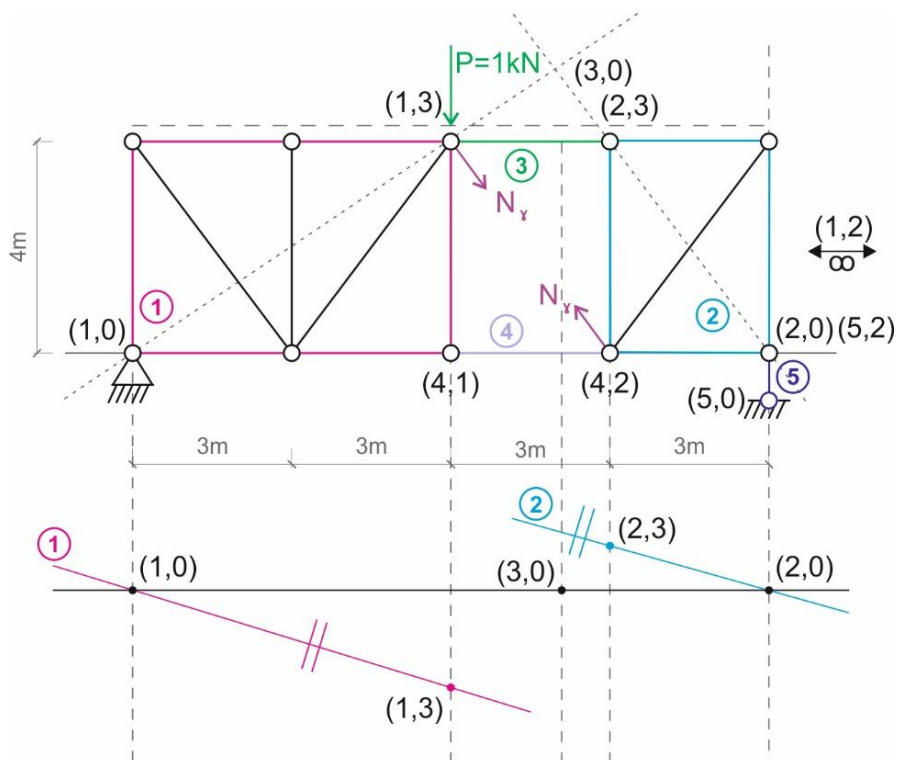
Rys. 4.20. Mechanizm odpowiadający wielkości reakcji N_{γ}

Rysujemy poziomą linię odniesienia, która odpowiada tarczy 0 (rys. 4.21). Rzutujemy na nią środki obrotu tarcz względem ostoi ((1,0), (2,0)).



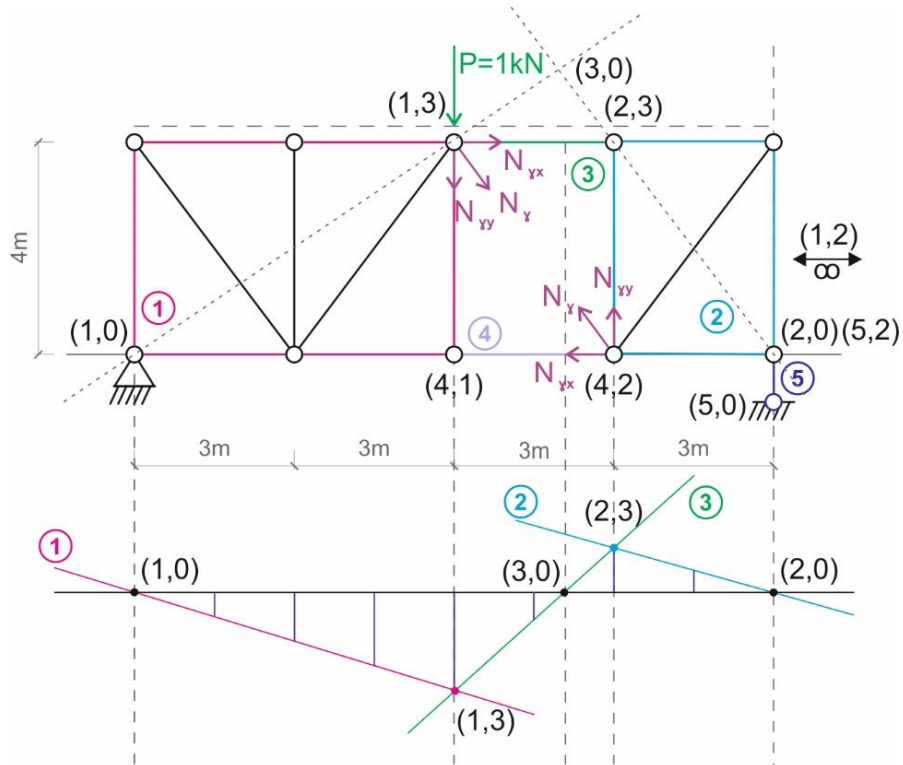
Rys. 4.21. Pozioma linia odniesienia

Nadajemy obrót jednej z tarcz (wybrano tarczę nr 1) i rysujemy prostą odpowiadającą obrotowi tej tarczy przechodzącą przez środek obrotu (1,0) o dowolny kąt. Aby narysować prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 2 rysujemy prostą odpowiadającą obrotowi tarczy 2 przechodzącą przez biegun chwilowego obrotu (2,0), a równoległą do prostej 1. Rzutujemy na prostą 1 środek chwilowego obrotu (1,3) a na prostą 2 środek chwilowego obrotu (2,3).



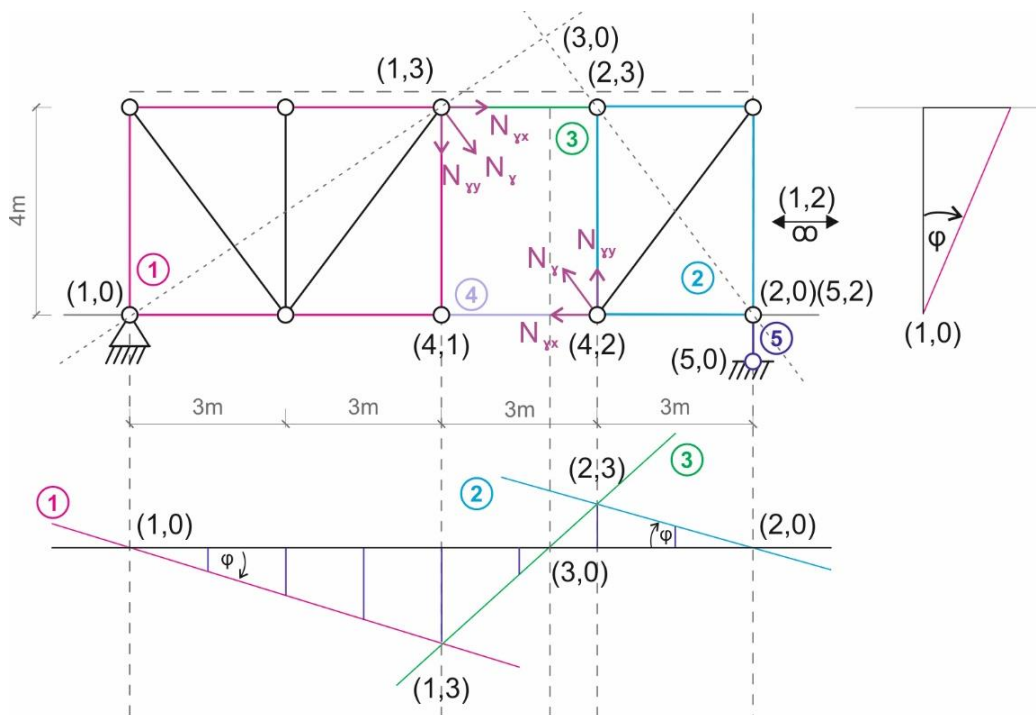
Rys. 4.22. Obrót tarcz 1 i 2 względem ostoi

Rysujemy prostą przechodzącą przez (1,3) i (2,3) co odpowiada obrotowi tarczy 3.



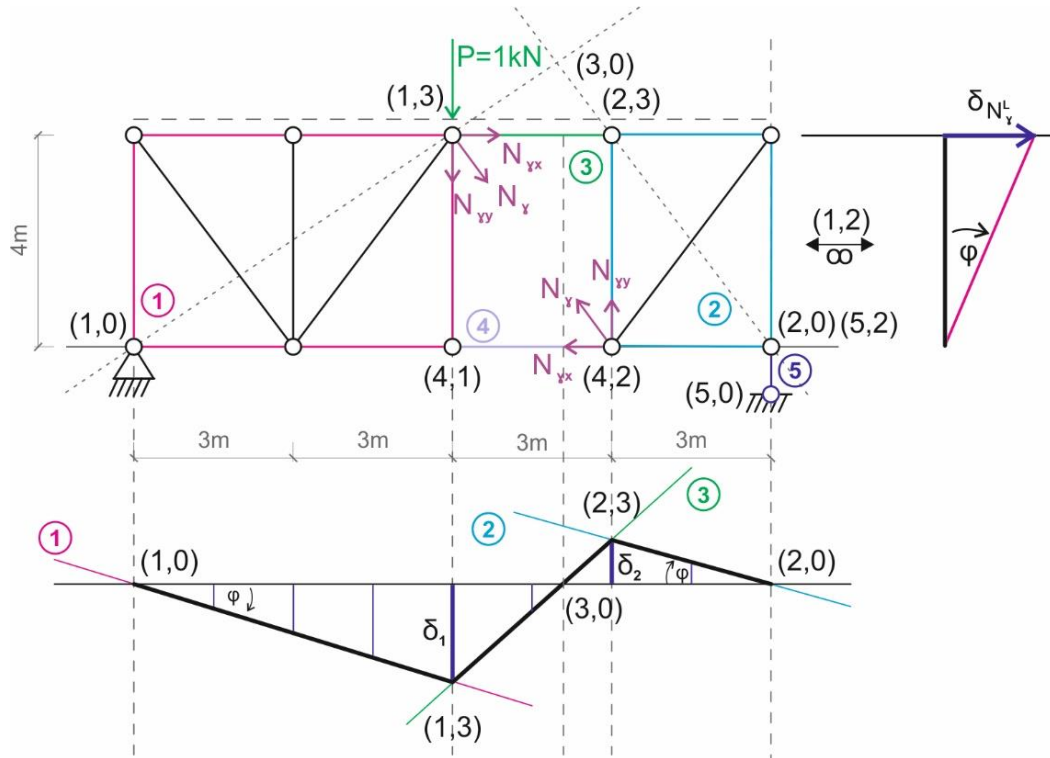
Rys. 4.23. Obrót wszystkich tarcz względem ostoi

Zauważmy, że siła N_y została zrutowana na kierunek pionowy i poziomy. Pracę wykonują siły N_y działająca na tarczy 1 i N_y działająca na tarczy 2 oraz siła jednostkowa P na przesunięciu punktu jej przyłożenia, tj. δ_l .



Rys. 4.24. Obrót wszystkich tarcz względem ostoi

Rysujemy odcinki prostych odpowiadających torowi przemieszczania się siły jednostkowej, tj. odcinek między środkami obrotu (1,0) a (1,3) na prostej 1, (1,3) a (2,3) na prostej 3 oraz (2,3) a (2,0) na prostej 2. Otrzymaliśmy wykres, który ma kształt szukanej linii wpływu reakcji N_y (rys.4.25)



Rys. 4.25. Linia wpływu $N_y[-]$

Aby określić rzędne i znaki linii wpływu zapisujemy równanie prac przygotowanych dla wybranego ustawienia siły jednostkowej:

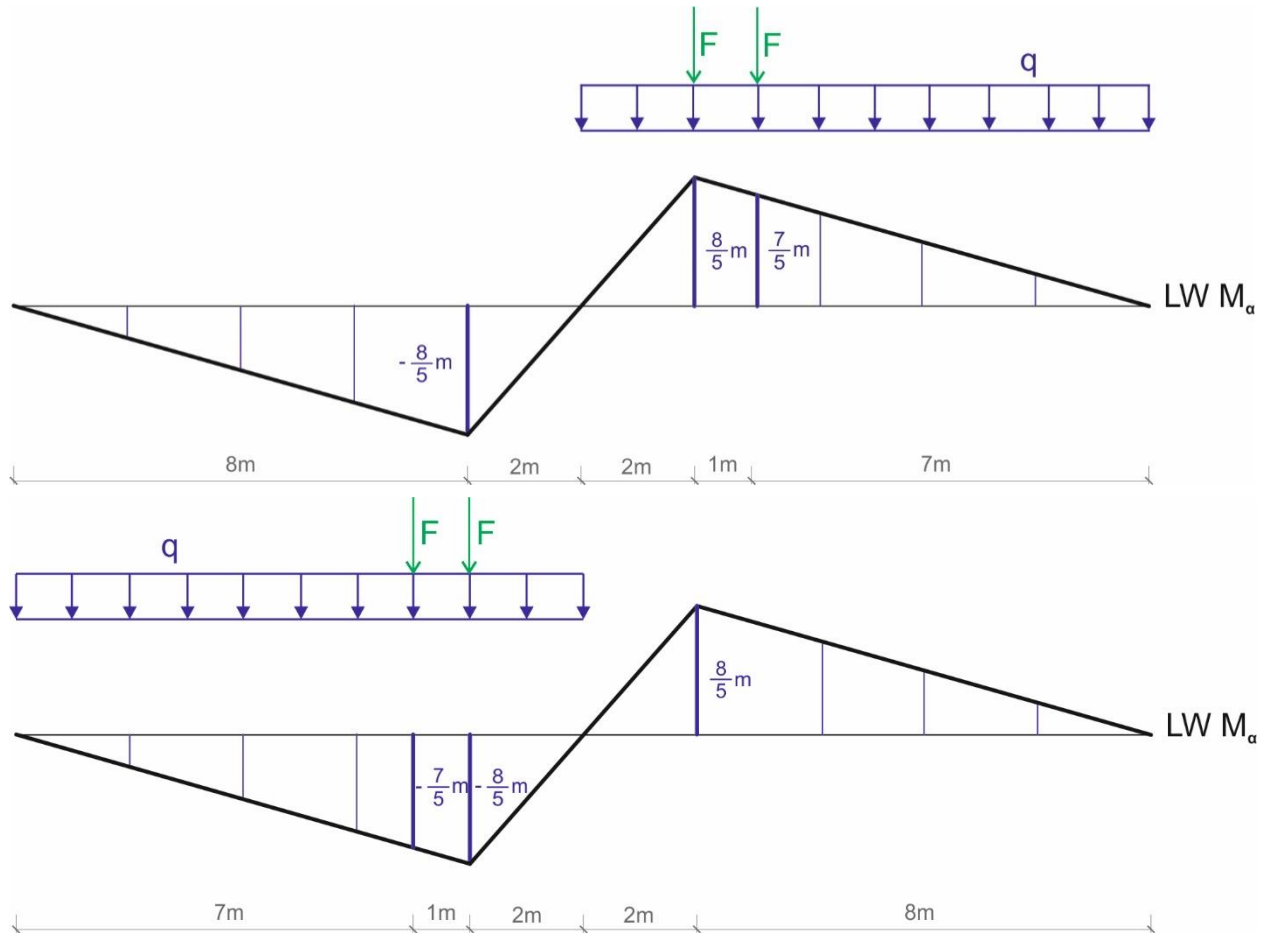
$$N_{\gamma y}^L \cdot \delta_1 + N_{\gamma y}^P \cdot \delta_2 + N_{\gamma x}^L \cdot \delta_{N_{\gamma}^P} + N_{\gamma x}^P \cdot \delta_{N_{\gamma}^P} + P \cdot \delta_1 = 0,$$

gdzie: $\varphi = \frac{\delta_{N_{\gamma}^L}}{4 \text{ m}} = \frac{\delta_1}{6 \text{ m}} = \frac{\delta_2}{3 \text{ m}}$, $\delta_{N_{\gamma}^P} = 0$, $N_{\gamma y}^L = N_{\gamma y}^P = 0,8 \cdot N_{\gamma}$, $N_{\gamma x}^L = N_{\gamma x}^P = 0,6 \cdot N_{\gamma}$ stąd:

$$\begin{aligned} N_{\gamma y}^L \cdot \varphi \cdot 6 \text{ m} + N_{\gamma y}^P \cdot \varphi \cdot 3 \text{ m} + N_{\gamma x}^L \cdot 0 + N_{\gamma x}^P \cdot \varphi \cdot 4 \text{ m} + 1 \text{ kN} \cdot \varphi \cdot 6 \text{ m} &= 0 \Rightarrow \\ 0,8 \cdot N_{\gamma} \cdot 6 \text{ m} + 0,8 \cdot N_{\gamma} \cdot 3 \text{ m} + 0,6 \cdot N_{\gamma} \cdot 4 \text{ m} + 1 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} &= 0 \Rightarrow N_{\gamma} = -\frac{10}{16} \text{ kN}, \end{aligned}$$

4.3. Obciążanie linii wpływu

Wykorzystując sporządzoną linię wpływu M_α (zob. pkt. 4.1), obliczyć wartości ekstremalne od obciążenia ruchomego składającego się z 2 jednakowych sił $F = 20$ kN w rozstawie 1,0 m i obciążenia rozłożonego $q = 6$ kN/m o dowolnym usytuowaniu.



Rys. 4.26. Linia wpływu M_α obciążona

$$\begin{aligned} \max M_\alpha &= q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \text{ m} \cdot \frac{8}{5} \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m} \cdot \frac{8}{5} \text{ m} \right) + F \cdot \frac{8}{5} \text{ m} + F \cdot \frac{7}{5} \text{ m} \\ &= 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \text{ m} \cdot \frac{8}{5} \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m} \cdot \frac{8}{5} \text{ m} \right) + 20 \text{ kN} \cdot \frac{8}{5} \text{ m} + 20 \text{ kN} \cdot \frac{7}{5} \text{ m} = 108 \text{ kNm} \\ \min M_\alpha &= q \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \text{ m} \cdot \left(-\frac{8}{5} \text{ m} \right) + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m} \cdot \left(-\frac{8}{5} \text{ m} \right) \right) + F \cdot \frac{8}{5} \text{ m} + F \cdot \frac{7}{5} \text{ m} \\ &= 6 \frac{\text{kN}}{\text{m}} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 8 \text{ m} \cdot \frac{8}{5} \text{ m} + \frac{1}{2} \cdot 2 \text{ m} \cdot \frac{8}{5} \text{ m} \right) + 20 \text{ kN} \cdot \left(-\frac{8}{5} \text{ m} \right) + 20 \text{ kN} \cdot \left(-\frac{7}{5} \text{ m} \right) \\ &= -108 \text{ kNm} \end{aligned}$$

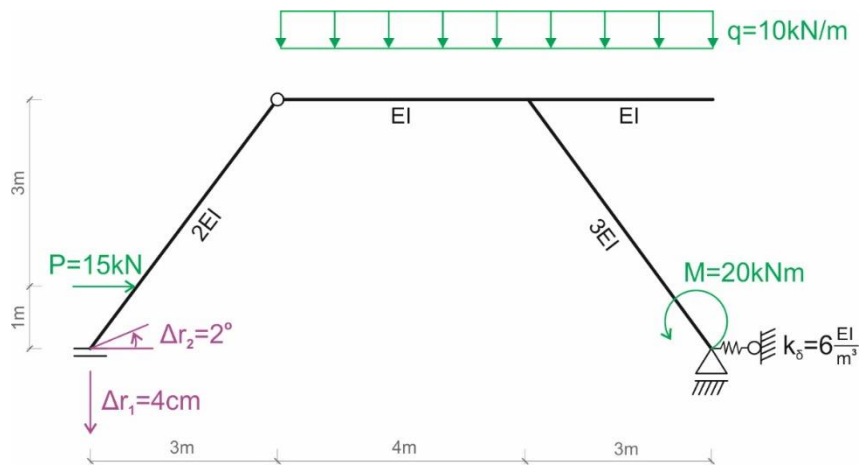
5. ZADANIA DO SAMODZIELNEGO ROZWIĄZANIA

5.1. OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH SW

5.1.1. Rama

1. Dla ramy płaskiej izostatycznej o schemacie i obciążeniu mechanicznym oraz osiadaniem podpór należy:

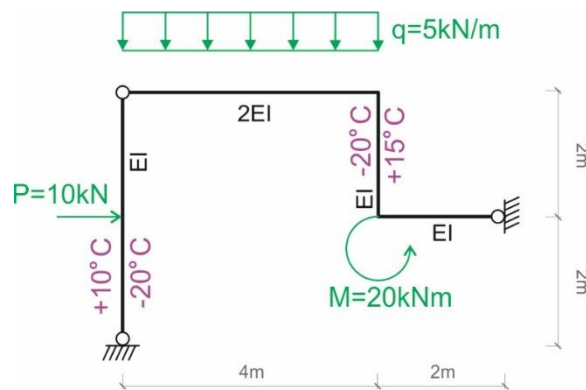
- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu;
- Wyznaczyć siły przekrojowe wywołane zadaniem obciążeniem;
- Obliczyć wartości zaznaczonych przemieszczeń oddzielnie od obciążenia siłami i osiadaniami podpory.



5.1. Schemat statyczny ramy płaskiej

2. Dla ramy płaskiej izostatycznej o schemacie i obciążeniu mechanicznym i obciążeniu temperaturą należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu;
- Wyznaczyć siły przekrojowe wywołane zadaniem obciążeniem;
- Obliczyć wartości zaznaczonych przemieszczeń oddzielnie od obciążenia siłami i temperatury.



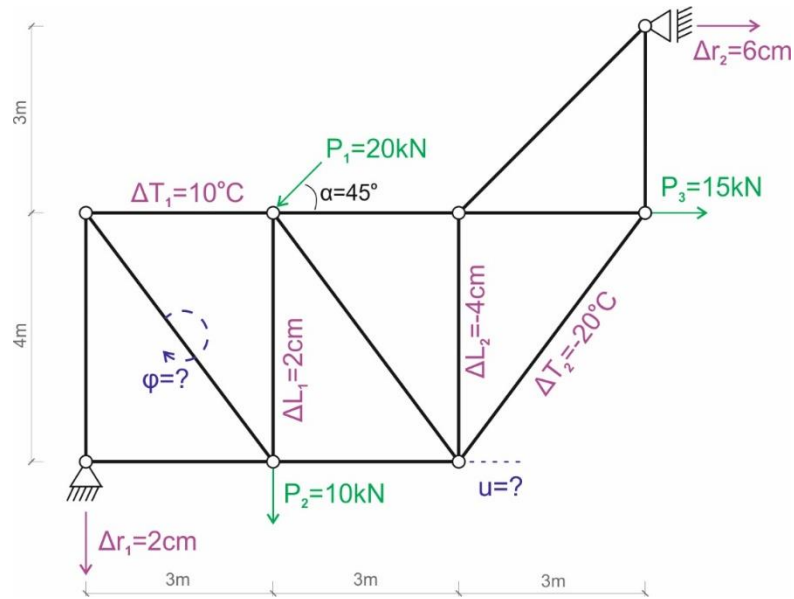
5.2. Schemat statyczny ramy płaskiej

5.1.2. Kratownica

Dla kratownicy płaskiej izostaticznej o schemacie i obciążeniu mechanicznym, obciążeniu temperaturą i osiadczeniem podpory należy:

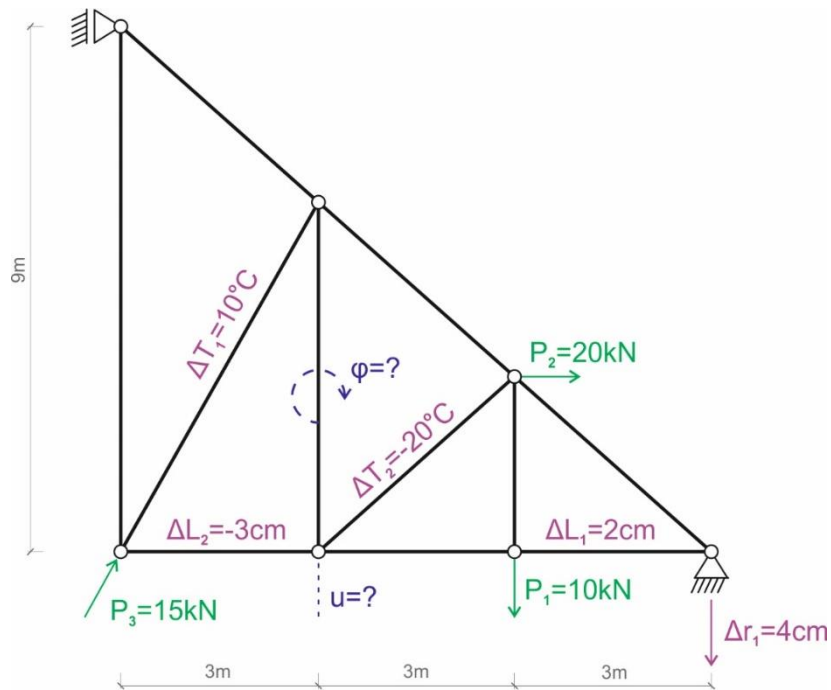
- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu;
- Wyznaczyć siły osiowe w prętach wywołane zadaniem obciążeniem;
- Obliczyć wartości zaznaczonych przemieszczeń oddzielnie od każdego obciążenia.

a)



5.3. Schemat statyczny kratownicy płaskiej

b)

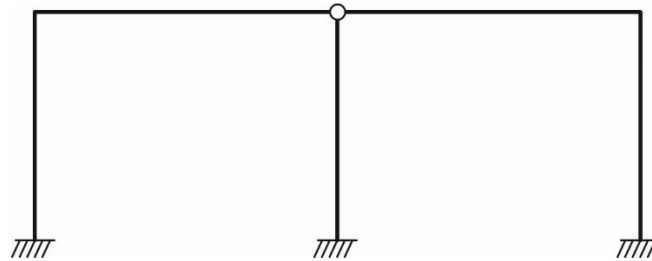


5.4. Schemat statyczny kratownicy płaskiej

5.2. ROZWIĄZANIE UKŁADU SN Z WYKORZYSTANIEM MS

5.2.1. Dobór układu podstawowego metody sił

Dla ramy płaskiej o schemacie statycznym jak na rysunku poniżej należy zaproponować co najmniej 3 różne układy podstawowe metody sił.

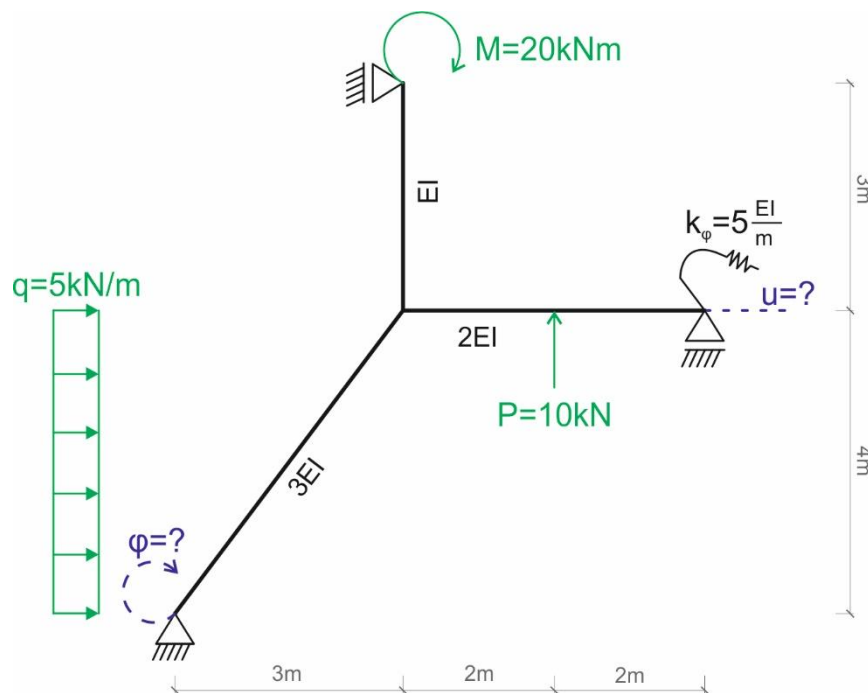


5.5. Schemat statyczny ramy płaskiej

5.2.2. Wyznaczenie sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym

1. Dla ramy płaskiej o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku poniżej należy:

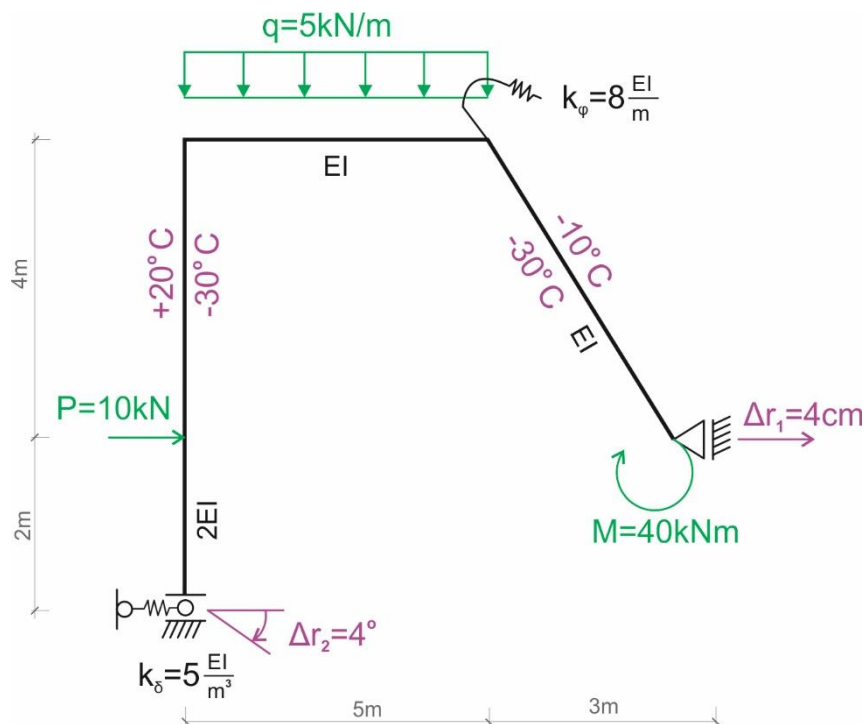
- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu;
- Sporządzić wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od zadanego obciążenia siłami;
- Przeprowadzić kontrolę poprawności rozwiązania (kontrolę statyczną i kinematyczną).



5.6. Schemat statyczny ramy płaskiej

2. Dla ramy płaskiej o schemacie i obciążeniu mechanicznym, obciążeniu temperaturą oraz osiadaniem podpory jak na rysunku poniżej należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu;
- Przedstawić szczegółową postać układu równań metody sił dla każdego przypadku obciążenia oddzielnie;
- Dla przypadku obciążenia mechanicznego sporządzić wykresy rzeczywistych sił przekrojowych;
- Przeprowadzić kontrolę poprawności rozwiązania dla obciążenia mechanicznego (kontrolę statyczną i kinematyczną).



5.7. Schemat statyczny ramy płaskiej

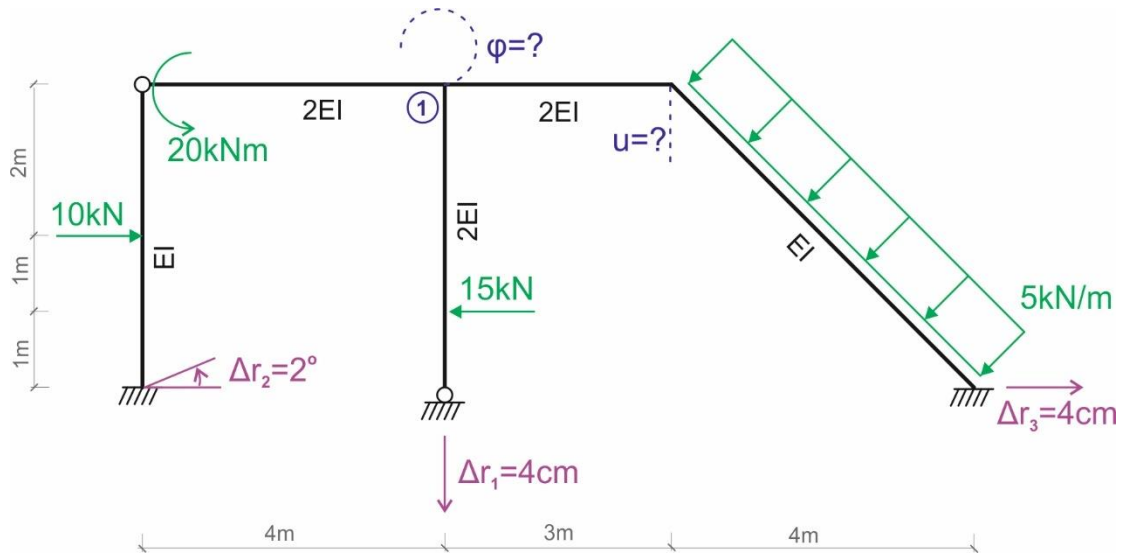
5.2.3. Obliczanie przemieszczeń w układzie statycznie niewyznaczalnym

1. Dla ramy płaskiej z zadania nr 1 w punkcie 4.2.2. należy:

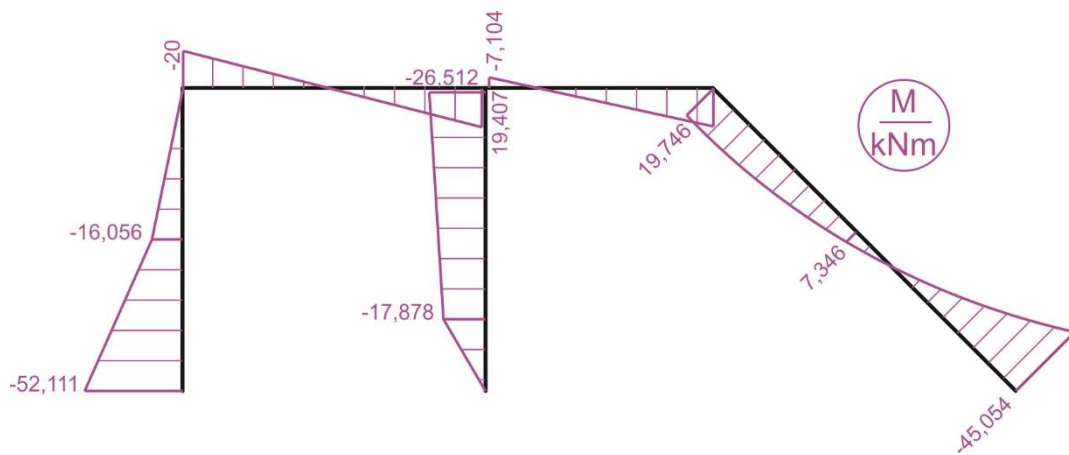
- Policzyc przemieszczenie liniowe węzła Δ_u ;
- Policzyc obrót węzła Δ_φ od obciążenia mechanicznego.

2. Znajac rzeczywiste wartości momentów zginających dla ramy płaskiej o schemacie i obciążeniu jak na rysunku poniżej należy:

- Policzyc przemieszczenie liniowe węzła Δ_u ;
- Policzyc obrót węzła Δ_φ od obciążenia mechanicznego.



5.8. Schemat statyczny ramy płaskiej



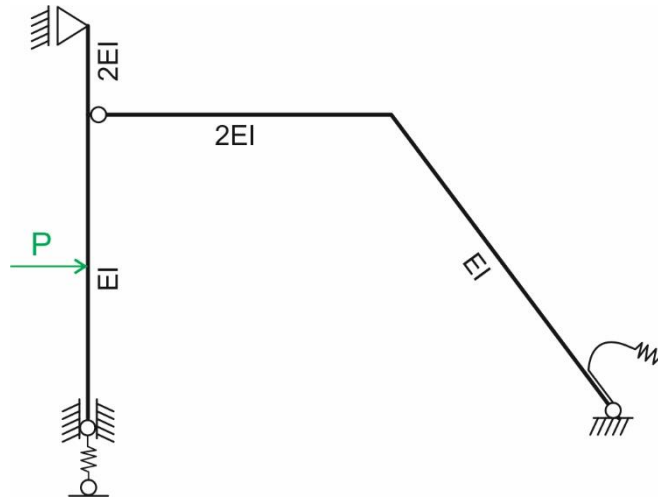
5.9. Rzeczywisty wykres momentów zginających

5.3. ROZWIĄZANIE UKŁADU SN Z WYKORZYSTANIEM MP

5.3.1. Dobór układu podstawowego metody przemieszczeń

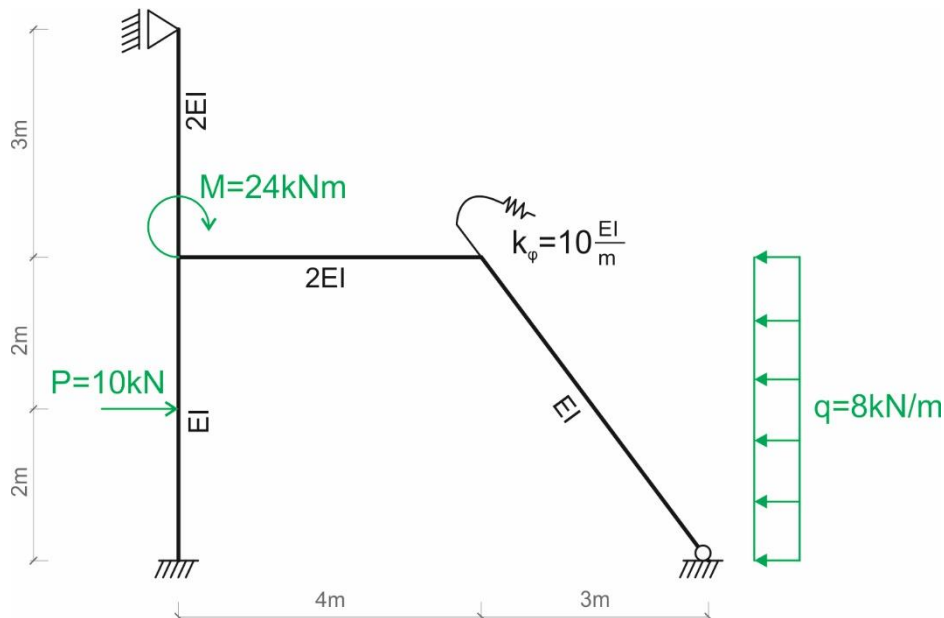
1. Dla ramy płaskiej o schemacie statycznych jak na rysunku poniżej należy zaproponować układy podstawowy metody przemieszczeń:

- Przyjmując optymalny typ pręta dla każdego elementu;
- Przyjmując tylko typ pręta „sztywno – sztywnego”.



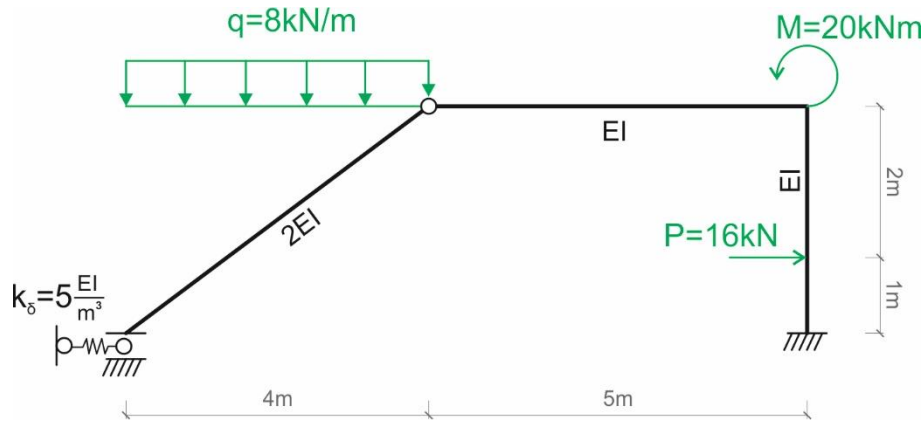
5.10. Schemat statyczny ramy płaskiej

5.2.2. Wyznaczenie sił przekrojowych w układzie statycznie niewyznaczalnym



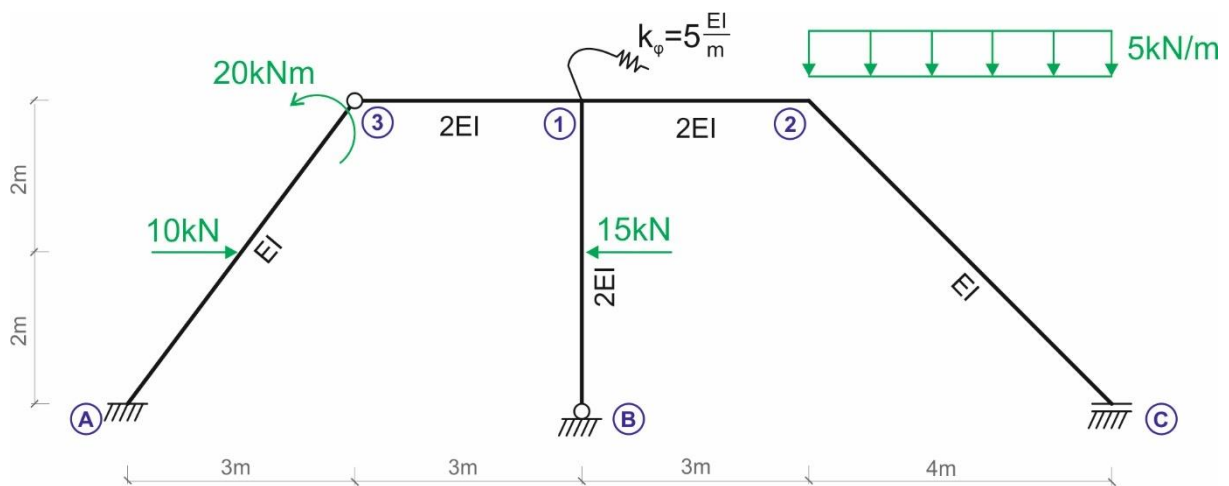
5.11. Schemat statyczny ramy płaskiej

1. Dla ramy płaskiej o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku powyżej należy:
 - Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu;
 - Sporządzić wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od zadanego obciążenia siłami;
 - Przeprowadzić kontrolę poprawności rozwiązania (kontrolę statyczną i kinematyczną).
2. Dla ramy płaskiej o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku poniżej należy:
 - Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu;
 - Przedstawić szczegółową postać układu równań metody przemieszczeń (nie rozwiązywać układu).



5.12. Schemat statyczny ramy płaskiej

3. Znając rzeczywiste wartości momentów brzegowych policzonych z wykorzystaniem metody przemieszczeń dla ramy płaskiej o schemacie i obciążeniu jak na rysunku poniżej należy:
 - Sporządzić wykresy rzeczywistych sił przekrojowych M^F, T^F, N^F ;
 - Przeprowadzić kontrolę poprawności rozwiązania (kontrolę statyczną i kinematyczną).



$$M_{A3} = -8.653 \text{ kNm}, \quad M_{3A} = M_{31} = 0 \text{ kNm}, \quad M_{13} = -22.670 \text{ kNm}, \quad M_{1B} = 15.983 \text{ kNm}$$

$$M_{12} = -10.363 \text{ kNm}, \quad M_{21} = -4.669 \text{ kNm}, \quad M_{2C} = 4.669 \text{ kNm}, \quad M_{C2} = 15.288 \text{ kNm}$$

5.13. Schemat statyczny ramy płaskiej

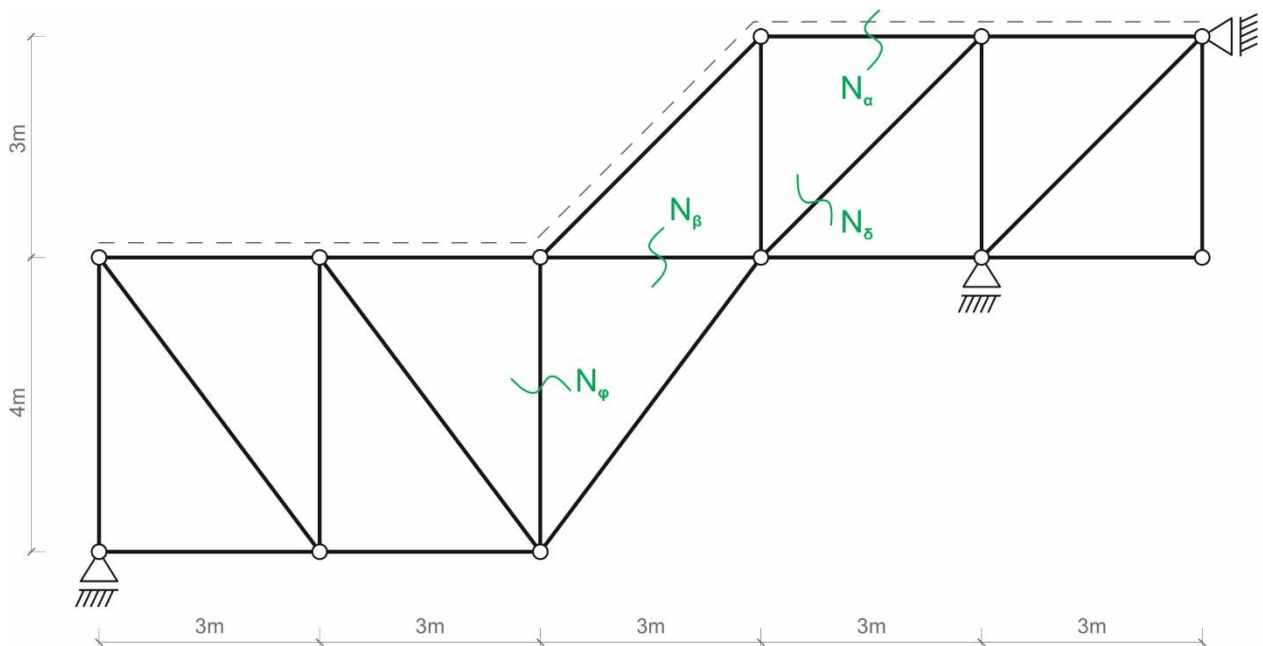
5.3. SPORZĄDZANIE LINII WPŁYWU

5.3.1. Kratownica płaska izostatyczna

1. Dla kratownicy płaskiej izostatycznej o schemacie statycznym jak na rysunku poniżej należy:

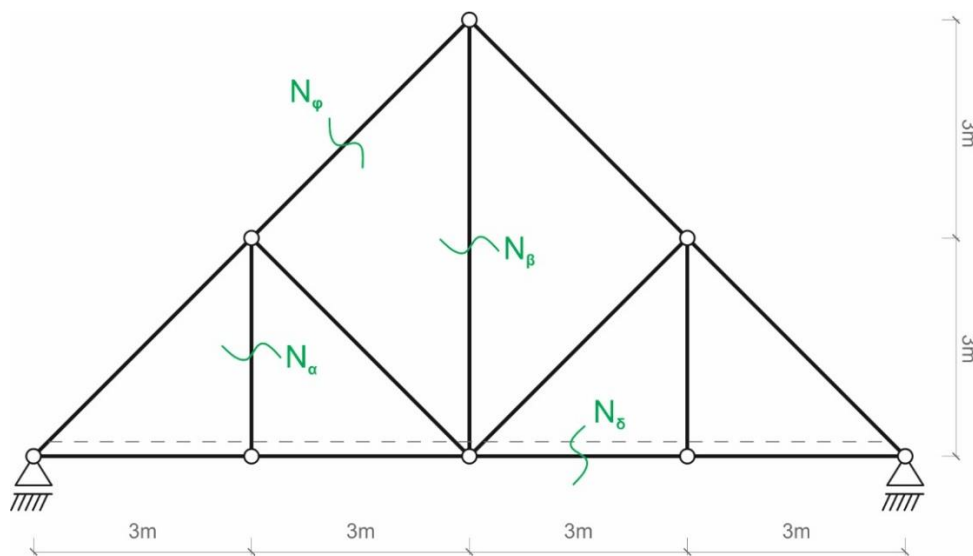
- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu;
- Sporządzić linię wpływu N_α , N_β , N_γ i N_δ metodą statyczną;
- Sporządzić linię wpływu N_α , N_β , N_γ i N_δ metodą kinematyczną.

a)



5.14. Schemat statyczny kratownicy płaskiej

b)



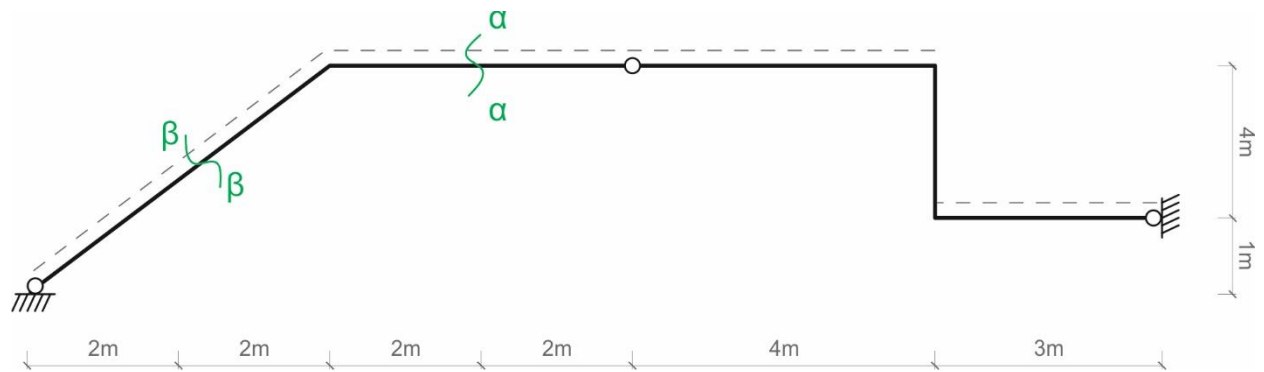
5.15. Schemat statyczny kratownicy płaskiej

5.3.2. Rama płaska izostatyczna

1. Dla ramy płaskiej izostatycznej o schemacie statycznym jak na rysunku poniżej należy:

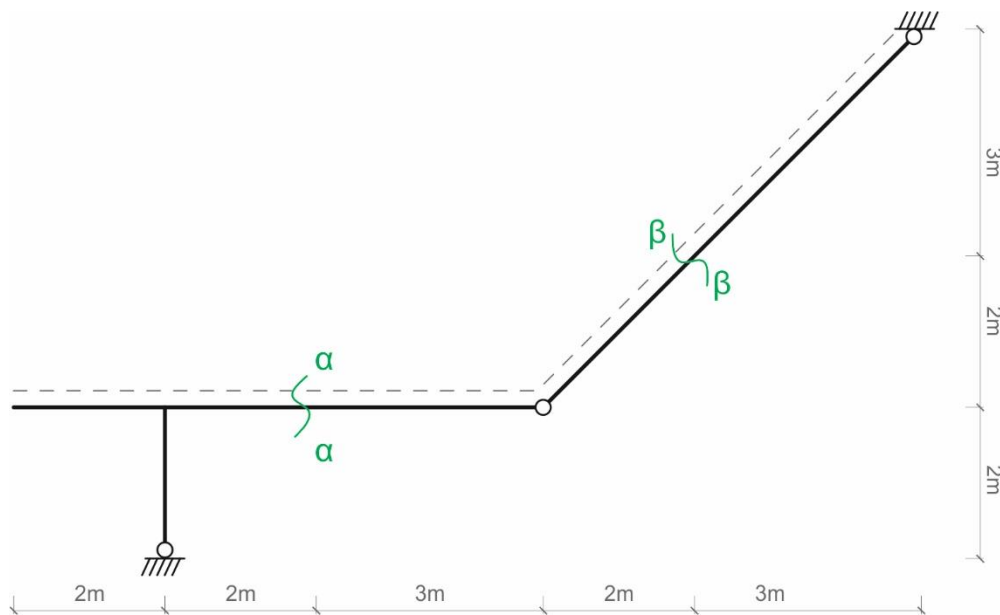
- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu;
- Sporządzić linię wpływu M_α , M_β , T_α , T_β , N_α , N_β metodą statyczną;
- Sporządzić linię wpływu M_α , M_β , T_α , T_β , N_α , N_β metodą kinematyczną.

a)



5.16. Schemat statyczny kratownicy płaskiej

b)



5.17. Schemat statyczny kratownicy płaskiej

DODATKOWA LITERATURA KSIĄŻKOWA

1. M. Gładysz, *Wybrane zagadnienia mechaniki obiektów inżynierskich. Podstawy statyki budowli*. SMOK, Wrocław 1999
2. W. Szcześniak, *Zbiór zadań z mechaniki teoretycznej. Statyka*. OWPW, Warszawa 1999.
3. Z. Cywiński, *Mechanika budowli w zadaniach*, t.2. PWN, Warszawa 1983.
4. W. Nowacki, *Mechanika budowli*. PWN, Warszawa 1975.
5. Z. Dyląg, E. Krzemińska-Niemiec, F. Filip, *Mechanika budowli*, t. 1 i 2. PWN, Warszawa 1974.
6. A. Cybulski, *Statyka ustrojów prętowych*, t.1. (Statyka ciała sztywnego) PWr, Wrocław 1973.
7. A. Chudzikiewicz, *Statyka budowli*, cz.1 i 2. PWN, Warszawa 1973.

SUPLEMENT¹

WZORY TRANSFORMACYJNE DLA PRĘTA PROSTEGO – teoria rzędu 1-go

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o, \quad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o, \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ij} \cdot \varphi_{ji} + d_{ji} \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o$$

gdzie a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ są współczynnikami zależnymi od typu pręta.

Współczynniki te dla wybranych typów prętów o stałej sztywności zestawiono w tabeli poniżej

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	$c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$	$d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$
		4	4	2	6	6	12
		3	0	0	3	0	3
		1	1	-1	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0

Szczegółowe postaci wzorów wg teorii rzędu 1-go dla wybranych typów prętów o stałej sztywności wykorzystujące powyższe współczynniki zestawiono poniżej

$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (4 \cdot \varphi_{ij} + 2 \cdot \varphi_{ji} - 6 \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o, \quad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (4 \cdot \varphi_{ji} + 2 \cdot \varphi_{ij} - 6 \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$
 $V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-6 \cdot \varphi_{ij} - 6 \cdot \varphi_{ji} + 12 \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o, \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-6 \cdot \varphi_{ij} - 6 \cdot \varphi_{ji} + 12 \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o,$

$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (3 \cdot \varphi_{ij} - 3 \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o, \quad M_{ji} = 0,$
 $V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-3 \cdot \varphi_{ij} + 3 \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o, \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-3 \cdot \varphi_{ij} + 3 \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o,$

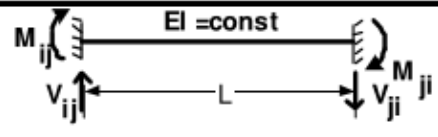
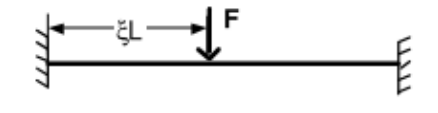
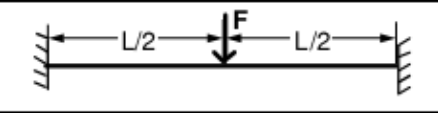
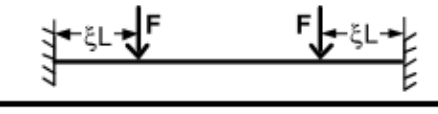
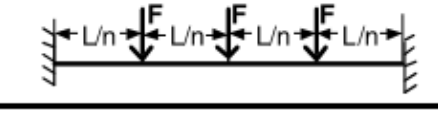
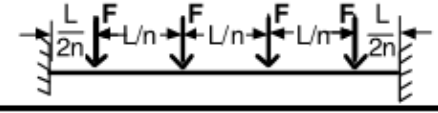
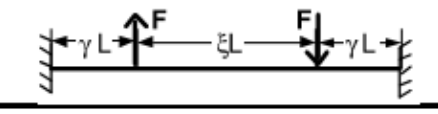
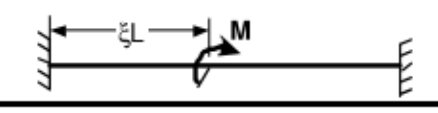

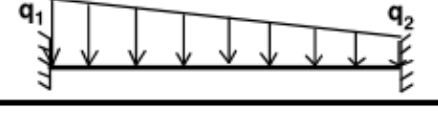
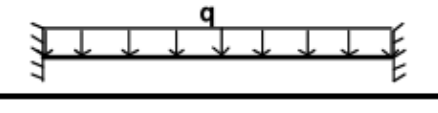
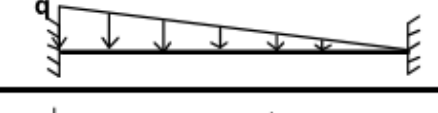
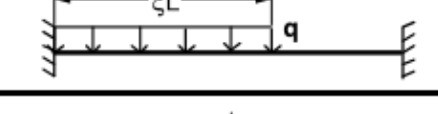
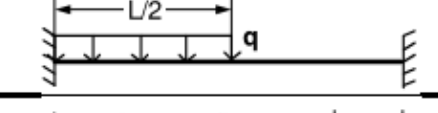
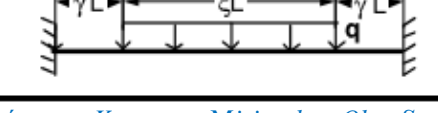
$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\varphi_{ij} - \varphi_{ji}) + M_{ij}^o, \quad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (\varphi_{ji} - \varphi_{ij}) + M_{ji}^o,$
 $V_{ij} = V_{ij}^o, \quad V_{ji} = 0,$

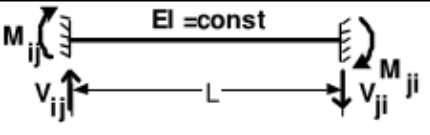


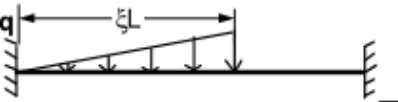
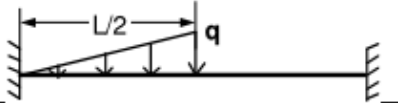
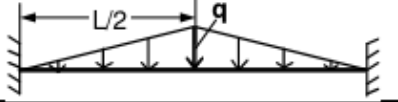

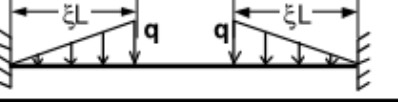
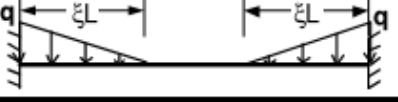
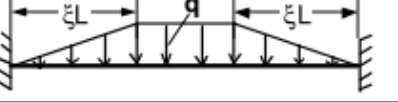
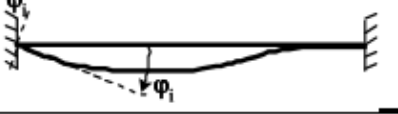


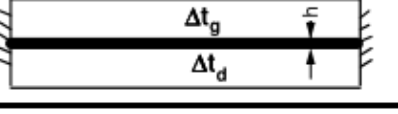

$M_{ij} = M_{ij}^o, \quad M_{ji} = 0, \quad V_{ij} = V_{ij}^o, \quad V_{ji} = 0$

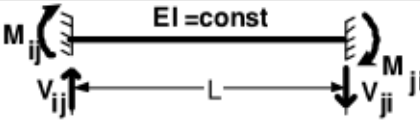
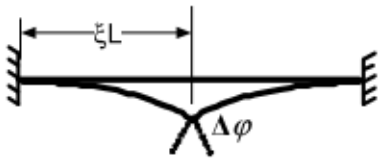

$M_{ij} = 0, \quad M_{ji} = 0, \quad V_{ij} = V_{ij}^o, \quad V_{ji} = V_{ji}^o.$

¹ Na podstawie: materiałów Stanisława Żukowskiego [[strona www K11W02D06](http://www.K11W02D06)].

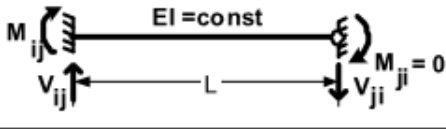
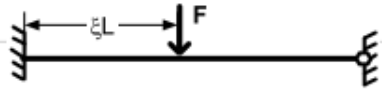
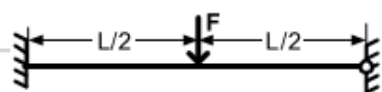
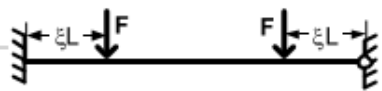
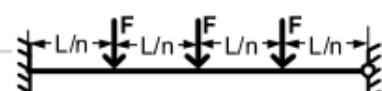
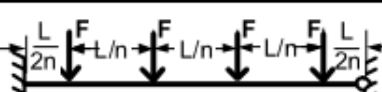

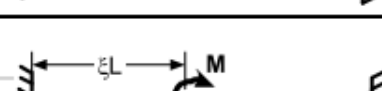
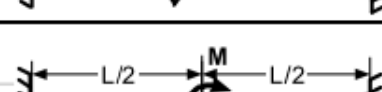
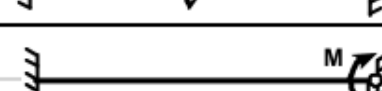
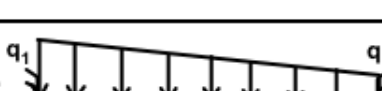
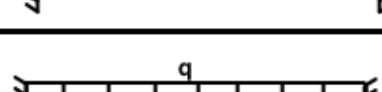


**MOMENTY I SIŁY BRZEGOWE
PRĘT OBUSTRONNIE UTWIERDZONY**

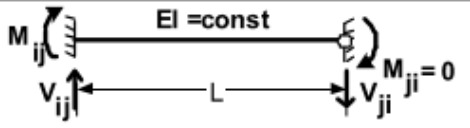
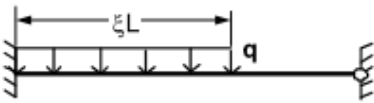
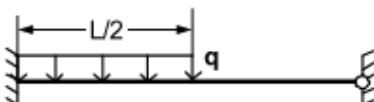
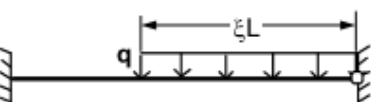
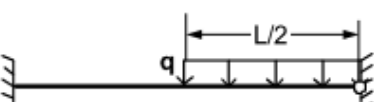
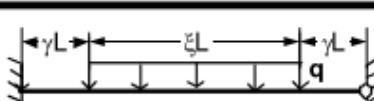
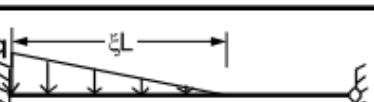
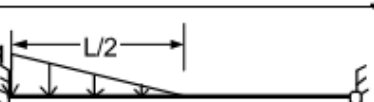
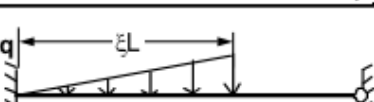
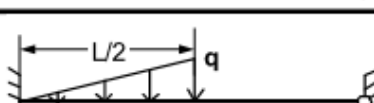

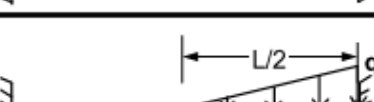
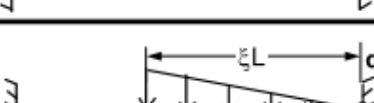
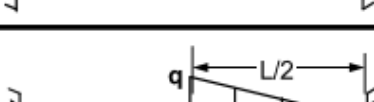
M_{ij} V_{ij}		M_{ji} V_{ji}
$M_{ij} = -FL\xi(1-\xi)^2$ $V_{ij} = F(1+2\xi)(1-\xi)^2$		$M_{ji} = FL\xi^2(1-\xi)$ $V_{ji} = -F\xi^2(3-2\xi)$
$M_{ij} = -FL/8$ $V_{ij} = F/2$		$M_{ji} = FL/8$ $V_{ji} = -F/2$
$M_{ij} = -FL\xi(1-\xi)$ $V_{ij} = F$		$M_{ji} = FL\xi(1-\xi)$ $V_{ji} = -F$
$M_{ij} = -FL(n-1/n)/12$ $V_{ij} = F(n-1)/2$		$M_{ji} = FL(n-1/n)/12$ $V_{ji} = -F(n-1)/2$
$M_{ij} = -FL(n+0.5/n)/12$ $V_{ij} = Fn/2$		$M_{ji} = FL(n+0.5/n)/12$ $V_{ji} = -Fn/2$
$M_{ij} = FL\xi^2(1-\xi^2)/4$ $V_{ij} = -F\xi(3-\xi^2)/2$		$M_{ji} = FL\xi^2(1-\xi^2)/4$ $V_{ji} = -F\xi(3-\xi^2)/2$
$M_{ij} = M(1-\xi)(3\xi-1)$ $V_{ij} = -6M\xi^2(1-\xi)/L$		$M_{ji} = M\xi(2-3\xi)$ $V_{ji} = -6M\xi^2(1-\xi)/L$
$M_{ij} = M/4$ $V_{ij} = -1.5M/L$		$M_{ji} = M/4$ $V_{ji} = -1.5M/L$
$M_{ij} = -(3q_1+2q_2)L^2/60$ $V_{ij} = (7q_1+3q_2)L/20$		$M_{ji} = (2q_1+3q_2)L^2/60$ $V_{ji} = -(3q_1+7q_2)L/20$
$M_{ij} = -qL^2/12$ $V_{ij} = qL/2$		$M_{ji} = qL^2/12$ $V_{ji} = -qL/2$
$M_{ij} = -qL^2/20$ $V_{ij} = 7qL/20$		$M_{ji} = qL^2/30$ $V_{ji} = -3qL/20$
$M_{ij} = -qL^2\xi^2[6-\xi(8-3\xi)]/12$ $V_{ij} = qL\xi^2[1-\xi^2(1-\xi/2)]$		$M_{ji} = qL^2\xi^3(4-3\xi)/12$ $V_{ji} = -qL\xi^3(1-\xi/2)$
$M_{ij} = -11qL^2/192$ $V_{ij} = 13qL/32$		$M_{ji} = 5qL^2/192$ $V_{ji} = -3qL/32$
$M_{ij} = -qL^2\xi(3-\xi^2)/24$ $V_{ij} = qL\xi/2$		$M_{ji} = qL^2\xi(3-\xi^2)/24$ $V_{ji} = -qL\xi/2$

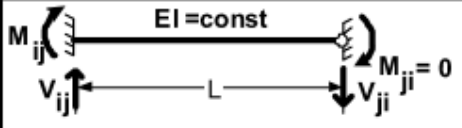
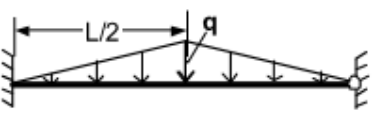
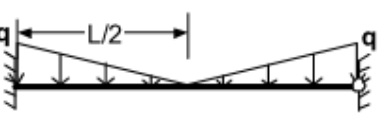
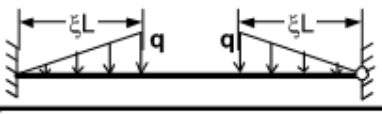



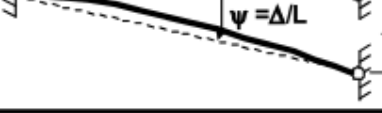
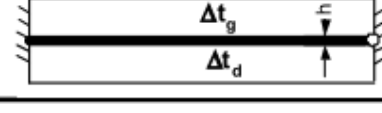


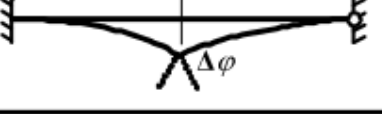
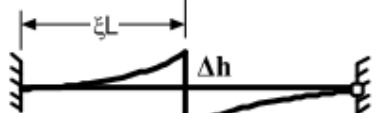
M_{ij} V_{ij}		M_{ji} V_{ji}
$M_{ij} = -qL^2\xi^2[10 - \xi(10 - 3\xi)]/60$ $V_{ij} = qL\xi[1/2 - \xi^2(5 - 2\xi)/20]$		$M_{ji} = qL^2\xi^3(5 - 3\xi)/60$ $V_{ji} = -qL\xi^3(5 - 2\xi)/20$
$M_{ij} = -23qL^2/960$ $V_{ij} = 9qL/40$		$M_{ji} = 7qL^2/960$ $V_{ji} = -qL/40$
$M_{ij} = -qL^2\xi^2[10 - \xi(15 - 6\xi)]/30$ $V_{ij} = qL\xi[1/2 - \xi^2(15 - 8\xi)/20]$		$M_{ji} = qL^2\xi^3(5 - 4\xi)/20$ $V_{ji} = -qL\xi^3(15 - 8\xi)/20$
$M_{ij} = -qL^2/30$ $V_{ij} = 29qL/160$		$M_{ji} = 3qL^2/160$ $V_{ji} = -11qL/160$
$M_{ij} = -5qL^2/96$ $V_{ij} = qL/4$		$M_{ji} = 5qL^2/96$ $V_{ji} = -qL/4$
$M_{ij} = -qL^2/32$ $V_{ij} = qL/4$		$M_{ji} = qL^2/32$ $V_{ji} = -qL/4$
$M_{ij} = -qL^2\xi^2(4 - 3\xi)/12$ $V_{ij} = qL\xi/2$		$M_{ji} = qL^2\xi^2(4 - 3\xi)/12$ $V_{ji} = -qL\xi/2$
$M_{ij} = -qL^2\xi^2(2 - \xi)/12$ $V_{ij} = qL\xi/2$		$M_{ji} = qL^2\xi^2(2 - \xi)/12$ $V_{ji} = -qL\xi/2$
$M_{ij} = -qL^2[1 - \xi^2(2 - \xi)]/12$ $V_{ij} = qL(1 - \xi)/2$		$M_{ji} = qL^2[1 - \xi^2(2 - \xi)]/12$ $V_{ji} = -qL(1 - \xi)/2$
$M_{ij} = 4EI\varphi_i/L$ $V_{ij} = -6EI\varphi_i/L^2$		$M_{ji} = 2EI\varphi_i/L$ $V_{ji} = -6EI\varphi_i/L^2$
$M_{ij} = 2EI\varphi_j/L$ $V_{ij} = -6EI\varphi_j/L^2$		$M_{ji} = 4EI\varphi_j/L$ $V_{ji} = -6EI\varphi_j/L^2$
$M_{ij} = -6EI\psi/L$ $V_{ij} = 12EI\psi/L^2$		$M_{ji} = -6EI\psi/L$ $V_{ji} = 12EI\psi/L^2$
$M_{ij} = -EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$ $V_{ij} = 0$		$M_{ji} = EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$ $V_{ji} = 0$
$M_{ij} = 0$ $V_{ij} = -EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/(Lh)$		$M_{ji} = EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/h$ $V_{ji} = -EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g)/(Lh)$

M_{ij} V_{ij}		M_{ji} V_{ji}
$M_{ij} = 2 \cdot (3 \cdot \xi - 2) \cdot \frac{EI}{L} \cdot \Delta\varphi$		$M_{ji} = 2 \cdot (3 \cdot \xi - 1) \cdot \frac{EI}{L} \cdot \Delta\varphi$
$V_{ij} = 6 \cdot (1 - 2 \cdot \xi) \cdot \frac{EI}{L^2} \cdot \Delta\varphi$		$V_{ji} = 6 \cdot (1 - 2 \cdot \xi) \cdot \frac{EI}{L^2} \cdot \Delta\varphi$
$M_{ij} = 6 \cdot \frac{EI}{L^2} \cdot \Delta h$		$M_{ij} = 6 \cdot \frac{EI}{L^2} \cdot \Delta h$
$V_{ij} = -12 \cdot \frac{EI}{L^3} \cdot \Delta h$		$V_{ji} = -12 \cdot \frac{EI}{L^3} \cdot \Delta h$

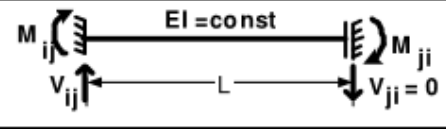
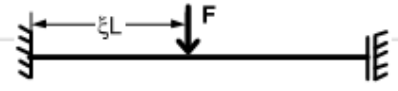
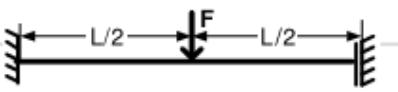
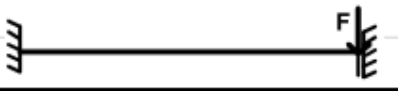
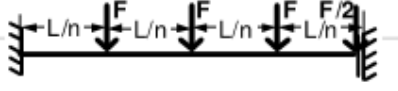

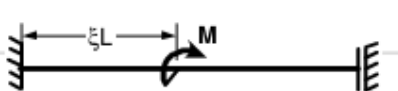

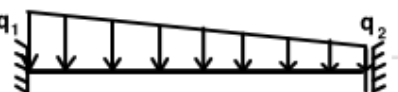
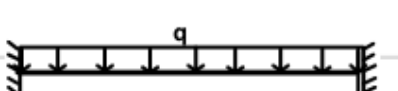

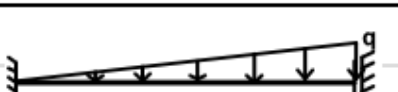
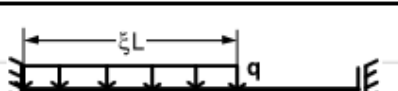
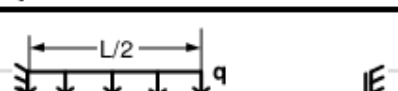
**MOMENTY I SIŁY BRZEGOWE
PRĘT LEWOSTRONNIE UTWIERDZONY
PRAWOSTRONNIE PODPARTY PRZEGUBOWO**

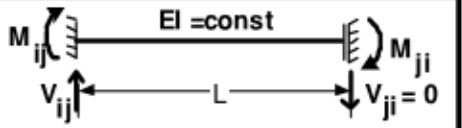
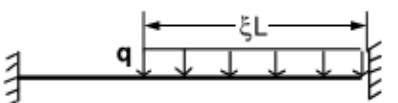
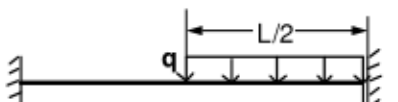
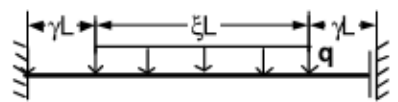


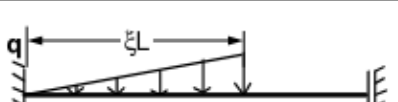
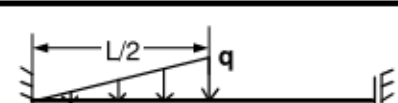


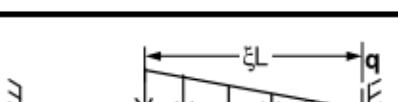
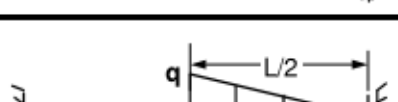
M_{ij} V_{ij}		V_{ji}
$M_{ij} = -FL\xi(1-\xi)(1-\xi/2)$ $V_{ij} = F(1-\xi)(1+\xi-\xi^2/2)$		$V_{ji} = -F\xi^2(3-\xi)/2$
$M_{ij} = -3FL/16$ $V_{ij} = 11F/16$		$V_{ji} = -5F/16$
$M_{ij} = -3FL\xi(1-\xi)/2$ $V_{ij} = F(3\xi(1-\xi)/2 + 1)$		$V_{ji} = -F(3\xi(1-\xi)/2 - 1)$
$M_{ij} = -FL(n-1/n)/8$ $V_{ij} = F(5n-1/n-4)/8$		$V_{ji} = -F(3n+1/n-4)/8$
$M_{ij} = -FL(n+0.5/n)/8$ $V_{ij} = F(5n+0.5/n)/8$		$V_{ji} = -F(3n-0.5/n)/8$
$M_{ij} = FL\xi(1-\xi^2)/8$ $V_{ij} = -F\xi(9-\xi^2)/8$		$V_{ji} = -F\xi(9-\xi^2)/8$
$M_{ij} = M(-1+3\xi-3\xi^2/2)$ $V_{ij} = -3M \cdot \xi(1-\xi/2)/L$		$V_{ji} = -3M \cdot \xi(1-\xi/2)/L$
$M_{ij} = M/8$ $V_{ij} = -(9/8)M/L$		$V_{ji} = -(9/8)M/L$
$M_{ij} = M/2$ $V_{ij} = -1.5M/L$		$V_{ji} = -1.5M/L$
$M_{ij} = -(8q_1 + 7q_2)L^2/120$ $V_{ij} = (16q_1 + 9q_2)L/40$		$V_{ji} = -(4q_1 + 11q_2)L/40$
$M_{ij} = -qL^2/8$ $V_{ij} = 5qL/8$		$V_{ji} = -3qL/8$
$M_{ij} = -qL^2/15$ $V_{ij} = 2qL/5$		$V_{ji} = -qL/10$
$M_{ij} = -7qL^2/120$ $V_{ij} = 9qL/40$		$V_{ji} = -11qL/40$

M_{ij} V_{ij}		V_{ji}
$M_{ij} = -qL^2 \xi^2 (2 - \xi)^2 / 8$ $V_{ij} = qL\xi [1 - \xi^2 (1 - \xi/4) / 2]$		$V_{ji} = -qL\xi^3 (1 - \xi/2) / 2$
$M_{ij} = -9qL^2 / 128$ $V_{ij} = 57qL / 128$		$V_{ji} = -7qL / 128$
$M_{ij} = -qL^2 \xi^2 (2 - \xi^2) / 8$ $V_{ij} = qL\xi^2 (6 - \xi^2) / 8$		$V_{ji} = -qL\xi [1 - \xi (6 - \xi^2) / 8]$
$M_{ij} = -7qL^2 / 128$ $V_{ij} = 23qL / 128$		$V_{ji} = -41qL / 128$
$M_{ij} = -qL^2 \xi (3 - \xi^2) / 16$ $V_{ij} = qL\xi (11 - \xi^2) / 16$		$V_{ji} = -qL\xi (5 + \xi^2) / 16$
$M_{ij} = -qL^2 \xi^2 [20 - 3\xi(5 - \xi)] / 120$ $V_{ij} = qL\xi [1/2 - \xi^2 (5 - \xi) / 40]$		$V_{ji} = -qL\xi^3 (5 - \xi) / 40$
$M_{ij} = -53qL^2 / 1720$ $V_{ij} = 151qL / 640$		$V_{ji} = -9qL / 640$
$M_{ij} = -qL^2 \xi^2 [40 - 3\xi(15 - 4\xi)] / 120$ $V_{ij} = qL\xi [1/2 - \xi^2 (15 - 4\xi) / 40]$		$V_{ji} = -qL\xi^3 (15 - 4\xi) / 40$
$M_{ij} = -41qL^2 / 960$ $V_{ij} = 67qL / 320$		$V_{ji} = -13qL / 320$
$M_{ij} = -qL^2 \xi^2 (10 - 3\xi^2) / 120$ $V_{ij} = -qL\xi^2 (10 - \xi^2) / 40$		$V_{ji} = -qL\xi [1/2 - \xi (10 - \xi^2) / 40]$
$M_{ij} = -17qL^2 / 960$ $V_{ij} = 39qL / 640$		$V_{ji} = -121qL / 640$
$M_{ij} = -qL^2 \xi^2 (5 - 3\xi^2) / 30$ $V_{ij} = -qL\xi^2 (5 - \xi^2) / 10$		$V_{ji} = -qL\xi [1/2 - \xi (5 - \xi^2) / 10]$
$M_{ij} = -17qL^2 / 480$ $V_{ij} = 19qL / 160$		$V_{ji} = -21qL / 160$

M_{ij} V_{ij}		V_{ji}
$M_{ij} = -5qL^2 / 64$ $V_{ij} = 21qL / 64$		$V_{ji} = -11qL / 64$
$M_{ij} = -3qL^2 / 64$ $V_{ij} = 19qL / 64$		$V_{ji} = -13qL / 64$
$M_{ij} = -qL^2 \xi^2 (4 - 3\xi) / 8$ $V_{ij} = -qL \xi [4 + \xi(4 - 3\xi)] / 8$		$V_{ji} = -qL \xi [4 - \xi(4 - 3\xi)] / 8$
$M_{ij} = -qL^2 \xi^2 (2 - \xi) / 8$ $V_{ij} = qL [1/2 + \xi(2 - \xi)] / 8$		$V_{ji} = -qL \xi [1/2 - \xi(2 - \xi)] / 8$
$M_{ij} = -qL^2 [1 - \xi^2 (2 - \xi)] / 8$ $V_{ij} = qL [5 - 4\xi - \xi^2 (4 - \xi)] / 8$		$V_{ji} = -qL [8 - 4\xi + \xi^2 (2 - \xi)] / 8$
$M_{ij} = 3EI\phi_i / L$ $V_{ij} = -3EI\phi_i / L^2$		$V_{ji} = -3EI\phi_i / L^2$
$M_{ij} = -3EI\psi / L$ $V_{ij} = 3EI\psi / L^2$		$V_{ji} = 3EI\psi / L^2$
$M_{ij} = -1.5EI\alpha_T (\Delta t_d - \Delta t_g) / h$ $V_{ij} = 1.5EI\alpha_T (\Delta t_d - \Delta t_g) / (Lh)$		$V_{ji} = 1.5EI\alpha_T (\Delta t_d - \Delta t_g) / (Lh)$
$M_{ij} = -EI\alpha_T (\Delta t_d - \Delta t_g) / h$ $V_{ij} = EI\alpha_T (\Delta t_d - \Delta t_g) / (Lh)$		$V_{ji} = EI\alpha_T (\Delta t_d - \Delta t_g) / (Lh)$
$M_{ij} = -0.5EI\alpha_T (\Delta t_d - \Delta t_g) / h$ $V_{ij} = 0.5EI\alpha_T (\Delta t_d - \Delta t_g) / (Lh)$		$V_{ji} = 0.5EI\alpha_T (\Delta t_d - \Delta t_g) / (Lh)$
$M_{ij} = -3 \frac{EI}{L} \cdot (1 - \xi) \cdot \Delta\phi$ $V_{ij} = 3 \frac{EI}{L^2} \cdot (1 - \xi) \cdot \Delta\phi$		$V_{ji} = 3 \frac{EI}{L^2} \cdot (1 - \xi) \cdot \Delta\phi$
$M_{ij} = 3 \frac{EI}{L^2} \cdot \Delta h$ $V_{ij} = -3 \frac{EI}{L^3} \cdot \Delta h$		$V_{ji} = -3 \frac{EI}{L^3} \cdot \Delta h$

**MOMENTY I SIŁY BRZEGOWE
PRĘT LEWOSTRONNIE UTWIERDZONY
PRAWOSTRONNIE UTWIERDZONY Z PRZESUWEM POPRZECZNYM**

M_{ij} V_{ij}		M_{ji}
$M_{ij} = -FL\xi(1 - \xi/2)$ $V_{ij} = F$		$M_{ji} = -FL\xi^2/2$
$M_{ij} = -3FL/8$ $V_{ij} = F$		$M_{ji} = -FL/8$
$M_{ij} = -FL/2$ $V_{ij} = F$		$M_{ji} = -FL/2$
$M_{ij} = -FL(4n - 1/n)/12$ $V_{ij} = F(n - 1/2)$		$M_{ji} = -FL(2n + 1/n)/12$
$M_{ij} = -FL(4n + 0.5/n)/12$ $V_{ij} = Fn$		$M_{ji} = -FL(2n - 0.5/n)/12$
$M_{ij} = -M(1 - \xi)$ $V_{ij} = 0$		$M_{ji} = -M\xi$
$M_{ij} = -M/2$ $V_{ij} = 0$		$M_{ji} = -M/2$
$M_{ij} = -(3q_1 + 5q_2)L^2/24$ $V_{ij} = (q_1 + q_2)L/2$		$M_{ji} = -(q_1 + 3q_2)L^2/24$
$M_{ij} = -qL^2/3$ $V_{ij} = qL$		$M_{ji} = -qL^2/6$
$M_{ij} = -qL^2/8$ $V_{ij} = qL/2$		$M_{ji} = -qL^2/24$
$M_{ij} = -5qL^2/24$ $V_{ij} = qL/2$		$M_{ji} = -qL^2/8$
$M_{ij} = -qL^2\xi^2(3 - \xi)/6$ $V_{ij} = qL\xi$		$M_{ji} = -qL^2\xi^3/6$
$M_{ij} = -5qL^2/48$ $V_{ij} = qL/2$		$M_{ji} = -qL^2/48$

M_{ij} V_{ij}		M_{ji}
$M_{ij} = -qL^2\xi(3 - \xi^2)/6$ $V_{ij} = qL\xi$		$M_{ji} = -qL^2\xi(3 - 3\xi + \xi^2)/6$
$M_{ij} = -11qL^2/48$ $V_{ij} = qL/2$		$M_{ji} = -7qL^2/48$
$M_{ij} = -qL^2\xi(9 - \xi^2)/24$ $V_{ij} = qL\xi$		$M_{ji} = -qL^2\xi(3 + \xi^2)/24$
$M_{ij} = -qL^2\xi^2(4 - \xi)/24$ $V_{ij} = qL\xi/2$		$M_{ji} = -qL^2\xi^3/24$
$M_{ij} = -7qL^2/192$ $V_{ij} = qL/4$		$M_{ji} = -qL^2/192$
$M_{ij} = -qL^2\xi^2(8 - 3\xi)/24$ $V_{ij} = qL\xi/2$		$M_{ji} = -qL^2\xi^3/18$
$M_{ij} = -13qL^2/192$ $V_{ij} = qL/4$		$M_{ji} = -qL^2/64$
$M_{ij} = -qL^2\xi(6 - \xi^2)/24$ $V_{ij} = qL\xi/2$		$M_{ji} = -qL^2\xi(6 - 4\xi + \xi^2)/24$
$M_{ij} = -23qL^2/192$ $V_{ij} = qL/4$		$M_{ji} = -17qL^2/192$
$M_{ij} = -qL^2\xi(2 - \xi^2)/8$ $V_{ij} = qL\xi/2$		$M_{ji} = -qL^2\xi(6 - 8\xi + 3\xi^2)/24$
$M_{ij} = -7qL^2/64$ $V_{ij} = qL/4$		$M_{ji} = -qL^2$

M_{ij} V_{ij}		M_{ji}
$M_{ij} = -17qL^2 / 96$ $V_{ij} = qL / 2$		$M_{ji} = -31qL^2 / 96$
$M_{ij} = -5qL^2 / 32$ $V_{ij} = qL / 2$		$M_{ji} = -11qL^2 / 32$
$M_{ij} = -qL^2 [8 - \xi^2(4 - \xi)] / 24$ $V_{ij} = qL(1 - \xi / 2)$		$M_{ji} = -qL^2(4 - \xi^3) / 24$
$M_{ij} = -57qL^2 / 192$ $V_{ij} = 3qL / 4$		$M_{ji} = -31qL^2 / 192$
$M_{ij} = EI\phi_i / L$ $V_{ij} = 0$		$M_{ji} = -EI\phi_i / L$
$M_{ij} = -EI\phi_j / L$ $V_{ij} = 0$		$M_{ji} = EI\phi_j / L$
$M_{ij} = -EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g) / h$ $V_{ij} = 0$		$M_{ji} = EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g) / h$
$M_{ij} = -0.5EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g) / h$ $V_{ij} = 0$		$M_{ji} = 0.5EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g) / h$
$M_{ij} = -0.5EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g) / h$ $V_{ij} = 0$		$M_{ji} = 0.5EI\alpha_T(\Delta t_d - \Delta t_g) / h$
$M_{ij} = -\frac{EI}{L} \cdot \Delta\phi$ $V_{ij} = 0$		$M_{ji} = \frac{EI}{L} \cdot \Delta\phi$
$M_{ij} = 0$ $V_{ij} = 0$		$M_{ji} = 0$