

Mechanika Budowli

Laboratorium nr 2

Opracowała: dr inż. Olga Szyłko-Bigus



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Politechnika Wroclawska

Projekt nr 1. Metoda sił-układ przestrzenny

Politechnika Wrocławska
Wydział Budownictwa Lądowego i Wodnego

Katedra Mechaniki Budowli
i Inżynierii Miejskiej

Mechanika budowli – laboratorium

rok akademicki: 2021/2022

Zadanie 1. Układ przestrzenny

Dany jest hiperstatyczny przestrzenny ustrój prętowy o schemacie statycznym jak na rysunku.

- 1) Należy dobrać wymiary zadanych profili tak, aby w zadanym stanie obciążenia spełnione były warunki SGN podane w PN-EN 1993-1-1:2006 zakładając, że pręty układu są zabezpieczone przed utratą stateczności.
- 2) Stosując metodę sił obliczyć reakcje i siły wewnętrzne.
- 3) Wyznaczyć zadane przemieszczenie.

Szczegółowe wytyczne dotyczące wykonania zadania podane zostaną na zajęciach.

Mechanika budowli - dane do zadania 1 - semestr letni 2020/2021

Dane studenta

Numer albumu:

Kurs powtórkowy: tak nie

Dane geometryczno-materiałowe

$L_1 =$ m Stal:

$L_2 =$ m Profil:

$L_3 =$ m $k_{\delta} =$ kN/m

$L_4 =$ m $k_{\varphi} =$ kNm/rad

Obciążenia

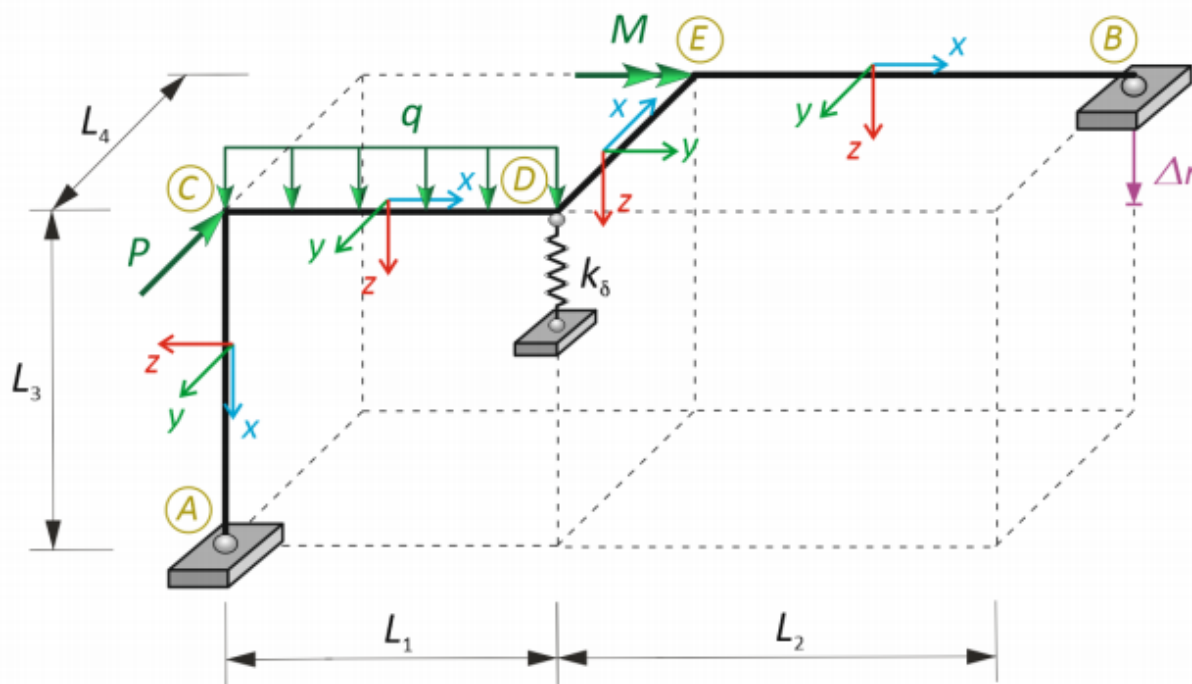
$P =$ kN $T_y^{(+)} =$ °C

$M =$ kNm $T_y^{(-)} =$ °C

$q =$ kN/m $\Delta r =$ mm

Schemat statyczny układu przestrzennego

1. SCHEMAT STATYCZNY UKŁADU

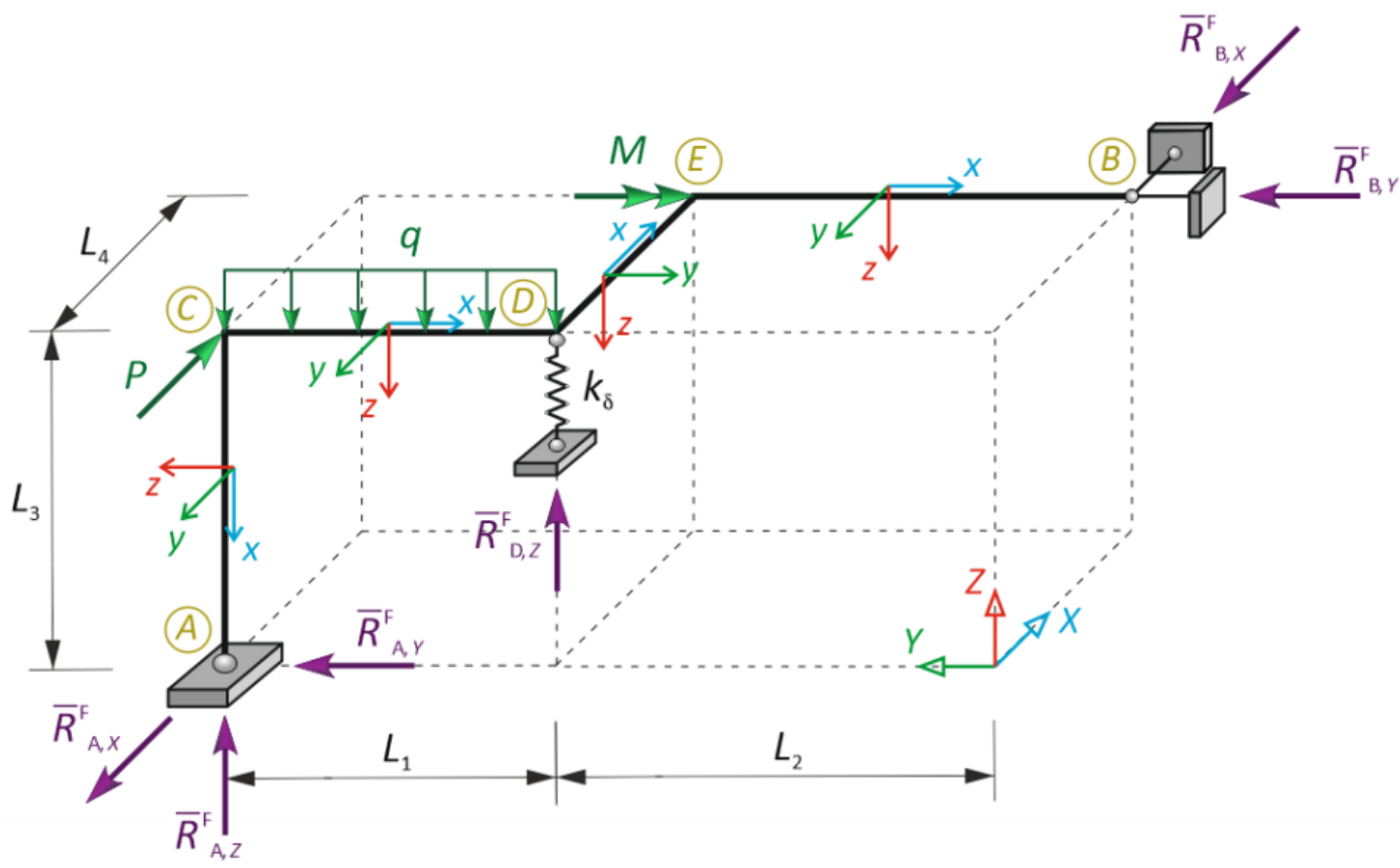


Dane:

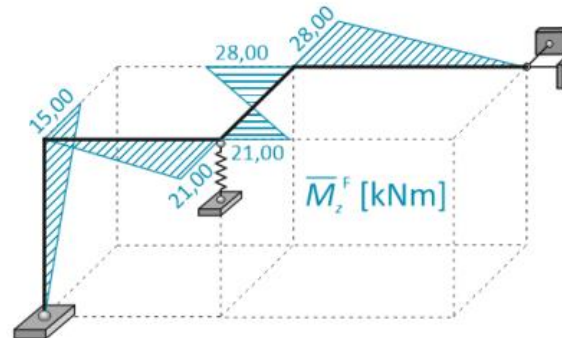
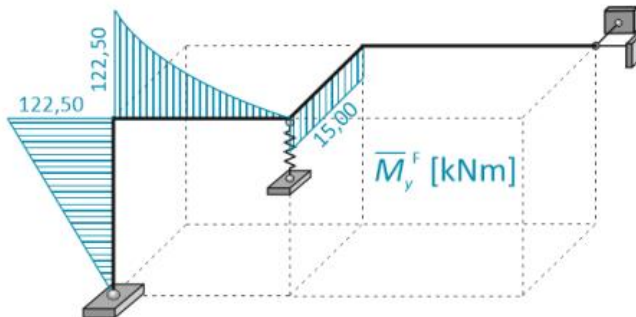
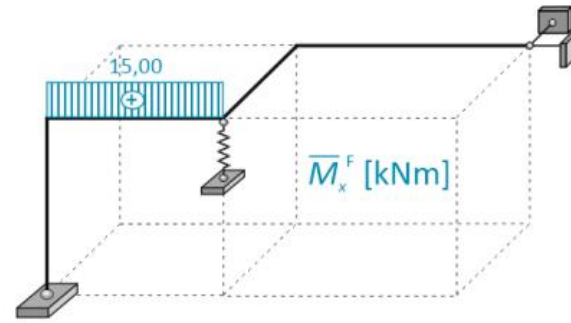
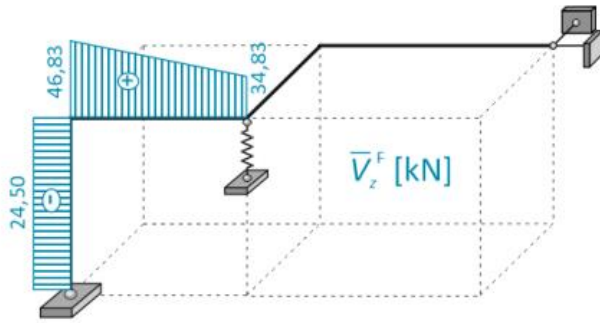
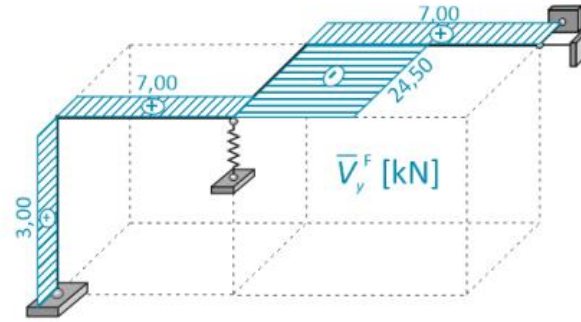
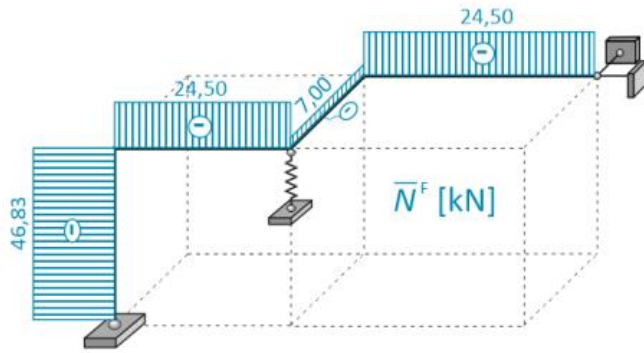
$$L_1 = 3,0 \text{ m} ; L_2 = 4,0 \text{ m} ; L_3 = 5,0 \text{ m} ; L_4 = 2,0 \text{ m} ; k_\delta = 3\,500 \text{ kN/m}$$

$$P = 10 \text{ kN} ; q = 4 \text{ kN/m} ; M = 15 \text{ kNm} ; \Delta r = 15 \text{ mm}$$

5. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA ZADANEGO



5. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA ZADANEGO



6. RÓWNANIE KANONICZNE METODY SIŁ

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{1F} = -\Delta r$$

$$\bar{1} \text{ kN} \cdot \delta_{11} \cong \sum_p \int_L \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^1}{GI_x} dx + \sum_p \int_L \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^1}{EI_y} dx + \sum_p \int_L \frac{\bar{M}_z^1 \bar{M}_z^1}{EI_z} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_\delta^1 \bar{S}_\delta^1}{k_\delta}$$

$$\bar{1} \text{ kN} \cdot \delta_{1F} \cong \sum_p \int_L \frac{\bar{M}_x^1 \bar{M}_x^F}{GI_x} dx + \sum_p \int_L \frac{\bar{M}_y^1 \bar{M}_y^F}{EI_y} dx + \sum_p \int_L \frac{\bar{M}_z^1 \bar{M}_z^F}{EI_z} dx + \sum_s \frac{\bar{S}_\delta^1 \bar{S}_\delta^F}{k_\delta}$$

Sztywności przekrojowe:

$$GI_x = 81 \text{ GPa} \cdot 4\,920,35 \text{ cm}^4 = 3\,985,48 \text{ kN/m}^2$$

$$EI_y = 210 \text{ GPa} \cdot 5\,111,00 \text{ cm}^4 = 10\,733,10 \text{ kN/m}^2$$

$$EI_z = 210 \text{ GPa} \cdot 2\,298,00 \text{ cm}^4 = 4\,825,80 \text{ kN/m}^2$$

6. RÓWNANIE KANONICZNE METODY SIŁUstalenie jednostek współczynników:

$$[\delta_{11}] = [\delta_{1F}] = \frac{1}{\text{kN}} \cdot \frac{1}{\text{kNm}^2} \cdot \text{kNm} \cdot \text{kNm} \cdot \text{m} = \frac{\text{kN}^2 \text{m}^3}{\text{kN}^2 \text{m}^2} = \text{m}$$

Przy czym ze względu na jednostkową wartość siły w przypadku współczynnika δ_{11} , traktujemy go jako podatność i przypisujemy jednostkę: m/kN.

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{3\,985,48} [2,00 \cdot 3 \cdot 2,00 - 4,00 \cdot 2 \cdot (-4,00)] + \frac{1}{10\,733,10} \left[0,5 \cdot (-7,00) \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-7,00) + \right. \\ &+ \frac{3}{6} (7,00 \cdot 7,00 + 4 \cdot 5,50 \cdot 5,50 + 4,00 \cdot 4,00) + 0,5 \cdot 2,00 \cdot 2 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,00 + \\ &+ 0,5 \cdot 4,00 \cdot 4,00 \cdot \frac{2}{3} \cdot 4,00 \left. \right] + \frac{1}{4\,825,80} \left[0,5 \cdot 2,00 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 2,00 + 0,5 \cdot 1,20 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1,20 + \right. \\ &+ \frac{2}{6} (1,20 \cdot 1,20 + 4 \cdot (-0,20) \cdot (-0,20) + (-1,60) \cdot (-1,60)) + 0,5 \cdot (-1,60) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-1,60) \left. \right] \\ &= 0,0110 + 0,0185 + 0,0028 = 0,0323 \text{ [m/kN]} \end{aligned}$$

6. RÓWNANIE KANONICZNE METODY SIŁ

$$\begin{aligned}
\delta_{1F} &= \frac{1}{3\,985,48} [2,00 \cdot 3 \cdot 15,00] + \frac{1}{10\,733,10} \left[0,5 \cdot (-7,00) \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 122,50 + \right. \\
&+ \frac{3}{6} (7,00 \cdot (-122,50) + 4 \cdot 5,50 \cdot (-56,745) + 4,00 \cdot 0) + 0,5 \cdot 2,00 \cdot 2 \cdot 15,00 \left. \right] + \\
&+ \frac{1}{4\,825,80} \left[0,5 \cdot 2,00 \cdot 5 \cdot \frac{2}{3} \cdot 15,00 + 0,5 \cdot 1,20 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot (-21,00) + \right. \\
&+ \frac{2}{6} (1,20 \cdot (-21,00) + 4 \cdot (-0,20) \cdot 3,50 + (-1,60) \cdot 28,00) + 0,5 \cdot (-1,60) \cdot 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 28,00 \left. \right] \\
&= 0,0226 - 0,2285 - 0,0123 = -0,2182 \text{ [m]}
\end{aligned}$$

$$\left(0,0323 \frac{\text{m}}{\text{kN}} \right) \cdot X_1 - 0,2182 \text{ m} = -0,015 \text{ m}$$

$$X_1 = 6,29 \text{ kN}$$

7. REAKCJE I SIŁY WEWNĘTRZNE W UKŁADZIE HIPERSTATYCZNYM

7.1 Reakcje podporowe

$$R_{A,X} = \bar{R}_{A,X}^1 \cdot X_1 + \bar{R}_{A,X}^F = 5,52 \text{ kN}$$

$$R_{A,Y} = \bar{R}_{A,Y}^1 \cdot X_1 + \bar{R}_{A,Y}^F = -15,69 \text{ kN}$$

$$R_{A,Z} = \bar{R}_{A,Z}^1 \cdot X_1 + \bar{R}_{A,Z}^F = 40,54 \text{ kN}$$

$$R_{B,X} = \bar{R}_{B,X}^1 \cdot X_1 + \bar{R}_{B,X}^F = 4,48 \text{ kN}$$

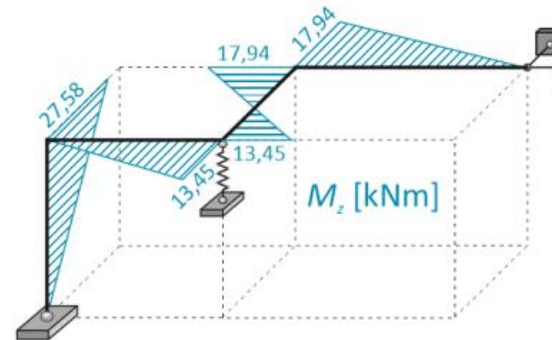
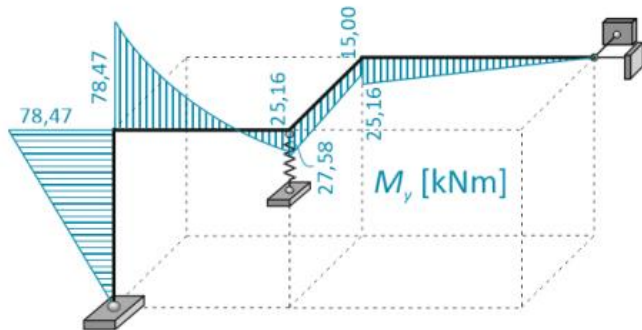
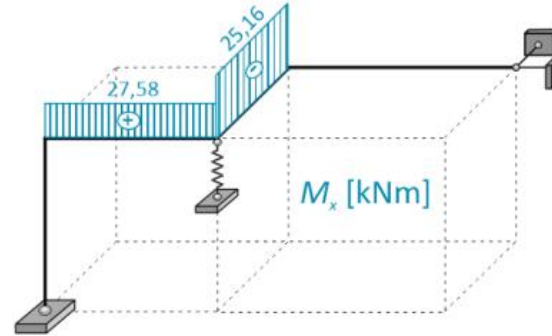
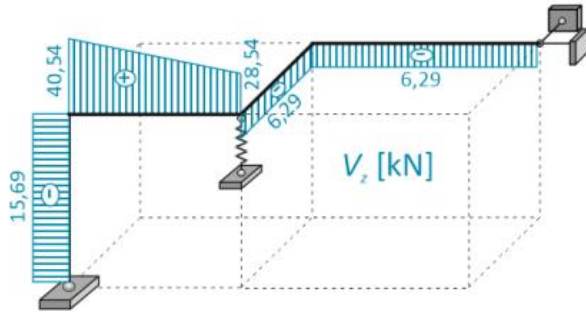
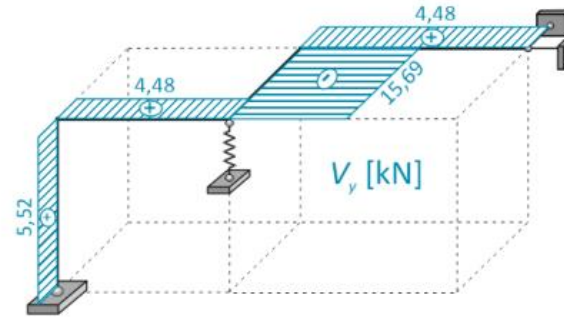
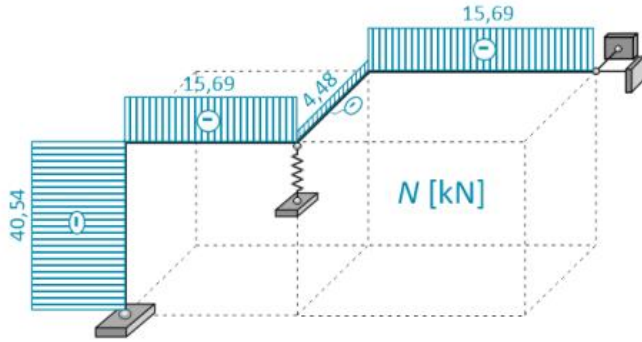
$$R_{B,Y} = \bar{R}_{B,Y}^1 \cdot X_1 + \bar{R}_{B,Y}^F = 15,69 \text{ kN}$$

$$R_{B,Z} = X_1 = 6,29 \text{ kN} ; R_{D,Z} = \bar{R}_{D,Z}^1 \cdot X_1 + \bar{R}_{D,Z}^F = -34,83 \text{ kN}$$

7.2 Siły wewnętrzne

$$S_i = \bar{S}_i^1 \cdot X_1 + \bar{S}_i^F$$

7. REAKCJE I SIŁY WEWNĘTRZNE W UKŁADZIE HIPERSTATYCZNYM



WZORY DO WYZNACZANIA PRZEMIESZCZEŃ W UKŁADACH PRZESTRZENNYCH

W celu wyznaczenia przemieszczenia należy dany układ rozwiązać od 2 obciążeń:

1. Od obciążenia stanowiącego przyczynę wywołującą szukane przemieszczenie,
2. Od obciążenia "jednostkowego" przyłożonego w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia.

Uwaga: Jedno z tych rozwiązań może być wirtualne co oznacza, że może ono być wykonane dla dowolnego izostaticznego modelu układu (we wzorach oznaczono je nadkreśleniem). Od zmian temperatury i przemieszczeń, w rozwiązaniu tym, siły przekrojowe i reakcje równe są zerowe.

PRZEMIESZCZENIA OD OBCIĄŻEŃ SIŁAMI

$$\begin{aligned} \Delta_{iF} = \Delta_i^F &= \int \frac{\overline{Mx}^i \cdot Mx^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{\overline{My}^i \cdot My^F}{EIy} \cdot dx + \int \frac{\overline{Mz}^i \cdot Mz^F}{Elz} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_y \cdot V_y^i \cdot V_y^F}{GA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_z \cdot V_z^i \cdot V_z^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^F}{k_s} = \\ &= \int \frac{Mx^i \cdot Mx^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot My^F}{EIy} \cdot dx + \int \frac{Mz^i \cdot Mz^F}{Elz} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot N^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot V_y^i \cdot V_y^F}{GA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_z \cdot V_z^i \cdot V_z^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot S_s^F}{k_s} = \\ &= \int \frac{Mx^i \cdot \overline{Mx}^F}{GIs} \cdot dx + \int \frac{My^i \cdot \overline{My}^F}{EIy} \cdot dx + \int \frac{\overline{Mz}^i \cdot Mz^F}{Elz} \cdot dx + \int \frac{N^i \cdot \overline{N}^F}{EA} \cdot dx + \int \frac{\kappa_y \cdot V_y^i \cdot \overline{V}_y^F}{GA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_z \cdot V_z^i \cdot \overline{V}_z^F}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{S_s^i \cdot \overline{S}_s^F}{k_s} \end{aligned}$$

PRZEMIESZCZENIA OD BŁĘDÓW MONTAŻU I PRZEMIESZCZEŃ PODPÓR

$$\begin{aligned} \Delta_{i\Delta} = \Delta_i^\Delta &= \int \frac{\overline{Mx}^i \cdot Mx^\Delta}{GIs} \cdot dx + \int \frac{\overline{My}^i \cdot My^\Delta}{EIy} \cdot dx + \int \frac{\overline{Mz}^i \cdot Mz^\Delta}{Elz} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^\Delta}{EA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_y \cdot V_y^i \cdot V_y^\Delta}{GA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_z \cdot V_z^i \cdot V_z^\Delta}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^\Delta}{k_s} + \\ &+ \sum_{mx} \overline{Mx}_{mx}^i \cdot \Delta\varphi_{mx}^\Delta + \sum_{my} \overline{My}_{my}^i \cdot \Delta\varphi_{my}^\Delta + \sum_{mz} \overline{Mz}_{mz}^i \cdot \Delta\varphi_{mz}^\Delta + \sum_n \overline{N}_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_{vy} \overline{V}_y^i \cdot \Delta h_{vy}^\Delta + \sum_{vz} \overline{V}_z^i \cdot \Delta h_{vz}^\Delta - \sum_r \overline{R}_r^i \cdot \Delta_r = \\ &= \sum_{mx} \overline{Mx}_{mx}^i \cdot \Delta\varphi_{mx}^\Delta + \sum_{my} \overline{My}_{my}^i \cdot \Delta\varphi_{my}^\Delta + \sum_{mz} \overline{Mz}_{mz}^i \cdot \Delta\varphi_{mz}^\Delta + \sum_n \overline{N}_n^i \cdot \Delta L_n^\Delta + \sum_{vy} \overline{V}_y^i \cdot \Delta h_{vy}^\Delta + \sum_{vz} \overline{V}_z^i \cdot \Delta h_{vz}^\Delta - \sum_r \overline{R}_r^i \cdot \Delta_r \end{aligned}$$

PRZEMIESZCZENIA OD ZMIAN TEMPERATURY

$$\begin{aligned} \Delta_{iT} = \Delta_i^T &= \int \frac{\overline{Mx}^i \cdot Mx^T}{GIs} \cdot dx + \int \frac{\overline{My}^i \cdot My^T}{EIy} \cdot dx + \int \frac{\overline{Mz}^i \cdot Mz^T}{Elz} \cdot dx + \int \frac{\overline{N}^i \cdot N^T}{EA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_y \cdot V_y^i \cdot V_y^T}{GA} \cdot dx + \int \frac{\overline{\kappa}_z \cdot V_z^i \cdot V_z^T}{GA} \cdot dx + \sum_s \frac{\overline{S}_s^i \cdot S_s^T}{k_s} + \\ &+ \int \overline{My}^i \cdot \Delta d\varphi_y^T + \int \overline{Mz}^i \cdot \Delta d\varphi_z^T + \int \overline{N}^i \cdot \Delta dL^T = \\ &= \int \overline{My}^i \cdot \Delta d\varphi_y^T + \int \overline{Mz}^i \cdot \Delta d\varphi_z^T + \int \overline{N}^i \cdot \Delta dL^T \end{aligned}$$

gdzie $\Delta d\varphi_y^T = \frac{\alpha_T \cdot (\Delta Tz^+ - \Delta Tz^-)}{h_z} \cdot dx$, $\Delta d\varphi_z^T = \frac{\alpha_T \cdot (\Delta Ty^- - \Delta Ty^+)}{h_v} \cdot dx$,

PRZYJĘTE OZNACZENIA

Oznaczenie wielkości składa się z symbolu oznaczającego wielkość i indeksów dolnych oraz górnych.

SYMBOLE oznaczające określone wielkości:

Δ - przemieszczenie (może to być przesunięcie, kąt obrotu lub wzajemne przemieszczenie) lub przyrost określonej wielkości

$M_x = M_x(x)$ – moment skręcający, $M_y = M_y(x)$, $M_z = M_z(x)$ – momenty zginające, $N = N(x)$ – siła osiowa (podłużna),
 $V_y = V_y(x)$ – siła tnąca (poprzeczna), $V_z = V_z(x)$ – siły tnące (poprzeczne), Ω - pole wykresu siły przekrojowej

S – siła w więzi sprężystej (moment w więzi rotacyjnej lub siła podłużna w więzi translacyjnej),

k – sztywność więzi sprężystej, κ_y , κ_z - współczynniki zależne od kształtu przekroju,

α_T - współczynnik rozszerzalności termicznej materiału,

E , G – moduły sprężystości podłużnej i poprzecznej materiału (Younga i Kirchoffa),

A , I_y , I_z – pole i momenty bezwładności poprzecznego przekroju pręta,

I_s - momenty bezwładności na skręcanie poprzecznego przekroju pręta (dla przekrojów kołowych i rur jest równy biegunowemu momentowi bezwładności).

INDEKSY

Indeks górny określa przyczynę wywołującą daną wielkość.

Pierwszy indeks dolny określa miejsce działania (występowania) danej wielkości.

Drugi indeks dolny określa, jeśli nie ma indeksu górnego, przyczynę wywołującą daną wielkość, a jeśli jest indeks górny, stanowi uzupełnienie określenia miejsca działania danej wielkości.

Np.: M_y^n oznacza moment w dowolnym miejscu wywołany przyczyną oznaczoną symbolem n ,

M_{ij}^n oznacza moment w punkcie i pręta $i-j$ wywołany przyczyną oznaczoną symbolem n ,

Δ_{ij} , Δ_i^j oznaczają przemieszczenie w miejscu i kierunku i wywołane przyczyną oznaczoną symbolem j

N_p^i oznacza siłę osiową w pręcie o numerze p wywołaną przyczyną oznaczoną symbolem i ,

S_s^i oznacza siłę w więzi sprężystej o numerze s wywołaną przyczyną oznaczoną symbolem i .

Zadanie domowe (projekt nr 1, zadanie nr 2):

1. Sporządzić wykresy rzeczywistych sił wewnętrznych od obciążenia