Statyka Budowli

Laboratorium nr 5

Opracowała: dr inż. Olga Szyłko-Bigus *olga.szylko@pwr.edu.pl*

OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH IZOSTATYCZNYCH

PRZEMIESZCZENIA OD OBCIĄŻEŃ SIŁAMI

$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \int \frac{M^i \cdot M^F}{EI} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot V^i \cdot V^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s}$$

PRZEMIESZCZENIA OD BŁĘDÓW MONTAŻU I PRZEMIESZCZEŃ PODPÓR

$$\Delta_{i\Delta} = \Delta_i^\Delta = \sum_m M_m^i \cdot \Delta\varphi_m^\Delta + \sum_n N_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_v V_v^i \cdot \Delta h_v^\Delta - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r .$$

PRZEMIESZCZENIA OD ZMIAN TEMPERATURY

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \int M^i \cdot \Delta d\varphi^T + \int N^i \cdot \Delta dL^T ,$$

gdzie $\Delta d\varphi^T = \dfrac{\alpha_T \cdot (\Delta T_w - \Delta T_p)}{h} \cdot dx,$ $\Delta dL^T = \alpha_T \cdot \Delta To \cdot dx = \alpha_T \cdot \dfrac{(\Delta T_w \cdot h_p + \Delta T_p \cdot h_w)}{h} \cdot dx .$

Gdy przekrój jest symetryczny $h_w = h_p = h/2 ,$ $\Delta To = (\Delta Tw + \Delta Tp)/2 .$

OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH HIPERSTATYCZNYCH

PRZEMIESZCZENIA OD OBCIĄŻEŃ SIŁAMI

$$\Delta_{iF} = \Delta_i^F = \int \frac{M^i \cdot M^F}{EI} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot V^i \cdot V^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s}$$

$$= \int \frac{\overline{M}^i \cdot M^F}{EI} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot \overline{V}^i \cdot V^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^F}{k_s} =$$

$$= \int \frac{M^i \cdot \overline{M}^F}{EI} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot \overline{N}^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot V^i \cdot \overline{V}^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot \overline{S}_s^F}{k_s}.$$

PRZEMIESZCZENIA OD BŁĘDÓW MONTAŻU I PRZEMIESZCZEŃ PODPÓR

$$\Delta_{i\Delta} = \Delta_i^\Delta = \sum_m M_m^i \cdot \Delta\varphi_m^\Delta + \sum_n N_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_v V_v^i \cdot \Delta h_v^\Delta - \sum_r R_r^i \cdot \Delta_r.$$

$$= \int \frac{\overline{M}^i \cdot M^\Delta}{EJ} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^\Delta}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot \overline{V}^i \cdot V^\Delta}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^\Delta}{k_s} +$$

$$+ \sum \overline{M}_m^i \cdot \Delta\varphi_m^\Delta + \sum \overline{N}_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum \overline{V}_v^i \cdot \Delta h_v^\Delta - \sum \overline{R}_r^i \cdot \Delta_r$$

PRZEMIESZCZENIA OD ZMIAN TEMPERATURY

$$\Delta_{iT} = \Delta_i^T = \int M^i \cdot \Delta d\varphi^T + \int N^i \cdot \Delta dL^T,$$

$$= \int \frac{\overline{M}^i \cdot M^T}{EI} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^T}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa \cdot \overline{V}^i \cdot V^T}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^T}{k_s} + \int \overline{M}^i \cdot \Delta d\varphi^T + \int \overline{N}^i \cdot \Delta dL^T$$

OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH HIPERSTATYCZNYCH

PRZYJĘTE OZNACZENIA

Oznaczenie *wielkości składa się z symbolu oznaczającegotę wielkość i indeksów dolnych oraz górnych.*

SYMBOLE oznaczające określone wielkości:

Δ - przemieszczenie (może to być przesunięcie, kąt obrotu lub dowolna suma przemieszczeń a w tym wzajemne przemieszczenie) lub przyrost określonej wielkości

$M=M(x)$ – moment zginający, $N=N(x)$ – siła osiowa (podłużna),

$V=V(x)$ – siła tnąca (poprzeczna), Ω - pole wykresu siły przekrojowej

S – siła w więzi sprężystej (moment w więzi rotacyjnej lub siła podłużna w więzi translacyjnej),

k – sztywność więzi sprężystej, α_T - współczynnik rozszerzalności termicznej materiału,

$\kappa = \frac{A}{I^2} \cdot \int_A \frac{S^2}{b^2} \cdot dA$ - współczynnik zależny od kształtu przekroju (dla dwuteowników $\kappa \cong \frac{A}{A_w}$),

E – moduł sprężystości podłużnej materiału (Younga),

$G = \frac{E}{2 \cdot (1+\nu)}$ – moduł sprężystości poprzecznej (postaciowej) materiału (Kirchoffa),

ν - współczynnik Poissona, b – szerokość przekroju w miejscu ścinania

A, I – pole i moment bezwładności poprzecznego przekroju pręta,

S – moment statyczny „odciętej” części przekroju, A_w - pole przekroju środnika.

INDEKSY

Indeks górny określa przyczynę wywołującą daną wielkość.

Pierwszy indeks dolny określa miejsce działania (występowania) danej wielkości.

Drugi indeks dolny określa, jeśli nie ma indeksu górnego, przyczynę wywołującą daną wielkość, a jeśli jest indeks górny, stanowi uzupełnienie określenia miejsca działania danej wielkości.

Np.: M^n oznacza moment w dowolnym miejscu wywołany przyczyną oznaczoną symbolem ***n***,

M_{ij}^n oznacza moment w punkcie ***i*** pręta ***i-j*** wywołany przyczyną oznaczoną symbolem ***n***,

Δ_{ij}, Δ_i^j oznaczają przemieszczenie w miejscu i kierunku ***i*** wywołane przyczyną oznaczoną symbolem ***j***

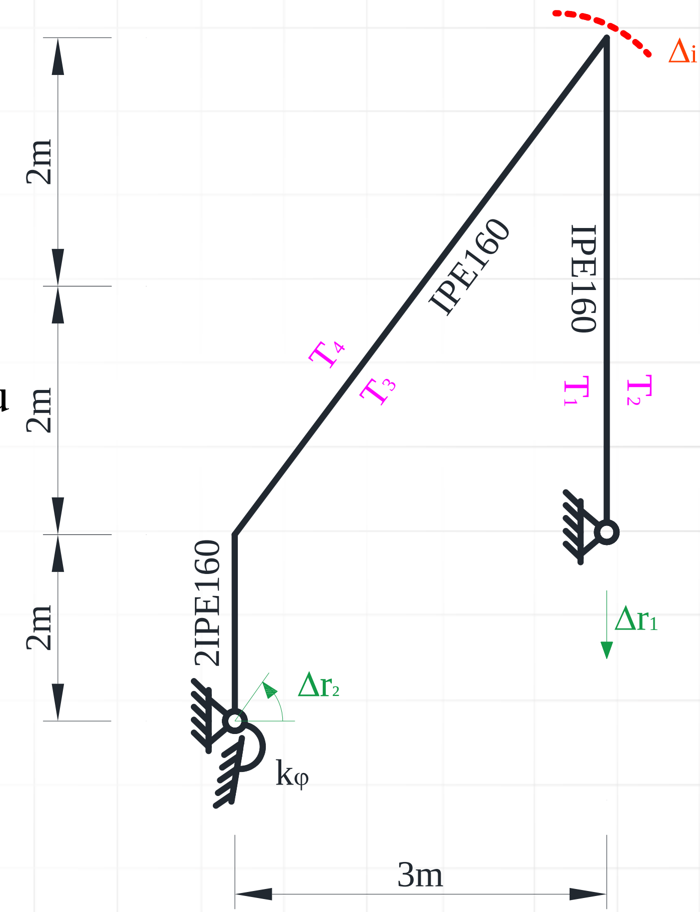
N_p^i oznacza siłę osiową w pręcie o numerze ***p*** wywołaną przyczyną oznaczoną symbolem ***i***,

S_s^i oznacza siłę w więzi sprężystej o numerze ***s*** wywołaną przyczyną oznaczoną symbolem ***i***.

OBLICZANIE PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH HIPERSTATYCZNYCH

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu jak na rysunku. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę sił rozwiązać ramę od obciążeń niemechanicznych
- Przeprowadzić kontrolę rozwiązania (sprawdzić statyczną
- i kinematyczną dopuszczalność rozwiązania).
- Obliczyć wartość przemieszczenia w zaznaczonym miejscu

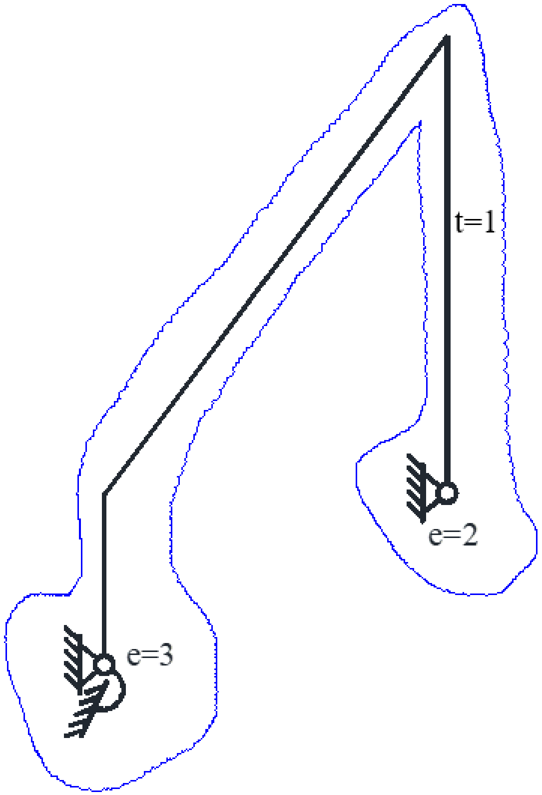


Dane : T_1 = 10 °C; T_2 = -20 °C; T_3 = -15 °C; T_4 = 25 °C;
Δr_1 = 4 cm; Δr_2 = 0,06 rad; k_φ = 18254,019 kNm/rad.
Układ składa się z prętów o sztywności EI oraz 2EI, przyjęto: IPE 160 dla prętów o sztywności EI oraz 2 IPE 160 dla pręta o sztywności 2EI (EI =1825,4019 kNm^2

SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ

$t = 1, \; e = 3 + 2 = 5,$

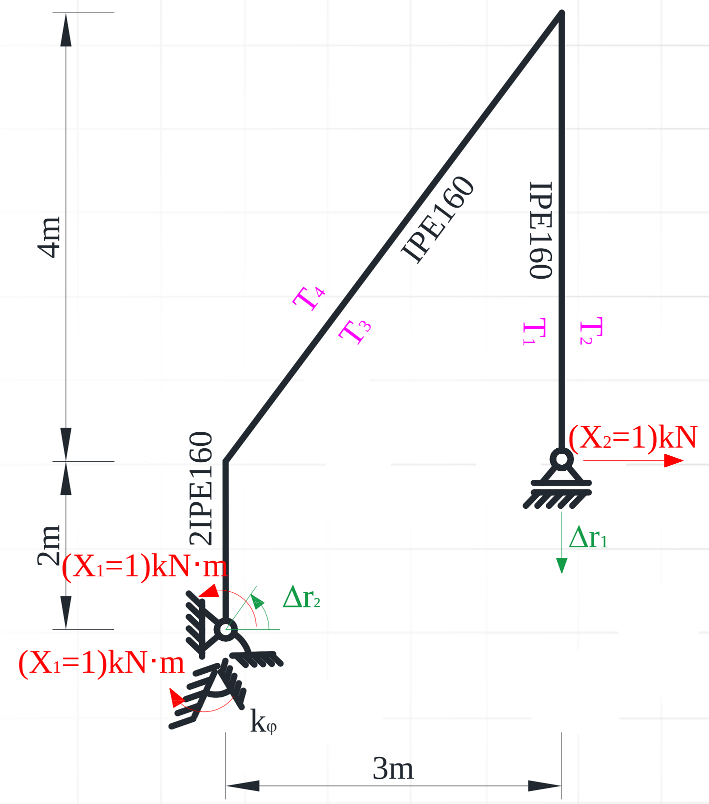
$n_h = e - 3 \cdot t = 5 - 3 = 2$



Układ składa się z jednej tarczy połączonej z ostoją pięcioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 3 niezbieżne. Cała rama wraz z ostoją tworzy układ geometrycznie niezmienny

UKŁAD PODSTAWOWY METODY SIŁ

Układ podstawowy metody sił otrzymuje się z układu zadanego po przecięciu lub pozbawieniu n_h więziami i zastąpieniu ich niewiadomymi siłami hiperstatycznymi. Układ równań metody sił jest statycznie wyznaczalny oraz geometrycznie niezmienny.



Od zmian temperatury:

$$\delta_{11}X_1^T + \delta_{12}X_2^T + \delta_{1T} = 0$$
$$\delta_{21}X_1^T + \delta_{22}X_2^T + \delta_{2T} = 0$$

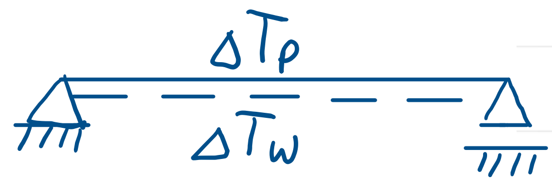
Od osiadania podpory:

$$\delta_{11}X_1^\Delta + \delta_{12}X_2^\Delta + \delta_{1\Delta} = 0$$
$$\delta_{21}X_1^\Delta + \delta_{22}X_2^\Delta + \delta_{2\Delta} = 0$$

POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ

Od zmian temperatury:

$$\delta_{11}X_1^T + \delta_{12}X_2^T + \delta_{1T} = 0$$
$$\delta_{21}X_1^T + \delta_{22}X_2^T + \delta_{2T} = 0$$



Od osiadania podpory:

$$\delta_{11}X_1^\Delta + \delta_{12}X_2^\Delta + \delta_{1\Delta} = 0$$
$$\delta_{21}X_1^\Delta + \delta_{22}X_2^\Delta + \delta_{2\Delta} = 0$$

$$\Delta T_0 = \frac{\Delta T_w + \Delta T_p}{2}$$

$$\delta_{ij} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^i \bar{M}^j}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \bar{S}_n^j}{k_n} \right\} / P_i$$

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej odjednostkowej j-tej niewiadomej w układzie podstawowym,

$$\delta_{iT} = \left\{ \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^i} \right\} P_i,$$

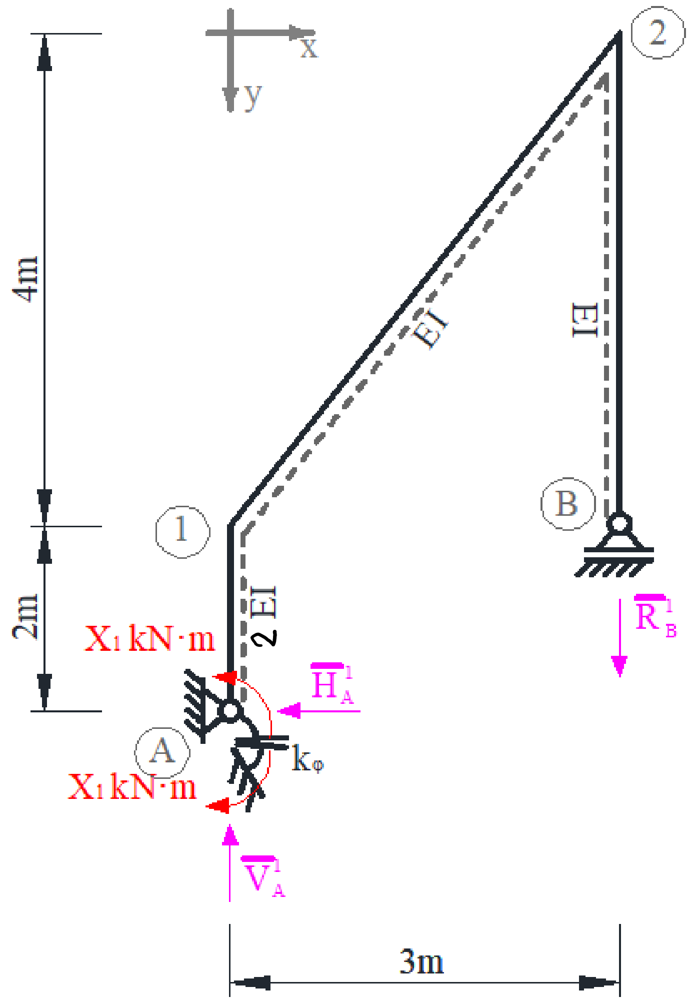
przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od wpływu temperatury w układzie podstawowym,

$$\delta_{i\Delta} = \left\{ -\sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n \right\} / P_i$$

przemieszczenie na kierunku i-tej więzi nadliczbowej od wpływu osiadania podpór w układzie podstawowym

gdzie dla P_1=1kN·m obliczamy przemieszczenie kątowe, dla P_2=1kN obliczamy przemieszczenie liniowe.

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD (X_1=1) kN·m



Obliczenie reakcji

$\sum X = 0 \qquad \bar{H}^1_{1A} = 0\,kN$

$\sum M_A = 0 \qquad \bar{R}^1_B \cdot 3m - X_1 kN \cdot m = 0 \qquad \bar{R}^1_B = \frac{1}{3} kN$

$\sum Y = 0 \qquad \bar{R}^1_B - \bar{V}^1_A = 0 \qquad \bar{V}^1_A = \frac{1}{3} kN$

Obliczenie momentów zginających

$\bar{M}^1_{A1} = \bar{M}^1_{1A} = \bar{M}^1_{12} = -X_1 kN \cdot m = -1 kN \cdot m$

$\bar{M}^1_{B2} = \bar{M}^1_{2B} = \bar{M}^1_{21} = 0$

Obliczenie sił tnących

$\bar{V}^1_{A1} = \bar{V}^1_{1A} = \bar{H}^1_A = 0$

$\bar{V}^1_{12} = \bar{V}^F_{21} = \bar{H}^1_A \cdot 0,8 + \bar{V}^1_A \cdot 0,6 = 0 kN \cdot 0,8 + \frac{1}{3} kN \cdot 0,6m = 0,2 kN$

$\bar{V}^1_{B2} = \bar{V}^1_{2B} = 0$

Obliczenie sił osiowe

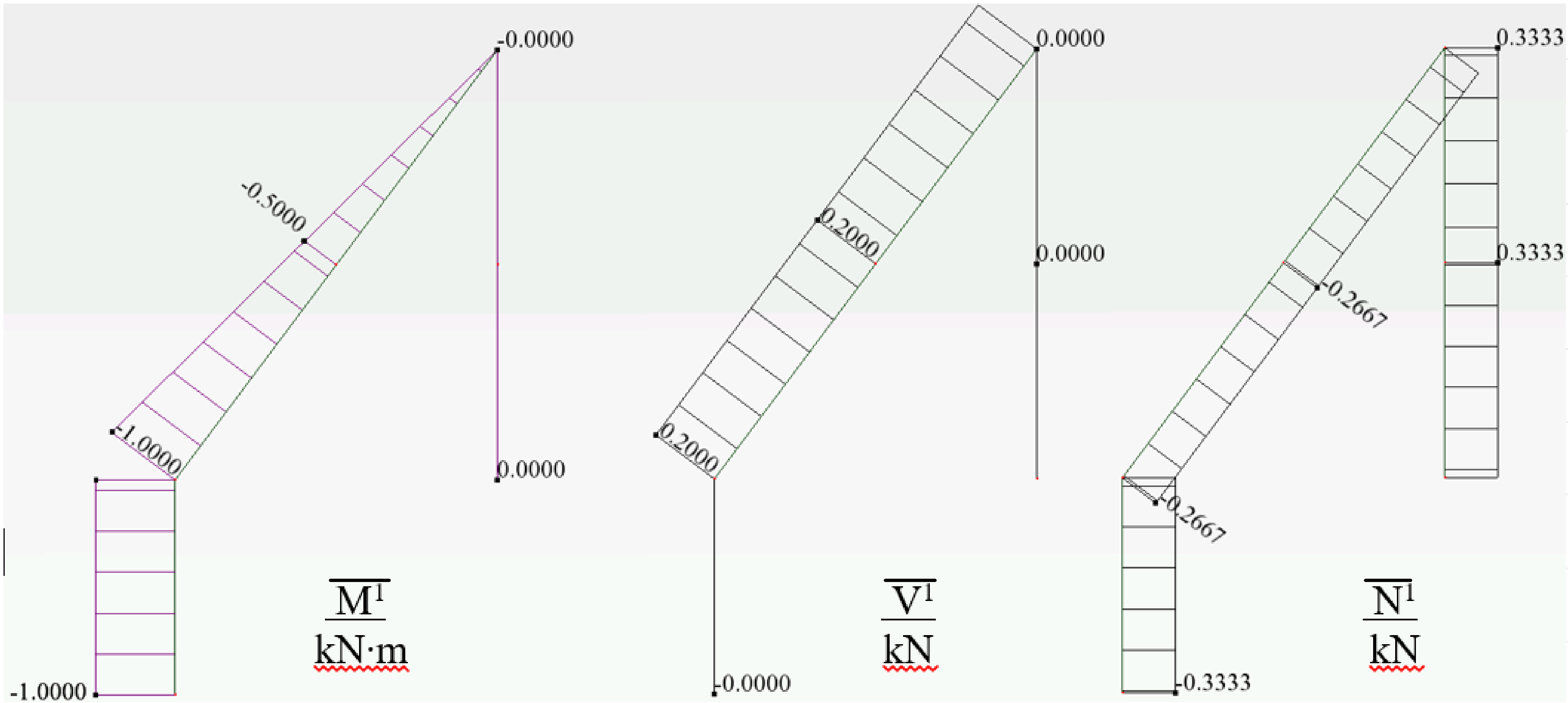
$\bar{N}^1_{A1} = \bar{N}^1_{1A} = -\bar{V}^1_A = -0,3333 kN$

$\bar{N}^1_{12} = \bar{N}^1_{21} = \bar{H}^1_A \cdot 0,6 - \bar{V}^1_A \cdot 0,8 = 0 kN \cdot 0,6 - \frac{1}{3} kN \cdot 0,8m = -0,2667 kN$

$\bar{N}^1_{B2} = \bar{V}^1_{2B} = \bar{R}^1_B = 0,3333 kN$

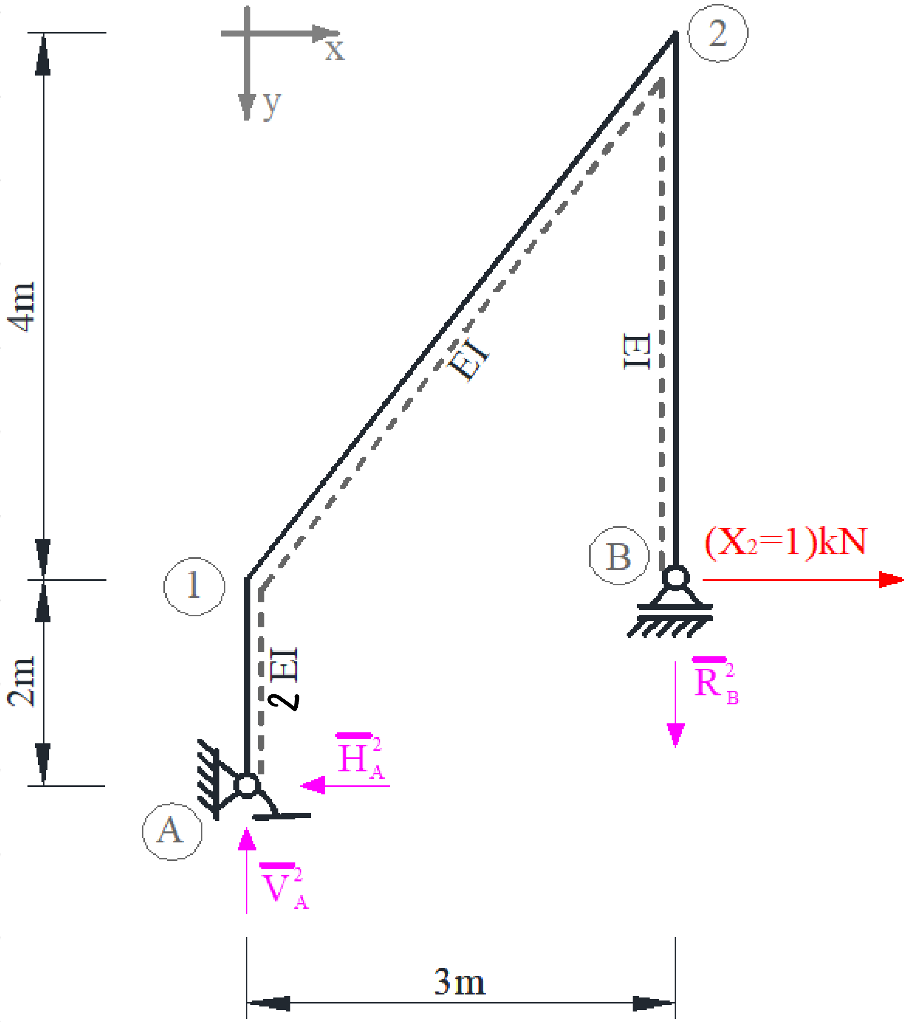
ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD (X_1=1) kN·m

Moment zginający w więzi sprężystej: $\bar{S}_{\varphi}^{1} = 1 kN \cdot m$



wykresy sił przekrojowych

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD $(X_2=1)$kN



Obliczenie reakcji

$\sum X=0 \qquad \bar{H}^2_{1A} = X_2 kN = 1kN$

$\sum M_A=0 \qquad \bar{R}^2_B \cdot 3m + X_2 kN \cdot 2m = 0 \qquad \bar{R}^2_B = -\frac{2}{3}kN$

$\sum Y=0 \qquad \bar{R}^2_B - \bar{V}^2_A = 0 \qquad \bar{V}^2_A = -\frac{2}{3}kN$

Obliczenie momentów zginających

$\bar{M}^2_{A1} = 0kN \cdot m$

$\bar{M}^2_{1A} = \bar{M}^2_{12} = \bar{H}^2_A \cdot 2m = 1kN \cdot 2m = 2kN \cdot m$

$\bar{M}^2_{21} = \bar{M}^2_{2B} = X_2 kN \cdot 4m = 4kN \cdot m$

$\bar{M}^2_{B2} = 0$

Obliczenie sił tnących

$\bar{V}^2_{A1} = \bar{V}^2_{1A} = \bar{H}^2_A = 1kN$

$\bar{V}^2_{12} = \bar{V}^2_{21} = \bar{H}^2_A \cdot 0,8 + \bar{V}^2_A \cdot 0,6 = 1kN \cdot 0,8 - \frac{2}{3}kN \cdot 0,6m = 0,4kN$

$\bar{V}^2_{B2} = \bar{V}^2_{2B} = -X_2 kN = -1kN$

Obliczenie sił osiowe

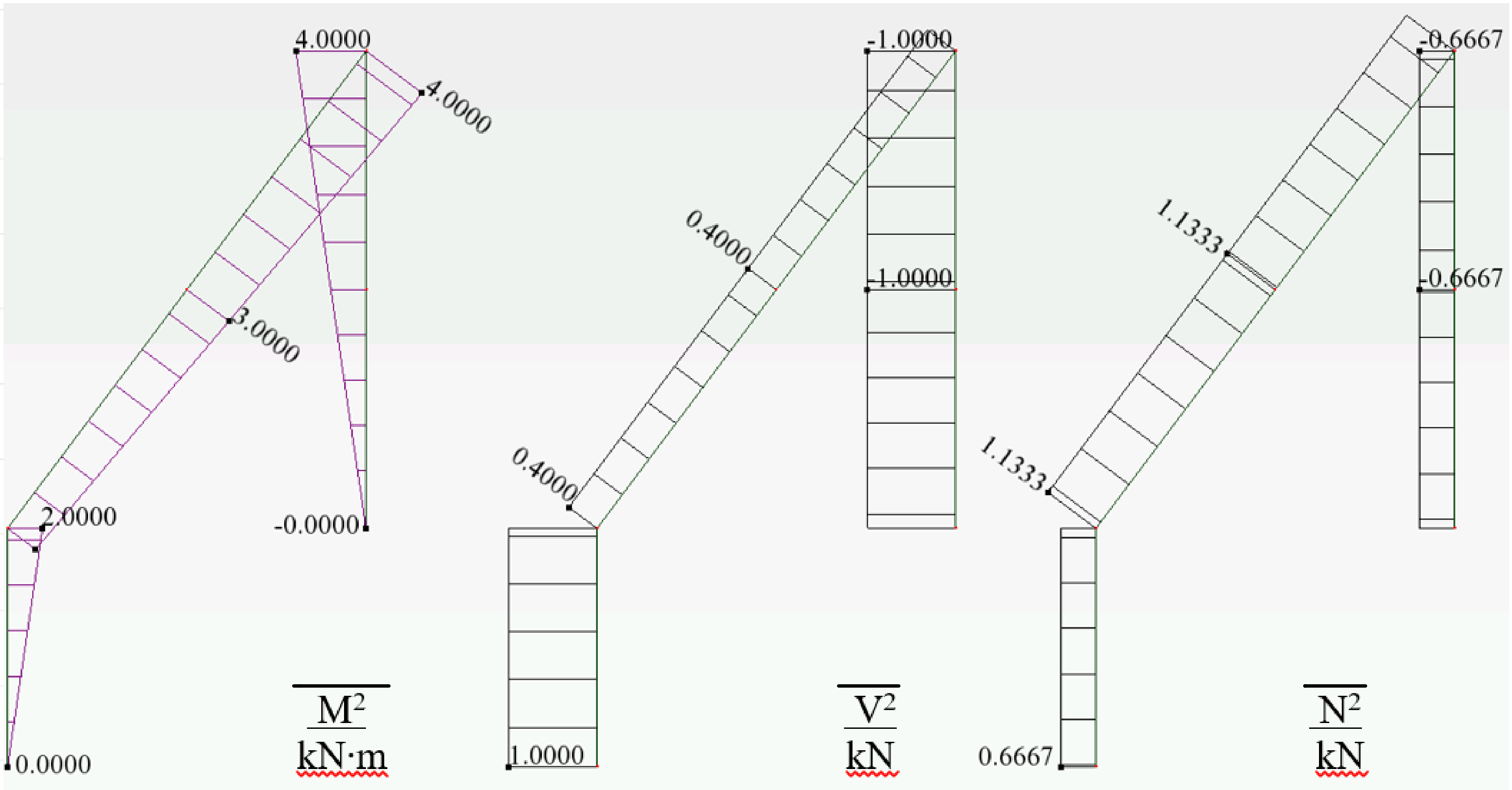
$\bar{N}^2_{A1} = \bar{N}^2_{1A} = -\bar{V}^2_A = 0,6667kN$

$\bar{N}^2_{12} = \bar{N}^2_{21} = \bar{H}^2_A \cdot 0,6 - \bar{V}^2_A \cdot 0,8 = 1kN \cdot 0,6 + \frac{2}{3}kN \cdot 0,8m = 1,1333kN$

$\bar{N}^2_{B2} = \bar{V}^2_{2B} = \bar{R}^2_B = -0,6667kN$

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD (X_2=1)

Moment zginający w więzi sprężystej: $\bar{S}_{\varphi}^{1} = 0 kN \cdot m$



wykresy sił przekrojowych

OBLICZENIE WSPÓŁCZYNNIKÓW UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_{11}X_1^T+\delta_{12}X_2^T+\delta_{1T}&=0\\ \delta_{21}X_1^T+\delta_{22}X_2^T+\delta_{2T}&=0 \end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_{11}X_1^\Delta+\delta_{12}X_2^\Delta+\delta_{1\Delta}&=0\\ \delta_{21}X_1^\Delta+\delta_{22}X_2^\Delta+\delta_{2\Delta}&=0 \end{aligned}}$$

$$\delta_{11}=\left\{\frac{1}{2}(-1)\cdot 2\cdot(-1)+\frac{1}{2}(-1)\cdot 5\cdot\frac{2}{3}(-1)+\frac{1\cdot 1}{10}\right\}\frac{kN\cdot m^2}{EI}=\{1+1,6667+0,1\}\frac{kN\cdot m^2}{EI}=2,7667\frac{kN\cdot m^2}{EI},$$

$$\delta_{12}=\left\{\frac{1}{2}2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot(-1)+\frac{5}{6}\left[-1\cdot 2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot 3+0\cdot 4\right]+0+\frac{1\cdot 0}{10}\right\}\frac{kN\cdot m^2}{EI}=\{-1-6,6667+0\}\frac{kN\cdot m^2}{EI}=$$

$$=-7,6667\frac{kN\cdot m^2}{EI},$$

$$\delta_{22}=\left\{\frac{1}{2}2\cdot 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 2+\frac{5}{6}\left[2\cdot 2+4\cdot 3\cdot 3+4\cdot 4\right]+4\cdot 4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot 4+\frac{0\cdot 0}{10}\right\}\frac{kN\cdot m^3}{EI}=\{1,3333+46,6667+$$

$$+21,3333+0\}\frac{kN\cdot m^3}{EI}=\{1,3333+46,6667+21,3333+0\}\frac{kN\cdot m^3}{EI}=69,3333\frac{kN\cdot m^3}{EI},$$

OBLICZENIE WYRAZÓW WOLNYCH UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ OD WPŁYWU TEMPERATURY

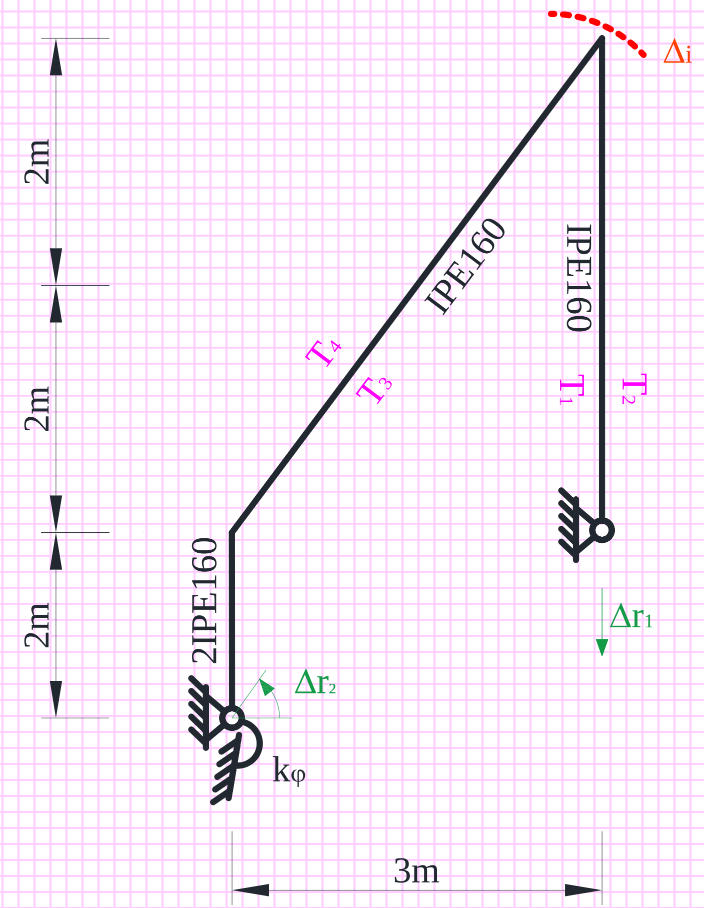
Wyrazy wolne δ_{iT} należy obliczyć według wzoru

$$\delta_{iT} = \left\{ \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^i} \right\} P_i ,$$

gdzie DT_w to temperatura po stronie włókien uprzywilejowanych, ΔT_p to temperatura po stronie przeciwnej do włókien uprzywilejowanych a $\Delta T_o = (\Delta T_w + \Delta T_p)/2$ jest temperą w osi pręta symetrycznego, *h* to wysokość przekroju.

Do obliczeń przyjmiemy: $\alpha = 0.000012/^{o}C$,

$h_{IPE\ 160} = 0{,}16$ m



OBLICZENIE WYRAZÓW WOLNYCH UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ OD WPŁYWU TEMPERATURY

$$\delta_{iT} = \left\{ \sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^i} \right\} P_i,$$

$\Delta T_{0,12} = [(-15+25)/2]°C = 5°C$

$\Omega_{\bar{M}^1_{y,12}} = \left(-1 \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}\right) kN \cdot m^2$
$= -2{,}5 kN \cdot m^2,$

$\Omega_{\bar{M}^2_{y,12}} = \left((4+2) \cdot 5 \cdot \frac{1}{2}\right) kN \cdot m^2$
$= 15 kN \cdot m^2,$

$\Omega_{\bar{N}^1_{x,12}} = (-0{,}2667 \cdot 5) kN \cdot m$
$= -1{,}3335 kN \cdot m,$

$\Omega_{\bar{N}^2_{x,12}} = (1{,}1333 \cdot 5) kN \cdot m$
$= 5{,}6665 kN \cdot m,$

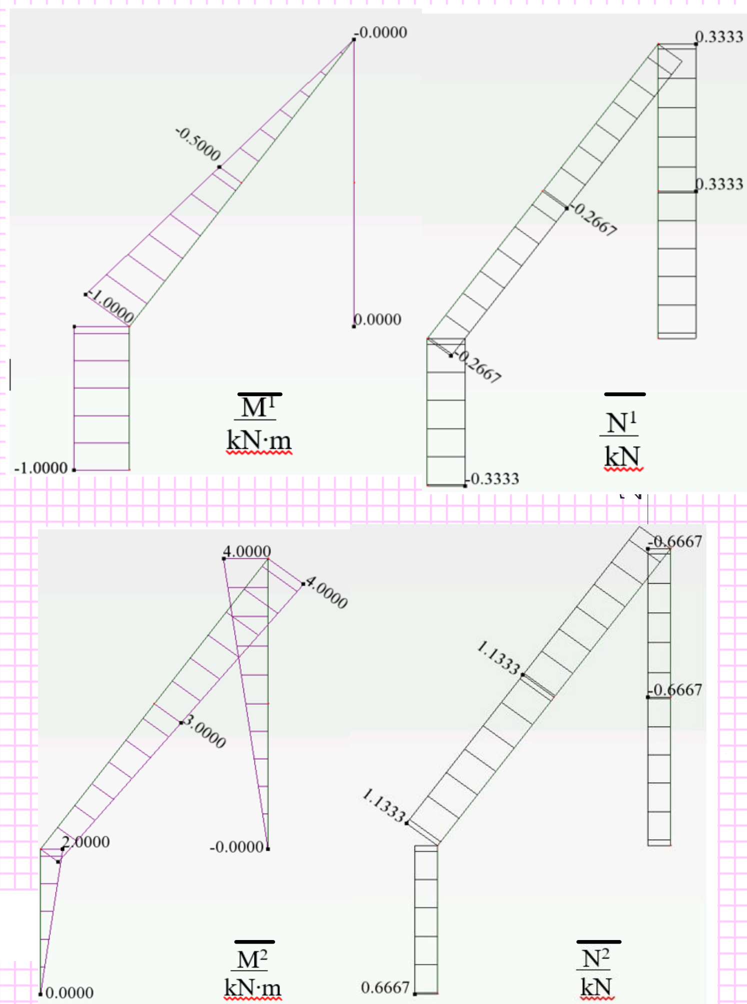
$\Delta T_{0,2B} = [(10-20)/2]°C = -5°C,$

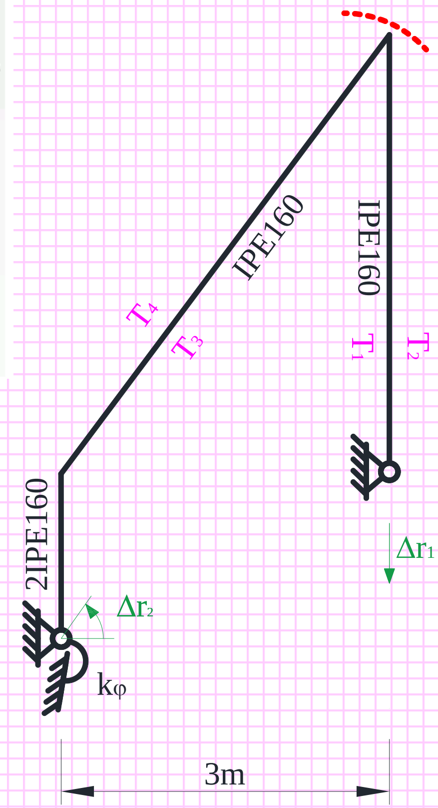
$\Omega_{\bar{M}^1_{y,2B}} = 0,$

$\Omega_{\bar{M}^2_{y,2B}} = \left(4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2}\right) kN \cdot m^2 = 8 kN \cdot m^2,$

$\Omega_{\bar{N}^1_{x,2B}} = (0{,}3333 \cdot 4) kN \cdot m$
$= 1{,}3332 kN \cdot m,$

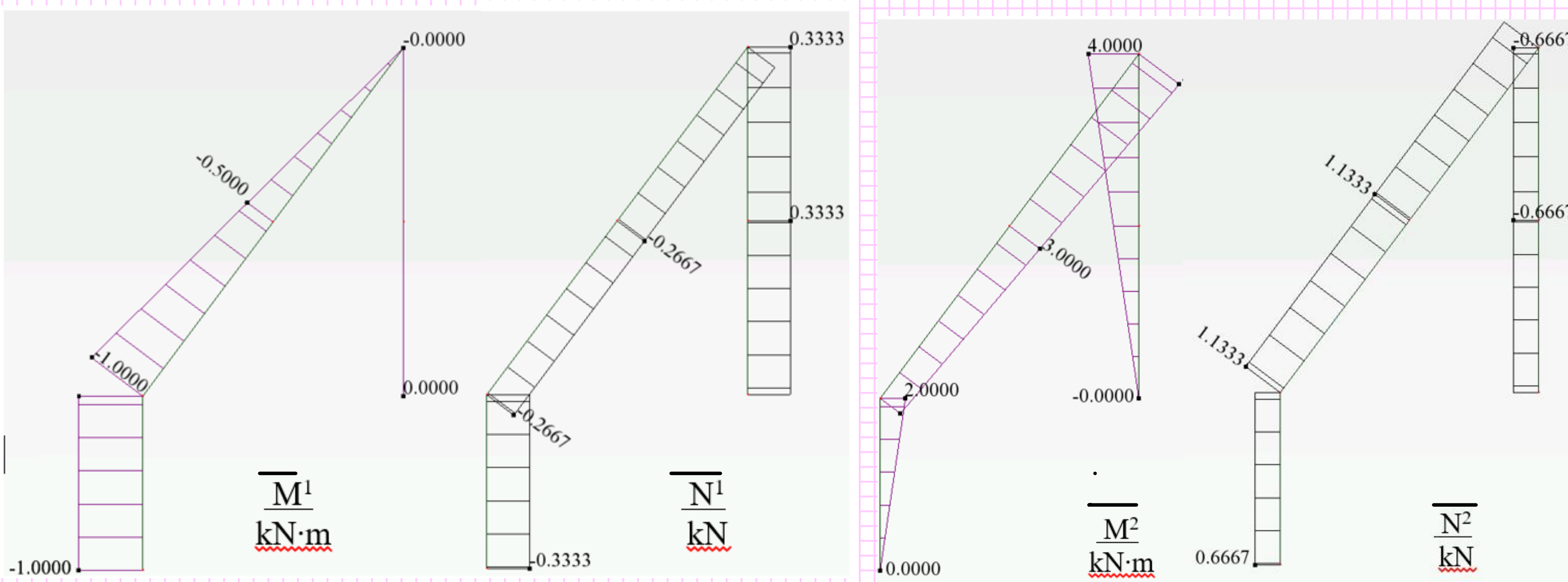
$\Omega_{\bar{N}^2_{x,2B}} = (-0{,}6667 \cdot 4) kN \cdot m$
$= -2{,}6668 kN \cdot m.$





$T_1 = 10$ °C; $T_2 = -20$ °C; $T_3 = -15$ °C; $T_4 = 25$ °C

OBLICZENIE WYRAZÓW WOLNYCH UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ OD WPŁYWU TEMPERATURY



$$\delta_{1T} = \left[\sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^i} \right] / P_1 = \left[0{,}000012 \cdot \frac{-15-25}{0{,}16} \cdot (-2{,}5) + 0 + 0{,}000012 \cdot 5 \cdot (-1{,}3335) + \right.$$

$$\left. + 0{,}000012 \cdot (-5) \cdot 1{,}3332 \right] rad = 7{,}3400 \cdot 10^{-3},$$

$$\delta_{2T} = \left[\sum_p \alpha \frac{\Delta T_w - \Delta T_p}{h} \Omega_{\bar{M}_y^i} + \sum_p \alpha \Delta T_0 \Omega_{\bar{N}_y^i} \right] / P_2 = \left[0{,}000012 \cdot \frac{-15-25}{0{,}16} \cdot (15) + 0{,}000012 \cdot \frac{10-(-20)}{0{,}16} \cdot 8 + \right.$$

$$\left. + 0{,}000012 \cdot 5 \cdot 5{,}6665 + 0{,}000012 \cdot (-5) \cdot (-2{,}6668) \right] m = -0{,}0265 m.$$

POSTAĆ SZCZEGÓŁOWA UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ OD WPŁYWU TEMPERATURY

$$2,7667\frac{kN\cdot m^2}{EI}X_1^T-7,6667\frac{kN\cdot m^2}{EI}X_2^T+7,3400\cdot 10^{-3}=0,$$

$$-7,6667\frac{kN\cdot m^3}{EI}X_1^T+69,3333\frac{kN\cdot m^3}{EI}X_2^T-0,0265m=0,$$

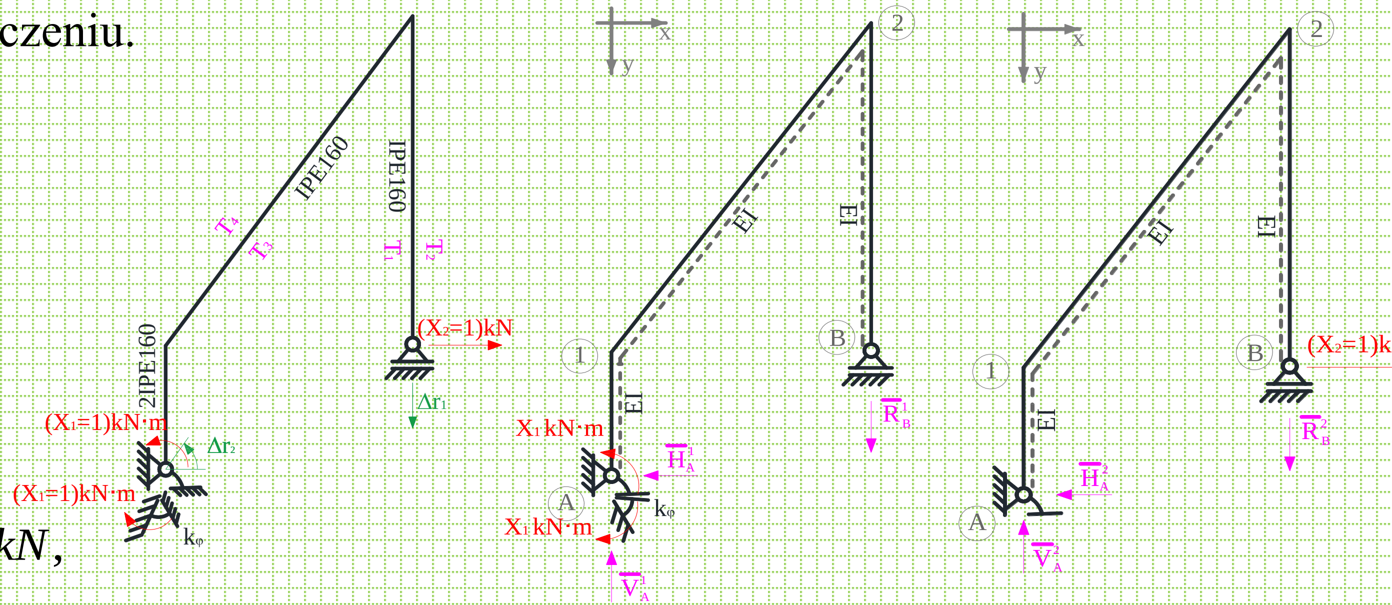
$$X_1^T=-0,002298\frac{EI}{kN\cdot m^2}=,-0,002298\frac{1825,4019kN\cdot m^2}{kN\cdot m^2}=-4,1948,$$

$$X_2^T=0,000121\frac{EI}{kN\cdot m^2}=0,000121\frac{1825,4019kN\cdot m^2}{kN\cdot m^2}=0,2209.$$

OBLICZENIE WYRAZÓW WOLNYCH UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ OD OSIADANIA PODPÓR

Wyrazy wolne $\delta_{i\Delta}$ należy obliczyć według wzoru $$\delta_{i\Delta}=\left[-\sum_n \bar{R}_n^i \Delta r_n\right]/P_i$$

Przemieszczenia podpory występują w węźle A (obrót Δr_2) oraz w węźle B (pionowe Δr_1). Ponieważ przecięto więź podporową (zastępując ją siłą X_1), w której zadano przemieszczenie, prawa strona pierwszego równania, która jest rzeczywistym przemieszczeniem w tym miejscu, równa jest temu przemieszczeniu.



$$\bar{R}_B^1=\frac{1}{3}kN,\qquad \bar{R}_B^2=-\frac{2}{3}kN,$$

$$\delta_{1\Delta}=\left[-\sum_n \bar{R}_n^1\Delta r_n\right]/P_i=\left[-\bar{R}_B^1\Delta r_1-\bar{S}_\varphi^1\Delta r\right]/kN\cdot m=-\left(\frac{1}{3}\cdot 0{,}04+1\cdot 0{,}06\right)=-0{,}0733,$$

$$\delta_{2\Delta}=\left[-\sum_n \bar{R}_n^2\Delta r_n\right]/P_2=\left[-\bar{R}_B^2\Delta r_1\right]/kN=-\left(-\frac{2}{3}\cdot 0{,}04\right)m=0{,}0267m$$

POSTAĆ SZCZEGÓŁOWA UKŁADU RÓWNAŃ METODY SIŁ OD OSIADANIA PODPÓR

$$2,7667\frac{kN\cdot m^2}{EI}X_1^{\Delta}-7,6667\frac{kN\cdot m^2}{EI}X_2^{\Delta}-0,0733=0,$$

$$-7,6667\frac{kN\cdot m^3}{EI}X_1^{\Delta}+69,3333\frac{kN\cdot m^3}{EI}X_2^{\Delta}+0,0267m=0,$$

$$X_1^{\Delta}=0,003668\frac{EI}{kN\cdot m^2}=0,005412\frac{1825,4019kN\cdot m^2}{kN\cdot m^2}=66,9539,$$

$$X_2^{\Delta}=0,000367\frac{EI}{kN\cdot m^2}=0,000367\frac{1825,4019kN\cdot m^2}{kN\cdot m^2}=6,7015$$

OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH I SPORZĄDZENIE WYKRESÓW

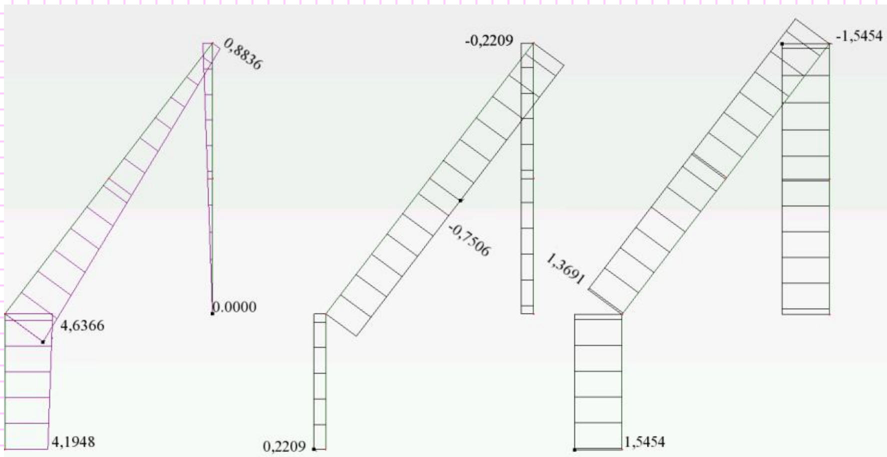
Reakcje i sił przekrojowych obliczono korzystając z zasady superpozycji.

$$R_i^T = \bar{R}_i^1 \cdot X_1^T + \bar{R}_i^2 \cdot X_2^T,$$
$$M_{ij}^T = \bar{M}_{ij}^1 \cdot X_1^T + \bar{M}_{ij}^2 \cdot X_2^T,$$
$$V_{ij}^T = \bar{V}_{ij}^1 \cdot X_1^T + \bar{V}_{ij}^2 \cdot X_2^T,$$
$$N_{ij}^T = \bar{N}_{ij}^1 \cdot X_1^T + \bar{N}_{ij}^2 \cdot X_2^T.$$

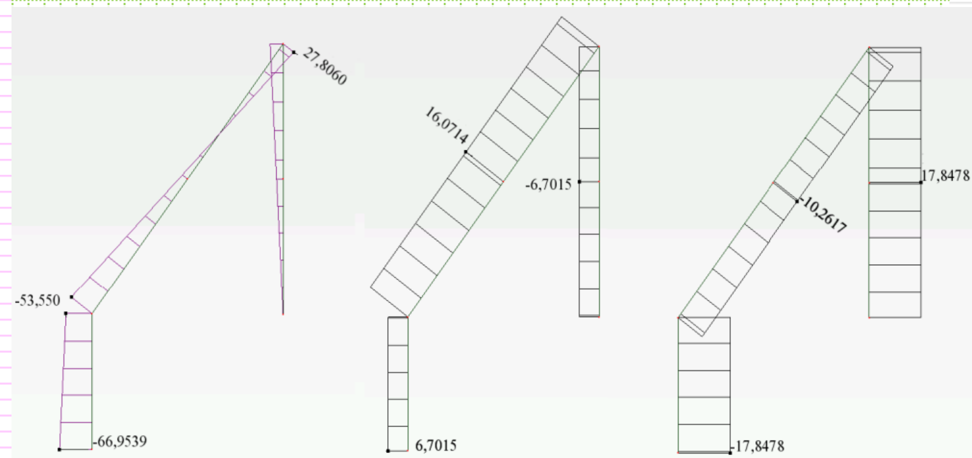
$$\bar{S}_\varphi^T = \bar{S}_\varphi^1 \cdot X_1^T = [1 \cdot (-4{,}1948)] kN \cdot m = -4{,}1948 kN \cdot m$$

$$R_i^\Delta = \bar{R}_i^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{R}_i^2 \cdot X_2^\Delta,$$
$$M_{ij}^\Delta = \bar{M}_{ij}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{M}_{ij}^2 \cdot X_2^\Delta,$$
$$V_{ij}^\Delta = \bar{V}_{ij}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{V}_{ij}^2 \cdot X_2^\Delta,$$
$$N_{ij}^\Delta = \bar{N}_{ij}^1 \cdot X_1^\Delta + \bar{N}_{ij}^\Delta \cdot X_2^\Delta.$$

$$\bar{S}_\varphi^\Delta = \bar{S}_\varphi^1 \cdot X_1^\Delta = [1 \cdot 66{,}9539] kN \cdot m = 66{,}9539 kN \cdot m$$



Wykresy rzeczywistych sił od wpływów temp.



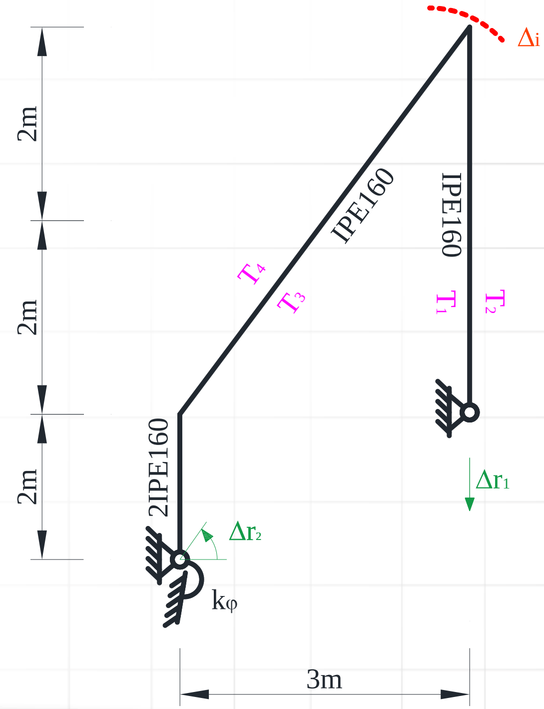
Wykresy rzeczywistych sił od osiadania podpór

OBLICZENIE SZUKANEGO PRZEMIESZCZENIA

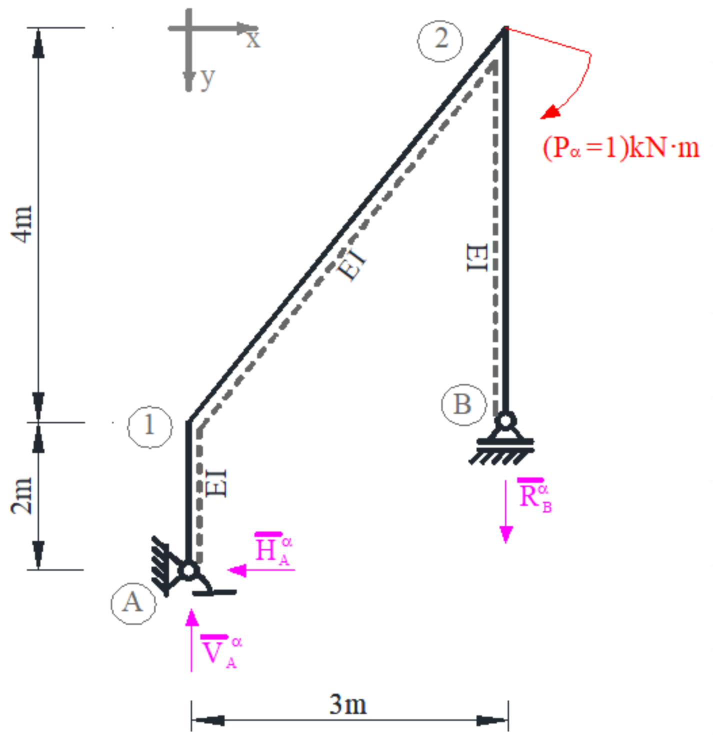
Do wyznaczenia przemieszczeń wykorzystano twierdzenie redukcyjne, które pozwala na to aby jedno z otrzymanych rozwiązań było w układzie statycznie wyznaczalnym. Ponieważ rzeczywiste siły wewnętrzne zostały uzyskane we wcześniejszych punktach, należy rozwiązać dowolny układ podstawowy od siły jednostkowej w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia. Gdy znane jest rozwiązanie układu hiperstatycznego, przemieszczenia wyznaczane są ze wzorów:

$$\Delta_{\alpha T}=\left\{\int\frac{\bar{M}^{\alpha}\cdot M^{T}}{EI}dx+\sum_{n}\frac{\bar{S}_{n}^{\alpha}\cdot S_{n}^{T}}{k_{n}}+\sum_{p}\alpha\frac{\Delta T_{w}-\Delta T_{p}}{h}\Omega_{\bar{M}_{y}^{\alpha}}+\sum_{p}\alpha\Delta T_{0}\Omega_{\bar{N}_{x}^{\alpha}}\right\}/\,P_{\alpha},$$

$$\Delta_{\alpha\Delta}=\left\{\int\frac{\bar{M}^{\alpha}\cdot M^{\Delta}}{EI}dx+\sum_{n}\frac{\bar{S}_{n}^{\alpha}\cdot S_{n}^{\Delta}}{k_{n}}-\sum_{n}\bar{R}_{n}^{\alpha}\Delta r_{n}\right\}/\,P_{\alpha}.$$



ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD SIŁY JEDNOSTKOWEJ NA KIERUNKU SZUKANEGO PRZEMIESZCZENIA



Reakcje od (P_α=1) kN·m

Obliczenie reakcji

$\sum X = 0 \qquad \bar{H}^{\alpha}_{1A} = 0kN$

$\sum M_A = 0 \qquad \bar{R}^{\alpha}_{B} \cdot 3m - P_\alpha kN \cdot m = 0 \qquad \bar{R}^{1}_{B} = -\frac{1}{3} kN$

$\sum Y = 0 \qquad \bar{R}^{\alpha}_{B} - \bar{V}^{\alpha}_{A} = 0 \qquad \bar{V}^{\alpha}_{A} = -\frac{1}{3} kN$

Obliczenie momentów zginających

$\bar{M}^{\alpha}_{A1} = \bar{M}^{\alpha}_{1A} = \bar{M}^{\alpha}_{12} = 0$

$\bar{M}^{\alpha}_{2B} = \bar{M}^{\alpha}_{B2} = 0$

$\bar{M}^{\alpha}_{21} = -P_\alpha = -1kN \cdot m$

Obliczenie sił tnących

$\bar{V}^{\alpha}_{A1} = \bar{V}^{\alpha}_{1A} = \bar{H}^{\alpha}_{A} = 0$

$\bar{V}^{\alpha}_{12} = \bar{V}^{\alpha}_{21} = \bar{H}^{\alpha}_{A} \cdot 0,8 + \bar{V}^{\alpha}_{A} \cdot 0,6 = 0kN \cdot 0,8 - \frac{1}{3} kN \cdot 0,6m = -0,2kN$

$\bar{V}^{\alpha}_{B2} = \bar{V}^{\alpha}_{2B} = 0$

Obliczenie sił osiowe

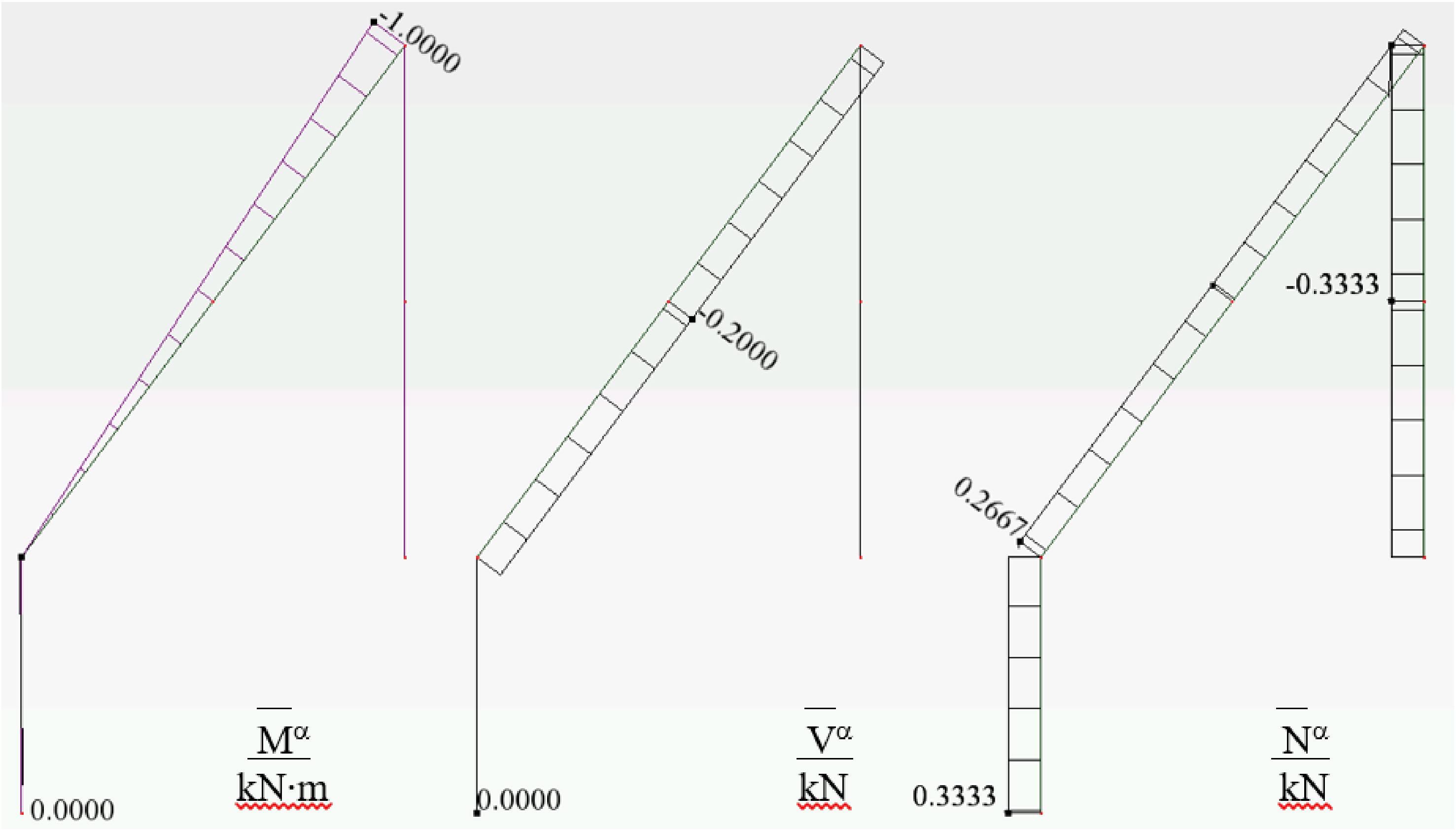
$\bar{N}^{\alpha}_{A1} = \bar{N}^{\alpha}_{1A} = -\bar{V}^{\alpha}_{A} = 0,3333kN$

$\bar{N}^{\alpha}_{12} = \bar{N}^{\alpha}_{21} = \bar{H}^{\alpha}_{A} \cdot 0,6 - \bar{V}^{\alpha}_{A} \cdot 0,8 = 0kN \cdot 0,6 - (-\frac{1}{3})kN \cdot 0,8m = 0,2667kN$

$\bar{N}^{\alpha}_{B2} = \bar{V}^{\alpha}_{2B} = \bar{R}^{\alpha}_{B} = -0,3333kN$

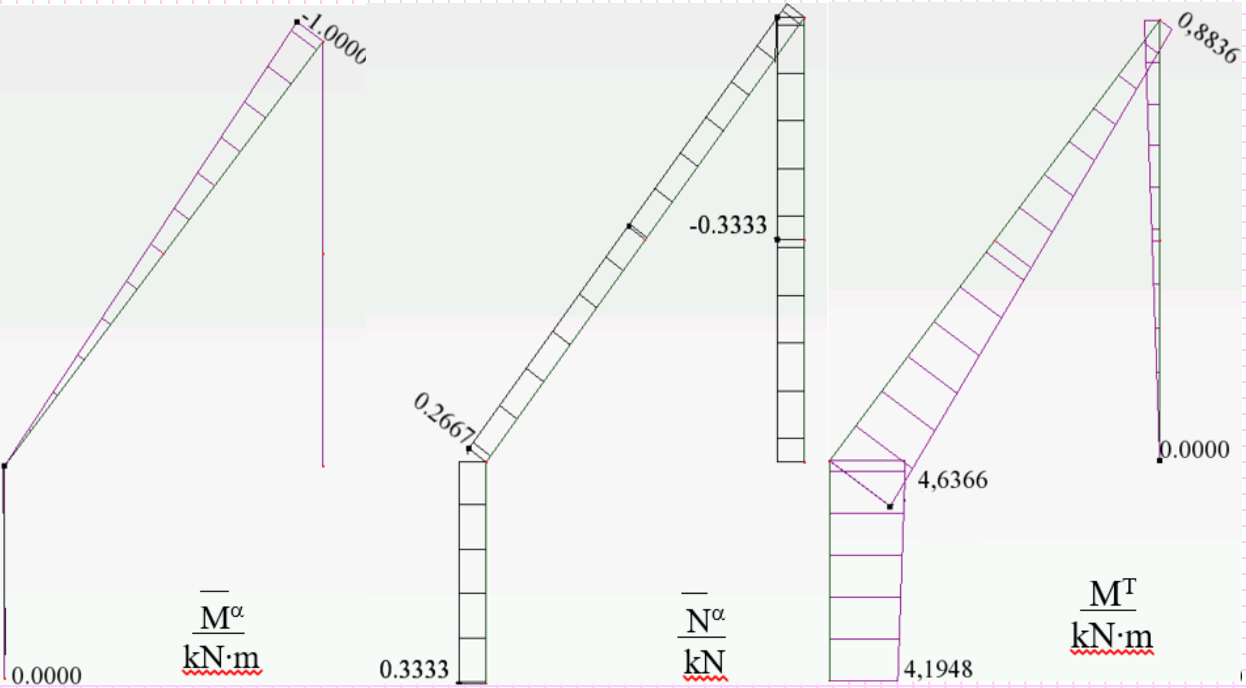
ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD SIŁY JEDNOSTKOWEJ NA KIERUNKU SZUKANEGO PRZEMIESZCZENIA

Moment zginający w więzi sprężystej: $\bar{S}^{1}_{\varphi} = 0$



Wykresy rzeczywistych sił przekrojowych od obciążenia mechanicznego

OBLICZENIE PRZEMIESZCZENIA OD WPŁYWÓW TEMPERATURY



$$\Delta T_{0,12} = \left[(-15+25)/2\right]^{\circ}C = 5^{\circ}C$$

$$\Omega_{\bar{M}^{\alpha}_{y,12}} = \left(-1\cdot 5\cdot \frac{1}{2}\right) kN\cdot m^2 = -2{,}5 kN\cdot m^2,$$

$$\Omega_{\bar{N}^{\alpha}_{x,12}} = \left(-0{,}2\cdot 5\right) kN\cdot m = -1 kN\cdot m,$$

$$\Delta T_{0,2B} = \left[(10-20)/2\right]^{\circ}C = -5^{\circ}C,$$

$$\Omega_{\bar{M}^{\alpha}_{y,2B}} = 0,$$

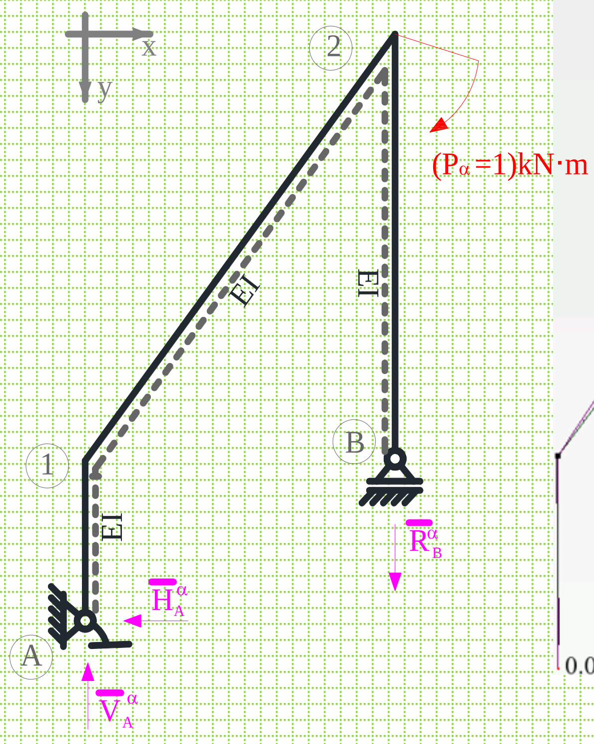
$$\Omega_{\bar{N}^{\alpha}_{x,2B}} = \left(0{,}3333\cdot 4\right) kN\cdot m = 1{,}3332 kN\cdot m,$$

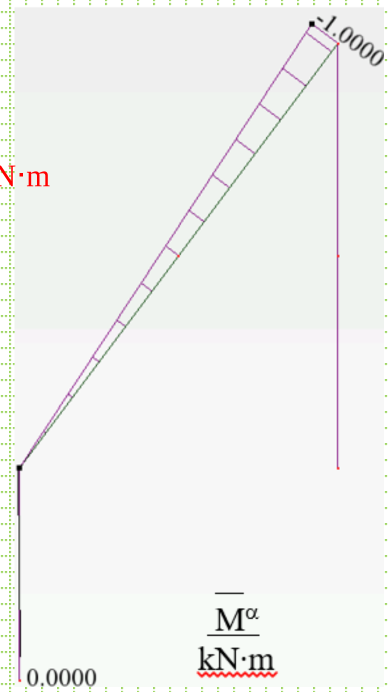
$$\Delta_{\alpha T} = \left\{\frac{5}{6}\left[0\cdot 4{,}6366 + 4\cdot(-0{,}5)\cdot 2{,}7601 + (-1)\cdot 0{,}8836\right] + \frac{0\cdot -4{,}1948}{10}\right\}\frac{kN\cdot m^2}{EI} +$$

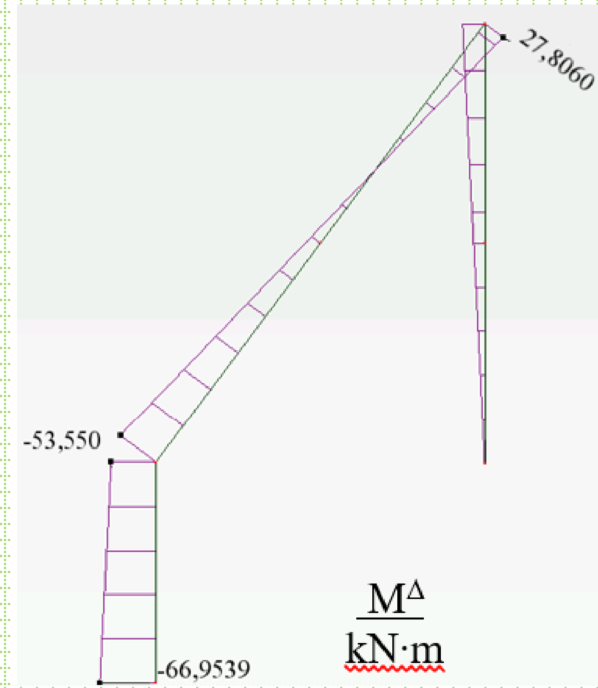
$$+\left[0{,}000012\cdot\frac{-15-25}{0{,}16}\cdot\frac{1}{2}\cdot 5\cdot(-1) + 0{,}000012\cdot 5\cdot 4\cdot 0{,}2667 + 0{,}000012\cdot(-5)\cdot 4\cdot(-0{,}3333)\right] rad =$$

$$= -5{,}3365\frac{kN\cdot m^2}{EI} + 0{,}0076 rad = -\frac{5{,}3365 kN\cdot m^2}{1825{,}4019 kN\cdot m^2} + 0{,}0076 rad = 0{,}0047 rad$$

OBLICZENIE PRZEMIESZCZENIA OD OSIADANIA PODPÓR







$$\Delta_{\alpha\Delta} = \left\{ \int \frac{\bar{M}^{\alpha} \cdot M^{\Delta}}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^{\alpha} \cdot S_n^{\Delta}}{k_n} - \sum_n \bar{R}_n^{\alpha} \Delta r_n \right\} / P_{\alpha} = \left\{ \frac{5}{6}\left[0\cdot(-53,5509) + 4\cdot(-0,5)\cdot(-13,3725) + (-1)\cdot 26,806\right] + \frac{-0\cdot 66,9539}{10} \right\} \frac{kN\cdot m^3}{EI} - \left(-\frac{1}{3}\cdot 0,04\right) m = (-0,0508)\frac{kN\cdot m^3}{EI} + 0,0267m$$

$$= \frac{-0,0508 kN\cdot m^3}{1825,4019 kN\cdot m^2} + 0,00133m = -0,0134 rad$$