Wykład nr 1

ZASADA PRAC PRZYGOTOWANYCH W ODKSZTAŁCALNYCH

PŁASKICH UKŁADACH PRĘTOWYCH

Wstęp:

Statyka budowli zajmuje się analizą wytrzymałościową ustrojów nośnych w stanie ich równowagi. Aby istniała równowaga układu muszą być spełnione odpowiednie warunki. Warunki te można sformułować przykładowo bazując na warunkach równowagi sił czy bazując na zasadzie prac przygotowanych ZPP.

Warunki równowagi

- Równowaga sił

Dla każdego elementu rozpatrywanego ustroju warunkiem równowagi jest to, by siła ogólna i moment ogólny wszystkich sił (zewnętrznych i wewnętrznych) działających na dany element równały się zero.

$$\vec{S}_O = 0; \ \vec{M}_O = 0$$

*W płaskim układzie sił sprowadza się to do trzech równań równowagi (suma rzutów wszystkich sił na dwie nierównoległe osie równa się zero i suma momentów wszystkich sił równa się zero)

$$\sum W_X = 0, \sum W_Y = 0 \ , \sum M_O = 0$$

$$(W = P + F, \qquad P - siły\ zewnętrzne; F - siły\ wewnętrzne)$$

- Równowaga prac

Warunkiem koniecznym i dostatecznym równowagi jakiegokolwiek układu materialnego jest to, by suma prac wszystkich sił (zewnętrznych i wewnętrznych) działających na układ i pracujących na dowolnych przemieszczeniach tego układu była równa zero.

$$\delta L_Z + \delta L_W = 0$$

$$\delta L_Z - przyrost\ pracy\ sił\ zewnętrznych$$
$$\delta L_w - przyrost\ pracy\ sił\ wewnętrznych$$

$$\delta L_Z = \sum_i \vec{P}_i \circ \overrightarrow{\delta r_i} = \sum_i P_i \ \delta r_i \ cos\alpha_i \qquad \vec{P}_i - siły\ zewnetrzne$$
$$\delta L_w = \sum_j \vec{F}_j \circ \overrightarrow{\delta r_j} = \sum_j F_j \ \delta r_i \ cos\beta_j \qquad \vec{F}_i - siły\ wewnętrzne$$

*dowolne przemieszczenia nie muszą być przemieszczeniami rzeczywistymi czyli działającymi wzdłuż konkretnego toru ruchu, odbywającymi się w czasie i zależnymi od sił. Są to przemieszczenia uwolnione od czasu i sił, są jedynie zgodne z narzuconymi dla układu więzami stąd są nieskończenie małe.

*W układach NIEODKSZTAŁCALNYCH (doskonale sztywnych) odkształcenia są z założenia równe zeru stąd ubytek energii potencjalnej skumulowanej w ustroju jest równy zeru, a więc przyrost pracy sił wewnętrznych jest zerowy. Dla tych układów zasada prac przygotowanych przyjmuje formułę dobrze znana z Podstaw Statyki, która brzmi następująco:

Suma prac wirtualnych wszystkich sił zewnętrznych (czynnych i biernych) na wirtualnych przemieszczeniach zgodnych z kinematycznymi właściwościami układu w przypadku równowagi tych sił jest równa zeru.

$$\delta L_Z = 0$$

Pojęcia podstawowe:

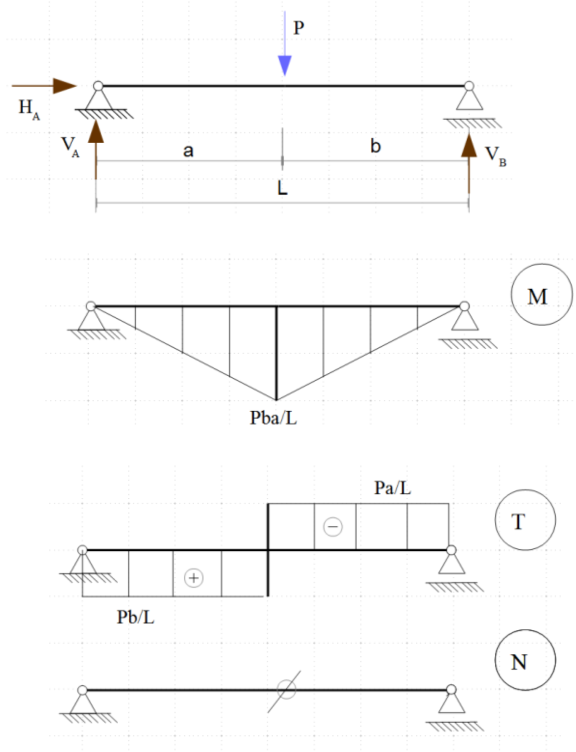
*opracowane na podstawie wykładu prof. S. Żukowskiego

- Statyczna dopuszczalność

  Def.: Siły przekrojowe: momenty M, siły tnące T, siły osiowe N oraz reakcje, które wraz z obciążeniem spełniają warunki równowagi sił są statycznie dopuszczalne.

Przykład a)

Układ jest GN i SW



Reakcje

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow V_B = \frac{Pa}{L},$$
$$\sum Z = 0 \Rightarrow V_A = \frac{Pb}{L}$$
$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

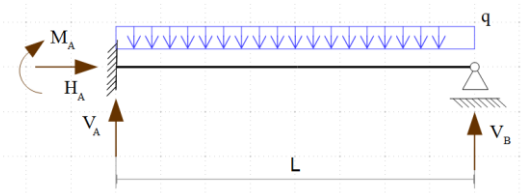
Wniosek:

Rozwiązania M, T, N są statycznie dopuszczalne (wszystkie siły są w równowadze). Na żadnym etapie rozwiązania nie wystąpiły niejednoznaczności.

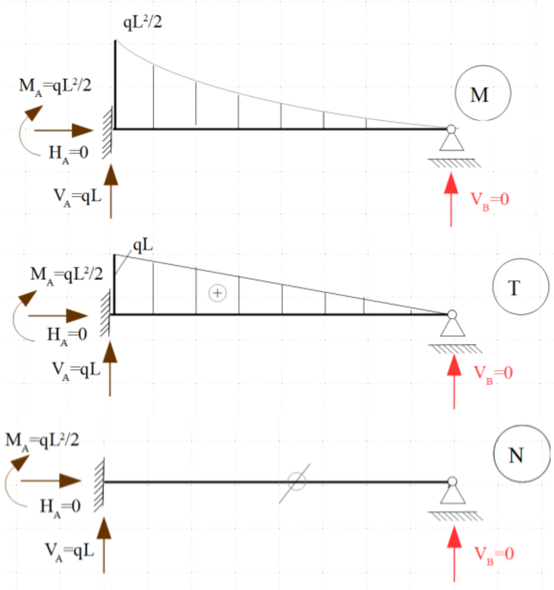
Przykład b)

Układ jest GN i SN (statycznie niewyznaczalny)

Statyczna niewyznaczalny układ to taki w którym liczba niewiadomych sił potrzebnych do wyznaczenia sił przekrojowych jest większa nie liczba równań równowagi, z których można wyznaczyć te niewiadome siły.



Przykładowo przy założeniu, że $V_B = 0$:



Liczba niewiadomych reakcji: 4
Liczba równań równowagi sił: 3

Niech: $V_B = 0$

Pozostałe reakcje:

$$\sum M_A = 0 \Rightarrow M_A = \frac{qL^2}{2},$$
$$\sum Z = 0 \Rightarrow V_A = ql$$
$$\sum X = 0 \Rightarrow H_A = 0$$

Wniosek:
Rozwiązania M, T, N są statycznie dopuszczalne.

W układach statycznie niewyznaczalnych jest nieskończenie wiele rozwiązań statycznie dopuszczalnych. (Można dobrać różne zbiory reakcji będące w równowadze z obciążeniem.)

Podane rozwiązanie nie jest jednoznaczne. Aby uzyskać rozwiązanie statycznie dopuszczalne i jednoznaczne do wyznaczenia niewiadomych reakcji należy zastosować jedną z metod rozwiązywania układów SN np. metodę sił czy metodę przemieszczeń.

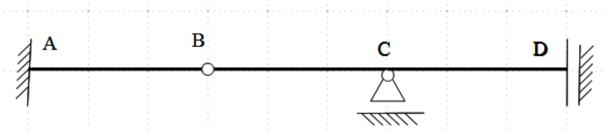
- Kinematyczna dopuszczalność

Def.: Gdy przemieszczenia i odkształcenia wraz z przemieszczeniami kinematycznymi (np. osiadaniem podpór) spełniają następujące warunki:
- warunki podparcia (warunki ograniczające swobodę ruchu) ,
- warunki ciągłości wewnętrznej

są kinematycznie dopuszczalne.

- Spełnienie warunków podparcia polega na tym, że układ odkształcony nie narusza ciągłości między konstrukcją , a nałożonymi więzami podporowymi.
- Spełnienie warunków ciągłości wewnętrznej polega na tym, że układ odkształcony musi być ciągły i gładki we wszystkich punktach z wyjątkiem punktów, w których więzi wewnętrzne dopuszczają nieciągłość lub w punktach, w których nieciągłość jest zadana.

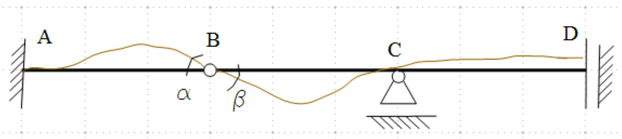
Przykład



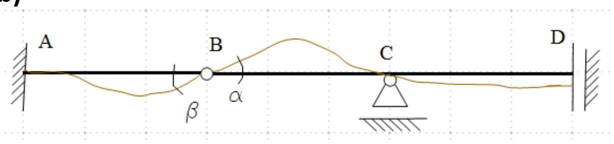
- W punkcie B jest przegub, który pozwala, by końce prętów B-A i B-C doznały różnych obrotów.

- Lina ugięcia musi być ciągła i gładka we wszystkich punktach za wyjątkiem punktu B.
- Końce prętów w punkcie A, C, D muszą doznać takich przesunięć i obrotów jakie umożliwiają podpory.

a)



b)



Wniosek:
W przypadku a) i b) przedstawione przemieszczenia są kinematycznie dopuszczalne.

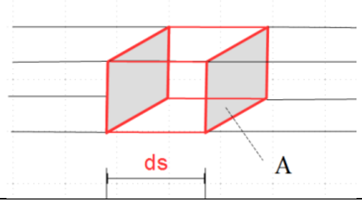
- ## Związki fizyczne (konstytutywne)

Def.: Zależności jakie przyjmuje się między tensorami naprężeń a tensorami odkształceń nazywa się związkami fizycznymi.

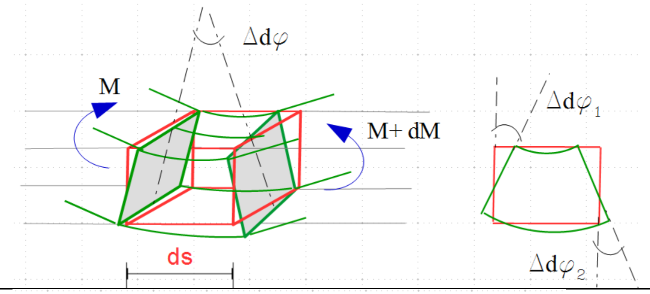
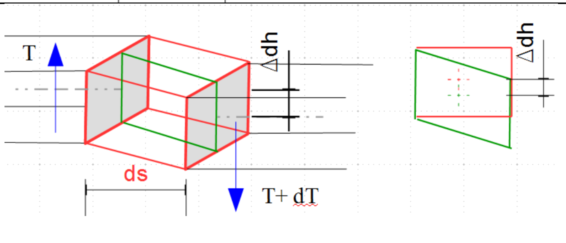
*W płaskich układach prętowych rozróżnia się 3 składowe **stanu odkształcenia:**

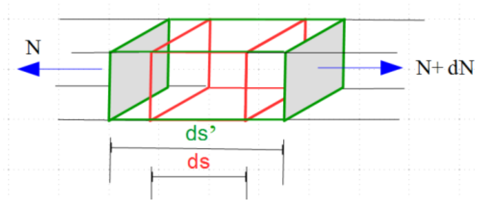
–odkształcenie kątowe $\Delta \boldsymbol{d\varphi}$
–odkształcenie postaciowe $\Delta \boldsymbol{dh}$
–odkształcenie podłużne $\Delta \boldsymbol{ds}$

Odkształcenia te składają się na jedno odkształcenie elementu, który po obciążeniu pozostaje w położeniu równowagi.

<table>
<tr><td>Rozpatrzmy nieskończenie mały element pręta o objętości $dV = A\ ds$
$A - pole\ przekroju,$
$ds - elmentarny\ odcinek\ pręta\ nieobciążonego$</td><td>
</td></tr>
</table>

W wyniku obciążenia w rozpatrywanym elemencie pręta powstają siły wewnętrzne i związane z nimi odkształcenia.

<table>
<tr><td>odkształcenie kątowe $\Delta d\varphi$</td><td>
</td><td>Zmiana kąta między przekrojami ograniczającymi element, związane jest ze zginaniem (M).
$\Delta d\varphi = \Delta d\varphi 1 + \Delta d\varphi 2$</td></tr>
<tr><td>odkształcenie postaciowe Δdh</td><td>
</td><td>Wzajemne, równoległe, poprzeczne przesunięcie ścian ograniczających element, związane jest ze ścinaniem (T).</td></tr>
</table>

odkształcenie podłużne Δds	 $\Delta ds = ds' - ds$	Zmianie długości elementu , związane jest z rozciąganiem (N).

Relacja między stanem odkształcenia a tensorami odkształceń jest następująca:

$$\Delta d\varphi = -\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_x}{z} ds$$

$$\Delta dh = \gamma_{xz}\, ds$$

$$\Delta ds = \varepsilon_x\, ds$$

$\varepsilon_x - tensor\ odkształcenia\ podłużnego$
$\gamma_{xz} - tensor\ odkształcena\ postaciowego$
$r - promień\ krzywizny$
$z - odległość\ od\ osi\ obojętnej$

W zakresie odkształceń liniowo-sprężystych obowiązuje prawo Hooke'a , gdzie związki fizyczne (konstytutywne) między tensorami odkształceń, a naprężeń są następujące:

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E}$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G}$$

$\sigma_x - tensor\ naprężenia\ normalnego$
$\tau_{xz} - tensor\ naprężenia\ postaciowego$

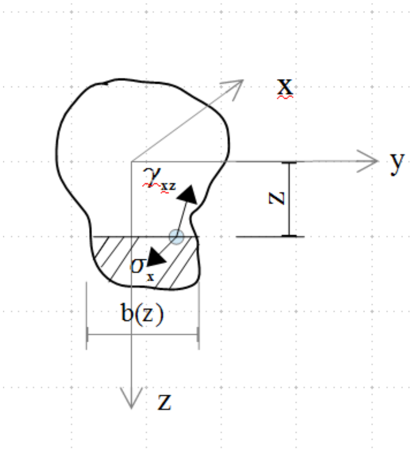
$E - moduł\ sprężystości\ podłużnej\ materiału\ (Younga)$
$G - moduł\ sprężystości\ poprzecznej\ materiału\ (Kirhoffa)$

Naprężenia są wynikiem sił przekrojowych ($M = \int_A \sigma_x \cdot z\, dA,\ T = \int_A \tau_{xz}\, dA, N = \int_A \sigma_x\, dA$)

$$\sigma_x = \frac{N}{A} + \frac{M \cdot z}{I_y}$$

$$\tau_{xz} = \kappa \frac{T \cdot S_y}{I_y \cdot b(z)}$$

$S_y - moment\ statyczny\ odciętej\ części\ przekroju$
$b(z) - szerokość\ odciętej\ części\ przekroju$
$w\ miejscu\ o\ współrzędnej\ z$
$I_y - moment\ bezwładności\ odciętej\ części$
$przekroju\ względem\ osi\ y$



$$\kappa = \frac{A}{I_y^2} \int \frac{S_y^2}{b(z)} dA$$

$\kappa - współczynniki\ kształtu\ uwzględniający$
$nierównomierny\ rozkład\ naprężeń\ stycznych$
$w\ przekroju$

Ostatecznie w układach odkształcalnych liniowo sprężyście związki fizyczne można zapisać jako:

$$\Delta d\varphi = -\frac{1}{r} = \frac{\varepsilon_x}{z} ds = \frac{\sigma_x}{E \cdot z} ds = \frac{M \cdot z}{I_y \, E \cdot z} ds = \frac{M}{EI_y} ds$$

$$\Delta dh = \gamma_{xz} \, ds = \frac{\tau_{xz}}{G} ds = \frac{\kappa \, T}{GA} ds$$

$$\Delta ds = \varepsilon_x \, ds = \frac{\sigma_x}{E} ds = \frac{N}{EA} ds$$

- W stanie rzeczywisty przemieszczeń i obciażeń
  - spełniony jest warunek statycznej dopuszczalności,
  - spełniony jest warunek kinematycznej dopuszczalności,
  - zależność naprężeń i odkształceń jest zgodna z założonym prawem fizycznym.
- W stanie wirtualnego obciążenia
  - spełniona musi być jedynie statyczna dopuszczalność stąd:
    - obciążenia są na tyle małe, że nie zmieniają aktualnego stanu konstrukcji,
    - obciążenia są niezależne od aktualnego stanu sił i przemieszczeń konstrukcji.
- W stanie wirtualnego przemieszczenia
  - spełniona musi być jedynie kinematyczna dopuszczalność stąd:
    - przemieszczenia są na tyle małe, że nie zmieniają aktualnego stanu konstrukcji,
    - przemieszczenia są niezależne od aktualnego stanu sił i przemieszczeń konstrukcji.

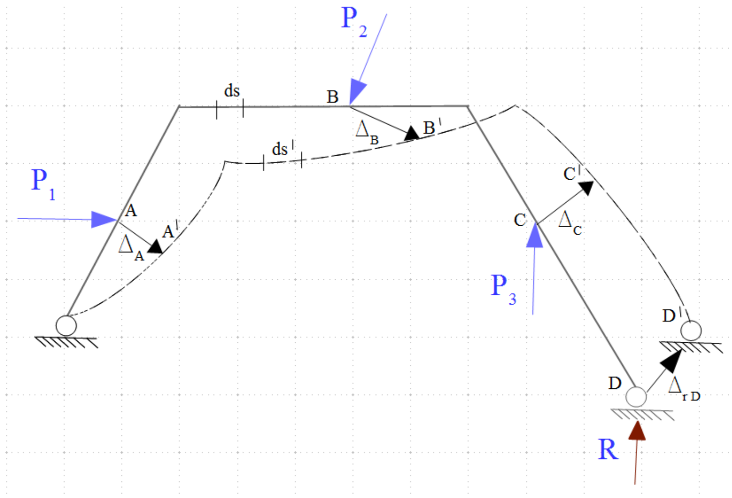
ZPP – Zasada prac przygotowanych w układach odkształcalnych

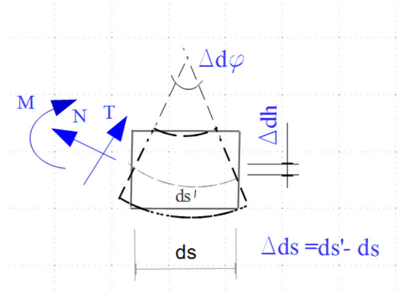
$$\delta L_Z + \delta L_W = 0$$

- Sformułowanie ZPP przy wirtualnym stanie przemieszczeń (I-sformułowanie ZPP)

➢ Rozważmy dowolny układ prętowy SW lub SN, w którym zadane obciążenie zewnętrzne powoduje powstanie w każdym przekroju tego układu odpowiedniego stanu odkształceń i naprężeń zależnego od powstałych sił przekrojowych.

- - - - stan równowagi układu

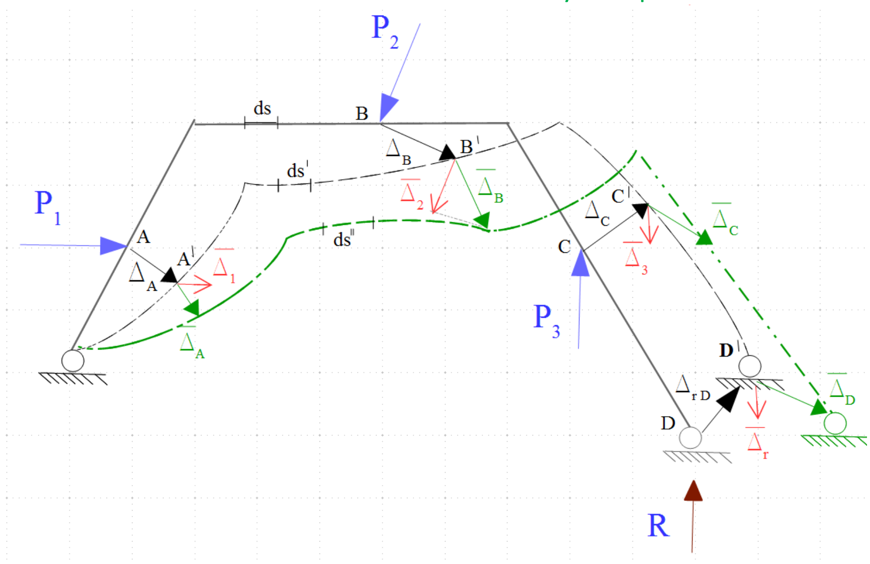




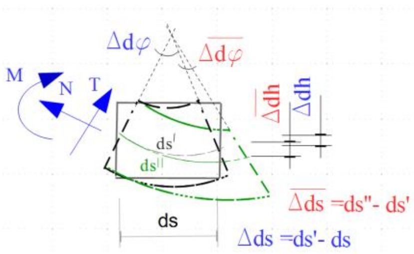
<u>Stan rzeczywisty określony przez :</u>
ObciążenieP_1, P_2, P_3 , reakcje R, siły przekrojowe M, T, N,
przemieszczenia $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_{rD}$ i odkształcenia $\Delta d\varphi, \Delta dh, \Delta ds$.

- Nałóżmy na stan rzeczywisty *stan wirtualnych przemieszczeń* (układowi będącemu w równowadze nadaje się dodatkowe przemieszczenia, które są nieskończenie małe, dowolne, niezależne od sił i czasu, niezależne od istniejących przemieszczeń, jedynie zgodne z warunkami kinematycznymi układu).

- - - - stan równowagi układu
\- - - - wirtualny stan przemieszczeń



Ściany elementu obrócą się o dodatkowy kąt $\overline{\Delta d\varphi}$
Wzajemne przesunięcie ścian elementu wzrośnie o $\overline{\Delta dh}$
Długość elementu wzrośnie o $\overline{\Delta ds}$



<u>Stan rzeczywisty określony przez :</u>
ObciążenieP_1, P_2, P_3 , reakcje R, siły przekrojowe M, T, N,
przemieszczenia $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_{rD}$ i odkształcenia $\Delta d\varphi, \Delta dh, \Delta ds$.
<u>Stan wirtualny określony przez</u>:
Wirtualne przemieszczenia $\overline{\Delta_A}, \overline{\Delta_B}, \overline{\Delta_C}, \overline{\Delta_D}, \overline{\Delta_1}, \overline{\Delta_2}, \overline{\Delta_3}, \overline{\Delta_r}$,
wirtualne odkształcenia $\overline{\Delta d\varphi}, \overline{\Delta dh}, \overline{\Delta ds}$.

- Wówczas:

Praca rzeczywistych sił zewnętrznych na odpowiadających im wirtualnych przemieszczeniach jest równa pracy rzeczywistych sił wewnętrznych na odpowiadających im wirtualnych odkształceniach.

$$\sum_n P_n\ \overline{\Delta}_n + \sum_m R_m\ \overline{\Delta}_{r_m} = \int M\overline{\Delta d\varphi} + \int T\,\overline{\Delta dh} + \int N\,\overline{\Delta ds}$$

I sformułowanie zasady prac przygotowanych można zastosować do wyznaczenia reakcji i sił wewnętrznych analizowanego układu.

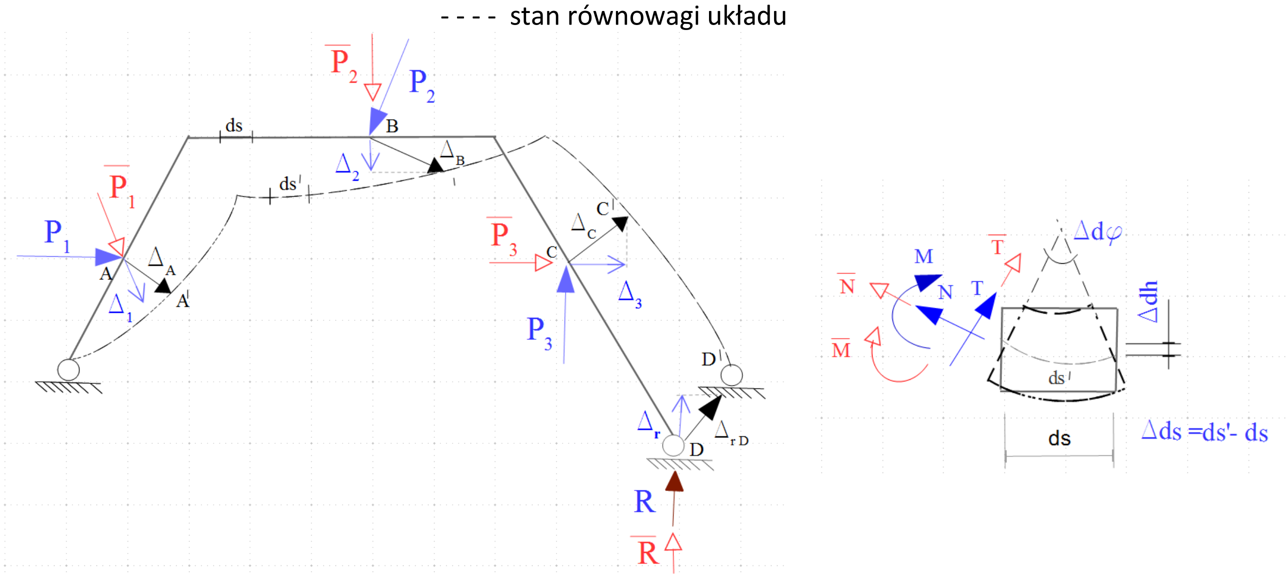
*Jeżeli stan wirtualnych przemieszczeń zrealizuje się tak , że wirtualne odkształcenia wszystkich elementów będą równe zero, to zasada prac przygotowanych przyjmie formę dobrze znaną z podstaw statyki :

$$\sum_n P_n\ \overline{\Delta}_n + \sum_m R_m\ \overline{\Delta}_{r_m} = 0$$

- Sformułowanie ZPP przy wirtualnym stanie obciążeń (II-sformułowanie ZPP)

- Rozważmy dowolny układ prętowy SW lub SN, w którym zadane obciążenie zewnętrzne spowoduje powstanie w każdym przekroju tego układu odpowiedniego stanu odkształceń i naprężeń zależnego od powstałych sił przekrojowych.
- Następnie na stan rzeczywisty nałóżmy stan wirtualnych obciążeń (układowi będącemu w równowadze nadaje się dodatkowe obciążenia, które są nieskończenie małe, dowolne, niezależne od istniejących sił i czasu, jedynie statycznie dopuszczalne):

- - - - stan równowagi układu



<u>Stan rzeczywisty określony przez :</u>
Przemieszczenia $\Delta_A, \Delta_B, \Delta_C, \Delta_{rD}$, $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_r$ i odkształcenia $\Delta d\varphi, \Delta dh, \Delta ds$
<u>Stan wirtualny określony przez</u>:
Obciążenie $\overline{P_1}, \overline{P_2}, \overline{P_3}$, reakcje $\overline{R}$, siły przekrojowe $\overline{M}, \overline{T}, \overline{N}$.

- Wówczas:

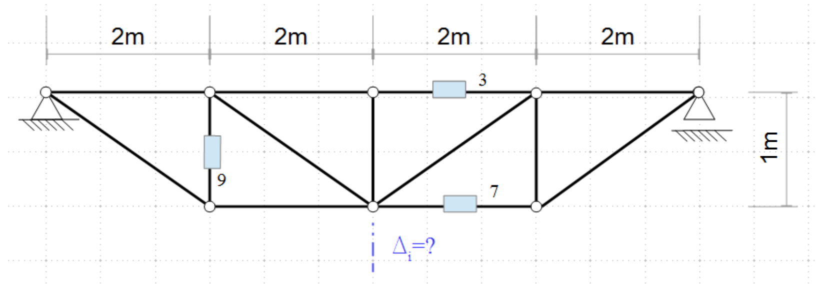
Def.: Praca wirtualnych sił zewnętrznych na odpowiadających im rzeczywistych przemieszczeniach jest równa pracy wirtualnych sił wewnętrznych na odpowiadających im rzeczywistych odkształceniach.

$$\sum_n \overline{P}_n \ \Delta_n + \sum_m \overline{R}_m \ \Delta_{r_m} = \int \overline{M} \Delta d\varphi + \int \overline{T} \ \Delta dh + \int \overline{N} \ \Delta ds$$

II sformułowanie zasady prac przygotowanych można zastosować do wyznaczenia przemieszczeń.

Zadanie nr 1.

Wyznaczyć przemieszczenie pionowe wybranego węzła kratownicy Δ_i=? wywołane zmianami długości prętów.



Dane:

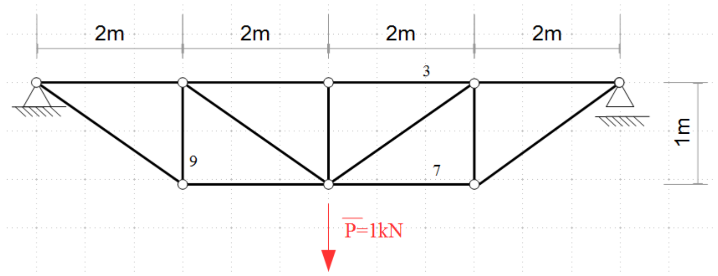
$\Delta l_3 = -3mm$
$\Delta l_9 = 2mm$
$\Delta l_7 = 4m$

Szukane:

Δ_i=?

STAN RZECZYWISTY

*Nadajmy wirtualne obciążenie w postaci siły jednostkowej stojącej w miejscu i na kierunku szukanego przemieszczenia.



Siły osiowe wywołane obciążeniem jednostkowym w wybranych prętach:

$\overline{N}_3 = -2kN$
$\overline{N}_9 = -0.5kN$
$\overline{N}_7 = 1kN$

STAN WIRTUALNY

II sformułowanie ZPP

$$\sum_n \overline{P}_n \ \Delta_n + \sum_m \overline{R}_m \ \Delta_{r_m} = \int \overline{M} \Delta d\varphi + \int \overline{T} \ \Delta dh + \int \overline{N} \ \Delta ds$$

w przypadku podanego zadania mamy:

$$\sum_n \overline{P}_n \ \Delta_n = \int \overline{N} \ \Delta ds$$

$$\overline{1kN} \ \Delta_i = \overline{N}_3 \, \Delta l_3 + \overline{N}_9 \, \Delta l_9 + \overline{N}_7 \, \Delta l_7$$

$$\overline{1kN} \ \Delta_i = -2kN \ (-3mm) - 0.5kN \ 2mm + 1kN \ 4mm$$

$$\Delta_i = 9mm$$