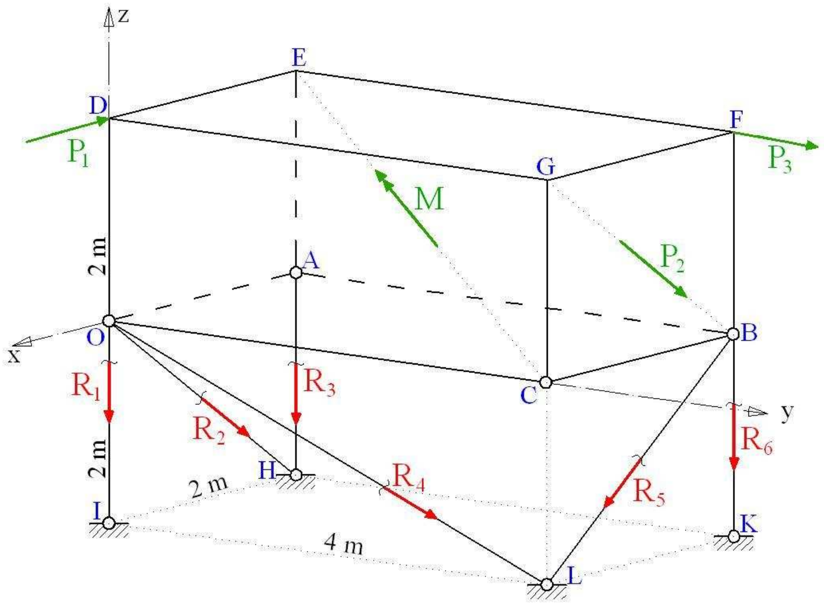
Przykład z układu przestrzennego sił

Dla sztywnej bryły obciążonej i podpartej jak na rysunku:
- dokonać redukcji obciążenia czynnego do przyjętego początku układu współrzędnych,
- wyznaczyć wypadkową sił czynnych jeśli istnieje,
- określić wartość sił w więziach łączących bryłę z fundamentem.

Schemat układu:



Dane do zadania:

$P_1 = 10$ kN
$P_2 = 15\sqrt{2}$ kN
$P_3 = 20$ kN
$M = 5\sqrt{24}$ kNm

1. Współrzędne punktów charakterystycznych układu:

O(0,0,0) m; A(–2,0,0) m; B(–2,4,0) m; C(0,4,0) m;
D(0,0,2) m; E(–2,0,2) m; F(–2,4,2) m; G(0,4,2) m;
H(–2,0,–2) m; I(0,0,–2) m; K(–2,4,–2) m; L(0,4,–2) m;

2. Zapis wektorowy sił i promieni wektorów (dobór punktów lokacyjnych) sił czynnych:

- $\vec{P}_1 = 10\vec{i}$ (kN)

$$\vec{r}_1 = \overrightarrow{OD} = (x_D - x_O)\vec{i} + (y_D - y_O)\vec{j} + (z_D - z_O)\vec{k} = (0-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (2-0)\vec{k} = 2\vec{k} \text{ (m)}$$

- Wyznaczenie wektora $\overrightarrow{GB}$ o kierunku i zwrocie siły $\vec{P}_2$:

$$\overrightarrow{GB} = (x_B - x_G)\vec{i} + (y_B - y_G)\vec{j} + (z_B - z_G)\vec{k} = (-2-0)\vec{i} + (4-4)\vec{j} + (0-2)\vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{k} \text{ (m)}$$

$$\left|\overrightarrow{GB}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (0)^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2} \text{ (m)}$$

Wektor jednostkowy $\vec{e}_2$ (zgodny ze zwrotem i kierunkiem siły $\vec{P}_2$ i wektora $\overrightarrow{GB}$):

$$\vec{e}_2 = -\frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{2}{2\sqrt{2}}\vec{k} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$$

$$\vec{P}_2 = P_2 \cdot \vec{e}_2 = 15\sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}\right) = -15\vec{i} - 15\vec{k} \text{ (kN)}$$

$$\vec{r}_2 = \overrightarrow{OG} = (x_G - x_O)\vec{i} + (y_G - y_O)\vec{j} + (z_G - z_O)\vec{k} = (0-0)\vec{i} + (4-0)\vec{j} + (2-0)\vec{k} = 4\vec{j} + 2\vec{k} \text{ (m)}$$

- $\vec{P}_3 = 20\vec{j}$ (kN)

  $\vec{r}_3 = \overrightarrow{OE} = (x_E - x_O)\vec{i} + (y_E - y_O)\vec{j} + (z_E - z_O)\vec{k} = (-2-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (2-0)\vec{k} = -2\vec{i} + 2\vec{k}$ (m)

- Wyznaczenie wektora $\overrightarrow{CE}$ o kierunku i zwrocie siły $\vec{M}$:

  $\overrightarrow{CE} = (x_E - x_C)\vec{i} + (y_E - y_C)\vec{j} + (z_E - z_C)\vec{k} = (-2-0)\vec{i} + (0-4)\vec{j} + (2-0)\vec{k} = -2\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$ (m)

  $\left|\overrightarrow{CE}\right| = \sqrt{(-2)^2 + (-4)^2 + 2^2} = \sqrt{24}$ (m)

  Wektor jednostkowy $\vec{e}_M$ (zgodny ze zwrotem i kierunkiem momentu $\vec{M}$ i wektora $\overrightarrow{CE}$):

  $$\vec{e}_M = -\frac{2}{\sqrt{24}}\vec{i} - \frac{4}{\sqrt{24}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{24}}\vec{k}$$

  $$\vec{M} = M \cdot \vec{e}_M = 5\sqrt{24} \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{24}}\vec{i} - \frac{4}{\sqrt{24}}\vec{j} + \frac{2}{\sqrt{24}}\vec{k}\right) = -10\vec{i} - 20\vec{j} + 10\vec{k} \text{ (kNm)}$$

3. Redukcja do początku układu sił czynnych:

- siła ogólna: $\vec{S}^P = S_x^P\vec{i} + S_y^P\vec{j} + S_z^P\vec{k} = \sum_n \vec{P}_n$

$$S_x^P = \sum_n P_{nx} = -10 - 15 + 0 = -25 \text{ (kN)}$$

$$S_y^P = \sum_n P_{ny} = 0 + 0 + 20 = 20 \text{ (kN)}$$

$$S_z^P = \sum_n P_{nz} = 0 - 15 + 0 = -15 \text{ (kN)}$$

$$\vec{S}^P = -25\vec{i} + 20\vec{j} - 15\vec{k} \text{ (kN)}$$

- moment ogólny: $\vec{M}_O^P = M_{Ox}^P\vec{i} + M_{Oy}^P\vec{j} + M_{Oz}^P\vec{k} = \sum_n \left(\vec{r}_n \times \vec{P}_n\right) + \vec{M}$

$$\vec{M}_O^P = \vec{r}_1 \times \vec{P}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{P}_2 + \vec{r}_3 \times \vec{P}_3 + \vec{M} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ -10 & 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 4 & 2 \\ -15 & 0 & -15 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 20 & 0 \end{vmatrix} +$$

$$+\left(-10\vec{i} - 20\vec{j} + 10\vec{k}\right) = -110\vec{i} - 70\vec{j} + 30\vec{k} \text{ (kNm)}$$

4. Sprawdzenie istnienia wypadkowej:

$$W = \vec{S}^P \cdot \vec{M}_O^P = -25 \cdot (-110) + 20 \cdot (-70) + (-15) \cdot 30 = 900 \neq 0$$

Wniosek: Wypadkowa nie istnieje.

5. Zapis wektorowy sił i promieni wektorów (dobór punktów lokacyjnych) sił biernych:

Uwaga: Siły w więziach elementarnych R_n przyjęto jako siły rozciągające (od węzła).

- $\vec{R}_1 = -R_1\vec{k}$ (kN), $\vec{a}_1 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ (m)

- $\overrightarrow{OH} = (x_H - x_O)\vec{i} + (y_H - y_O)\vec{j} + (z_H - z_O)\vec{k} = (-2-0)\vec{i} + (0-0)\vec{j} + (-2-0)\vec{k} = -2\vec{i} - 2\vec{k}$ (m)

  $\left|\overrightarrow{OH}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ (m), $\vec{\varepsilon}_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$

  $\vec{R}_2 = R_2 \cdot \vec{\varepsilon}_2 = -\frac{R_2}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{R_2}{\sqrt{2}}\vec{k} = -0{,}707R_2\vec{i} - 0{,}707R_2\vec{k}$ (kN), $\vec{a}_2 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ (m)

- $\vec{R}_3 = -R_3\vec{k}$ (kN), $\vec{a}_3 = \overrightarrow{OA} = -2\vec{i}$ (m)

- $\overrightarrow{OL} = (x_L - x_O)\vec{i} + (y_L - y_O)\vec{j} + (z_L - z_O)\vec{k} = (0-0)\vec{i} + (4-0)\vec{j} + (-2-0)\vec{k} = 4\vec{j} - 2\vec{k}$ (m)

  $\left|\overrightarrow{OL}\right| = \sqrt{0^2 + 4^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{5}$ (m), $\vec{\varepsilon}_4 = \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j} - \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{k}$

  $\vec{R}_4 = R_4 \cdot \vec{\varepsilon}_4 = \frac{2R_4}{\sqrt{5}}\vec{j} - \frac{R_4}{\sqrt{5}}\vec{k} = 0{,}894R_4\vec{j} + 0{,}447R_4\vec{k}$ (kN), $\vec{a}_4 = 0\vec{i} + 0\vec{j} + 0\vec{k}$ (m)

- $\overrightarrow{BL} = (x_L - x_B)\vec{i} + (y_L - y_B)\vec{j} + (z_L - z_B)\vec{k} = (0+2)\vec{i} + (4-4)\vec{j} + (-2-0)\vec{k} = 2\vec{i} - 2\vec{k}$ (m)

  $\left|\overrightarrow{BL}\right| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$ (m), $\vec{\varepsilon}_5 = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{k}$

  $\vec{R}_5 = R_5 \cdot \vec{\varepsilon}_5 = \frac{R_5}{\sqrt{2}}\vec{i} - \frac{R_5}{\sqrt{2}}\vec{k} = 0{,}707R_5\vec{i} - 0{,}707R_5\vec{k}$ (kN), $\vec{a}_5 = \overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$ (m)

- $\vec{R}_6 = -R_6\vec{k}$ (kN), $\vec{a}_6 = \overrightarrow{OB} = -2\vec{i} + 4\vec{j}$ (m)

6. Redukcja do początku układu sił biernych:

- siła ogólna: $\vec{S}^R = S_x^R\vec{i} + S_y^R\vec{j} + S_z^R\vec{k} = \sum_n \vec{R}_n$

$$S_x^R = \sum_n R_{nx} = -0{,}707R_2 + 0{,}707R_5$$

$$S_y^R = \sum_n R_{ny} = 0{,}894R_4$$

$$S_y^R = \sum_n R_{ny} = -R_1 - 0{,}707R_2 - R_3 - 0{,}447R_4 - 0{,}707R_5 - R_6$$

- moment ogólny: $\vec{M}_O^R = M_{Ox}^R\vec{i} + M_{Oy}^R\vec{j} + M_{Oz}^R\vec{k} = \sum_n \left(\vec{a}_n \times \vec{R}_n\right)$

$$\vec{M}_O^P = \vec{a}_1 \times \vec{R}_1 + \vec{a}_2 \times \vec{R}_2 + \vec{a}_3 \times \vec{R}_3 + \vec{a}_4 \times \vec{R}_4 + \vec{a}_5 \times \vec{R}_5 + \vec{a}_6 \times \vec{R}_6 =$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} R_1 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ -0{,}707 & 0 & -0{,}707 \end{vmatrix} R_2 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} R_3 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}894 & -0{,}447 \end{vmatrix} R_4 +$$

$$+ \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ 0{,}707 & 0 & -0{,}707 \end{vmatrix} R_5 + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} R_6$$

$M^R_{Ox} = -2{,}828R_5 - 4R_6$

$M^R_{Oy} = -2R_3 - 1{,}414R_5 - 2R_6$

$M^R_{Oz} = -2{,}828R_5$

7. Równania równowagi:

$\vec{S} = 0 \longrightarrow \vec{S}^P + \vec{S}^R = 0$

$\vec{M}_O = 0 \longrightarrow \vec{M}^P_O + \vec{M}^R_O = 0$

$S^P_x + S^R_x = 0 \longrightarrow -0{,}707R_2 + 0{,}707R_5 - 25 = 0$

$S^P_y + S^R_y = 0 \longrightarrow 0{,}894R_4 + 20 = 0$

$S^P_z + S^R_z = 0 \longrightarrow -R_1 - 0{,}707R_2 - R_3 - 0{,}447R_4 - 0{,}707R_5 - R_6 - 15 = 0$

$M^P_{Ox} + M^R_{Ox} = 0 \longrightarrow -2{,}828R_5 - 4R_6 - 110 = 0$

$M^P_{Oy} + M^R_{Oy} = 0 \longrightarrow -2R_3 - 1{,}414R_5 - 2R_6 - 70 = 0$

$M^P_{Oz} + M^R_{Oz} = 0 \longrightarrow -2{,}828R_5 + 30 = 0$

8. Sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu:

$$\det\begin{vmatrix} 0 & -0{,}707 & 0 & 0 & 0{,}707 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0{,}894 & 0 & 0 \\ -1 & -0{,}707 & -1 & -0{,}447 & -0{,}707 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2{,}828 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1{,}414 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2{,}828 & 0 \end{vmatrix} = 14{,}299 \neq 0$$

9. Pierwiastki układu równań:

$R_1 = 47{,}495\ \text{kN}$, $R_2 = -24{,}747\ \text{kN}$, $R_3 = -7{,}501\ \text{kN}$,

$R_4 = -22{,}361\ \text{kN}$, $R_5 = 10{,}608\ \text{kN}$, $R_6 = -34{,}999\ \text{kN}$

10. Sprawdzenie:

$\vec{M}_F = 0 \longrightarrow \vec{M}^P_F + \vec{M}^R_F = 0$