

ZADANIE 1.

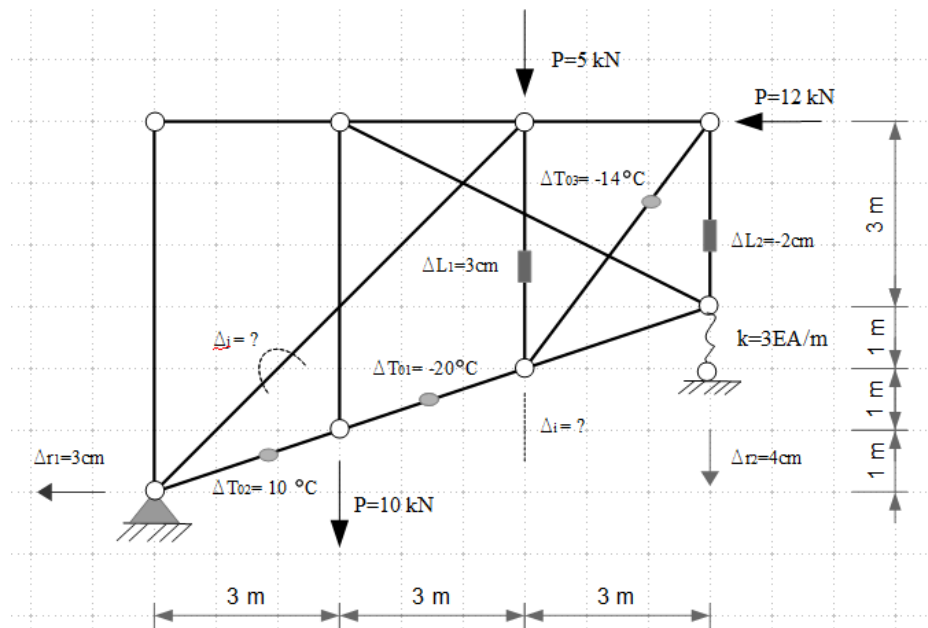
Dana jest kratownica płaska izostaticzna o schemacie i obciążeniu mechanicznym (charakterystycznym) i niemechanicznym jak na rysunku. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Wyznaczyć siły osiowe w prętach wywołane zadaniem obciążeniem.
- Zaprojektować wstępnie przekroje prętów tak by wystąpiły pręty o przynajmniej 2 różnych polach przekroju poprzecznego.
- Wyznaczyć z wykorzystaniem komputera siły osiowe w prętach wywołane obciążeniami jednostkowymi.
- Obliczyć zaznaczoną składową przesunięcia węzła lub kąt obrotu zaznaczonego pręta od każdego typu obciążenia oddzielnie:

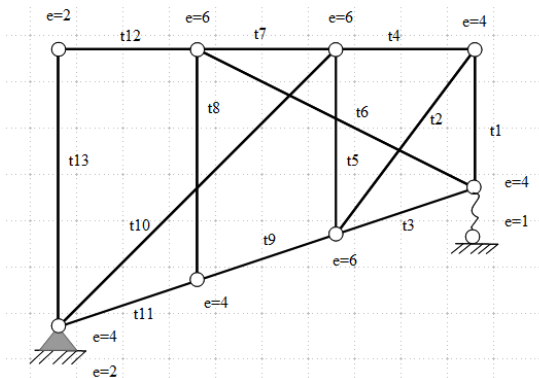
$$\Delta_i^F = ?, \quad \Delta_j^F = ?, \quad \Delta_i^T = ?, \quad \Delta_j^T = ?, \quad \Delta_i^{\Delta r} = ?, \quad \Delta_j^{\Delta r} = ?, \quad \Delta_i^{\Delta m} = ?, \quad \Delta_j^{\Delta m} = ?$$

W obliczeniach przyjąć:

- średni współczynnik obciążenia $\gamma_f = 1.2$,
- wytrzymałość obliczeniową stali $f_d = 215 \text{ MPa}$,
- współczynnik sprężystości podłużnej $E = 205 \text{ GPa}$



1. Sprawdzenie geometrycznej niezmienności (GN) i statycznej wyznaczalności (SW) układu



- sprawdzenie warunku ilościowego geometrycznej niezmienności: $e \geq 3t$

$e = 39$ – liczba więzi zewnętrznych i wewnętrznych

$t = 13$ – liczba tarcz tworzących graf otwarty

$39 = 3 \cdot 13$; ($e = 3t$)

✓ Warunek ilościowy GN i SW spełniony

- sprawdzenie warunku jakościowego geometrycznej niezmienności:

Twierdzenie o 3 tarczach Aronholdta stwierdza, że jeśli każda z trzech tarcz połączonych jest za pomocą dwóch więzi elementarnych i środki wzajemnego obrotu tych tarcz nie leżą na jednej prostej, to tarcze te tworzą jedną tarczę stąd:

$$\begin{aligned} t1 + t2 + t3 &= tI, \\ tIII + t8 + t9 &= tIV, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tI + t4 + t5 &= tII, \\ tIV + t10 + t11 &= tV, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} tII + t6 + t7 &= tIII, \\ tV + t12 + t13 &= tVI \end{aligned}$$

Z powyższego wynika, że kratownica ma strukturę trójkątną, tworzy jedną tarczę tVI , tarcza ta podparta jest z ostoją trzema niezbieżnymi więziami, stąd na mocy twierdzenia o dwóch tarczach tworzy tarczę nieruchomą (prawidłowo odebrane ma trzy stopnie swobody): $tVI + t0 = t0$

✓ Warunek jakościowy GN spełniony

Wniosek:

Wobec spełnionego warunku ilościowego i jakościowego geometrycznej niezmienności układ jest GN i SW.

2. Zaprojektowanie wstępne przekrojów prętów

Aby zachować stan graniczny nośności prętów (SGN) należy spełnić warunek:

$$\sigma \leq f_d$$

f_d - wytrzymałość obliczeniową materiału z jakiego projektuje się pręty

σ - dopuszczalne naprężenia normalne w przekroju pręta zależne od wartości sił przekrojowych

W kratownicy :

σ_r - naprężenia normalne przy rozciąganiu wyraża relacja: $\sigma_r = \frac{\max N_r^F \cdot \gamma_f}{A_r}$

σ_{sc} - naprężenia normalne przy ściskaniu wyraża relacja: $\sigma_{sc} = \frac{|\max N_{sc}^F| \cdot \gamma_f}{A_{sc} \cdot \varphi}$

(**UWAGA:** w projekcie przyjmujemy:

$f_d = 215 \text{ MPa}$ - wytrzymałość obliczeniowa dla stali, $\gamma_f = 1.2$ - współczynnik obciążenia,

$\varphi = 0.5$ - współczynnik wyboczenia ,

$\{\max N_r^F, |\max N_{sc}^F|\}$ - maksymalne wartości sił osiowych rozciągających i ściskających wywołanych

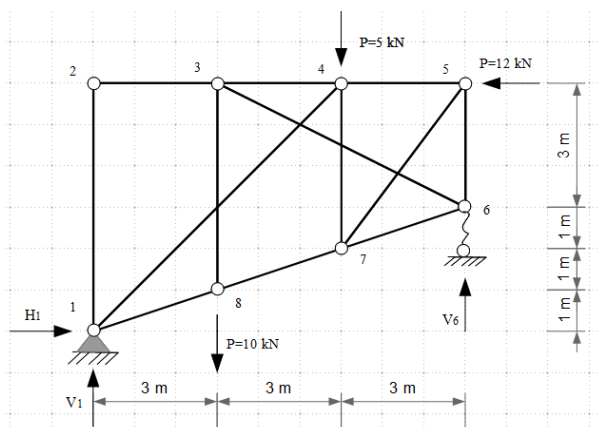
obciążeniem mechanicznym w układzie zadanym wyliczamy z warunków równowagi płaskiego układu sił)

Po przekształceniu wyrażenia $\sigma \leq f_d$ pole przekroju projektowanego pręta w kratownicy wyznacza się z odpowiednich nierówności:

$$A_r \geq \frac{\max N_r^F \cdot \gamma_f}{f_d}, \quad A_{sc} \geq \frac{|\max N_{sc}^F| \cdot \gamma_f}{f_d \cdot \varphi}$$

W celu wyznaczenia maksymalnych sił osiowych $\{\max N_r^F, |\max N_{sc}^F|\}$ w prętach kratownicy należy rozwiązać kratownicę od obciążenia mechanicznego (F).

2.1. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia mechanicznego (F)



Reakcje podporowe:

$$\begin{aligned} \sum M_1 = 0 \\ -V_6 \cdot 9m + 10kN \cdot 3m + 5kN \cdot 6m - 12kN \cdot 6m = 0, \\ V_6 = -1.333 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum Z = 0 \\ V_6 - 10kN - 5kN + V_1 = 0, \\ V_1 = 16.333 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum X = 0 \\ H_1 - 12kN = 0, \\ H_1 = 12.000 \text{ kN} \end{aligned}$$

Siły osiowe wyznaczono metodą równoważenia sił w węzłach

(z warunków równowagi płaskiego zbieżnego układu sił):

Węzeł 2

$$\sum X = 0, \sum Z = 0, \quad N_{12} \rightarrow 0; \quad N_{23} \rightarrow 0;$$

Węzeł 1

$$\sum X = 0,$$

$$N_{14} \cdot \cos\beta + N_{18} \cdot \cos\alpha + 12 = 0$$

$$\sum Z = 0,$$

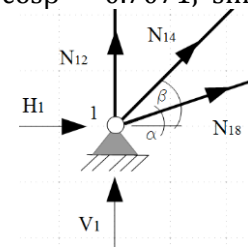
$$N_{14} \cdot \sin\beta + N_{18} \cdot \sin\alpha + 16.333 = 0$$

$$\{N_{18} \rightarrow 6.85107455,$$

$$N_{14} \rightarrow -26.162243\}$$

$$\cos\alpha = 0.9486832; \sin\alpha = 0.316227766$$

$$\cos\beta = 0.7071; \sin\beta = 0.7071$$

**Węzeł 8**

$$\sum X = 0, N_{78} \cos\alpha - N_{18} \cos\alpha$$

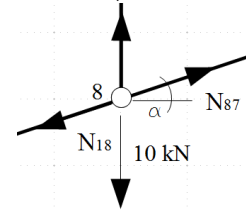
$$\sum Z = 0,$$

$$N_{38} + N_{78} \sin\alpha - N_{18} \sin\alpha - 10 = 0$$

$$N_{78} \rightarrow 6.85107$$

$$N_{38} \rightarrow 10$$

$$\cos\alpha = 0.9486832; \sin\alpha = 0.316227766$$

**Węzeł 3**

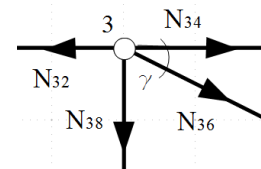
$$\sum Z = 0, -N_{38} - N_{36} \sin\gamma = 0$$

$$\sum X = 0, N_{34} + N_{36} \cos\gamma = 0$$

$$N_{36} \rightarrow -22.36067$$

$$N_{34} \rightarrow 20$$

$$\cos\gamma = 0.894427190; \sin\gamma = 0.44721$$

**Węzeł 4**

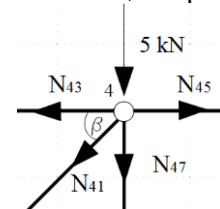
$$\sum Z = 0; -5 - N_{74} - N_{14} \cdot \sin\beta = 0$$

$$\sum X = 0 - N_{34} - (N_{14} \cdot \cos\beta) + N_{45} = 0$$

$$N_{74} \rightarrow 13.499499999$$

$$N_{45} \rightarrow 1.500500000$$

$$\cos\beta = 0.7071; \sin\beta = 0.7071$$

**Węzeł 5**

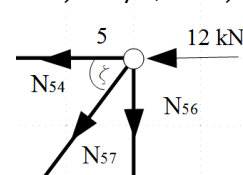
$$\sum X = 0; -N_{45} - (N_{57} \cdot \cos\xi) - 12 = 0$$

$$\sum Z = 0; -N_{56} - (N_{57} \cdot \sin\xi) = 0$$

$$N_{57} \rightarrow -22.5008333$$

$$N_{56} \rightarrow 18.00066666$$

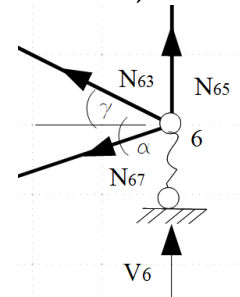
$$\cos\xi = 3/5; \sin\xi = 4/5$$

**Węzeł 6**

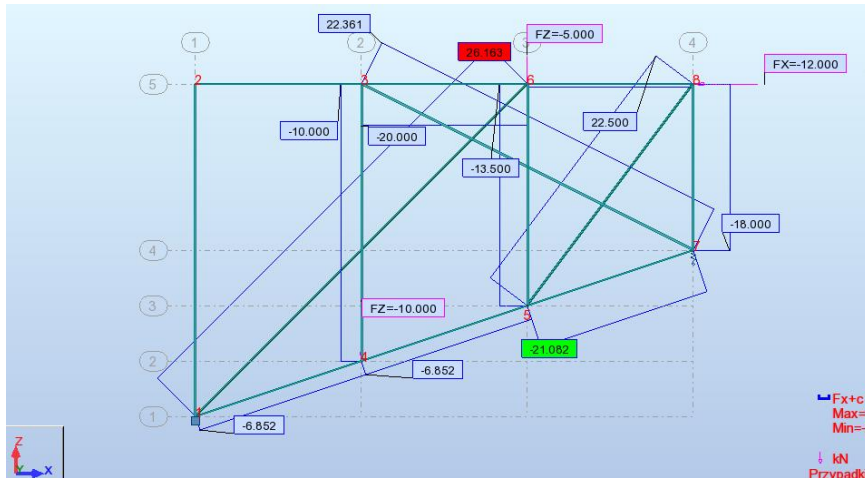
$$\sum Z = 0; N_{56} - 1.333 + (N_{36} \sin\gamma) - N_{76} \sin\alpha = 0$$

$$N_{76} \rightarrow 21.085013$$

$$\cos\alpha = 0.948683; \sin\alpha = 0.3162277$$



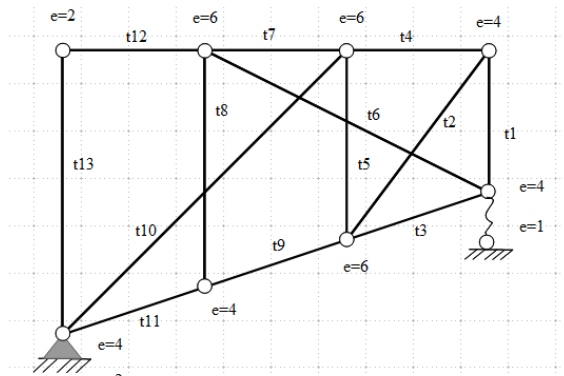
Zestawienie sił osiowych od obciążenia (F)



Rys. Siły osiowe od obciążenia (F) – wyliczone w systemie Robot (na wykresie siły ściskające znak „+”, siły rozciągające znak „-„)

$$\begin{aligned}
 N_{12}^F &= 0 \\
 N_{23}^F &= 0 \\
 N_{87}^F &= + 6.852 \text{ kN} \\
 N_{81}^F &= + 6.852 \text{ kN} \\
 N_{14}^F &= -26.163 \text{ kN} \\
 N_{38}^F &= +10.000 \text{ kN} \\
 N_{34}^F &= +20.000 \text{ kN} \\
 N_{36}^F &= - 22.361 \text{ kN} \\
 N_{74}^F &= +13.500 \text{ kN} \\
 N_{75}^F &= -22.500 \text{ kN} \\
 N_{76}^F &= +21.082 \text{ kN} \\
 N_{54}^F &= +1.500 \text{ kN} \\
 N_{56}^F &= + 18.000 \text{ kN} \\
 S_{\delta}^F &= +1.333 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

2.2. Wyznaczenie przekrojów prętów



Wyróżniono 3 grupy prętów :

- I. **pas górny** : t12, t7, t4
- II. **pas dolny** : t11, t9, t3
- III. **krzyżulce**: t13, t10, t8, t5, t6, t1, t2

Z punktu 2.1. spisano maksymalne siły osiowe rozciągające i ściskające w każdej z poszczególnych grup prętów oraz wyznaczono odpowiednie pola przekrojów prętów

- I. **pas górny** : $\max N_r^F = N_{34}^F = 20.00 \text{ kN}$, $\max N_{sc}^F = 0 \text{ kN}$,

$$A_r \geq \frac{\max N_r^F \cdot \gamma_f}{f_d} = \frac{20 \text{ kN} \cdot 1.2}{215000 \text{ kN/m}^2} = 0.0001116279 \text{ m}^2 = 1.116279 \text{ cm}^2$$

Przyjęto kątownik równoramienny 20x20x4 ($A_{L20x20x4} = 1.42 \text{ cm}^2$)

- II. **pas dolny**: $\max N_r^F = N_{76}^F = 21.082 \text{ kN}$, $\max N_{sc}^F = 0 \text{ kN}$,

$$A_r \geq \frac{\max N_r^F \cdot \gamma_f}{f_d} = \frac{21.082 \text{ kN} \cdot 1.2}{215000 \text{ kN/m}^2} = 0.0001176669 \text{ m}^2 = 1.176669 \text{ cm}^2$$

Przyjęto kątownik równoramienny 20x20x4 ($A_{L20x20x4} = 1.42 \text{ cm}^2$)

- III. **krzyżulce**: $\max N_r^F = N_{54}^F = 18.00 \text{ kN}$, $\max N_{sc}^F = -26,163 \text{ kN}$,

$$A_{sc} \geq \frac{|\max N_{sc}^F| \cdot \gamma_f}{f_d \cdot \varphi} = \frac{26.163 \text{ kN} \cdot 1.2}{215000 \text{ kN/m}^2 \cdot 0.5} = 0.000292052 \text{ m}^2 = 2.92052 \text{ cm}^2$$

Przyjęto kątownik równoramienny 35x35x5 ($A_{L35x35x5} = 3.28 \text{ cm}^2$)

Obliczenie sztywności podłużnej prętów oraz współczynnika sztywności więzi sprężystej translacyjnej:

$$EA_I = 205000000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 0.000142 \text{ m}^2 = 29110 \text{ kN} \quad (\text{sztywność prętów pasma górnego})$$

$$EA_{II} = 205000000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 0.000142 \text{ m}^2 = 29110 \text{ kN} \quad (\text{sztywność prętów pasma dolnego})$$

$$EA_{III} = 205000000 \frac{\text{kN}}{\text{m}^2} \cdot 0.000328 \text{ m}^2 = 67240 \text{ kN} \quad (\text{sztywność krzyżulców})$$

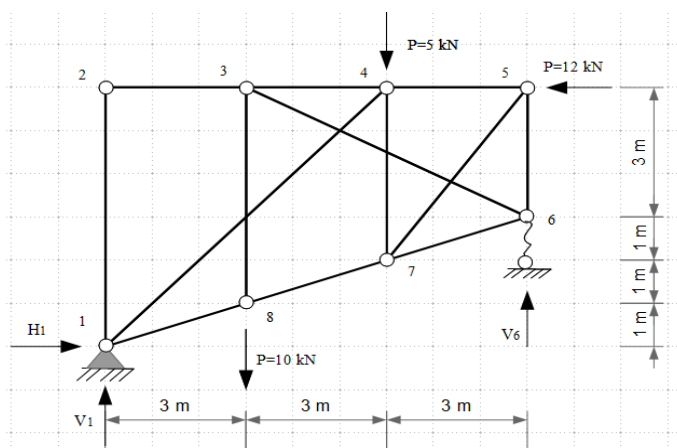
$$k_\delta = \frac{3EA_I}{m} = 3 \cdot 29110 \frac{\text{kN}}{\text{m}} = 87330 \text{ kN/m} \quad (\text{sztywność więzi sprężystej})$$

3. Obliczenie przemieszczeń od obciążenia mechanicznego (F)

3.1. $\Delta_i^F = ?$ (przemieszczenie węzła i wywołane obciążeniem mechanicznym)

3.1.1. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia mechanicznego (F)

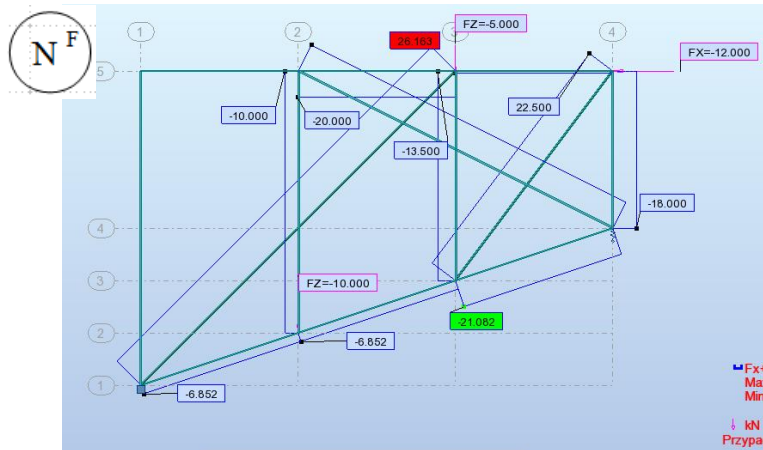
Wartości reakcji i sił osiowych wywołanych obciążeniem zadanym (F) w analizowanej kratownicy wyznaczono w punkcie 2.1. Poniżej jeszcze raz zestawiono wyniki:



$$V_6^F = -1.333 \text{ kN}$$

$$V_1^F = 16.333 \text{ kN}$$

$$H_1^F = 12.000 \text{ kN}$$

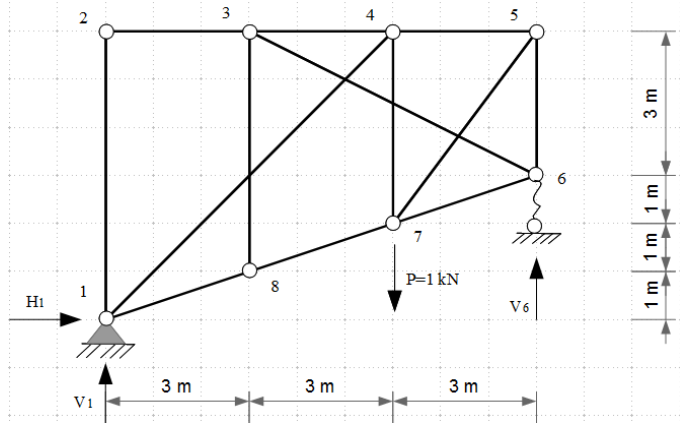


$$\begin{aligned}
 N_{12}^F &= 0 \\
 N_{23}^F &= 0 \\
 N_{87}^F &= + 6.852 \text{ kN} \\
 N_{81}^F &= + 6.852 \text{ kN} \\
 N_{14}^F &= -26.163 \text{ kN} \\
 N_{38}^F &= +10.000 \text{ kN} \\
 N_{34}^F &= +20.000 \text{ kN} \\
 N_{36}^F &= - 22.361 \text{ kN} \\
 N_{74}^F &= +13.500 \text{ kN} \\
 N_{75}^F &= -22.500 \text{ kN} \\
 N_{76}^F &= +21.082 \text{ kN} \\
 N_{56}^F &= +18.000 \text{ kN} \\
 N_{54}^F &= + 1.500 \text{ kN} \\
 S_{\delta}^F &= +1.333 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

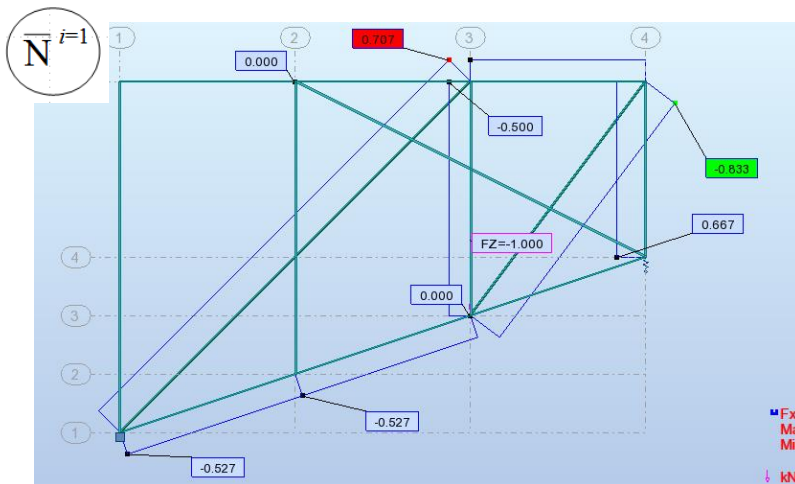
Rys. Siły osiowe od obciążenia (F) – wyliczone w systemie Robot (na wykresie siły ściskające znak „+”, siły rozciągające znak „-„)

3.1.2. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia ($i=1$ kN)

Rozwiązania uzyskano w systemie Robot i poniżej zestawiono wyniki:



$$\begin{aligned}
 \bar{V}_6^{i=1} &= 0.667 \text{ kN} \\
 \bar{V}_1^{i=1} &= 0.333 \text{ kN} \\
 \bar{H}_1^{i=1} &= 0.000 \text{ kN}
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 \bar{N}_{12}^{i=1} &= 0.000 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{23}^{i=1} &= 0.000 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{87}^{i=1} &= +0.527 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{81}^{i=1} &= + 0.527 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{14}^{i=1} &= -0.707 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{38}^{i=1} &= 0.000 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{34}^{i=1} &= 0.000 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{36}^{i=1} &= 0.000 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{74}^{i=1} &= +0.500 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{75}^{i=1} &= +0.833 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{76}^{i=1} &= 0.000 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{56}^{i=1} &= -0.667 \text{ kN} \\
 \bar{N}_{54}^{i=1} &= -0.500 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

Rys. Siły osiowe od obciążenia jednostkowego ($i=1$) – wyliczone w systemie Robot (na wykresie siły ściskające znak „+”, siły rozciągające znak „-„)

$$\bar{S}_{\delta}^{i=1} = -0.667 \text{ kN}$$

3.1.3. Zastosowanie zasady prac przygotowanych do wyznaczenia przemieszczenia Δ_i^F

Zasada prac przygotowanych przy obciążeniu mechanicznym (stan rzeczywisty) i obciążeniu jednostkowym $i=1$ kN (stan wirtualny) przyjmuje postać:

$$1kN \cdot \Delta_i^F = \sum_p \left(\int \bar{N}^{i=1} \frac{N^F}{EA} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{i=1} \cdot S_m^F}{k_m} = \sum_m \frac{\bar{N}_p^{i=1} \cdot N_p^F \cdot L_p}{EA_p} + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{i=1} \cdot S_m^F}{k_m}$$

$$\begin{aligned} 1kN \cdot \Delta_i^F &= \frac{\bar{N}_{81}^{i=1} \cdot N_{81}^F \cdot L_{81}}{EA_{II}} + \frac{\bar{N}_{87}^{i=1} \cdot N_{87}^F \cdot L_{87}}{EA_{II}} + \frac{\bar{N}_{45}^{i=1} \cdot N_{45}^F \cdot L_{45}}{EA_I} + \frac{\bar{N}_{14}^{i=1} \cdot N_{14}^F \cdot L_{14}}{EA_{III}} + \\ &\frac{\bar{N}_{74}^{i=1} \cdot N_{74}^F \cdot L_{74}}{EA_{III}} + \frac{\bar{N}_{75}^{i=1} \cdot N_{75}^F \cdot L_{75}}{EA_{III}} + \frac{\bar{N}_{56}^{i=1} \cdot N_{56}^F \cdot L_{56}}{EA_{III}} + \frac{\bar{S}_\delta^{i=1} \cdot S_\delta^F}{k_\delta} = \\ &= \frac{0.527 kN \cdot 6.852 kN \cdot 3.162m}{29110 kN} + \frac{0.527 kN \cdot 6.852 kN \cdot 3.162m}{29110 kN} + \frac{(-0.5 kN) \cdot 1.5 kN \cdot 3m}{29110 kN} + \frac{(-0.707 kN) \cdot (-26.163 kN) \cdot 8.485m}{67240 kN} + \\ &+ \frac{0.5 kN \cdot 13.5 kN \cdot 4m}{67240 kN} + \frac{0.833 kN \cdot (-22.5 kN) \cdot 5m}{67240 kN} + \frac{(-0.667 kN) \cdot 18 kN \cdot 3m}{67240 kN} + \frac{(-0.667) kN \cdot 1.333 kN}{87330 kN/m} = 0.001503 kNm \end{aligned}$$

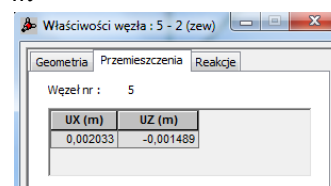
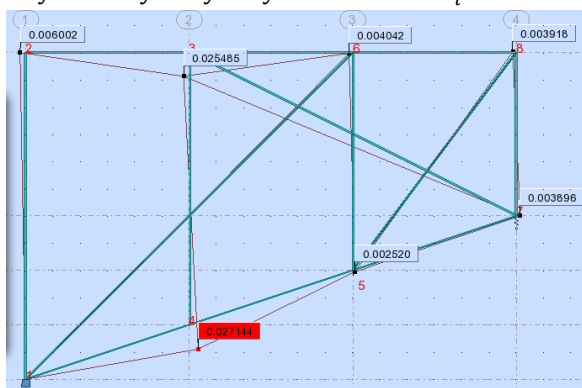
$$1kN \cdot \Delta_i^F = 0.001503 kNm \quad /: 1kN$$

$$\Delta_i^F = 0.001503 m$$

Odpowiedź:

Wartość przemieszczenia węzła i w kierunku pionowym spowodowanego obciążeniem mechanicznym (F) wynosi: $\Delta_i^F = 0.001503 m$. Zwrot wyznaczonego przemieszczenia jest zgodny ze zwrotem przyłożonej siły jednostkowej $i=1$ kN.

Wynik otrzymany w Systemie Robot $\Delta_i^F = 0.001489 m$



Rys. Schemat przemieszczenia układu pod wpływem obciążenia mechanicznego (F).

3.2. $\Delta_j^F = ?$ (obrót pręta j wywołany obciążeniem mechanicznym)

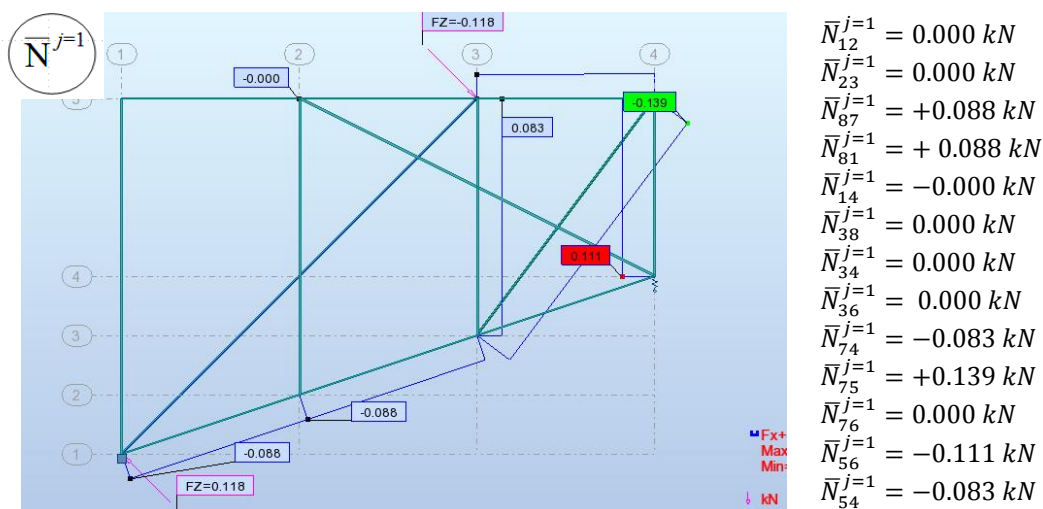
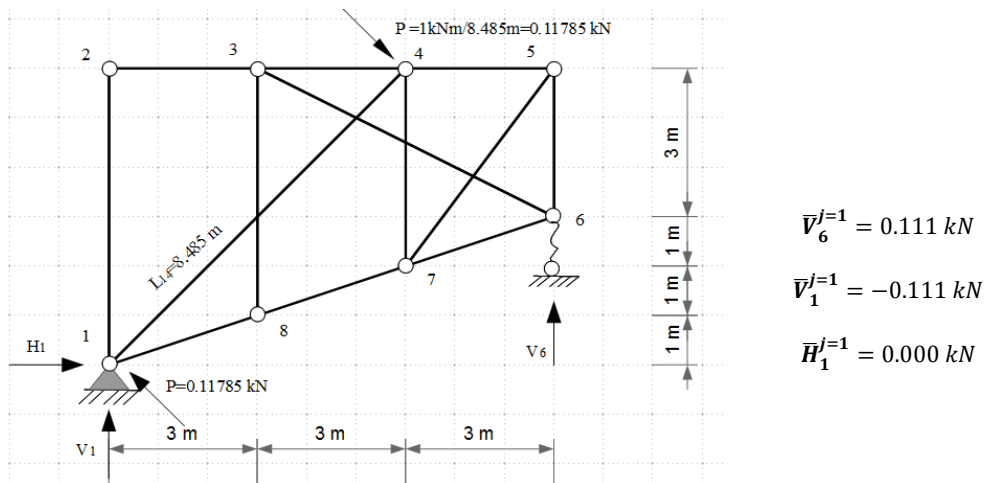
3.2.1. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia mechanicznego (F)

Wartości reakcji i sił osiowych wywołanych obciążeniem zadany (F) w analizowanej kratownicy wyznaczono w punkcie 2.1.

3.2.2. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia ($j=1$ kNm)

Ponieważ szukanym przemieszczeniem jest obrót stąd jednostkowe obciążenie stanowi moment o wartości 1 kNm ($M=1$ kNm). Ponieważ szukanym przemieszczeniem jest obrót pręta stąd jednostkowy moment $M=1$ kNm rozłożono na parę sił prostopadłych do osi danego pręta o wartości M/L_p .

Rozwiązania uzyskano w systemie Robot i poniżej zestawiono wyniki:



Rys. Siły osiowe od obciążenia jednostkowego ($M=1$ kNm) – wyliczone w systemie Robot (na wykresie siły ściskające znak „+”, siły rozciągające znak „-“.)

$$\bar{S}_8^{j=1} = -0.111 \text{ kN}$$

3.2.3. Zastosowanie zasady prac przygotowanych do wyznaczenia przemieszczenia Δ_j^F

Zasada prac przygotowanych przy obciążeniu mechanicznym F (stan rzeczywisty) i obciążeniu jednostkowym $j=1$ kNm (stan wirtualny) przyjmuje postać:

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_j^F = \sum_p \left(\int \bar{N}^{j=1} \frac{N^F}{EA} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{j=1} \cdot S_m^F}{k_m} = \sum_m \frac{\bar{N}_p^{j=1} \cdot N_p^F \cdot L_p}{EA_p} + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{j=1} \cdot S_m^F}{k_m}$$

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_j^F = \frac{\bar{N}_{81}^{j=1} \cdot N_{81}^F \cdot L_{81}}{EA_{II}} + \frac{\bar{N}_{87}^{j=1} \cdot N_{87}^F \cdot L_{87}}{EA_{II}} + \frac{\bar{N}_{45}^{j=1} \cdot N_{45}^F \cdot L_{45}}{EA_I} +$$

$$+ \frac{\bar{N}_{74}^{j=1} \cdot N_{74}^F \cdot L_{74}}{EA_{III}} + \frac{\bar{N}_{75}^{j=1} \cdot N_{75}^F \cdot L_{75}}{EA_{III}} + \frac{\bar{N}_{56}^{j=1} \cdot N_{56}^F \cdot L_{56}}{EA_{III}} + \frac{\bar{S}_\delta^{j=1} \cdot S_\delta^F}{k_\delta} =$$

$$= \frac{0.088 \text{ kN} \cdot 6.852 \text{ kN} \cdot 3.162 \text{ m}}{29110 \text{ kN}} + \frac{0.088 \text{ kN} \cdot 6.852 \text{ kN} \cdot 3.162 \text{ m}}{29110 \text{ kN}} + \frac{(-0.083 \text{ kN}) \cdot 1.5 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m}}{29110 \text{ kN}} + \frac{(-0.083 \text{ kN}) \cdot 13.5 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m}}{67240 \text{ kN}} +$$

$$\frac{0.139 \text{ kN} \cdot (-22.5 \text{ kN}) \cdot 5 \text{ m}}{67240 \text{ kN}} + \frac{(-0.111 \text{ kN}) \cdot 18 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m}}{67240 \text{ kN}} + \frac{(-0.111 \text{ kN}) \cdot 1.333 \text{ kN}}{87330 \text{ kN/m}} = -0.00027189 \text{ kNm}$$

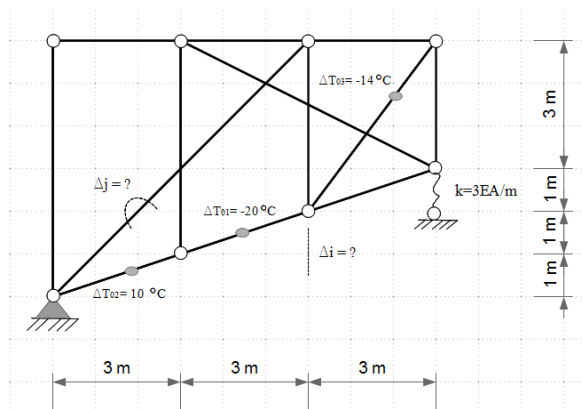
$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_j^F = -0.00027189 \text{ kNm} \quad /: 1 \text{ kNm}$$

$$\Delta_j^F = -0.00027189 \text{ rad} = -0.015586^\circ$$

Odpowiedź:

Wartość przemieszczenia w postaci obrotu pręta j spowodowanego obciążeniem mechanicznym (F) wynosi $\Delta_j^F = -0.00027189 \text{ rad} = -0.015586^\circ$. Zwrot wyznaczonego wektora przemieszczenia jest przeciwny do zwrotu wektora momentu $j=1$ kNm rozłożonego na parę sił.

4. Obliczenie przemieszczeń od zmian temperatury (T)



4.1. $\Delta_i^T = ?$ (przesuw węzła i wywołany zmianami temperatury)

4.1.1. Rozwiązanie kratownicy od zmian temperatury (T)

Analizowana kratownica jest układem SW. Rozwiązanie układów SW od wpływów nie mechanicznych jest zerowe, stąd od zmian temperatury siły osiowe i siły w więziach sprężystych przyjmują wartość zero:

$$N^T = 0, S^T = 0$$

4.1.2. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia ($i=1$ kN)

Rozwiązanie uzyskano w punkcie 3.1.2

4.1.3. Zastosowanie zasady prac przygotowanych do wyznaczenia przemieszczenia Δ_i^T

Zasada prac przygotowanych przy obciążeniu zmianami temperatury T (stan rzeczywisty) i obciążeniu jednostkowym $i=1$ kN (stan wirtualny) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} 1kN \cdot \Delta_i^T &= \sum_p \left(\int \bar{N}^{i=1} \frac{N^T}{EA} dx \right) + \sum_p \left(\int \bar{N}^{i=1} (\alpha_t \cdot \Delta T_0) dx \right) + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{i=1} \cdot S_m^T}{k_m} = \\ &= \sum_p (\alpha_t \cdot \Delta T_0 \int \bar{N}^{i=1} dx) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1kN \cdot \Delta_i^T &= \alpha_t \cdot \Delta T_{01} \cdot \bar{N}_{18}^{i=1} \cdot L_{18} + \alpha_t \cdot \Delta T_{02} \cdot \bar{N}_{78}^{i=1} \cdot L_{78} + \alpha_t \cdot \Delta T_{03} \cdot \bar{N}_{75}^{i=1} \cdot L_{75} = \\ &= \frac{1.2 \cdot 10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot 10^{\circ}\text{C} \cdot 0.527 \text{ kN} \cdot 3.162 \text{ m} + \frac{1.2 \cdot 10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot (-20^{\circ}\text{C}) \cdot 0.527 \text{ kN} \cdot 3.162 \text{ m} + \\ &\quad + \frac{1.2 \cdot 10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot (-14^{\circ}\text{C}) \cdot 0.833 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} = -0.00089968 \text{ kNm} \end{aligned}$$

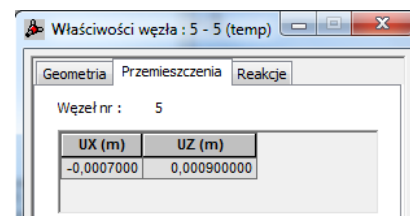
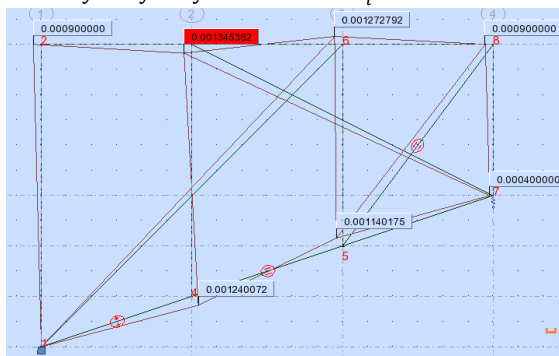
$$1kN \cdot \Delta_i^T = -0.00089968 \text{ kNm} \quad /: 1kN$$

$$\Delta_i^T = -0.00089968 \text{ m}$$

Odpowiedź:

Wartość przemieszczenia węzła i w kierunku pionowym spowodowanego zmianami temperatury (T) wynosi: $\Delta_i^T = -0.00089968 \text{ m}$. Zwrot wyznaczonego przemieszczenia jest przeciwny do zwrotu przyłożonej siły jednostkowej $i=1$ kN.

Wynik otrzymany w Systemie Robot $\Delta_i^T = 0.0009 \text{ m}$



Rys. Schemat przemieszczenia układu pod wpływem obciążenia niemechanicznego – zmiany temperatury (T).

4.2. $\Delta_j^T = ?$ (obrót pręta j wywołany zmianami temperatury)

4.2.1. Rozwiązanie kratownicy od zmian temperatury (T)

Analizowana kratownica jest układem SW. Rozwiązanie układów SW od wpływów nie mechanicznych jest zerowe, stąd od zmian temperatury siły osiowe i siły w więziach sprężystych przyjmują wartość zero:

$$N^T = 0, S^T = 0$$

4.2.2. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia ($j=1$ kNm)

Rozwiązanie uzyskano w punkcie 3.2.2

4.2.3. Zastosowanie zasady prac przygotowanych do wyznaczenia przemieszczenia Δ_j^T

Zasada prac przygotowanych przy obciążeniu zmianami temperatury T (stan rzeczywisty) i obciążeniu jednostkowym $j=1$ kNm (stan wirtualny) przyjmuje postać:

$$\begin{aligned} 1kNm \cdot \Delta_j^T &= \sum_p \left(\int \bar{N}^{j=1} \frac{N^T}{EA} dx \right)_p + \sum_p \left(\int \bar{N}^{j=1} (\alpha_t \cdot \Delta T_0) dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{j=1} \cdot S_m^T}{k_m} = \\ &= \sum_p (\alpha_t \cdot \Delta T_0 \int \bar{N}^{j=1} dx)_p \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1kNm \cdot \Delta_j^T &= \alpha_t \cdot \Delta T_{01} \cdot \bar{N}_{18}^{j=1} \cdot L_{18} + \alpha_t \cdot \Delta T_{02} \cdot \bar{N}_{78}^{j=1} \cdot L_{78} + \alpha_t \cdot \Delta T_{03} \cdot \bar{N}_{75}^{j=1} \cdot L_{75} = \\ &= \frac{1.2 \cdot 10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot 10^{\circ}\text{C} \cdot 0.088 \text{ kN} \cdot 3.162\text{m} + \frac{1.2 \cdot 10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot (-20^{\circ}\text{C}) \cdot 0.088\text{kN} \cdot 3.162\text{m} + \\ &\quad + \frac{1.2 \cdot 10^{-5}}{^{\circ}\text{C}} \cdot (-14^{\circ}\text{C}) \cdot 0.139\text{kN} \cdot 5\text{m} = -0.00015015 \text{ kNm} \end{aligned}$$

$$1kNm \cdot \Delta_j^T = -0.00015015 \text{ kNm} \quad /: 1kNm$$

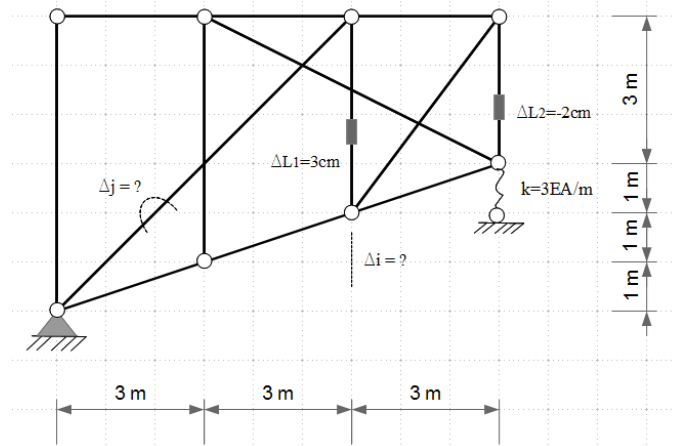
$$\Delta_j^T = -0.00015015 \text{ rad} = -0.0086^{\circ}$$

Odpowiedź:

Wartość przemieszczenia w postaci obrotu pręta j spowodowanego zmianami temperatur (T) wynosi: $\Delta_j^T = -0.00015015 \text{ rad} = -0.0086^{\circ}$. Zwrot wyznaczonego przemieszczenia jest przeciwny do zwrotu wektora momentu $j=1$ kNm rozłożonego na parę sił.

5. Obliczenie przemieszczeń od błędów montażu (Δ_m)

Błędy montażu ΔL_l , wynikające z łączenia elementów zbyt krótkich lub zbyt długich w stosunku do projektowanych długości elementów są rodzajem błędów montażu, które mają wpływ na rozwiązania w kratownicy, pozostałe rodzaje błędów (łączenie elementów pod niewłaściwym kątem $\Delta\varphi_m$, łączenie elementów niewspółliniowo Δh_k) są nieistotne przy wyznaczaniu przemieszczeń od tych wpływów obciążeń.



5.1. $\Delta_i^{\Delta m} = ?$ (przesuw węzła i wywołany błędami montażu)

5.1.1. Rozwiązanie kratownicy od błędów montażu (Δ_m)

Analizowana kratownica jest układem SW. Rozwiązanie układów SW od wpływów nie mechanicznych jest zerowe, stąd od błędów montażu siły osiowe i siły w więziach sprężystych przyjmują wartość zero:

$$N^{\Delta m} = 0, S^{\Delta m} = 0$$

5.1.2. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia ($i=1$ kN)

Rozwiązanie uzyskano w punkcie 3.1.2

5.1.3. Zastosowanie zasady prac przygotowanych do wyznaczenia przemieszczenia $\Delta_j^{\Delta m}$

Zasada prac przygotowanych przy obciążeniu błędami montażu Δ_m (stan rzeczywisty) i obciążeniu jednostkowym $i=1$ kN (stan wirtualny) w kratownicy przyjmuje postać:

$$1\text{kN} \cdot \Delta_i^{\Delta m} = \sum_p \left(\int \bar{N}^{i=1} \frac{N^{\Delta m}}{EA} dx \right) + \sum_l \bar{N}_l^{i=1} \Delta L_l + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{i=1} \cdot S_m^{\Delta m}}{k_m} = \sum_l \bar{N}_l^{i=1} \Delta L_l$$

$$1kN \cdot \Delta_i^{\Delta_m} = \bar{N}_{47}^{i=1} \cdot \Delta L_1 + \bar{N}_{56}^{i=1} \cdot \Delta L_{21} =$$

$$= 0.5kN \cdot 0.03m + (-0.667kN \cdot (-0.02m)) = 0.0283kNm$$

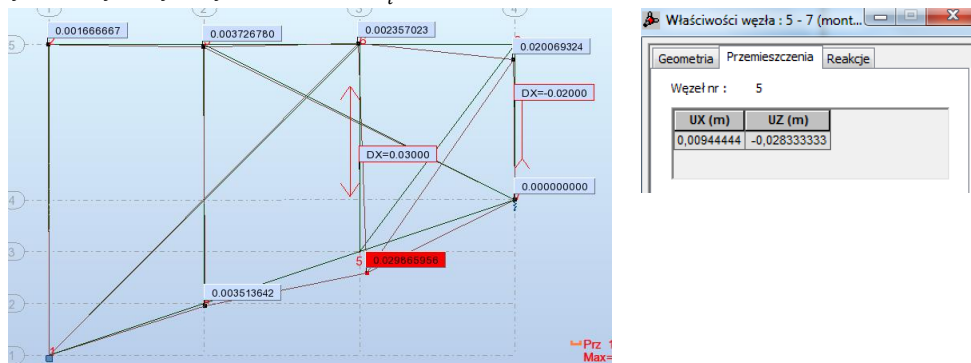
$$1kN \cdot \Delta_i^{\Delta_m} = 0.0283 kNm \quad /: 1kN$$

$$\Delta_i^{\Delta_m} = 0.0283 m$$

Odpowiedź:

Wartość przemieszczenia węzła i w kierunku pionowym spowodowanego błędami montażu (Δ_m) wynosi: $\Delta_i^{\Delta_m} = 0.0283 m$. Zwrot wyznaczonego przemieszczenia jest zgodny ze zwrotem przyłożonej siły jednostkowej $i=1$ kN.

Wynik otrzymany w Systemie Robot $\Delta_i^{\Delta_m} = 0.0283 m$



Rys. Schemat przemieszczenia układu pod wpływem obciążenia niemechanicznego - błędy montażu (Δ_m).

5.2. $\Delta_j^{\Delta_m} = ?$ (obrót pręta j wywołany błędami montażu)

5.2.1. Rozwiązanie kratownicy od błędów montażu (Δ_m)

Analizowana kratownica jest układem SW. Rozwiązanie układów SW od wpływów nie mechanicznych jest zerowe, stąd od błędów montażu siły osiowe i siły w więziach sprężystych przyjmują wartość zero:

$$N^{\Delta_m} = 0, \quad S^{\Delta_m} = 0$$

5.2.2. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i i kierunku szukanego przemieszczenia ($j=1$ kNm)

Rozwiązanie uzyskano w punkcie 3.2.2

5.2.3. Zastosowanie zasady prac przygotowanych do wyznaczenia przemieszczenia $\Delta_j^{\Delta_m}$
Zasada prac przygotowanych przy obciążeniu błędami montażu Δ_m (stan rzeczywisty) i obciążeniu jednostkowym $j=1$ kNm (stan wirtualny) w kratownicy przyjmuje postać:

$$1kNm \cdot \Delta_j^{\Delta_m} = \sum_p \left(\int \bar{N}^{j=1} \frac{N^{\Delta_m}}{EA} dx \right)_p + \sum_l \bar{N}_l^{j=1} \Delta L_l + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{j=1} \cdot S_m^{\Delta_m}}{k_m} =$$

$$= \sum_l \bar{N}_l^{j=1} \Delta L_l$$

$$1kNm \cdot \Delta_j^{\Delta_m} = \bar{N}_{47}^{j=1} \cdot \Delta L_{47} + \bar{N}_{56}^{j=1} \cdot \Delta L_{56} =$$

$$= -0.0833kN \cdot 0.03m + (-0.111kN \cdot (-0.02m)) = -2.79 \cdot 10^{-4}kNm$$

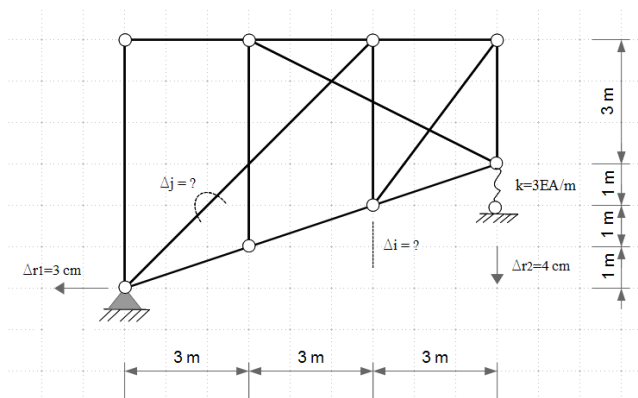
$$1kNm \cdot \Delta_j^{\Delta_m} = -2.79 \cdot 10^{-4}kNm \quad /: 1kNm$$

$$\Delta_j^{\Delta_m} = -2.79 \cdot 10^{-4} rad = -0.0125^\circ$$

Odpowiedź:

Wartość obrotu pręta j spowodowany błędami montażu (Δ_m) wynosi: $\Delta_j^{\Delta_m} = -2.79 \cdot 10^{-4} rad = -0.0125^\circ$. Zwrot wyznaczonego przemieszczenia jest przeciwny do zwrotu przyłożonej siły jednostkowej $j=1$ kNm.

6. Obliczenie przemieszczeń od osiadania podpór (Δ_r)



6.1. $\Delta_i^{\Delta_r} = ?$ (przesuw węzła i wywołany osiadaniem podpór)

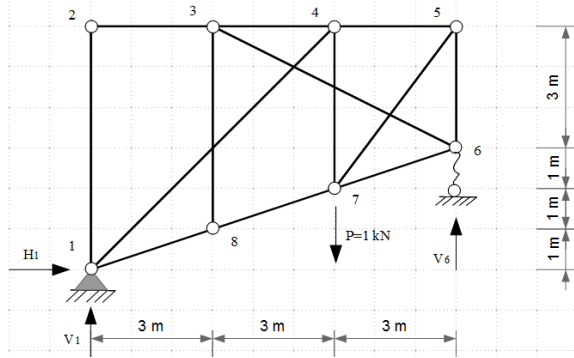
6.1.1. Rozwiązanie kratownicy od osiadania podpór (Δ_r)

Analizowana kratownica jest układem SW. Rozwiązanie układów SW od wpływów nie mechanicznych jest zerowe, stąd od osiadania podpór siły osiowe i siły w więziach sprężystych przyjmują wartość zero:

$$N^{\Delta_r} = 0, S^{\Delta_r} = 0$$

6.1.2. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia ($i=1$ kN)

Rozwiązanie uzyskano w punkcie 3.1.2. Poniżej podano wartości reakcji:



$$\bar{V}_6^{i=1} = 0.667 \text{ kN}$$

$$\bar{V}_1^{i=1} = 0.333 \text{ kN}$$

$$\bar{H}_1^{i=1} = 0.000 \text{ kN}$$

6.1.3. Zastosowanie zasady prac przygotowanych do wyznaczenia przemieszczenia

Zasada prac przygotowanych przy obciążeniu osiadaniem podpór Δ_r (stanie rzeczywistym) i obciążeniu jednostkowym $i=1$ kN (stanie wirtualnym) w kratownicy przyjmuje postać:

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_i^{\Delta_r} + \sum_l \bar{R}_l^{i=1} \Delta r_l = \sum_p \left(\int \bar{N}^{i=1} \frac{N^{\Delta_r}}{EA} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{i=1} \cdot S_m^{\Delta_r}}{k_m}$$

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_i^{\Delta_r} = - \sum_l \bar{R}_l^{i=1} \Delta r_l$$

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_i^{\Delta_r} = -(\bar{H}_1^{i=1} \Delta r_1 + \bar{V}_6^{i=1} \Delta r_2) =$$

$$= -(0.00 \text{ kN} \cdot (-0.03 \text{ m}) + 0.667 \text{ kN} \cdot (-0.04 \text{ m})) = 0.02668 \text{ kNm}$$

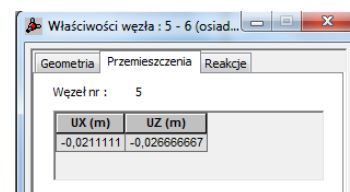
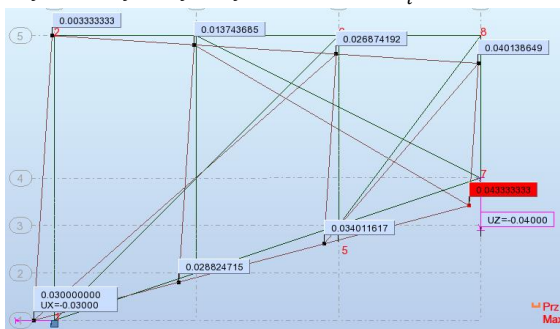
$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_i^{\Delta_r} = 0.02668 \text{ kNm} \quad /: 1 \text{ kN}$$

$$\Delta_i^{\Delta_r} = 0.02668 \text{ m}$$

Odpowiedź:

Wartość przemieszczenia węzła i w kierunku pionowym spowodowanego osiadaniem podpór (Δ_r) wynosi: $\Delta_i^{\Delta_r} = \mathbf{0.02668 \text{ m}}$. Zwrot wyznaczonego przemieszczenia jest zgodny ze zwrotem przyłożonej siły jednostkowej $i=1$ kN.

Wynik otrzymany w Systemie Robot $\Delta_i^{\Delta_r} = 0.026666 \text{ m}$



Rys. Schemat przemieszczenia układu pod wpływem obciążenia niemechanicznego – osiadania podpór (Δ_r).

6.2. $\Delta_j^{\Delta r} = ?$ (obrót pręta j wywołany osiadaniem podpór)

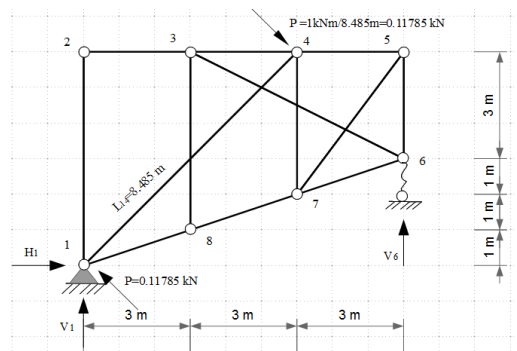
6.2.1. Rozwiązanie kratownicy od osiadania podpór (Δ_r)

Analizowana kratownica jest układem SW. Rozwiązanie układów SW od wpływów nie mechanicznych jest zerowe, stąd od osiadania podpór siły osiowe i siły w więziach sprężystych przyjmują wartość zero:

$$N^{\Delta r} = 0, S^{\Delta r} = 0$$

6.2.2. Rozwiązanie kratownicy od obciążenia jednostkowego stojącego w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia ($j=1$ kNm)

Rozwiązanie uzyskano w punkcie 3.2.2. Poniżej podano wartości reakcji



$$\bar{V}_6^{j=1} = 0.111 \text{ kN}$$

$$\bar{V}_1^{j=1} = -0.111 \text{ kN}$$

$$\bar{H}_1^{j=1} = 0.000 \text{ kN}$$

6.2.3. Zastosowanie zasady prac przygotowanych do wyznaczenia przemieszczenia

Zasada prac przygotowanych przy obciążeniu osiadaniem podpór Δ_r (stanie rzeczywistym) i obciążeniu jednostkowym $j=1$ kNm (stan wirtualny) w kratownicy przyjmuje postać:

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_j^{\Delta r} + \sum_l \bar{R}_l^{j=1} \Delta r_l = \sum_p \left(\int \bar{N}^{j=1} \frac{N^{\Delta r}}{EA} dx \right)_p + \sum_m \frac{\bar{S}_m^{j=1} \cdot S_m^{\Delta r}}{k_m}$$

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_j^{\Delta r} = - \sum_l \bar{R}_l^{j=1} \Delta r_l$$

$$1 \text{ kN} \cdot \Delta_j^{\Delta r} = -(\bar{H}_1^{j=1} \Delta r_1 + \bar{V}_6^{j=1} \Delta r_2) =$$

$$= -(0.00 \text{ kN} \cdot (-0.03 \text{ m}) + 0.111 \text{ kN} \cdot (-0.04 \text{ m})) = 0.0044 \text{ kNm}$$

$$1 \text{ kNm} \cdot \Delta_j^{\Delta r} = 0.00444 \text{ kNm} \quad /: 1 \text{ kNm}$$

$$\Delta_j^{\Delta r} = 0.00444 \text{ rad} = 0.254^\circ$$

Odpowiedź:

Wartość obrotu pręta j spowodowany osiadaniem podpór (Δ_r) wynosi: $\Delta_j^{\Delta_r} = 0.00444 \text{ rad} = 0.254^\circ$. Zwrot wyznaczonego przemieszczenia jest zgodny ze zwrotem przyłożonej siły jednostkowej $j=1 \text{ kNm}$.

PODSUMOWANIE:

Wartości szukanych przemieszczeń od wszystkich wpływów obciążeń działających na układ jednocześnie wynoszą:

Δ_i - przesuw węzła i	Δ_j - obrót węzła j
$\Delta_i^F = 0.001503 \text{ m}$	$\Delta_j^F = -0.00027189 \text{ rad} = -0.015586^\circ$
$\Delta_i^T = -0.00089968 \text{ m}$	$\Delta_j^T = -0.00015015 \text{ rad} = -0.0086^\circ$
$\Delta_i^{\Delta_m} = 0.0283 \text{ m}$	$\Delta_j^{\Delta_m} = -2.79 \cdot 10^{-4} \text{ rad} = -0.0125^\circ$
$\Delta_i^{\Delta_r} = 0.02668 \text{ m}$	$\Delta_j^{\Delta_r} = 0.00444 \text{ rad} = 0.254^\circ$
Suma: $\Delta_i = 0.056 \text{ m}$	Suma: $\Delta_j = 3.7389 \cdot 10^{-3} \text{ rad} = 0.21^\circ$