

METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

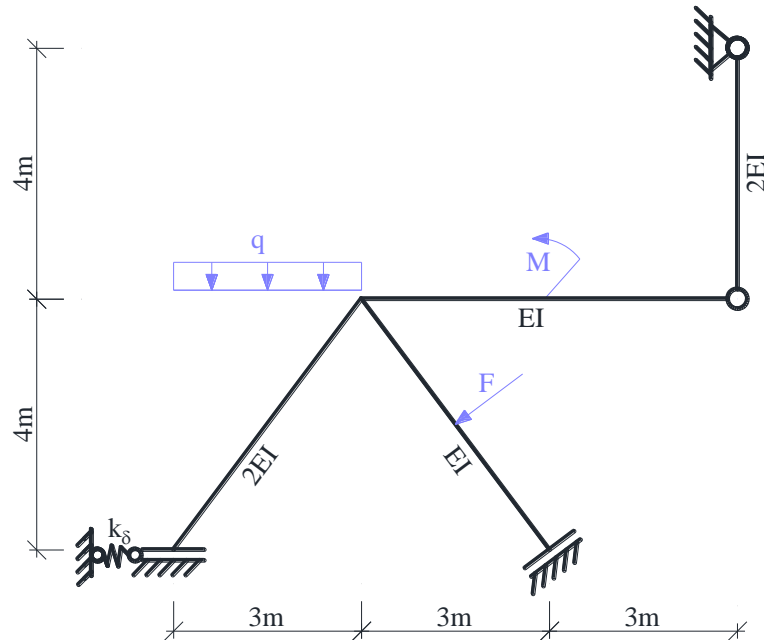
SPIS TREŚCI

1. DANE I SZUKANE.....	2
2. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI	2
3. OBLICZENIE STOPNIA GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU	3
3.1. PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW	3
3.2. WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW	3
3.3. STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁADU.....	5
4. UKŁAD POSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ	5
5. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD SKŁADOWYCH STAÓW OBCIĄŻEŃ	5
5.1. STAN OBCIĄŻENIA DANGO.....	5
5.2. PIERWSZY STAN ROTACYJNY.....	6
5.3. PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY	7
6. UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE	9
6.1. POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ.....	9
6.2. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ.....	9
6.3. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE.....	10
7. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW	10
7.1. OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH.....	10
7.2. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW	11
8. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA.....	13

1. DANE I SZUKANE

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu jak na rysunku 1.1. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia mechanicznego (obliczyć siły) przekrojowe i sporządzić ich wykresy.
- Przeprowadzić stosowne kontrole.

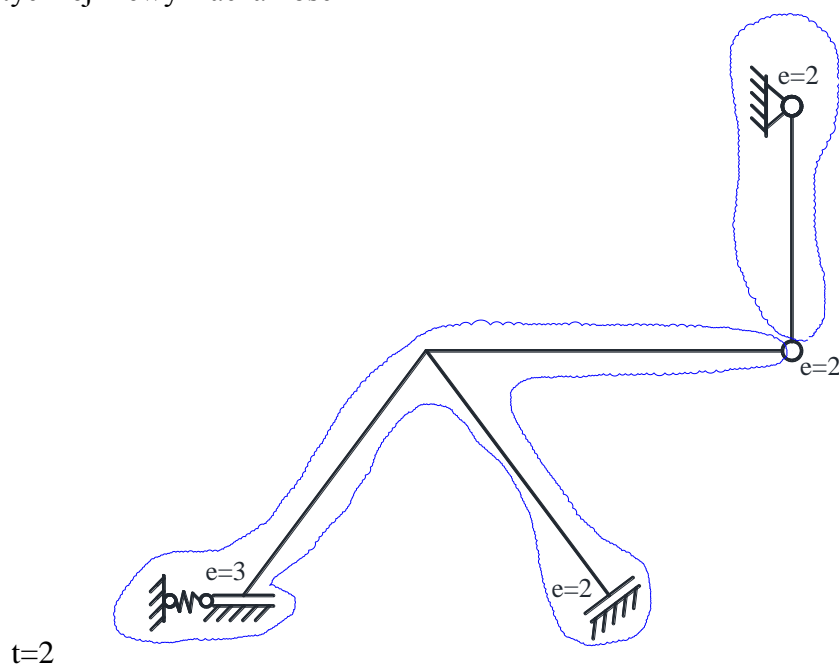


Rys. 1.1. Schemat statyczny

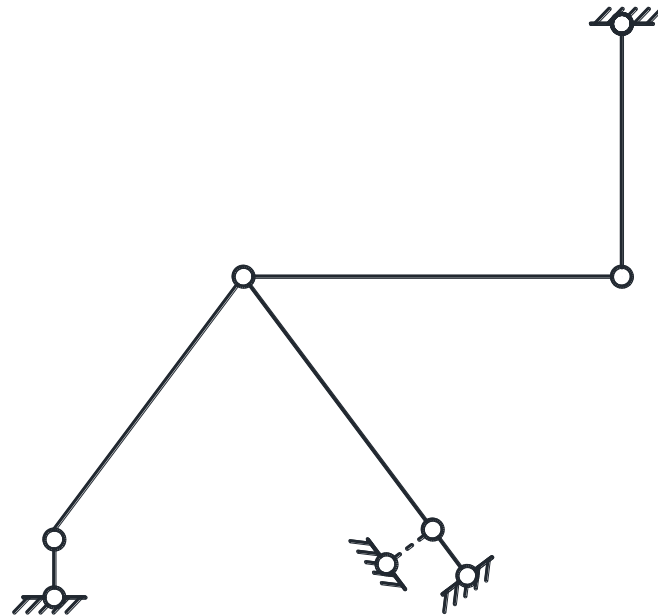
Dane do obliczeń: $F = 8 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$; $M = 24 \text{ kN m}$; $k_\phi = 8 \text{ EI/m}$.

2. SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

- Stopień statycznej niewyznaczalności



Rys. 2.1. Tarcze i więzi



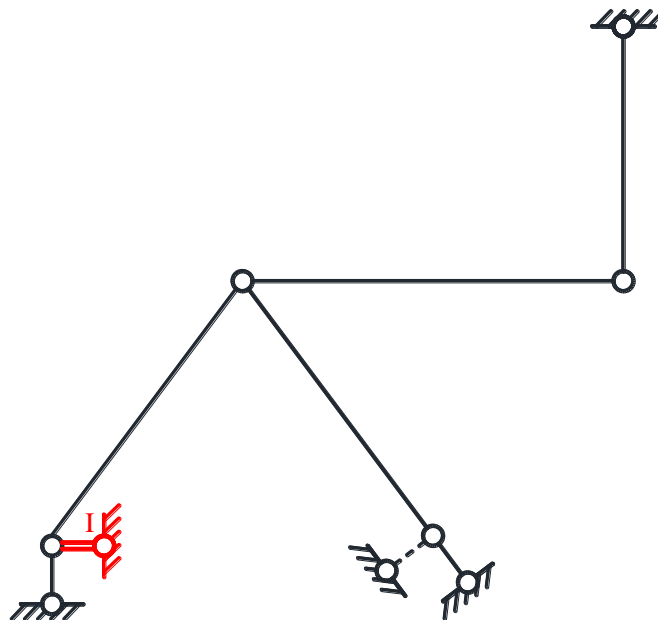
Rys. 3.2.1. Model przegubowy

Oszacowanie liczby stopni swobody przesuwu węzłów

$$n_s \geq 2 \cdot w - p - r = 2 \cdot 8 - 7 - 8 = 1$$

gdzie: $w = 8$ - liczba węzłów modelu,
 $p = 7$ - liczba prętów w modelu,
 $r = 8$ - liczba więzi podporowych modelu.

Oznacza to, że aby układ o węzłach przegubowych był geometrycznie niezmienny należy dodać co najmniej dwie więzi.



Rys. 3.2.2. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

Dopiero analiza kinematyczna potwierdza, że model przegubowy po dodaniu jednej więzi jest geometrycznie niezmienny.

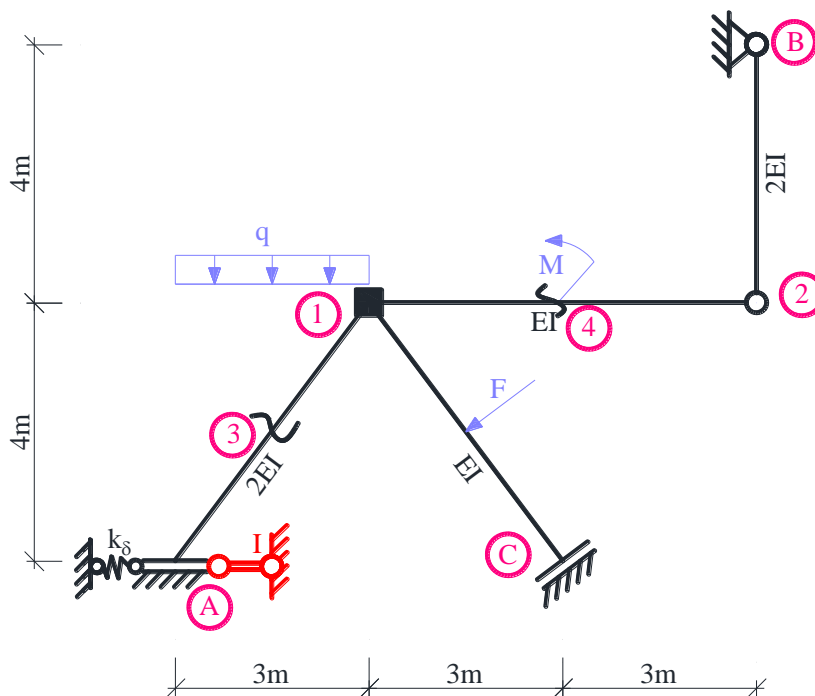
3.3. STOPIEŃ GEOMETRYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI UKŁAU

Stożenie geometrycznej niewyznaczalności układu wynosi:

$$n_g = n_\varphi + n_\delta = 1 + 1 = 1.$$

4. UKŁAD POSTAWOWY METODY PRZEMISZCZEŃ

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez dodanie n_φ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych (w tym przykładzie 1 więź rotacyjną i 1 więź translacyjną). Układ podstawowy metody przemieszczeń, pokazany na rys.4.1., jest geometrycznie wyznaczalny.



Rys. 4.1. Układ podstawowy metody przemieszczeń

5. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD SKŁADOWYCH STAÓW OBCIĄŻŃ

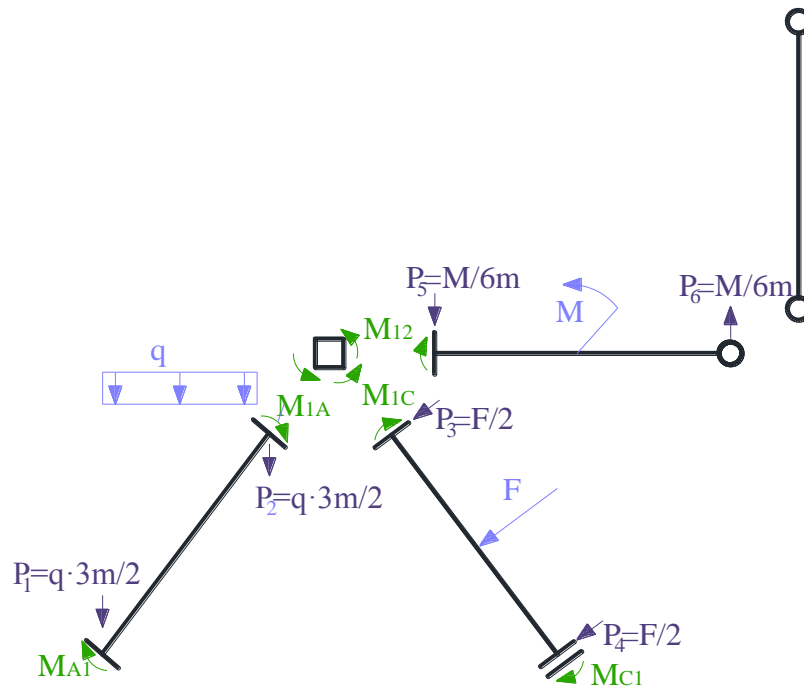
5.1. STAN OBCIĄŻENIA DANGO

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_I = \varphi_2 = \delta_I = \delta_{II} = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla elementów przyjętych w punkcie 3.1. wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

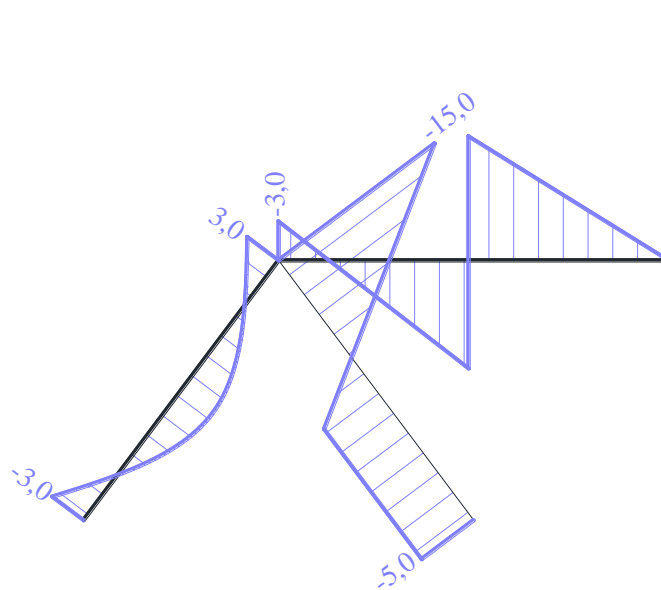
$$M_{A1}^o = -qL^2 / 12 = -\frac{4kN / m \cdot (3m)^2}{12} = -3kN \cdot m, \quad M_{1A}^o = qL^2 / 12 = \frac{4kN / m \cdot (3m)^2}{12} = 3kN \cdot m,$$

$$M_{1C}^o = -3FL / 8 = -\frac{3 \cdot 8kN \cdot 5m}{8} = -15kN \cdot m, \quad M_{C1}^o = -FL / 8 = -\frac{8kN \cdot 5m}{8} = -5kN \cdot m,$$

$$M_{12}^o = -M / 8 = -\frac{24kN \cdot m}{8} = -3kN \cdot m, \quad M_{21}^o = M_{2B}^o = M_{B2}^o = 0.$$



Rys. 5.1.1. Momenty brzegowe od obciążenia zewnętrznego i siły równoważne.



Rys. 5.1.2. Wykres momentów M^0 w $kN \cdot m$.

5.2. PIERWSZY STAN ROTACYJNY

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_I = \varphi_{Ij} = 1$, $\delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{1j}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{1j} \cdot \varphi_{1j} + b_{1j} \cdot \varphi_{j1}),$$

$$M_{j1}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{j1} \cdot \varphi_{j1} + b_{j1} \cdot \varphi_{1j}).$$

Momenty węzłowe wynoszą:

$$M_{1A}^1 = \frac{EI_{1A}}{L_{1A}}(a_{1A} \cdot \varphi_{1A} + b_{1A} \cdot \varphi_{A1}) = \frac{2EI}{5m}(4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{8EI}{5m},$$

$$M_{A1}^1 = \frac{EI_{A1}}{L_{A1}}(a_{A1} \cdot \varphi_{A1} + b_{A1} \cdot \varphi_{1A}) = \frac{2EI}{5m}(4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{4EI}{5m},$$

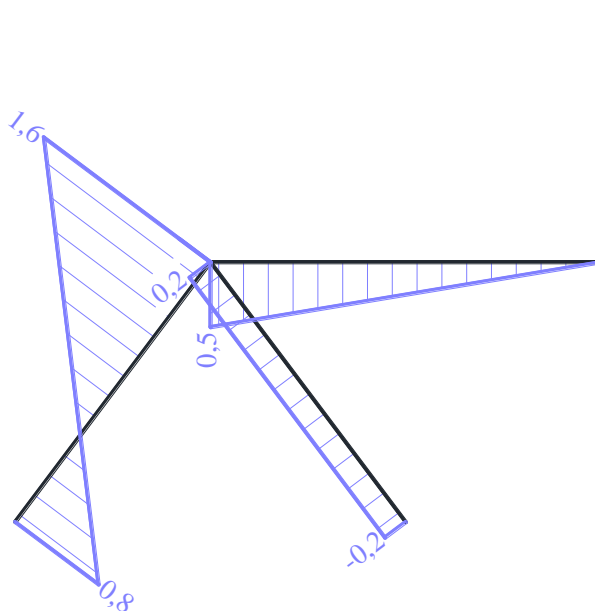
$$M_{1C}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}}(a_{1C} \cdot \varphi_{1C} + b_{1C} \cdot \varphi_{C1}) = \frac{EI}{5m}(1 \cdot 1 - 1 \cdot 0) = \frac{1EI}{5m},$$

$$M_{C1}^1 = \frac{EI_{1C}}{L_{1C}}(a_{C1} \cdot \varphi_{C1} + b_{C1} \cdot \varphi_{1C}) = \frac{EI}{5m}(1 \cdot 0 - 1 \cdot 1) = -\frac{1EI}{5m},$$

$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{6m}(3 \cdot 1 + 3 \cdot 0) = \frac{1EI}{2m}$$

$$M_{21}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}}(a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{2EI}{5m}(4 \cdot 0 + 0) = 0$$

$$M_{2B}^1 = M_{B2}^1 = 0.$$



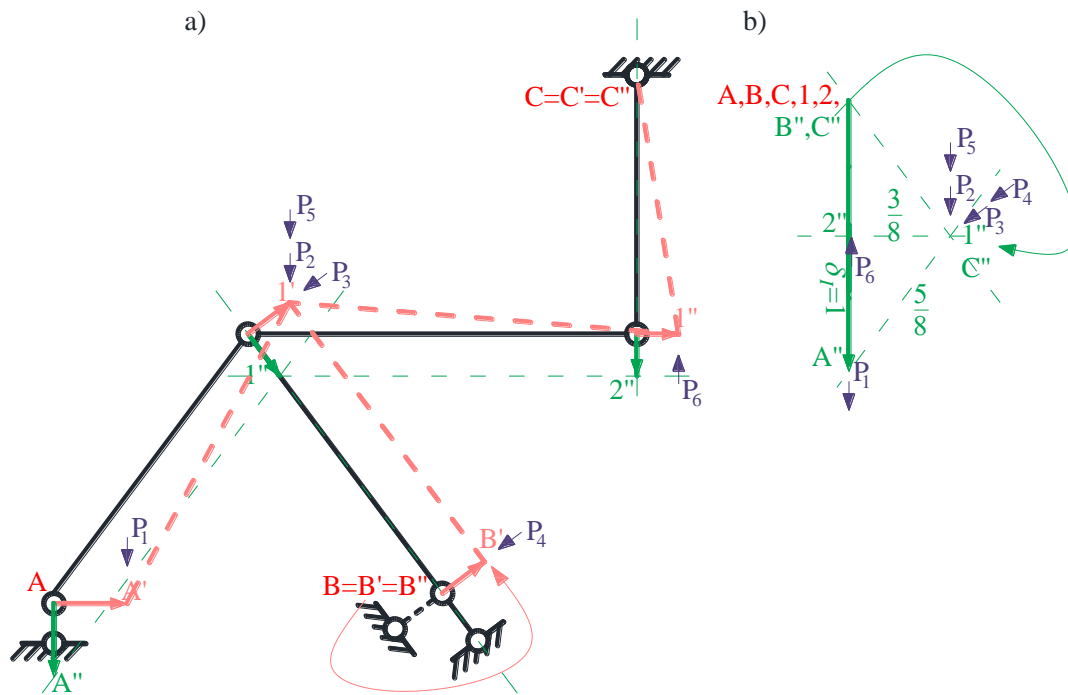
Rys. 5.2.1. Wykres momentów M^I w EI/m .

5.3. PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_I = 0$, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_I = 1$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}}c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I, \quad M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}}c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I.$$

W celu wyznaczenia szukanych kątów obrotu cięciw prętów rozpatrywany jest przegubowy model układy z dodanymi więzami translacyjnymi oraz wymuszone jest przesunięcie o wartości 1 w miejscu i na kierunku dodanej więzi I. Aby wyznaczyć szukane przemieszczenia oraz kąty obrotu cięciw prętów sporządzany jest biegunowy plan przesunięć obróconych.



Rys. 5.3.1. a) plan przemieszczeń obroconych i możliwych, b) B.P.P.O.

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{1A}^I = |1''A''| = -\frac{5}{8},$$

$$\Delta_{1C}^I = |1''C''| = 0,$$

$$\Delta_{12}^I = |1''2''| = 0$$

$$\Delta_{2B}^I = |2''B''| = -\frac{1}{2}.$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{1A}^I = \frac{\Delta_{1A}^I}{L_{1A}} = \frac{-\frac{5}{8}}{5m} = -\frac{1}{8m},$$

$$\psi_{1C}^I = \frac{\Delta_{1C}^I}{L_{1C}} = \frac{0}{5m} = 0,$$

$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{3}{8}}{6m} = \frac{1}{16m},$$

$$\psi_{2B}^I = \frac{\Delta_{2B}^I}{L_{2B}} = \frac{-\frac{1}{2}}{4m} = -\frac{1}{8m}.$$

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_I wynoszą:

$$M_{A1}^I = M_{1A}^I = -\frac{EI_{1A}}{L_{1A}} \cdot c_{A1} \cdot \psi_{1A}^I = -\frac{2EI}{5m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{8m}\right) = \frac{3}{10} \frac{EI}{m^2},$$

opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

$$M'_{1C} = M'_{C1} = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{1C} \cdot \psi'_{1C} = -\frac{EI}{5m} \cdot 0 \cdot 0 = 0,$$

$$M'_{12} = -\frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot c_{12} \cdot \psi'_{12} = -\frac{EI}{6m} \cdot 3 \cdot \frac{1}{16m} = -\frac{1}{32} \frac{EI}{m^2},$$

$$M'_{21} = 0,$$

$$M'_{2B} = M'_{B2} = 0.$$

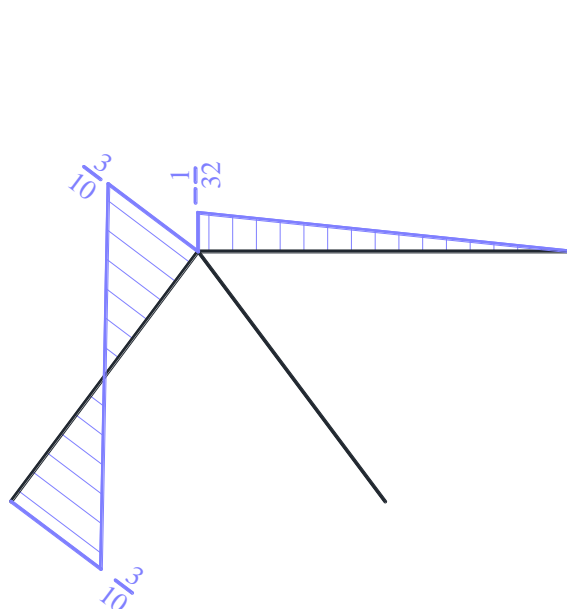
Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta'_1 = 0, \quad \delta'_2 = -\frac{3}{8}, \quad \delta'_{3_x} = -\frac{1}{2}, \quad \delta'_{4_x} = -\frac{1}{2}, \quad \delta'_5 = -\frac{3}{8}, \quad \delta'_6 = 0.$$

$$\delta'_{3_y} = -\frac{3}{8}, \quad \delta'_{4_y} = -\frac{3}{8},$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L'_{k_8} = 1$

Siła w więzi sprężystej: $S_1^{\delta_i} = k_{\delta} \cdot \Delta L'_{k_8} = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 = 1 \frac{EI}{m^3}$



Rys. 5.3.2. Wykres momentów M' w EI/m^2 .

6. UKŁAD RÓWNAŃ KANONICZNYCH METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

6.1. POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1o} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{Io} = 0$$

6.2. OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ

$$k_{11} = \sum_j M'_{1j} + k_1^{\varphi} = M'_{12} + M'_{1A} + M'_{1C} + k_1^{\varphi} = 0,5 \frac{EI}{m} + 1,6 \frac{EI}{m} + 0,2 \frac{EI}{m} = 2,3 \frac{EI}{m},$$

opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

$$k_{1I} = \sum_j M'_{1j} = M'_{12} + M'_{1A} + M'_{1C} = -0,0313 \frac{EI}{m^2} + 0,3 \frac{EI}{m^2} + 0 = 0,3313 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1o} = \sum_j M^o_{1j} - M = M^o_{12} + M^o_{1A} + M^o_{1C} = -3kN \cdot m + 3kN \cdot m - 15kN \cdot m = -15kN \cdot m,$$

$$k_{11} = -\sum_{ij} (M^1_{ij} + M^1_{ji}) \psi'_{ij} = -(M^1_{12} + M^1_{21}) \psi'_{12} - (M^1_{1A} + M^1_{A1}) \psi'_{1A} - (M^1_{1C} + M^1_{C1}) \psi'_{1C} - (M^1_{2B} + M^1_{B2}) \psi'_{2B} =$$

$$= -\left(0,5 \frac{EI}{m} + 0\right) \frac{1}{16m} - \left(1,6 \frac{EI}{m} + 0,8 \frac{EI}{m}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8m}\right) - \left(0,2 \frac{EI}{m} - 0,2 \frac{EI}{m}\right) \cdot (0) - (0+0) \cdot (0) = 0,3313 \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1,I} = -\sum_{ij} (M^I_{ij} + M^I_{ji}) \psi^I_{ij} + \sum_{ij} k^{\delta} \cdot \delta^{\delta} \cdot \delta^I = -(M^I_{12} + M^I_{21}) \psi^I_{12} - (M^I_{1A} + M^I_{A1}) \psi^I_{1A} - (M^I_{1C} + M^I_{C1}) \psi^I_{1C} -$$

$$-(M^I_{2B} + M^I_{B2}) \psi^I_{2B} + k^{\delta} \cdot \delta^I \cdot \delta^I = \left(-0,0313 \frac{EI}{m^2} + 0\right) \frac{1}{16m} - \left(0,3 \frac{EI}{m^2} + 0,3 \frac{EI}{m^2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{8m}\right) - (0+0) \cdot (0) -$$

$$-(0+0) \cdot (0) + 8 \frac{EI}{m^3} \cdot 1 \cdot 1 = 8,0770 \frac{EI}{m^3},$$

$$k_{1o} = -\sum_{ij} (M^o_{ij} + M^o_{ji}) \psi^I_{ij} - \sum_P P_P \cdot \delta^I_P = -(M^o_{12} + M^o_{21}) \psi^I_{12} - (M^o_{1A} + M^o_{A1}) \psi^I_{1A} - (M^o_{1C} + M^o_{C1}) \psi^I_{1C} -$$

$$-(M^o_{2B} + M^o_{B2}) \psi^I_{2B} - P_1 \cdot \delta^I_1 - P_2 \cdot \delta^I_2 - P_{3_x} \cdot \delta^I_{3_x} - P_{3_y} \cdot \delta^I_{3_y} - P_{4_x} \cdot \delta^I_{4_x} - P_{4_y} \cdot \delta^I_{4_y} - P_5 \cdot \delta^I_5 - P_6 \cdot \delta^I_6 =$$

$$= -(-3kN \cdot m + 0) \frac{1}{16m} - (3 - kN \cdot m + 3kN \cdot m) \cdot \left(-\frac{1}{8m}\right) - (-15kN \cdot m - 3kN \cdot m) \cdot (0) - (0+0) \cdot (0) -$$

$$-3kN \cdot 0 - 3kN \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 3,2kN \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2,4kN \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 3,2kN \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - 2,4kN \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 4kN \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) -$$

$$-4kN \cdot 0 = 8,9375kN.$$

6.3. SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$2,3 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 + 0,3313 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_1 - 15kN \cdot m = 0$$

$$0,3313 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 8,0770 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_1 + 8,9375kN = 0$$

$$\varphi_1 = 6,6770 \frac{kN \cdot m^2}{EI}, \quad \delta_1 = -1,3287 \frac{kN \cdot m^3}{EI}.$$

7. OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

7.1. OBLICZENIE MOMENTÓW BRZEGOWYCH I SIŁ W WIĘZIACH SPRĘŻYSTYCH

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M^1_{ij} \cdot \varphi_1 + M^I_{ij} \cdot \delta_1 + M^o_{ij},$$

Momenty brzegowe:

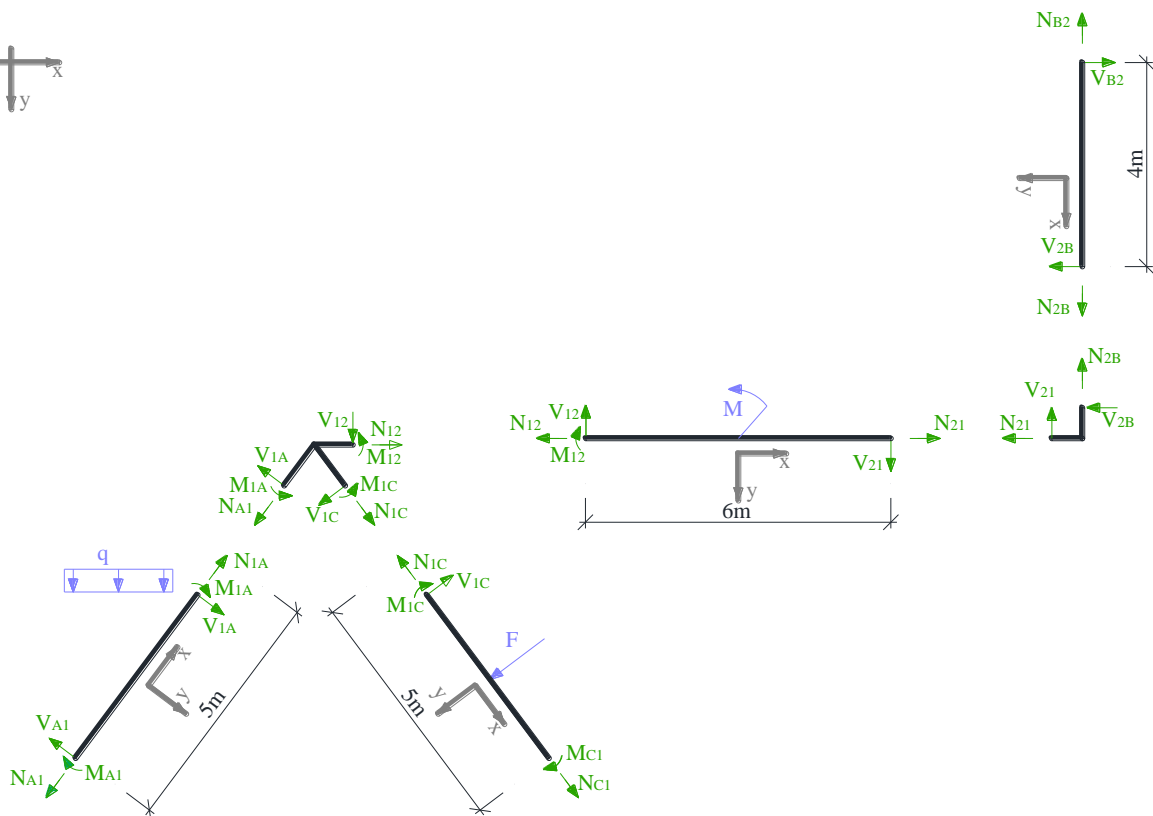
Pręt	Punkt	$\frac{M_{ij}^1}{EI}$ $\frac{m}{EI}$	$\frac{\varphi_1}{EI}$ $\frac{kN \cdot m^2}{EI}$	$\frac{M_{ij}^1}{EI}$ $\frac{m^2}{EI}$	$\frac{\delta_1}{EI}$ $\frac{kN \cdot m^3}{EI}$	$\frac{M_{ij}^o}{EI}$ $\frac{kN \cdot m}{EI}$	$\frac{M_{ij}}{EI}$ $\frac{kN \cdot m}{EI}$
1A	A	0,8	6,6770	0,3	-1,3287	-3,0	1,9430
	1	1,6		0,3		3,0	13,2846
1C	1	0,2		0		-15,0	-13,6646
	C	-0,2		0		-5,0	-6,3354
12	1	0,5		-0,0313		-3,0	0,3800
	2	0		0		0	0
2B	2	0		0		0	0
	B	0		0		0	0

Siła więzi sprężystej:

$$S_\delta = S_1^{\delta_1} \cdot \delta_1 = 8 \frac{EI}{m^3} \cdot (-1,3287) \frac{kN \cdot m^3}{EI} = -10,6296 kN$$

7.2. OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH ORAZ SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

Siły tnące określamy korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach. Siły osiowe wyznaczamy ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących oraz obciążeń działających w węzłach. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi.



Rys. 7.2.1. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

Pręt 2-B

$$\sum M_B = M_{B2} + M_{2B} + V_{2B} \cdot 4m = 0 + 0 + V_{2B} \cdot 4m = 0 \Rightarrow V_{2B} = 0,$$

$$\sum V = V_{2B} - V_{B2} = 0 - V_{B2} = 0 \Rightarrow V_{B2} = 0,$$

$$\sum N = N_{2B} - N_{B2} = 0 \Rightarrow N_{B2} = N_{2B}.$$

Pręt 1-2

$$\sum M_1 = M_{12} - M + V_{21} \cdot 6m = [0,3800 - 24 + V_{21} \cdot 6] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{21} = 3,9367 kN,$$

$$\sum V = V_{12} - V_{21} = [V_{12} - 3,9456] kN = 0 \Rightarrow V_{12} = 3,9367 kN$$

$$\sum N = N_{12} - N_{21} = 0 \Rightarrow N_{12} = N_{21}.$$

Pręt 1-C

$$\sum M_C = M_{1C} + M_{C1} + V_{1C} \cdot 5m - F \cdot 2,5m = [-13,6646 - 6,3354 + V_{1C} \cdot 5 - 8 \cdot 2,5] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{1C} = 8 kN,$$

$$\sum M_1 = M_{1C} + M_{C1} + F \cdot 2,5m = [-13,6646 - 6,3354 + 8 \cdot 2,5] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum N = N_{1C} - N_{C1} = 0 \Rightarrow N_{C1} = N_{1C}.$$

Pręt 1-A

$$\sum M_A = M_{A1} + M_{1A} + V_{1A} \cdot 5m + q \cdot 3m \cdot 1,5m = [1,9430 + 13,2846 + V_{1A} \cdot 5 + 4 \cdot 3 \cdot 1,5] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{1A} = -6,6455 kN,$$

$$\sum M_1 = M_{A1} + M_{1A} + V_{A1} \cdot 4m - q \cdot 3m \cdot 1,5m = [1,9430 + 13,2846 + V_{A1} \cdot 5 - 4 \cdot 3 \cdot 1,5] kN \cdot m = 0 \Rightarrow V_{A1} = 0,5545 kN,$$

$$\sum N = N_{A1} - N_{1A} + q \cdot 3m \cdot 0,8 = 0 \Rightarrow N_{A1} = N_{1A} - 4 kN / m \cdot 3m \cdot 0,8.$$

Węzeł 2

$$\sum M_2 = M_{21} + M_{2B} = [0 + 0] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum X = V_{2B} + N_{21} = [0 + N_{21}] kN = 0 \Rightarrow N_{21} = 0,$$

$$\sum Y = V_{21} + N_{2B} = [3,9367 + N_{2B}] kN = 0 \Rightarrow N_{2B} = -3,9367 kN.$$

Z trzeciego równania dla pręta 2-B $N_{B2} = N_{2B} = -3,9367 kN$.

Z trzeciego równania dla pręta 1-2 $N_{12} = N_{21} = 0$.

Węzeł 1

$$\sum M_1 = M_{12} + M_{1A} + M_{1C} = [0,3800 + 13,2846 + (-13,6646)] kN \cdot m = 0,$$

$$\sum X = N_{12} + N_{1C} \cdot 0,6 - V_{1C} \cdot 0,8 - N_{1A} \cdot 0,6 - V_{1A} \cdot 0,8 = [0 + N_{1C} \cdot 0,6 - 8 kN \cdot 0,8 - N_{1A} \cdot 0,6 - (-6,6455) \cdot 0,8] kN = 0$$

$$\sum Y = -V_{12} + N_{1C} \cdot 0,8 + V_{1C} \cdot 0,6 + N_{1A} \cdot 0,6 - V_{1A} \cdot 0,6 = [-3,9367 + N_{1C} \cdot 0,8 + 8 kN \cdot 0,6 + N_{1A} \cdot 0,6 - (-6,6455) \cdot 0,6] kN$$

$$\Rightarrow N_{1A} = -8,8555 kN, \quad N_{1C} = -7,0495 kN$$

Z trzeciego równania dla pręta 1-A $N_{A1} = -8,8555 kN - 9,6 kN = -18,4555 kN$.

Z trzeciego równania dla pręta 1-C $N_{C1} = N_{1C} = -7,0495$

Obliczenie momentów zginających

$$M_{zgin,A1} = M_{A1} = 1,9430 kN \cdot m,$$

$$M_{zgin,1A} = -M_{1A} = -13,2846 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,1C} = M_{1C} = -13,6646 kN \cdot m,$$

$$M_{zgin,C1} = -M_{C1} = 6,3354$$

opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

$$M_{zgin,12} = M_{12} = 1,6034kN \cdot m = 0,3800kN \cdot m,$$

$$M_{zgin,21} = M_{21} = 0$$

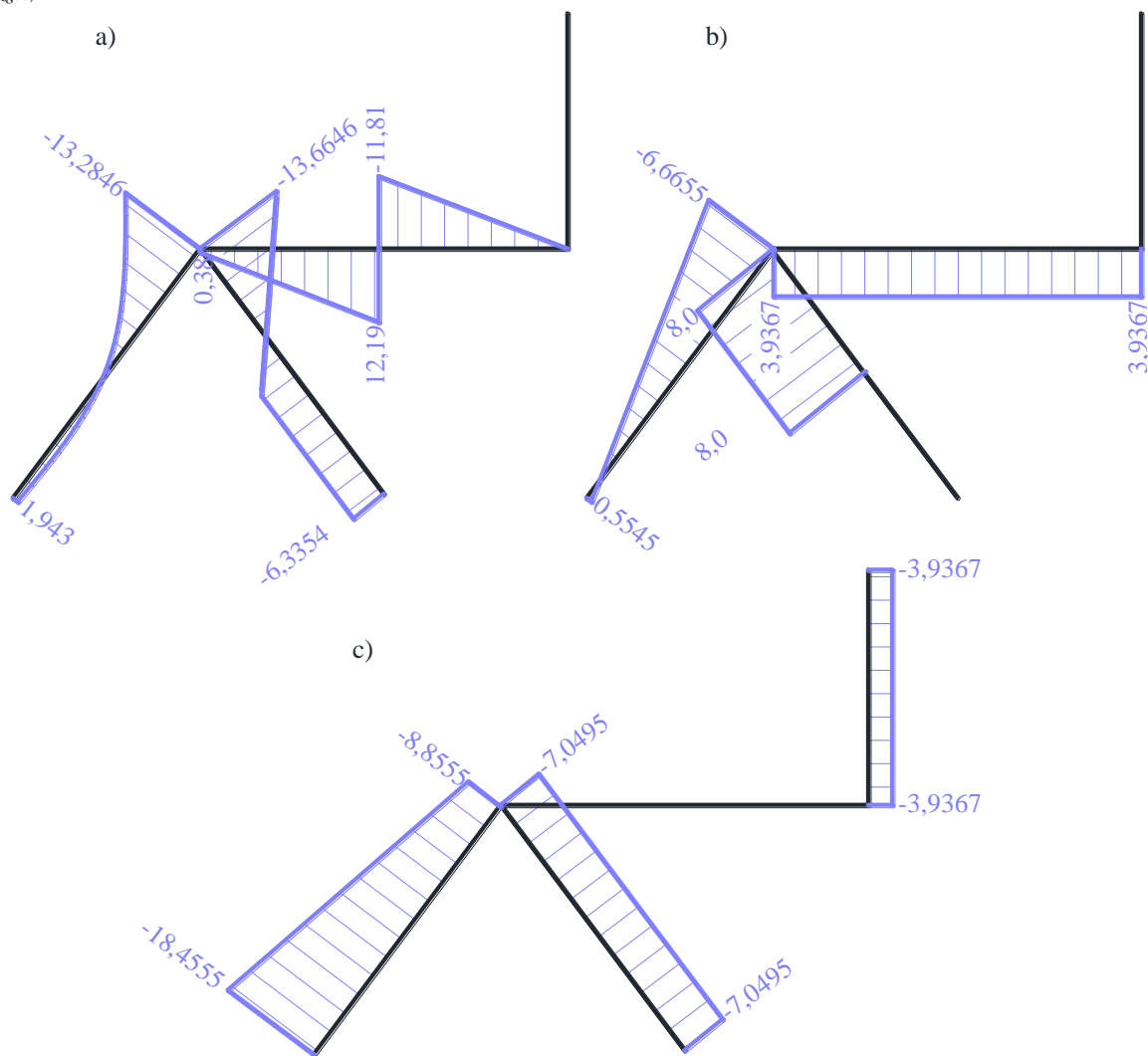
$$M_{zgin,2B} = -M_{2B} = 0,$$

$$M_{zgin,B2} = M_{B2} = 0$$

$$M_{zgin,3} = M_{A1} + V_{A1} \cdot 2,5m - q \cdot 1,5m \cdot \frac{1,5m}{2} = [1,9430 + 0,5545 \cdot 2,5m - 4 \cdot 1,5 \cdot 0,75]kN \cdot m = -1,1708kN \cdot m$$

$$M_{zgin,4}^P = -V_{21} \cdot 3m = -3,9367kN \cdot 3m = -11,8100kN \cdot m$$

$$M_{zgin,4}^L = -V_{21} \cdot 3m + M = -3,9367kN \cdot 3m + 24kN \cdot m = 12,1900kN \cdot m$$

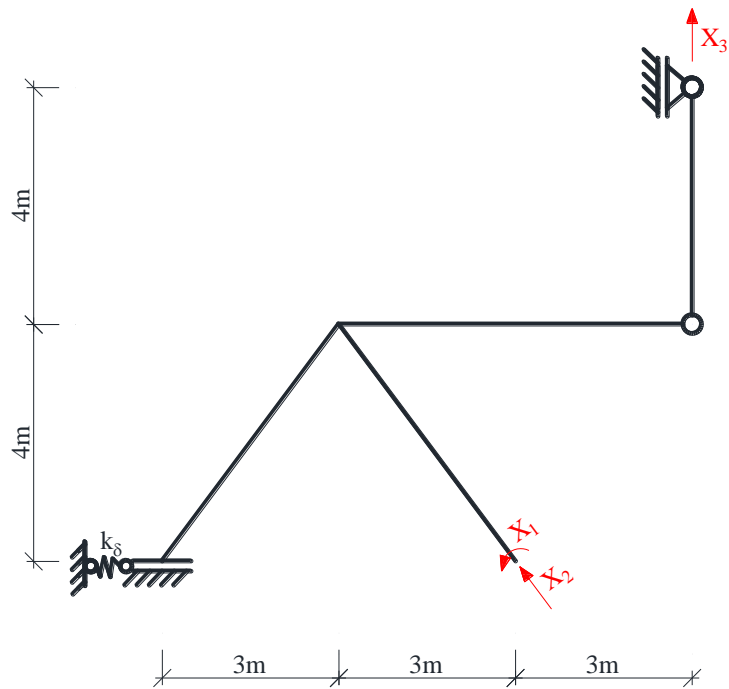


Rys. 5.2.2. Wykres a) momentów zginających M w $kN \cdot m$, b) sił tnących V w kN , c) sił osiowych N w kN

8. KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach przeciętych więzi. W tym celu dobierany jest układ podstawowy metody sił. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu. Ponieważ dany układ jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalny dobrano układ podstawowy przecinając trzy więzi podporowe. Przemieszczenia obliczane są za pomocą wzoru

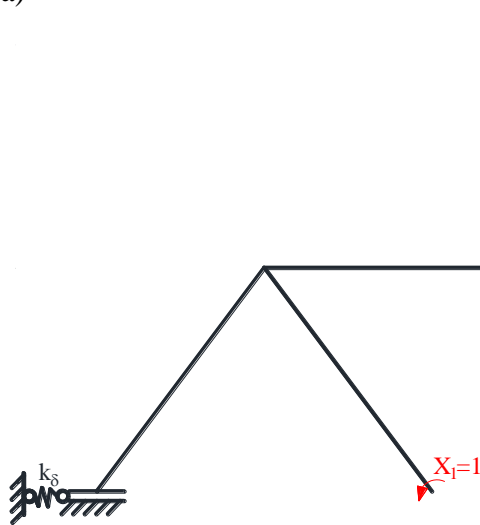
$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n}$$



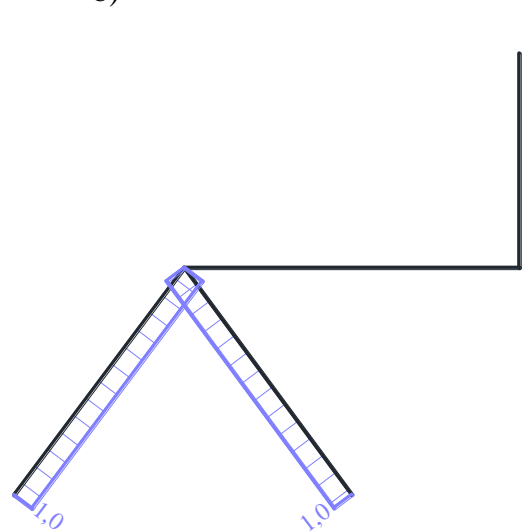
Rys. 8.1. Układ podstawowy metody sił bez obciążenia danego

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_1 = 1$

a)



b)

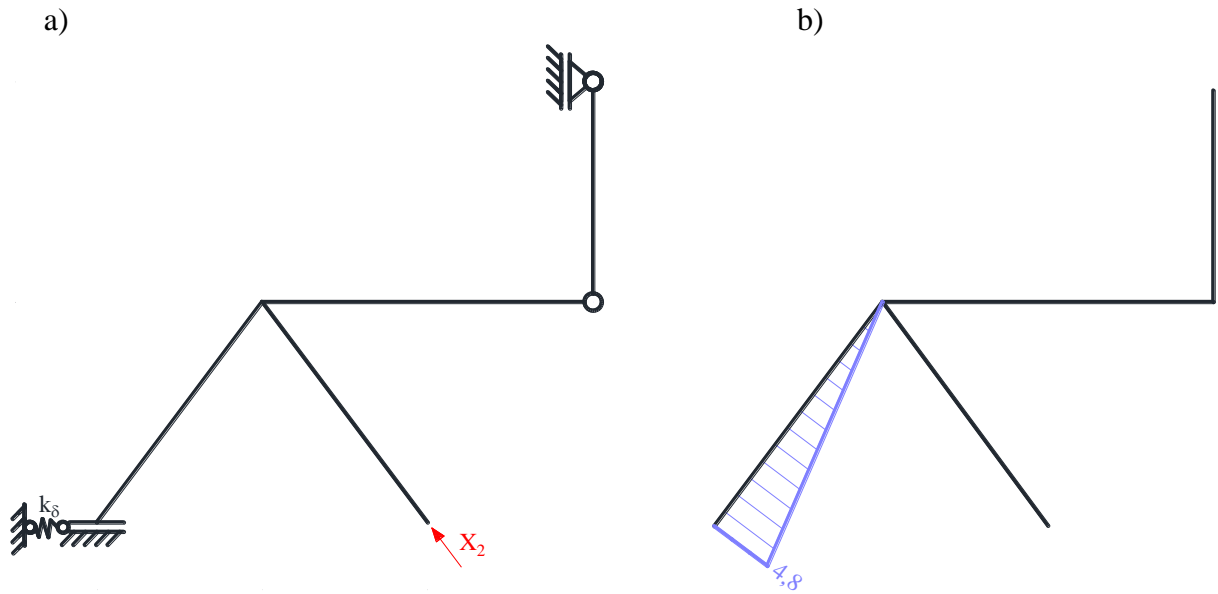


Rys. 8.2. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_1 = 1$, b) wykres momentów zginających \bar{M}^1

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_s^1 = 0$

$$\Delta_{1F} = \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{5m}{6 \cdot 2EI} [1 \cdot 1,9430 kN \cdot m + 4 \cdot 1 \cdot (-1,1708) kN \cdot m + 1 \cdot (-13,3846) kN \cdot m] + \frac{2,5m}{6 \cdot EI} [1 \cdot (-13,6646) kN \cdot m + 4 \cdot 1 \cdot (-3,6646) kN \cdot m + 1 \cdot (-6,3354) kN \cdot m] + \frac{2,5m}{6 \cdot EI} [1 \cdot (-6,3354) kN \cdot m + 4 \cdot 1 \cdot (-6,3354) kN \cdot m + 1 \cdot (-6,3354) kN \cdot m] + \frac{0 \cdot (-10,6296) kN}{8 \frac{EI}{m^3}} \Bigg\} = 0$$

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej ($X_2 = 1$)kN·m

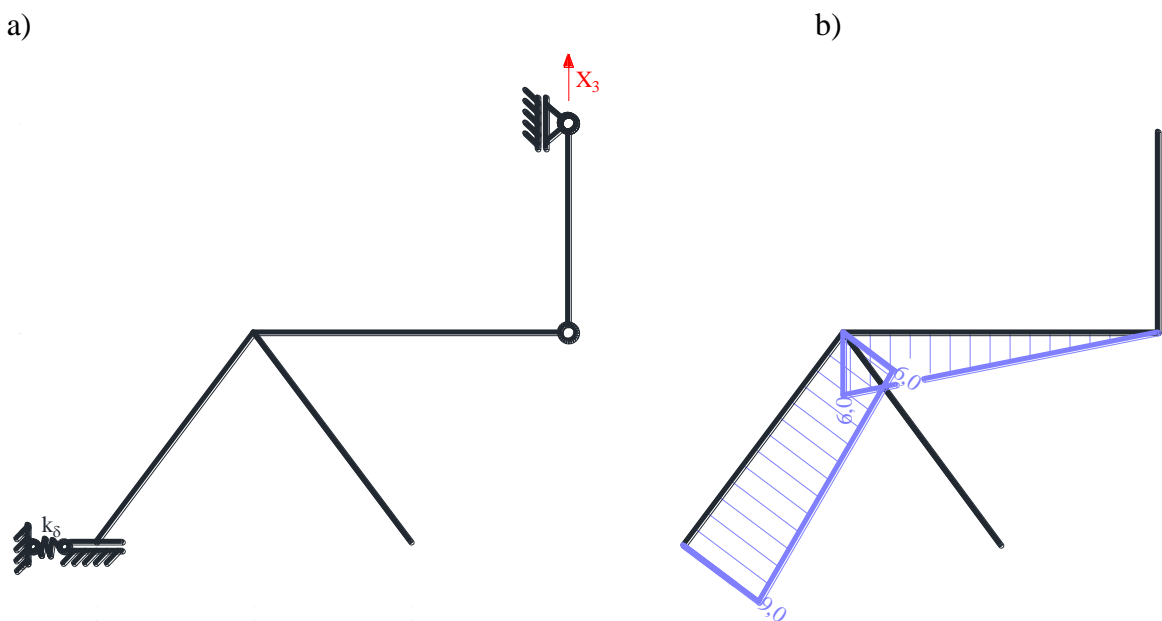


Rys. 8.3. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_2 = 1$, b) wykres momentów zginających \bar{M}^2 w m

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_8^2 = -0,6$

$$\Delta_{2F} = \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{5m}{6 \cdot 2EI} [4,8m \cdot 1,9430kN \cdot m + 4 \cdot 2,4m \cdot (-1,1708)kN \cdot m + 0 \cdot (-13,3846)kN \cdot m] + \frac{(-0,6) \cdot (-10,6296)kN}{8 \frac{EI}{m^3}} = 0$$

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_3 = 1$



Rys. 8.4. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_3 = 1$, b) wykres momentów zginających \bar{M}^3 w m

opracowała dr inż. Olga Szyłko-Bigus

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^3 = 0$

$$\begin{aligned}\Delta_{3F} = & \int \frac{\bar{M}^3 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^3 \cdot S_n^F}{k_n} = \frac{5m}{6 \cdot 2EI} [9m \cdot 1,9430kN \cdot m + 4 \cdot 7,5m \cdot (-1,1708)kN \cdot m + 6m \cdot (-13,3846)kN \cdot m] \\ & + \frac{3m}{6 \cdot EI} [6m \cdot 0,3800kN \cdot m + 4 \cdot 4,5m \cdot 6,2850kN \cdot m + 3m \cdot 12,1900kN \cdot m] + \\ & + \frac{3m}{6 \cdot EI} [6m \cdot (-11,8100)kN \cdot m + 4 \cdot 4,5m \cdot (-5,905 -)kN \cdot m + 3m \cdot 0kN \cdot m] + \frac{0 \cdot (-10,6296)kN}{8 \frac{EI}{m^3}} = 0\end{aligned}$$