



Politechnika
Wroclawska

MECHANIKA BUDOWLI

ĆWICZENIA LABORATORYJNE NR 2

Prowadząca: dr inż. Katarzyna Misiurek



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Rozwiązywanie układów statycznie niewyznaczalnych (hiperstatycznych) metodą przemieszczeń

Tok postępowania

1. Wyznaczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności

- podzielenie układu na zbiór elementów opisanych wzorami transformacyjnymi,
- wyznaczenie n_{φ} liczby stopni swobody obrotu węzłów (niezerowych kątów obrotu wynikającej z zastosowanych elementów i sposobu podparcia układu danego),
- wyznaczenie n_{δ} stopni swobody przesuwu węzłów:
 - budowa modelu przegubowego układu przez odrzucenie więzi sprężystych, zamianę węzłów na węzły przegubowe, korektę więzi podporowych (dodanie więzi), jeśli wśród przyjętych elementów był wspornik i/lub pręt sztywno-sztywno-suwny z przesuwem prostopadłym do osi pręta,
 - obliczenie $n_{\delta} \geq 2w - p - r$, gdzie w - liczba węzłów, p - liczba prętów, r - liczba elementarnych sztywnych więzi podporowych,
 - określenie rzeczywistej liczby stopni swobody przesuwu węzłów po dokonaniu analizy kinematycznej - sprawdzeniu warunku jakościowego geometrycznej niezmienności modelu przegubowego z dodanymi więziami,
- obliczenie stopnia geometrycznej niewyznaczalności $n_{\gamma} = n_{\delta} + n_{\varphi}$

Rozwiązywanie układów statycznie niewyznaczalnych (hiperstatycznych) metodą przemieszczeń

2. *Przyjęcie układu podstawowego metody przemieszczeń*

Układ podstawowy metody przemieszczeń = układ zadany po dodaniu n_φ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych.

W układzie podstawowym należy narysować obciążenia, podać wymiary i sztywności prętów, oznaczyć węzły - początkowe numery muszą być w tych węzłach w których dołożono więzi rotacyjne, wyróżnić włókna uprzywilejowane.

3. *Ogólna postać układu równań metody przemieszczeń:*

$$\sum_{j=1}^{n_\varphi} k_{ij} \cdot \varphi_j + \sum_{\beta=1}^{n_\delta} k_{i\beta} \cdot \delta_\beta + k_{i0} = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, n_\varphi,$$

$$\sum_{j=1}^{n_\varphi} k_{\alpha j} \cdot \varphi_j + \sum_{\beta=1}^{n_\delta} k_{\alpha\beta} \cdot \delta_\beta + k_{\alpha 0} = 0, \quad \alpha, \beta = 1, 2, \dots, n_\delta$$

Rozwiązywanie układów statycznie niewyznaczalnych (hiperstatycznych) metodą przemieszczeń

4. *Rozwiązanie układu podstawowego od danego obciążenia*

- szkic konstrukcji i obciążenia,
- obliczenie momentów brzegowych poszczególnych elementów,
- wypisanie momentów węzłowych
- obliczenie równoważników obciążenia i zaznaczenie sił równoważnych na schemacie konstrukcji,
- sporządzenie wykresu momentów zginających w układzie podstawowym od obciążenia danego

5. *Rozwiązanie układu podstawowego od kąta obrotu $\varphi_1 = 1$*

- szkic konstrukcji i obciążenia,
- obliczenie momentów brzegowych poszczególnych elementów,
- sporządzenie wykresu momentów zginających w układzie podstawowym od obciążenia kątem obrotu węzła M_{ij}^1

6. *... powtarzamy punkt 6 tyle razy ile wynosi n_φ*

Rozwiązywanie układów statycznie niewyznaczalnych (hiperstatycznych) metodą przemieszczeń

7. *Rozwiązanie układu podstawowego od przesunięcia węzła $\delta_I = 1$*
 - szkic konstrukcji i obciążenia,
 - sporządzenie planu przesunięć i obliczenie kątów obrotu cięciw,
 - obliczenie momentów brzegowych poszczególnych elementów,
 - sporządzenie wykresu momentów zginających w układzie podstawowym od obciążenia przesunięciem węzła M_{ij}^I
8. *... powtarzamy punkt 7 tyle razy ile wynosi n_δ*
9. *Obliczenie współczynników układu równań (reakcji w dołożonych więziach) stosujemy wzory:*

$$k_{ii} = \sum_j M_{ij}^i + k_\phi^i,$$

$$k_{\alpha i} = -\sum_{i,j} (M_{ij}^i + M_{ji}^i) \cdot \psi_{ij}^\alpha,$$

$$k_{ij} = M_{ji}^i,$$

$$k_{\alpha\beta} = -\sum_{i,j} (M_{ij}^\beta + M_{ji}^\beta) \cdot \psi_{ij}^\alpha + \sum_n k_{\delta n} \cdot \delta_{k_{\delta n}}^\alpha \cdot \delta_{k_{\delta n}}^\beta,$$

$$k_{i\alpha} = \sum_j M_{ij}^\alpha,$$

$$k_{\alpha 0} = -\sum_{i,j} (M_{ij}^0 + M_{ji}^0) \cdot \psi_{ij}^\alpha - \sum_m P_m \delta_{P_m}^\alpha$$

$$k_{i0} = \sum_j M_{ij}^0 - M_i^0,$$

Rozwiązywanie układów statycznie niewyznaczalnych (hiperstatycznych) metodą przemieszczeń

10. Szczegółowa postać układu równań metody przemieszczeń

11. Obliczenie momentów brzegowych i sił w więziach sprężystych...

- korzystamy z superpozycji $M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + \dots + M_{ij}^I \delta_I + \dots + M_{ij}^0$
- lub ze wzorów transformacyjnych, $M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} [a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}] + M_{ij}^0$

gdzie rzeczywiste kąty obrotu cięciw obliczamy ze wzoru $\psi_{ij} = \sum_{\alpha} \psi_{ij}^{\alpha} \cdot \delta_{\alpha}$

12. Obliczenie brzegowych sił tnących

- wykorzystujemy równania równowagi elementów obciążonych danym obciążeniem i momentami brzegowymi lub wzory transformacyjne

13. Obliczenie sił osiowych

- wykorzystujemy równania równowagi węzłów, przy czym znane są siły tnące, obciążenia węzłów i wartości reakcji w więziach sprężystych

Rozwiązywanie układów statycznie niewyznaczalnych (hiperstatycznych) metodą przemieszczeń

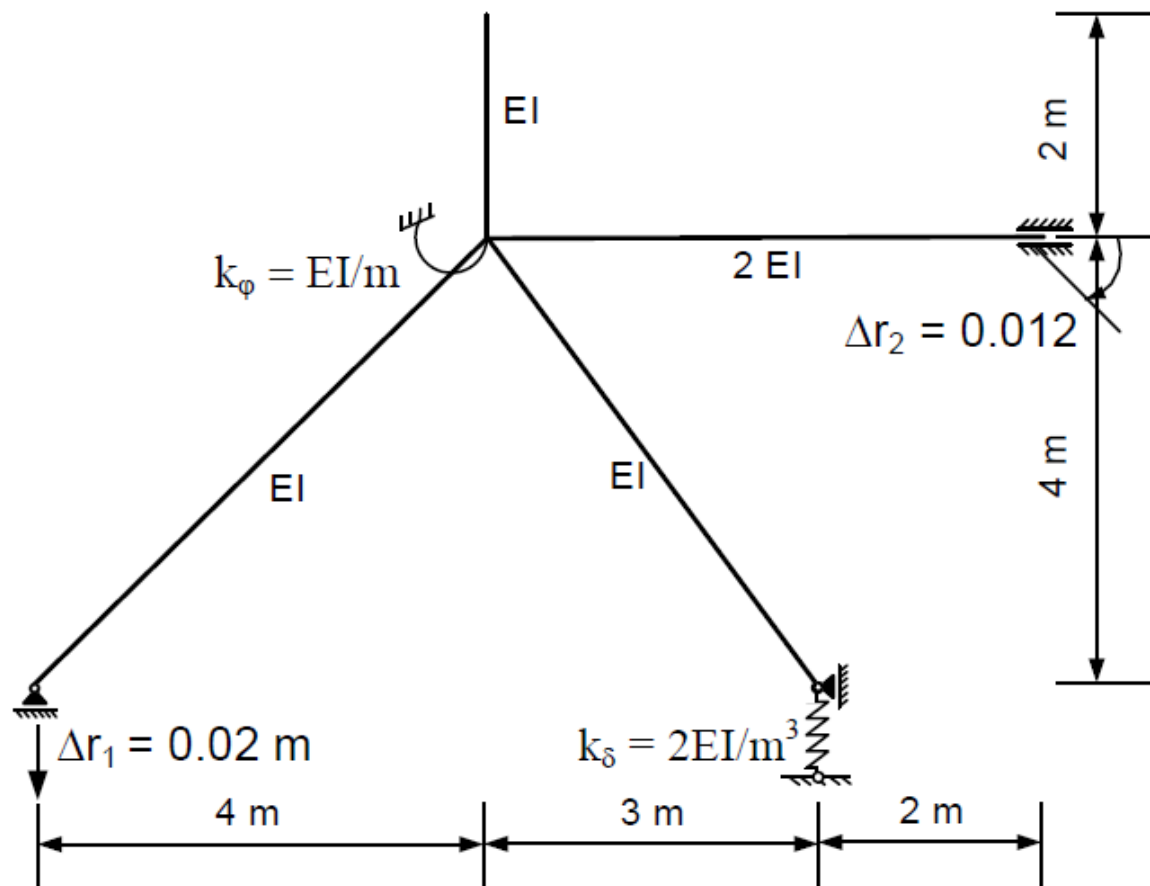
14. Obliczenie rzędnych charakterystycznych momentów zginających (pod siłą skupioną, w środku obciążenia rozłożonego lub maksimum, z 2 stron momentu skupionego) i sporządzenie wykresów rzeczywistych sił przekrojowych

15. Przeprowadzenie kontroli rozwiązania

- sprawdzenie statycznej dopuszczalności rozwiązania (równania równowagi elementów i węzłów, równania równowagi układu jako całości)
- sprawdzenie kinematycznej dopuszczalności rozwiązania (sprawdzenie ciągłości konstrukcji - obliczenie n_h przemieszczeń).

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Rozwiązanie ramy od przemieszczenia podpór

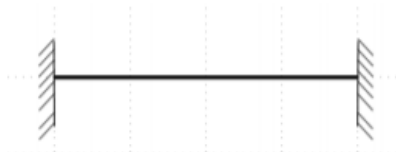


ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

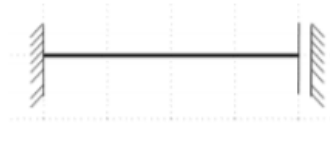
Podstawowa klasa prętów

sztywno -sztywny

sztywno- łyżwa



(sz-sz)

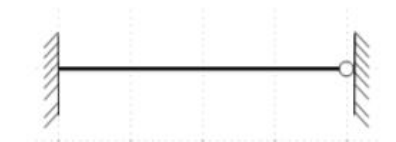


(sz-łyż)

sztywno-
przegubowy

sztywno- wspornik

przegubowo-
przegubowy



(sz-przeg)

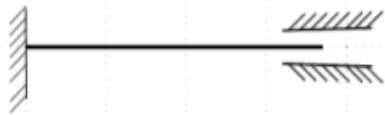


(sz-wsp)



(przeg-przeg)

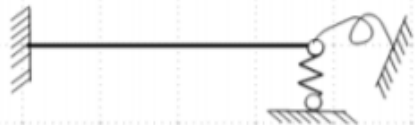
ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ



(sz-sz)



(sz-sz)



(sz-sz)



(sz-tyż)



(sz-sz)



(sz-sz)



(sz-przeg)



(sz-przeg)

ROZWIĄZANIE RAMY HIPERSTATYCZNEJ METODĄ PRZEMIESZCZEŃ

Stopień geometrycznej niewyznaczalności jest sumą niezależnych składowych przemieszczeń: obrotów węzłów n_φ i składowych przesunięć węzłów n_δ , które w pełni określają warunki brzegowe prętów na które został podzielony układ.

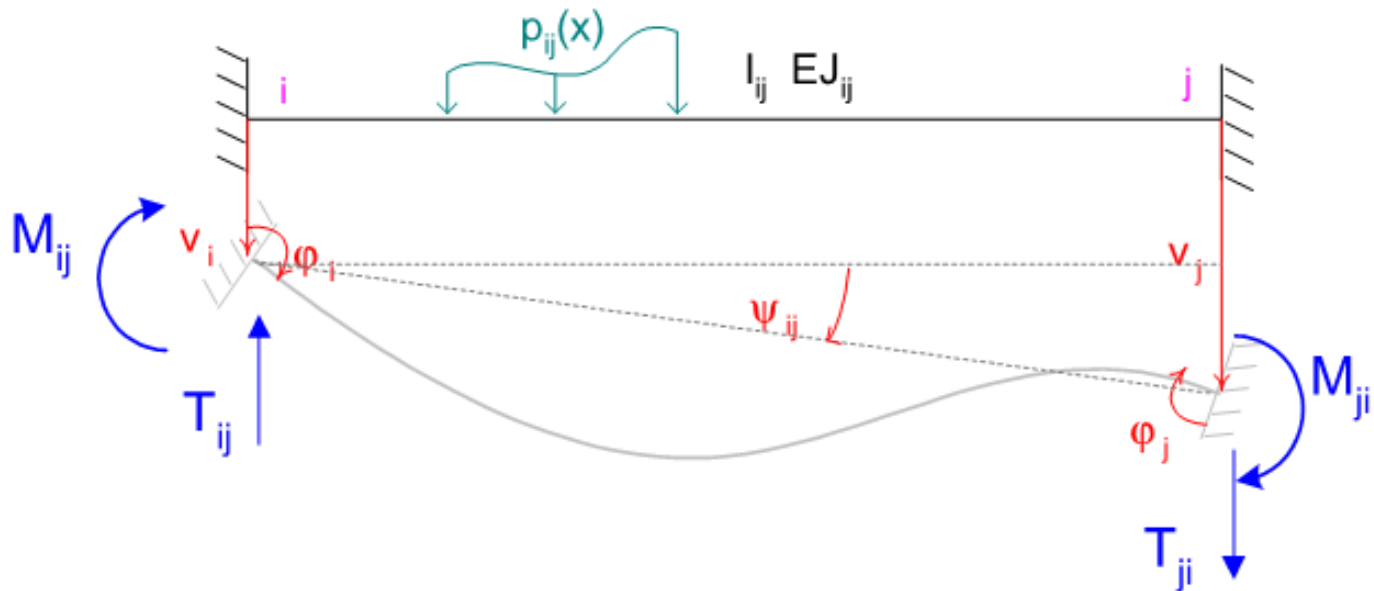
$$n_g = n_\varphi + n_\delta$$

n_φ - liczba niezależnych współrzędnych rotacyjnych (liczba niezależnych obrotów węzłów)

n_δ - liczba niezależnych współrzędnych translacyjnych (liczba niezależnych składowych przesuwów węzłów)

USTROJE GEOMETRYCZNIE NIETYCZALNE. METODA PRZEMIESZCZEŃ WZORY TRANSFORMACYJNE

Momenty zginające i siły tnące wywołane są obrotami końców pręta φ_i, φ_j oraz przesunięciami prostopadłymi do osi pręta v_i oraz v_j . Ponieważ przemieszczenia wzdłuż osi pręta nie wywołują momentów zginających i sił tnących (tylko siły osiowe), stąd na rysunku przedstawiono pręt, którego końce doznają tylko obrotów i przesunięć prostopadłych do osi pręta.



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

WZORY TRANSFORMACYJNE DLA PRĘTA PROSTEGO – teoria rzędu 1-go

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o,$$



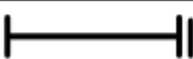

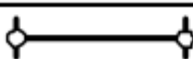
$$M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o,$$

$$V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o$$

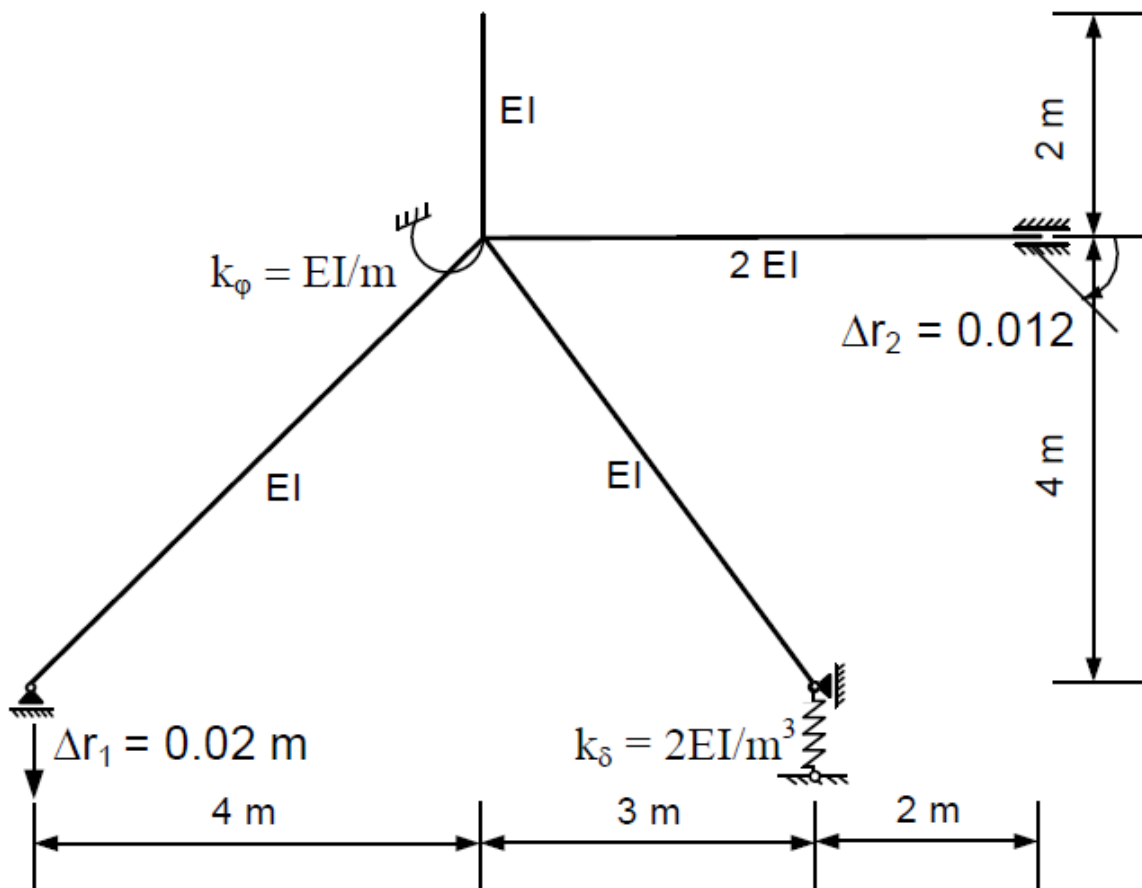
gdzie a_{ij} , a_{ji} , $b_{ij} = b_{ji}$, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ji}$, $c_{ji} = a_{ji} + b_{ij}$, $d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$ są współczynnikami zależnymi od typu pręta.

Współczynniki te dla wybranych typów prętów o stałej sztywności zestawiono w tabeli poniżej

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$	$c_{ji} = a_{ji} + b_{ji}$	$d_{ij} = d_{ji} = c_{ij} + c_{ji}$
		4	4	2	6	6	12
		3	0	0	3	0	3
		1	1	-1	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

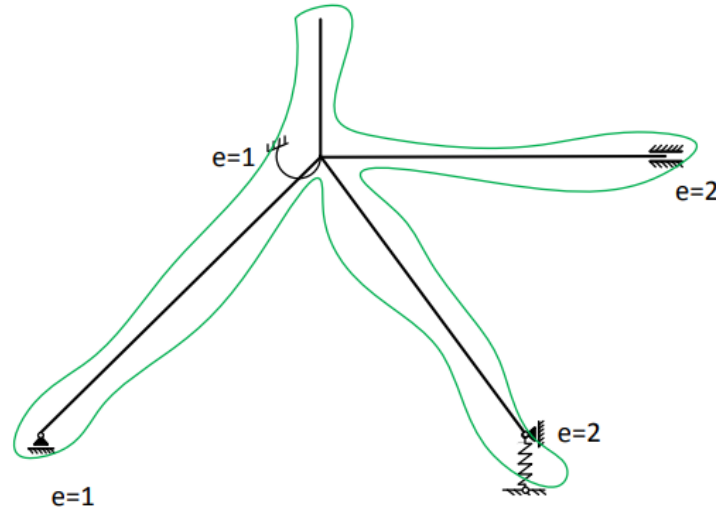
Rozwiązanie ramy od przemieszczenia podpór



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu

Szkic tarczy – więzi



$$t = 1, e = 2 + 2 + 1 + 1 = 6$$

Warunek ilościowy geometrycznej niezmienności: $e \stackrel{?}{\geq} 3 \cdot t$.

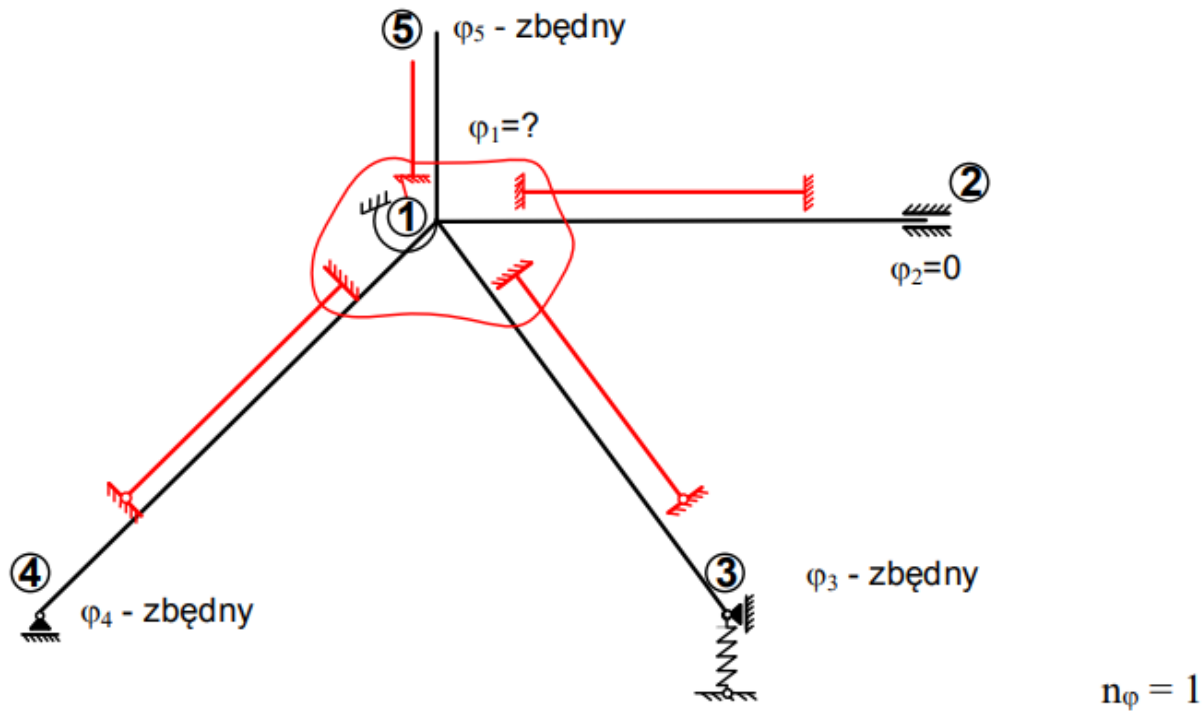
$6 > 3$, warunek spełniony.

Warunek jakościowy:

Układ składa się z jednej tarczy podpartej 6 więziami wśród których można wyróżnić 3 niezbieżne, wobec tego warunki geometrycznej niezmienności: ilościowy $e \geq 3 \cdot t$ i jakościowy - 3 niezbieżne więzi - są spełnione.

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

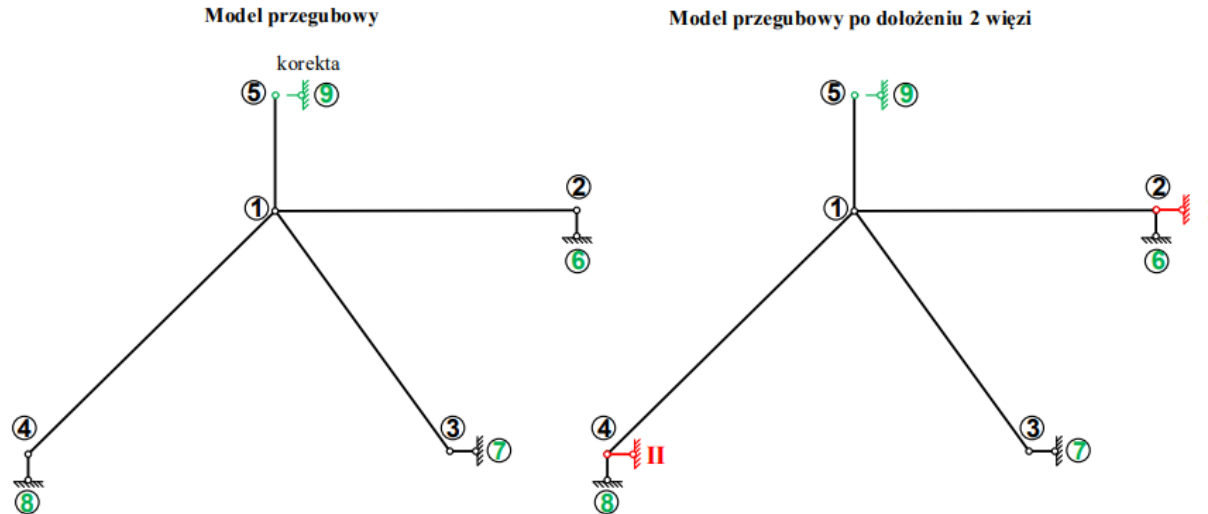
3.1 Podział układu na elementy o znanych wzorach transformacyjnych i obliczenie liczby niezależnych obrotów n_φ



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

3.2 Zbudowanie modelu przegubowego układu i obliczenie liczby niezależnych przesunięć n_δ

- odrzucamy więzi sprężyste, wszystkie węzły zamieniamy na przegubowe, dodajemy więź, jeśli stosujemy element typu wspornik i/lub sztywno – sztywno-suwny (przesuw prostopadły do osi pręta)



Liczba węzłów $w=9$, liczba prętów $p=8$, liczba więzi podporowych $r=8$.
Warunek konieczny, ale niewystarczający – minimalna liczba więzi translacyjnych

$$n_\delta \geq 2 \cdot w - p - r = 2 \cdot 9 - 8 - 8 = 2$$

Warunek dostateczny – analiza kinematyczna modelu przegubowego po dołożeniu 2 więzi translacyjnych – model jest geometrycznie niezmienny wobec tego $n_\delta = 2$

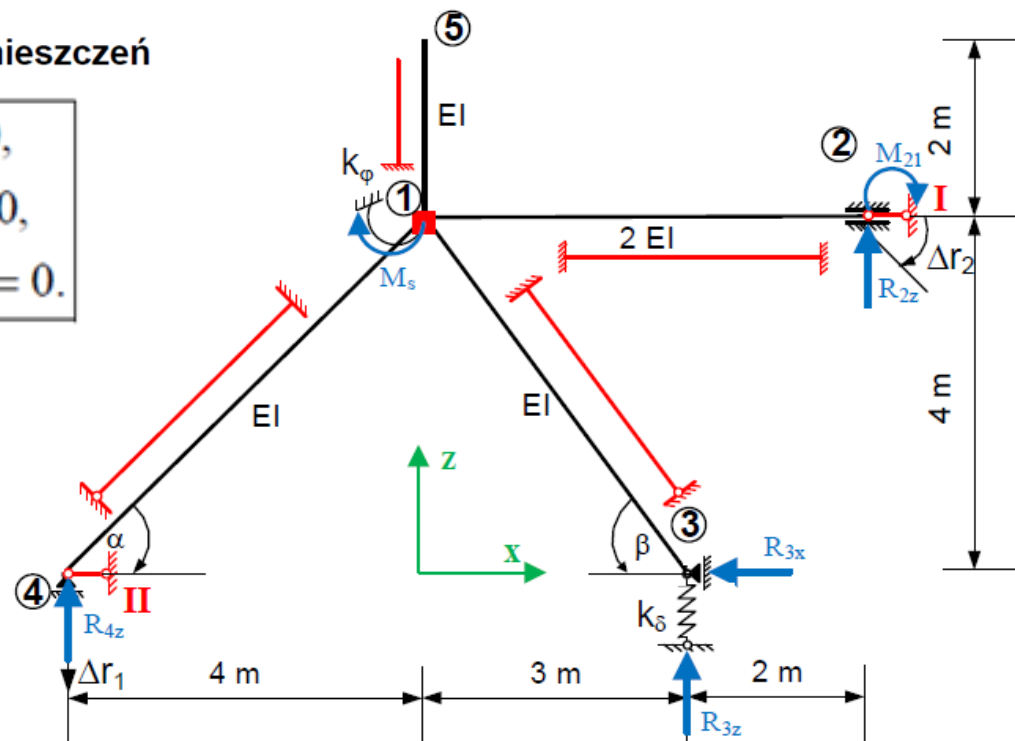
Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Przyjęcie układu podstawowego metody przemieszczeń

Układ podstawowy – układ zadany, w którym dodano n_φ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych. W układzie tym oznaczymy węzły – początkowe numery dajemy w węzłach z dodanymi więziami rotacyjnymi.

Ogólna postać układu równań metody przemieszczeń

$$\begin{cases} k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{10} = 0, \\ k_{1I} \cdot \varphi_1 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{I,II} \cdot \delta_{II} + k_{I0} = 0, \\ k_{1II} \cdot \varphi_1 + k_{II,I} \cdot \delta_I + k_{II,II} \cdot \delta_{II} + k_{II0} = 0. \end{cases}$$



WZORY OKREŚLAJĄCE WSPÓLCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ - teoria rzędu 1-go

Reakcje (momenty) w dodanych więziach rotacyjnych wywołane jednostkowymi obrotami dodanych więzi rotacyjnych

$$\mathbf{K}_{\varphi\varphi}; \quad k_{ii} = \sum_j M_{ij}^i + k_i^{\varphi} = \sum_j a_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} + k_i^{\varphi}, \quad k_{ij} = M_{ij}^j = b_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij}, \text{ dla } j \neq i,$$

gdzie $M_{ij}^i = M_{ij}(\varphi_i = 1) = a_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij}, \quad M_{ij}^j = M_{ij}(\varphi_j = 1) = b_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij},$
 j – numery węzłów połączonych prętami z węzłem i .

Reakcje (momenty) w dodanych więziach rotacyjnych wywołane jednostkowymi przesunięciami w miejscach i kierunkach dodanych więzi translacyjnych

$$\mathbf{K}_{\varphi\delta}; \quad k_{i\beta} = \sum_j M_{ij}^{\beta} = -\sum_j c_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^{\beta}, \quad \text{gdzie } M_{ij}^{\beta} = M_{ij}(\delta_{\beta} = 1) = -c_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^{\beta},$$

$$\psi_{ij}^{\beta} = \psi_{ij}(\delta_{\beta} = 1) = \Delta_{ij}^{\beta} / L_{ij} \text{ – kąt obrotu cięciwy pręta } ij,$$

$$\Delta_{ij}^{\beta} = \Delta_{ij}(\delta_{\beta} = 1) \text{ – wzajemne poprzeczne przesunięcie końców pręta } ij.$$

Reakcje (momenty) w dodanych więziach rotacyjnych wywołane obciążeniem danym

$$\mathbf{K}_{\varphi\sigma}; \quad k_{io} = \begin{cases} k_{iF} = \sum_j M_{ij}^{oF} - M_i^o \\ k_{i\Delta} = \sum_j M_{ij}^{o\Delta} \\ k_{iT} = \sum_j M_{ij}^{oT} \end{cases}$$

gdzie $M_{ij}^{oF}, M_{ij}^{o\Delta}, M_{ij}^{oT}$ – momenty na końcu i pręta ij wywołane obciążeniem,

M_i^o – moment obciążający węzeł i .

Reakcje (siły) w dodanych więziach translacyjnych wywołane jednostkowymi obrotami więzi rotacyjnych

$$\mathbf{K}_{\delta\varphi}; \quad k_{\alpha j} = -\sum_i (M_{ij}^j + M_{ji}^j) \cdot \psi_{ij}^{\alpha} = \sum_i V_{ij}^j \cdot \Delta_{ij}^{\alpha} = -\sum_i c_{ji} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^{\alpha},$$

$$\mathbf{K}_{\delta\varphi}; \quad k_{\alpha j} = -\sum_i (M_{ij}^j + M_{ji}^j) \cdot \psi_{ij}^\alpha = \sum_i V_{ij}^j \cdot \Delta_{ij}^\alpha = -\sum_i c_{ji} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^\alpha,$$

$$\text{gdzie} \quad V_{ij}^j = V_{ij} (\varphi_j = 1) = -c_{ji} \cdot EJ_{ij} / (L_{ij})^2.$$

Reakcje (siły) w dodanych więziach translacyjnych wywołane przesunięciami w miejscach i kierunkach dodanych więzi translacyjnych

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_{\delta\delta}; \quad k_{\alpha\beta} &= -\sum_{ij} (M_{ij}^\beta + M_{ji}^\beta) \cdot \psi_{ij}^\alpha + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^\beta = \\ &= \sum_{ij} V_{ij}^\beta \cdot \Delta_{ij}^\alpha + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^\beta = \sum_{ij} d_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^\alpha \cdot \psi_{ij}^\beta + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^\beta, \end{aligned}$$

gdzie ΔL_s^α – wydłużenie więzi sprężystej translacyjnej wywołane przemieszczeniem $\delta_\alpha = 1$.

Reakcje (siły) w dodanych więziach translacyjnych wywołane obciążeniem danym

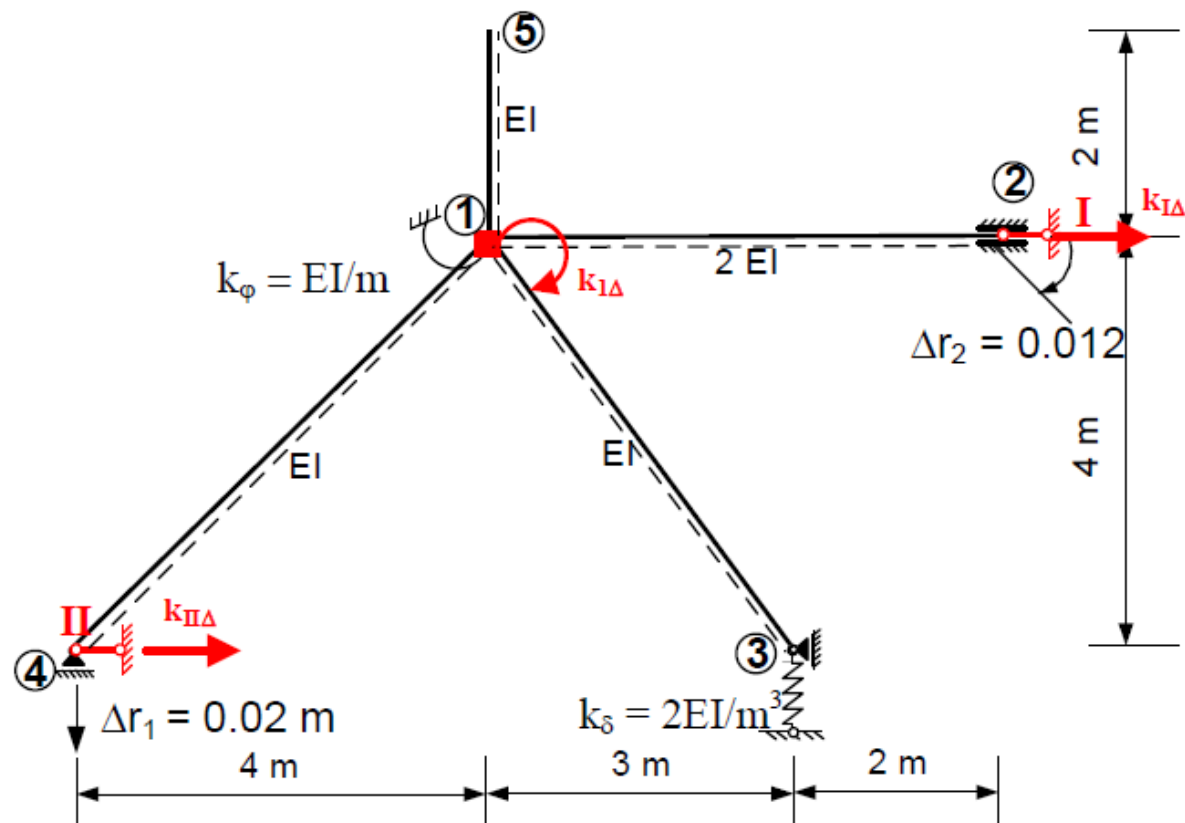
$$\mathbf{K}_{\delta o}; \quad k_{\alpha o} = \begin{cases} k_{\alpha F} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{oF} + M_{ji}^{oF}) \cdot \psi_{ij}^\alpha - \sum_f F_f \cdot \delta_f^\alpha \\ k_{\alpha\Delta} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{o\Delta} + M_{ji}^{o\Delta}) \cdot \psi_{ij}^\alpha + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^{o\Delta} \\ k_{\alpha T} = -\sum_{ij} (M_{ij}^{oT} + M_{ji}^{oT}) \cdot \psi_{ij}^\alpha + \sum_s k_s^\delta \cdot \Delta L_s^\alpha \cdot \Delta L_s^{oT} \end{cases}$$

gdzie δ_f^α – przemieszczenie w miejscu i kierunku siły F_f wywołane przemieszczeniem $\delta_\alpha = 1$,

$\Delta L_s^{o\Delta}, \Delta L_s^{oT}$ – wydłużenia więzi sprężystej translacyjnej wywołane przemieszczeniem Δ lub zmiana temperatury.

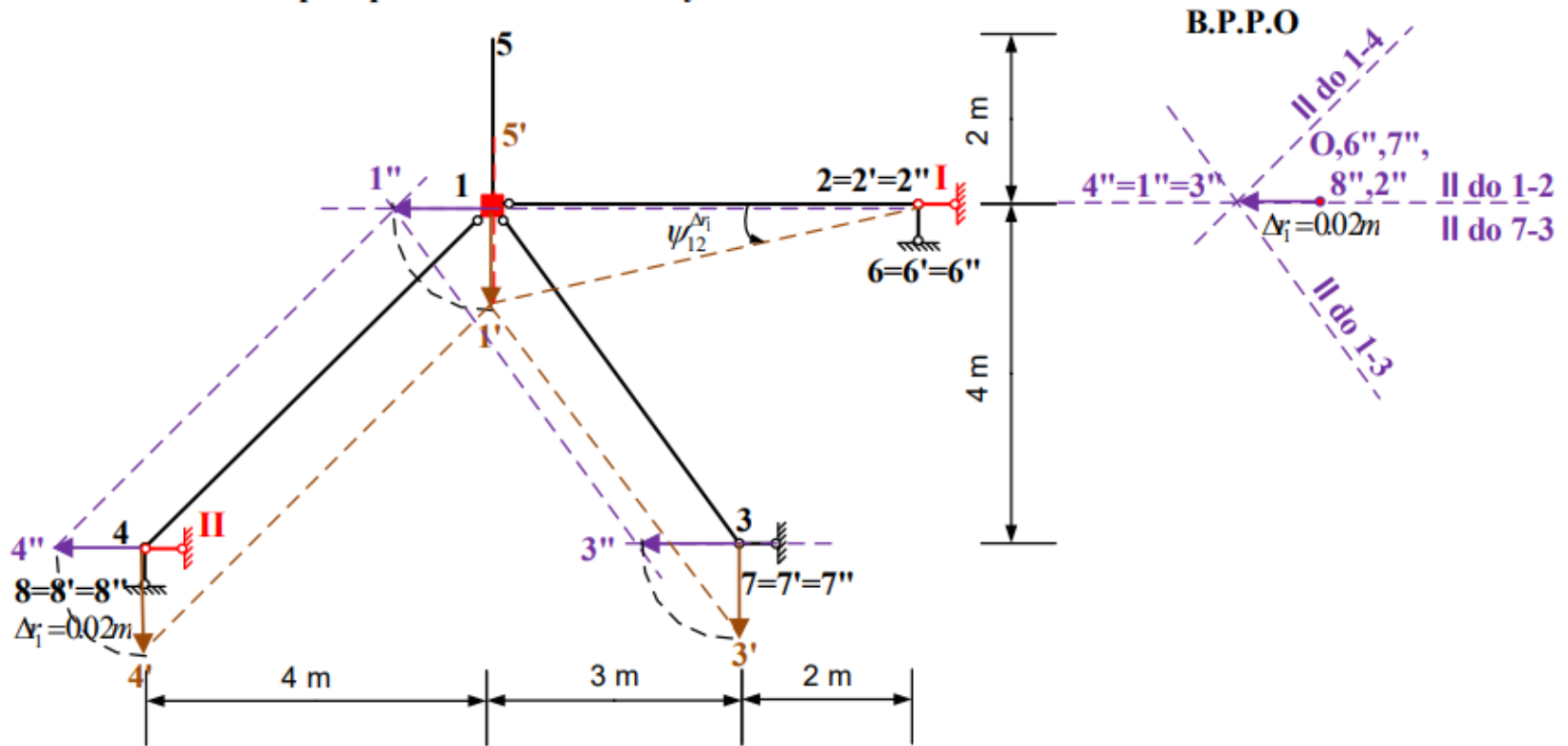
Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia podpór
 $(\varphi_1 = 0, \delta_1 = 0, \delta_{II} = 0)$



ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD PRZEMIESZCZENIA PODPÓR

Plan przemieszczeń obróconych
i plan przemieszczeń możliwych



$$\psi_{12}^{\Delta r_1} = -0.02m / 5m = -0.004,$$

$$\psi_{13}^{\Delta r_1} = 0,$$

$$\psi_{14}^{I\Delta r_1} = 0, \quad \psi_{15}^{I\Delta r_1} = 0,$$

$$\delta_s^{0\Delta r} = -\Delta r_1 = -0.02m.$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

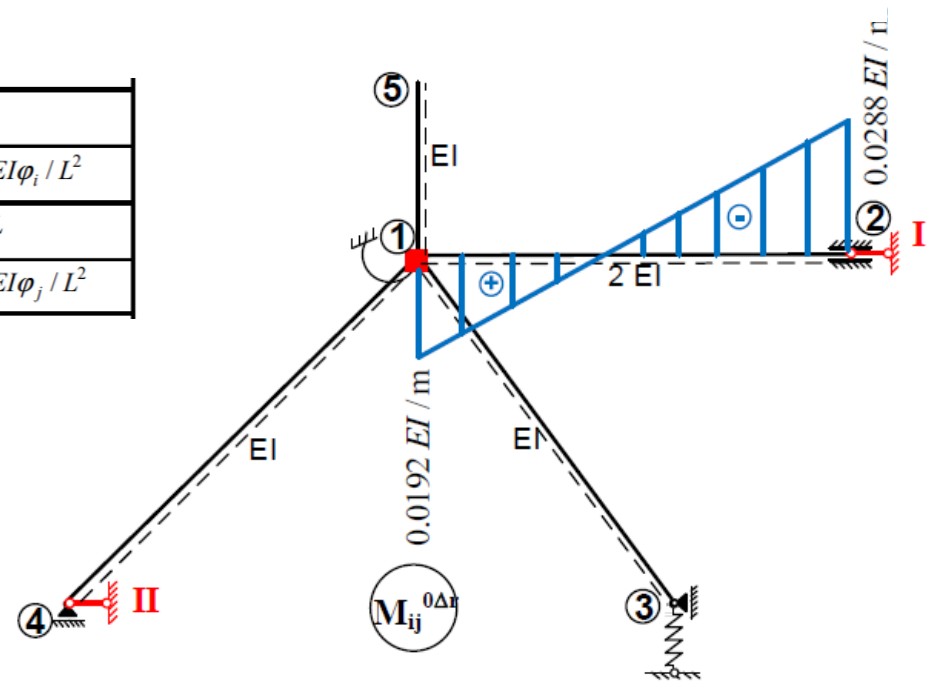
Obliczenie momentów brzegowych w układzie podstawowym od przemieszczenia podpór (wykorzystano wzory transformacyjne dla przyjętych elementów)

$$M_{12}^{0\Delta r} = \frac{2EI}{5 \text{ m}} [4 \cdot 0 + 2 \cdot 0.012 - 6 \cdot (-0.004)] = 0.0192 \frac{EI}{\text{m}},$$

$$M_{21}^{0\Delta r} = \frac{2EI}{5 \text{ m}} [4 \cdot 0.012 + 2 \cdot 0 - 6 \cdot (-0.004)] = 0.0288 \frac{EI}{\text{m}},$$

$$M_{13}^{0\Delta r} = M_{14}^{0\Delta r} = M_{15}^{0\Delta r} = 0.$$

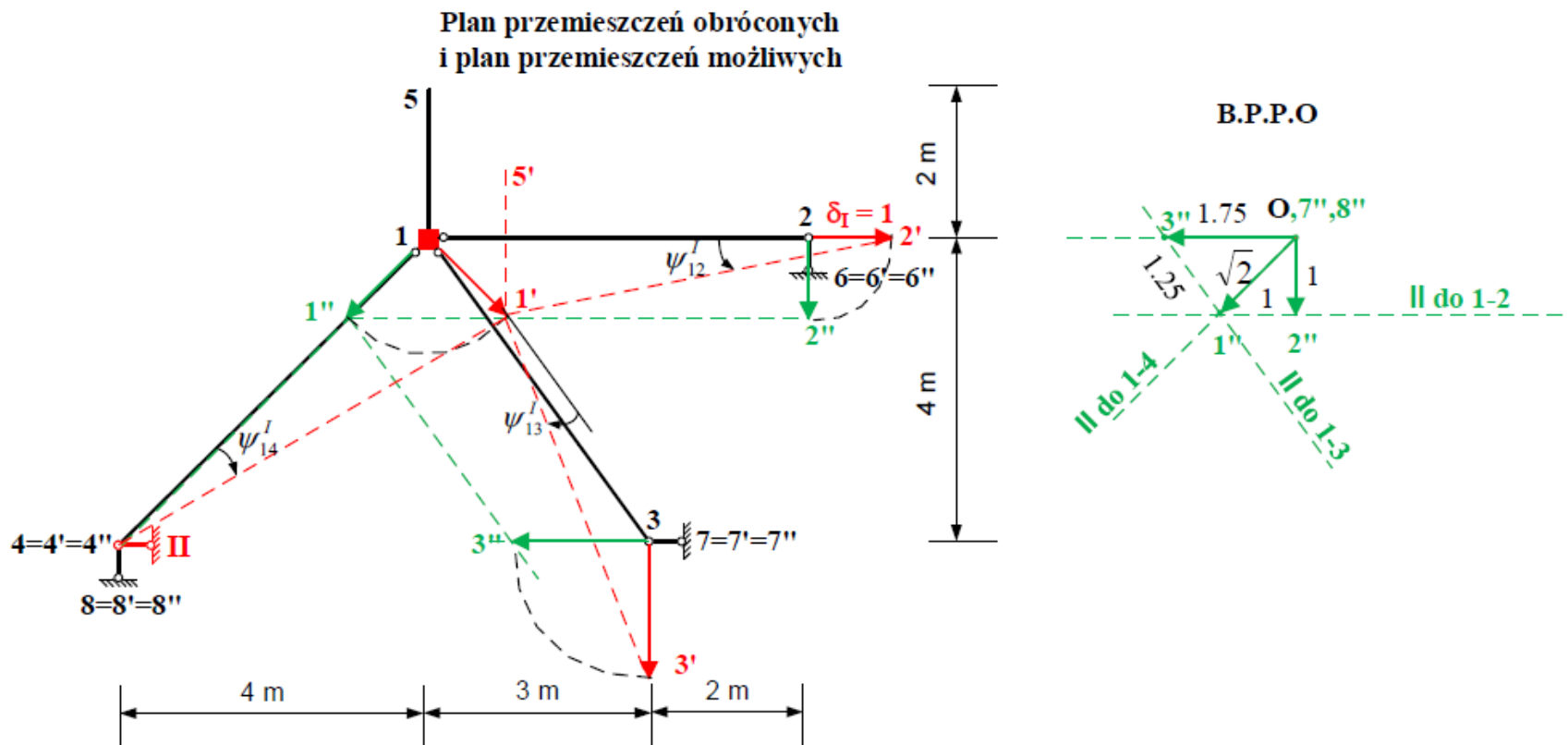
$M_{ij} = 4EI\varphi_i / L$		$M_{ji} = 2EI\varphi_i / L$
$V_{ij} = -6EI\varphi_i / L^2$		$V_{ji} = -6EI\varphi_i / L^2$
$M_{ij} = 2EI\varphi_j / L$		$M_{ji} = 4EI\varphi_j / L$
$V_{ij} = -6EI\varphi_j / L^2$		$V_{ji} = -6EI\varphi_j / L^2$



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia $\delta_I = 1$
 (obc. = 0, $\varphi_1 = 0$, $\delta_{II} = 0$)

– plan przesunięć obróconych i biegunowy plan przesunięć obróconych



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Wzajemne przemieszczenia końców elementów

$$\Delta_{12} = -1, \quad \Delta_{13} = +1.25, \quad \Delta_{14} = +\sqrt{2} = 1.41, \quad \Delta_{15} = 0, \quad \delta_5^I = -1.75,$$

Kąty obrotu cięciw: $\psi_{ij}^I = \Delta_{ij}/L_{ij}$,

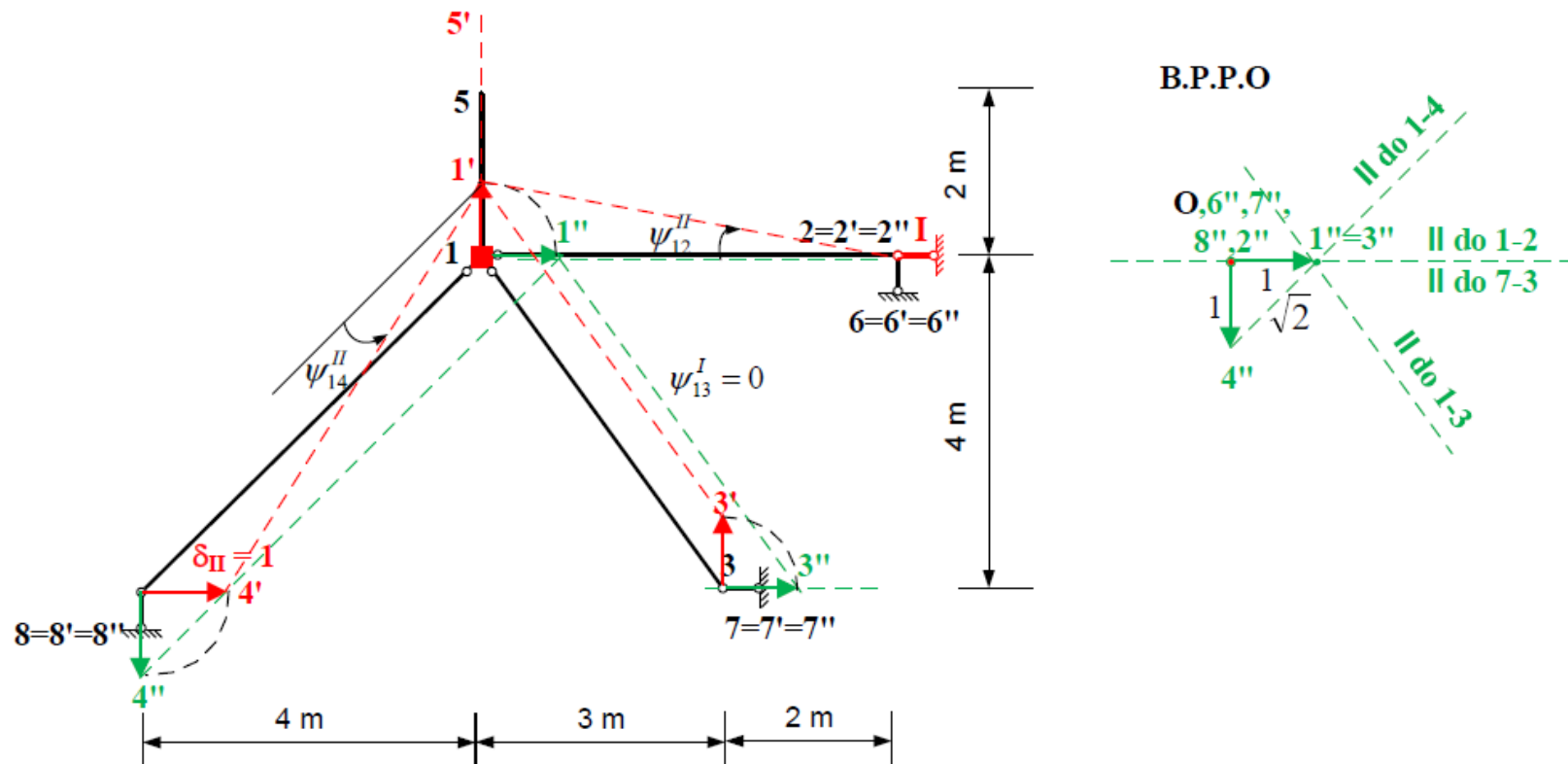
$$\psi_{12}^I = -1/5\text{m} = -0.2/\text{m}, \quad \psi_{13}^I = +1.25/5\text{m} = +0.25/\text{m},$$

$$\psi_{14}^I = +\sqrt{2}/4\sqrt{2}\text{m} = +0.25/\text{m}, \quad \psi_{15}^I = 0.$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia $\delta_{II} = 1$
 (obc. = 0, $\varphi_1 = 0$, $\delta_I = 0$)
 – plan przesunięć obróconych i biegunowy plan przesunięć obróconych

Plan przemieszczeń obróconych
i plan przemieszczeń możliwych



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Wzajemne przemieszczenia końców elementów

$$\Delta_{12} = +1, \quad \Delta_{13} = 0, \quad \Delta_{14} = -\sqrt{2} = 1.41, \quad \Delta_{15} = 0, \quad \delta_5^I = 1,$$

Kąty obrotu cięciw:

$$\begin{aligned} \psi_{12}^{\text{II}} &= +1/5\text{m} = +0.2/\text{m}, & \psi_{13}^{\text{II}} &= 0, \\ \psi_{14}^{\text{II}} &= -\sqrt{2}/4\sqrt{2}\text{m} = -0.25/\text{m}, & \psi_{15}^{\text{II}} &= 0. \end{aligned}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Obliczenie współczynników układu równań metody przemieszczeń

Elementy macierzy sztywności (reakcje w dołożonych więziach w układzie podstawowym od jednostkowych przemieszczeń tych więzi – pierwszy indeks oznacza miejsce, drugi przyczynę).

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \sum_j M_{1j}^1 + k_{\varphi 1} = \sum_j \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} a_{1j} + k_{\varphi 1} = \\
 &= \underbrace{\frac{2EI}{5\text{ m}} \cdot 4}_{1-2} + \underbrace{\frac{EI}{5\text{ m}} \cdot 3}_{1-3} + \underbrace{\frac{EI}{4 \cdot \sqrt{2}\text{ m}} \cdot 3}_{1-4} + \underbrace{\frac{EI}{\text{m}}}_{k_{\varphi}} = (1.6 + 0.6 + 0.53033 + 1) \frac{EI}{\text{m}} = 3.73033 \frac{EI}{\text{m}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{11} &= \sum_j M_{1j}^I = - \sum_j \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} c_{1j} \cdot \psi_{1j}^I = \\
 &= - \underbrace{\frac{2EI}{5\text{ m}} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{0.2}{\text{m}}\right)}_{1-2} - \underbrace{\frac{EI}{5\text{ m}} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{\text{m}}}_{1-3} - \underbrace{\frac{EI}{4 \cdot \sqrt{2}\text{ m}} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{\text{m}}}_{1-4} = (0.48 - 0.15 - 0.1326) \frac{EI}{\text{m}^2} = 0.1974 \frac{EI}{\text{m}^2}
 \end{aligned}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

$$\begin{aligned}
 k_{II} &= -\sum_{i,j} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \cdot \psi_{1j}^I + \sum_n k_{sn} \cdot \delta_{sn}^I \cdot \delta_{sn}^I = \sum_{i,j} \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} (c_{ij} + c_{ji}) \cdot \psi_{ij}^I \cdot \psi_{ij}^I = \sum_{i,j} \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} d_{ij} \cdot \psi_{ij}^I \cdot \psi_{ij}^I = \\
 &= \underbrace{\frac{2EI}{5m} \cdot 12 \cdot \left(\frac{-0.2}{m}\right) \cdot \left(\frac{-0.2}{m}\right)}_{1-2} + \underbrace{\frac{EI}{5m} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{m} \cdot \frac{0.25}{m}}_{1-3} + \underbrace{\frac{EI}{4 \cdot \sqrt{2}m} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{m} \cdot \frac{0.25}{m}}_{1-4} + \underbrace{\frac{2EI}{m^3} \cdot (-1.75) \cdot (-1.75)}_{k_2} = \\
 &= (0.192 + 0.033141 + 0.0375 + 6.125) \frac{EI}{m^3} = 6.3876 \frac{EI}{m^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{I\text{II}} = k_{\text{II}I} &= \sum_{i,j} \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} d_{ij} \cdot \psi_{ij}^I \cdot \psi_{ij}^{\text{II}} = \\
 &= \underbrace{\frac{2EI}{5m} \cdot 12 \cdot \left(\frac{-0.2}{m}\right) \cdot \left(\frac{0.2}{m}\right)}_{1-2} + \underbrace{\frac{EI}{5m} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{m} \cdot 0}_{1-3} + \underbrace{\frac{EI}{4 \cdot \sqrt{2}m} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{m} \cdot \left(\frac{-0.25}{m}\right)}_{1-4} + \underbrace{\frac{2EI}{m^3} \cdot (-1.75) \cdot (1)}_{k_2} = \\
 &= (-0.192 + 0 - 0.0375 - 3.5) \frac{EI}{m^3} = -3.72515 \frac{EI}{m^3}
 \end{aligned}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

$$\begin{aligned}k_{I\text{II}} = k_{\text{II}I} &= \sum_{i,j} \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} d_{ij} \cdot \psi_{ij}^I \cdot \psi_{ij}^{\text{II}} = \\&= \underbrace{\frac{2EI}{5\text{ m}} \cdot 12 \cdot \left(\frac{-0.2}{\text{ m}}\right) \cdot \left(\frac{0.2}{\text{ m}}\right)}_{1-2} + \underbrace{\frac{EI}{5\text{ m}} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{\text{ m}} \cdot \frac{0}{\text{ m}}}_{1-3} + \underbrace{\frac{EI}{4 \cdot \sqrt{2}\text{ m}} \cdot 3 \cdot \frac{0.25}{\text{ m}} \cdot \left(\frac{-0.25}{\text{ m}}\right)}_{1-4} + \underbrace{\frac{2EI}{\text{ m}^3} \cdot (-1.75) \cdot (1)}_{k_2} = \\&= (-0.192 + 0 - 0.0375 - 3.5) \frac{EI}{\text{ m}^3} = -3.72515 \frac{EI}{\text{ m}^3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}k_{\text{II}\text{II}} &= -\sum_{i,j} \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} d_{ij} \cdot \psi_{ij}^{\text{II}\text{II}} \cdot \psi_{ij}^{\text{II}\text{II}} = \\&= \underbrace{\frac{2EI}{5\text{ m}} \cdot 12 \cdot \frac{0.2}{\text{ m}} \cdot \frac{0.2}{\text{ m}}}_{1-2} + \underbrace{\frac{EI}{5\text{ m}} \cdot 3 \cdot \frac{0}{\text{ m}} \cdot \frac{0}{\text{ m}}}_{1-3} + \underbrace{\frac{EI}{4 \cdot \sqrt{2}\text{ m}} \cdot 3 \cdot \left(\frac{-0.25}{\text{ m}}\right) \cdot \left(\frac{-0.25}{\text{ m}}\right)}_{1-4} + \underbrace{\frac{2EI}{\text{ m}^3} \cdot 1 \cdot 1}_{k_2} = \\&= (0.192 + 0 + 0.0375 + 2) \frac{EI}{\text{ m}^3} = 2.22515 \frac{EI}{\text{ m}^3}\end{aligned}$$

$$k_{I\text{I}} = k_{1I}$$

$$k_{\text{II}I} = k_{1\text{II}}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

$$k_{1\Delta} = \sum_j M_{1j}^{0\Delta} = \left(\underbrace{0.0192}_{1-2} + \underbrace{0.00}_{1-3} + \underbrace{0.00}_{1-4} + \underbrace{0.00}_{1-5} \right) \frac{EI}{m} = 0.0192 \frac{EI}{m}$$

$$\begin{aligned} k_{I\Delta} &= -\sum_{i,j} (M_{ij}^{0\Delta} + M_{ji}^{0\Delta}) \cdot \psi_{1j}^I + \sum_n k_{\delta n} \cdot \delta_{sn}^{\Delta r} \cdot \delta_{sn}^I = \\ &= -\left\{ \underbrace{(0.0192 + 0.0288)}_{1-2} \frac{EI}{m} \cdot \left(\frac{-0.2}{m} \right) + \underbrace{0 \cdot \frac{0.25}{m}}_{1-3} + \underbrace{0 \cdot \frac{0.25}{m}}_{1-4} + \underbrace{0 \cdot \frac{0}{m}}_{1-5} \right\} + \frac{2EI}{\underbrace{m^3}_{k_\delta}} \cdot (-0.02 \text{ m}) \cdot (-1.75) = \\ &= (0.0096 + 0.07) \frac{EI}{m^2} = 0.0796 \frac{EI}{m^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_{II\Delta} &= -\sum_{i,j} (M_{ij}^{0\Delta} + M_{ji}^{0\Delta}) \cdot \psi_{1j}^{II} + \sum_n k_{\delta n} \cdot \delta_{sn}^{\Delta r} \cdot \delta_{sn}^{II} = \\ &= -\left\{ \underbrace{(0.0192 + 0.0288)}_{1-2} \frac{EI}{m} \cdot \left(\frac{0.2}{m} \right) + \underbrace{0 \cdot \frac{0}{m}}_{1-3} + \underbrace{0 \cdot \frac{-0.25}{m}}_{1-4} + \underbrace{0 \cdot \frac{0}{m}}_{1-5} \right\} + \frac{2EI}{\underbrace{m^3}_{k_\delta}} \cdot (-0.02 \text{ m}) \cdot (+1) = \\ &= (-0.0096 - 0.04) \frac{EI}{m^2} = -0.0496 \frac{EI}{m^2} \end{aligned}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Szczegółowa postać układu równań metody przemieszczeń i jego rozwiązanie

$$\begin{aligned} 3.7303 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1^{\Delta r} + 0.1974 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I^{\Delta r} - 0.3474 \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_{II}^{\Delta r} + 0.0192 \frac{EI}{m} &= 0, \\ 0.1974 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1^{\Delta r} + 6.3876 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I^{\Delta r} - 3.7251 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II}^{\Delta r} + 0.0796 \frac{EI}{m^2} &= 0, \\ -0.3474 \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1^{\Delta r} - 3.7251 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I^{\Delta r} + 2.2251 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_{II}^{\Delta r} - 0.0496 \frac{EI}{m^2} &= 0. \end{aligned}$$

Rozwiązanie

$$\begin{aligned} \varphi_1^{\Delta r} &= -0.00101086, \\ \delta_I^{\Delta r} &= 0.02014635 \text{ m}, \\ \delta_{II}^{\Delta r} &= 0.05586085 \text{ m}. \end{aligned}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Obliczenie wartości momentów brzegowych ze wzorów transformacyjnych

$$M_{ij}^{\Delta r} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \left[a_{ij} \cdot \varphi_{ij}^{\Delta r} + b_{ji} \cdot \varphi_{ji}^{\Delta r} - c_{ij} \cdot \left(\psi_{ij}^I \cdot \delta_I^{\Delta r} + \psi_{ij}^{II} \cdot \delta_{II}^{\Delta r} \right) \right] + M_{ij}^{0\Delta r}$$

$$\begin{aligned} M_{12}^{\Delta r} &= \frac{2EI}{5 \text{ m}} \cdot \left[4 \cdot (-0.00101086) + 2 \cdot 0 - 6 \cdot \left(\left(\frac{-0.2}{\text{m}} \right) \cdot 0.02014635 \text{ m} + \frac{0.2}{\text{m}} \cdot 0.05586085 \text{ m} \right) \right] + \\ &+ 0.0192 \frac{EI}{\text{m}} = (-0.00162 + 0.00967 - 0.02681 - 0.0192) \frac{EI}{\text{m}} = 0.000440 \frac{EI}{\text{m}} = \\ &= 0.000440 \cdot \frac{12054 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{\text{m}} = 5.2997 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{21}^{\Delta r} &= \frac{2EI}{5 \text{ m}} \cdot \left[4 \cdot 0 + 2 \cdot (-0.00101086) - 6 \cdot \left(\left(\frac{-0.2}{\text{m}} \right) \cdot 0.02014635 \text{ m} + \frac{0.2}{\text{m}} \cdot 0.05586085 \text{ m} \right) \right] + \\ &+ 0.0288 \frac{EI}{\text{m}} = (0 - 0.00081 + 0.00967 - 0.02681 + 0.0288) \frac{EI}{\text{m}} = 0.000440 \frac{EI}{\text{m}} = \\ &= 0.010848 \cdot \frac{12054 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{\text{m}} = 130.766 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

$$\begin{aligned} M_{13}^{\Delta r} &= \frac{EI}{5 \text{ m}} \cdot \left[3 \cdot (-0.00101086) - 3 \cdot \left(\frac{0.25}{\text{m}} \cdot 0.02014635 \text{ m} + \frac{0}{\text{m}} \cdot 0.05586085 \text{ m} \right) \right] + 0 = \\ &= (-0.00061 - 0.00302) \frac{EI}{\text{m}} = -0.00363 \cdot \frac{12054 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{\text{m}} = -43.7376 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{14}^{\Delta r} &= \frac{EI}{4\sqrt{2} \text{ m}} \cdot \left[3 \cdot (-0.00101086) - 3 \cdot \left(\frac{0.25}{\text{m}} \cdot 0.02014635 \text{ m} + \left(\frac{-0.25}{\text{m}} \right) \cdot 0.05586085 \text{ m} \right) \right] + 0 = \\ &= (-0.00054 - 0.00267 + 0.007406) \frac{EI}{\text{m}} = 0.004199 \cdot \frac{12054 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{\text{m}} = +50.6151 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$M_{15}^{\Delta r} = 0 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_s^{\Delta r} = -k_\varphi \cdot \varphi_1^{\Delta r} = -\frac{EI}{\text{m}} \cdot (-0.00101086) = \frac{12054 \text{ kN} \cdot \text{m}^2}{\text{m}} \cdot 0.00101086 = 12.1849 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Obliczenie sił przekrojowych i sporządzenie wykresów

Obliczenie sił tnących z równań równowagi elementów i sił osiowych z równań równowagi węzłów

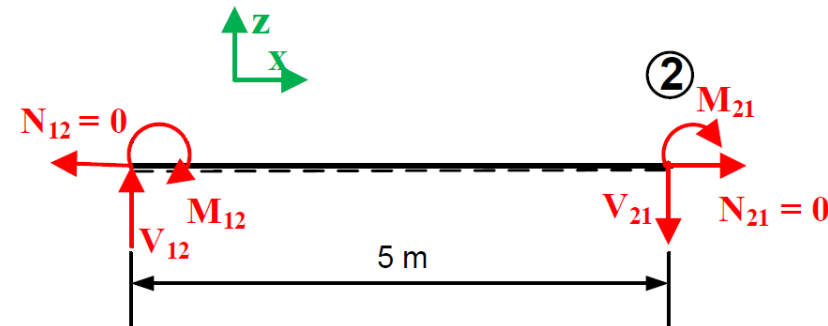
Element 1-2

$$\sum X = 0, \quad N_{12} = N_{21} = 0,$$

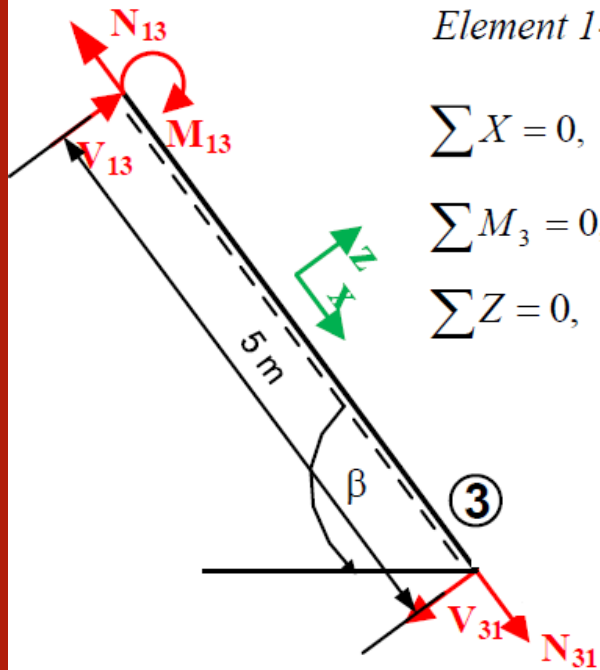
$$\sum M_2 = 0, \quad V_{12} \cdot 5 \text{ m} + M_{12} + M_{21} = 0 \Rightarrow V_{12} = -\frac{M_{12} + M_{21}}{5 \text{ m}} =$$

$$V_{12} = -\frac{5.2997 \text{ kN} \cdot \text{m} + 130.766 \text{ kN} \cdot \text{m}}{5 \text{ m}} = -27.2131 \text{ kN},$$

$$\sum Z = 0, \quad V_{12} - V_{21} = 0 \Rightarrow V_{21} = V_{12} = -27.2131 \text{ kN}$$



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego



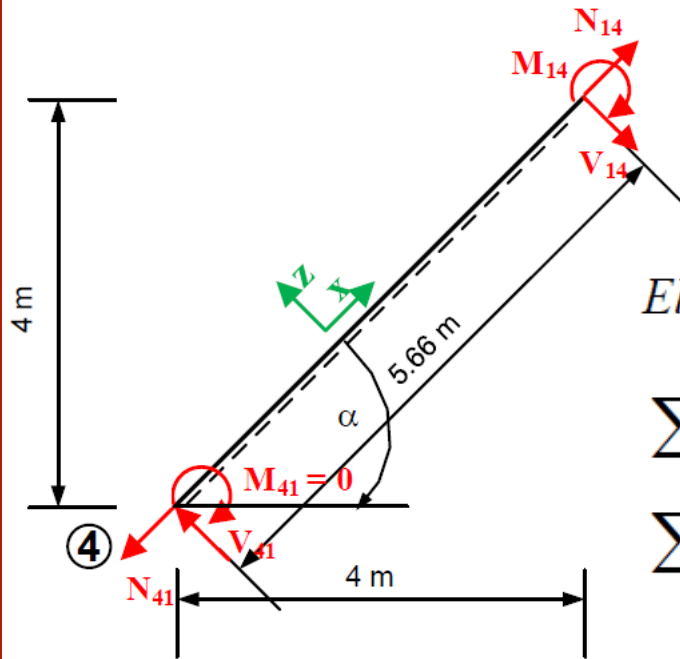
Element 1-3

$$\sum X = 0, \quad N_{13} = N_{31} = 0,$$

$$\sum M_3 = 0, \quad V_{13} \cdot 5 \text{ m} + M_{13} = 0 \Rightarrow V_{13} = -\frac{M_{13}}{5 \text{ m}} = -\frac{-43.7376 \text{ kN} \cdot \text{m}}{5 \text{ m}} = 8.7475 \text{ kN},$$

$$\sum Z = 0, \quad V_{13} = V_{31} = 8.7475 \text{ kN}.$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego



Element 1-4

$$\sum X = 0, \quad N_{14} - N_{41} = 0 \Rightarrow N_{41} = N_{14},$$

$$\sum M_4 = 0, \quad V_{14} \cdot 5.66 \text{ m} + M_{14} + M_{41} = 0 \Rightarrow$$

$$V_{14} = -\frac{M_{14}}{5.66 \text{ m}} = -\frac{50.6151 \text{ kN} \cdot \text{m}}{5.66 \text{ m}} = -8.9426 \text{ kN},$$

$$\sum Z = 0, \quad -V_{14} + V_{41} = 0 \Rightarrow V_{41} = V_{14} = -8.9426 \text{ kN}$$



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Węzeł 1

$$\sum X = 0,$$

$$N_{12} + N_{13} \cdot \cos \beta - V_{13} \sin \beta - N_{14} \cos \alpha - V_{14} \sin \alpha + V_{15} =$$
$$= 0 + N_{13} \cdot 0.6 - 8.7475 \text{ kN} \cdot 0.8 - N_{14} \cdot 0.7071 - (-8.9426 \text{ kN}) \cdot 0.7071 = 0,$$

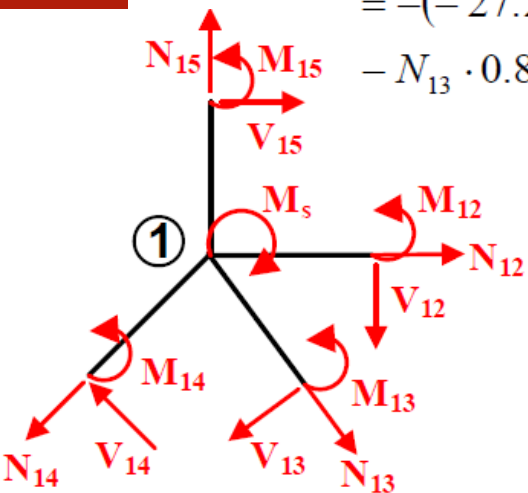
$$N_{13} \cdot 0.6 - N_{14} \cdot 0.7071 - 0.6747 \text{ kN} = 0$$

$$\sum Z = 0,$$

$$-V_{12} - N_{13} \cdot \sin \beta - V_{13} \cos \beta - N_{14} \sin \alpha + V_{14} \cos \alpha + N_{15} =$$

$$= -(-27.2131 \text{ kN}) - N_{13} \cdot 0.8 - 8.7475 \text{ kN} \cdot 0.6 - N_{14} \cdot 0.7071 + (-8.9426 \text{ kN}) \cdot 0.7071 = 0,$$

$$-N_{13} \cdot 0.8 - N_{14} \cdot 0.7071 + 15.6413 \text{ kN} = 0$$



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Obliczenie sił osiowych z równań:

$$N_{13} \cdot 0.6 - N_{14} \cdot 0.7071 - 0.6747 \text{ kN} = 0,$$

$$-N_{13} \cdot 0.8 - N_{14} \cdot 0.7071 + 15.6413 \text{ kN} = 0,$$

$$1.4 \cdot N_{13} - 16.3160 \text{ kN} = 0 \Rightarrow N_{13} = +11.6543 \text{ kN},$$

$$N_{14} = \frac{N_{13} \cdot 0.6 - 0.6747 \text{ kN}}{0.7071} = +8.9349 \text{ kN}$$

Równanie kontrolne

$$\sum M_1 = 0,$$

$$\begin{aligned} M_s^{\Delta r} - M_{12}^{\Delta r} - M_{13_1}^{\Delta r} - M_{14}^{\Delta r} - M_{15}^{\Delta r} &= 12.1849 \text{ kN} \cdot \text{m} - (5.2997 - 43.7376 + 50.6151 + 0) \text{ kN} \cdot \text{m} = \\ &= (12.1849 + 12.1772) \text{ kN} \cdot \text{m} = 0.0077 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Obliczenie momentów zginających

Rzeczywiste momenty zginające na końcach elementów mają wartość równą momentom brzegowym, znak zależy od wyróżnionych włókien

$$M_{12}^{\Delta r} = +5.2997 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{21}^{\Delta r} = -130.7660 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{13}^{\Delta r} = -43.7376 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{14}^{\Delta r} = -50.6151 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{15}^{\Delta r} = 0.00 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{31}^{\Delta r} = 0.00 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

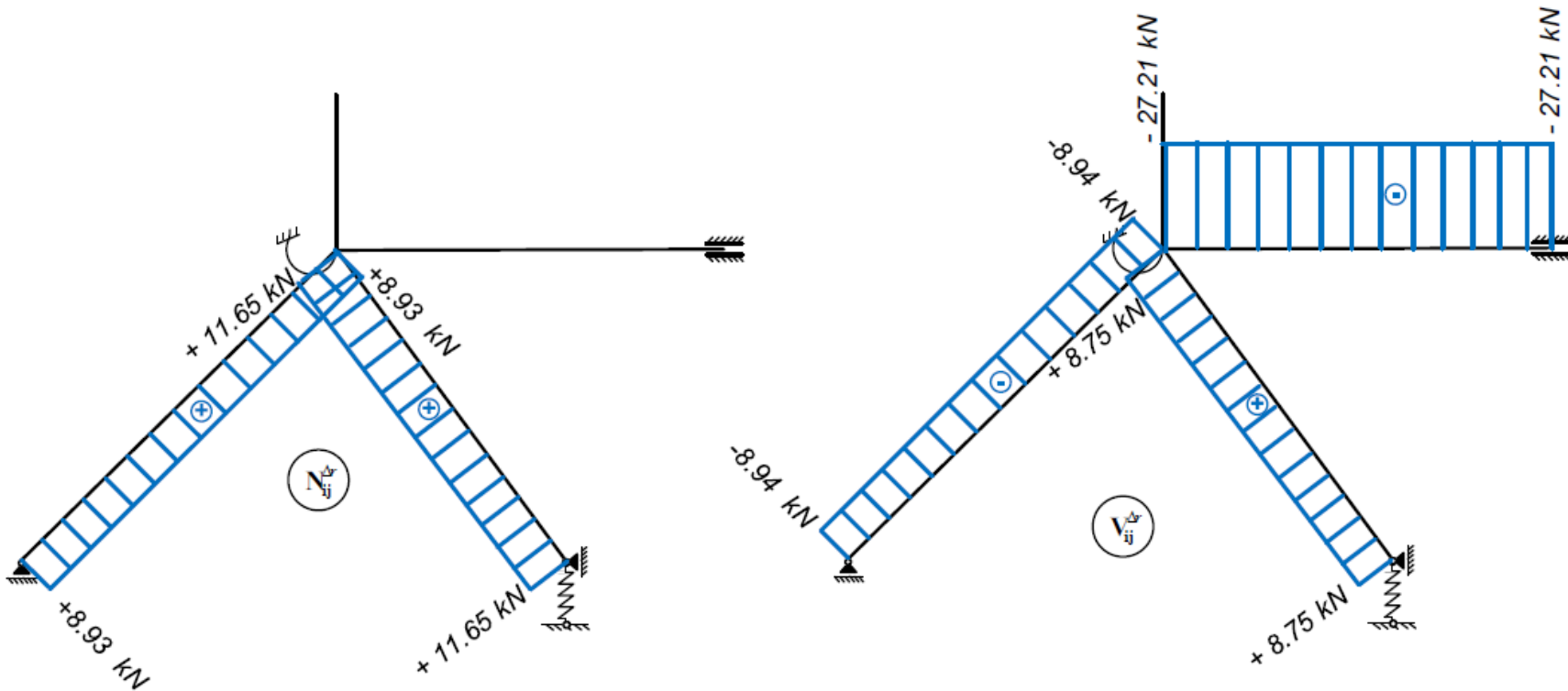
Obliczenie momentu zginającego w środku elementu 1-2 i elementu 1-4

$$M_{12,s}^{\Delta r} = (M_{12}^{\Delta r} + M_{21}^{\Delta r}) / 2 = (5.2997 - 130.766) \text{ kN} \cdot \text{m} / 2 = -62.7332 \text{ kN} \cdot \text{m},$$

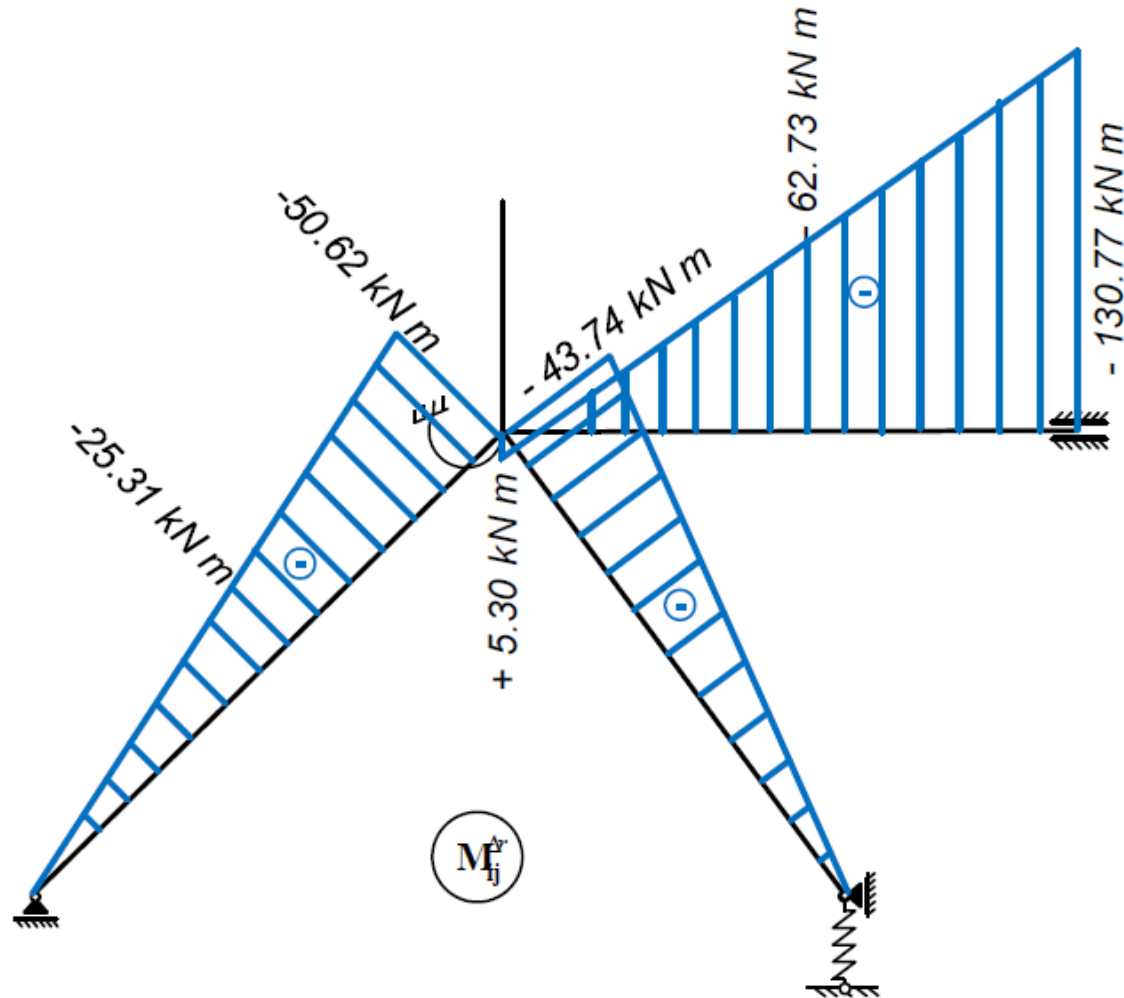
$$M_{14,s}^{\Delta r} = M_{41}^{\Delta r} / 2 = -50.6151 \text{ kN} \cdot \text{m} / 2 = -25.3075 \text{ kN} \cdot \text{m}.$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Wykresy sił przekrojowych



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Kontrola poprawności rozwiązania

Sprawdzenie statycznej dopuszczalności rozwiązania - równowaga prętów i węzłów, została wykonana przy obliczaniu sił tnących i osiowych.

Sprawdzenie globalnych równań równowagi. Obliczenie reakcji przez odpowiednie rzutowanie sił osiowych i sił tnących

$$R_{2z}^{\Delta r} = -V_{21} \cdot = +27.2131 \text{ kN},$$

$$R_{3z}^{\Delta r} = -N_{31} \sin \beta - V_{31} \cos \beta = -11.6543 \text{ kN} \cdot 0.8 - 8.7475 \text{ kN} \cdot 0.6 = -14.5719 \text{ kN},$$

$$R_{3x}^{\Delta r} = -N_{31} \cos \beta + V_{31} \sin \beta = -11.6543 \text{ kN} \cdot 0.6 + 8.7475 \text{ kN} \cdot 0.8 = 0.00542 \text{ kN},$$

$$R_{4z}^{\Delta r} = -N_{41} \sin \alpha + V_{41} \cos \alpha = -8.9349 \text{ kN} \cdot 0.7071 + (-8.94267 \text{ kN}) \cdot 0.7071 = -12.6412 \text{ kN}.$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Uwaga: Kontrolnie obliczymy reakcję w więzi sprężystej R_{3x} ze wzoru

$$\begin{aligned} R_{3z} = R_{s\delta} &= -k_{\delta} \cdot \delta_s = -k_{\delta} \cdot (\delta_s^I \cdot \delta_I^{\Delta r} + \delta_s^{II} \cdot \delta_{II}^{\Delta r} + \delta_s^{0\Delta r}) = \\ &= -\frac{2EI}{m^3} \cdot (-1.75 \cdot 0.02014635 \text{ m} + 1 \cdot 0.05586085 \text{ m} - 0.02 \text{ m}) = -14.57901 \text{ kN} \end{aligned}$$

Globalne równania równowagi

$$\sum X = 0, \quad -R_{3x} = -0.00542 \text{ kN},$$

$$\sum Z = 0, \quad R_{2z} + R_{3z} + R_{4z} = +27.2131 \text{ kN} - 14.5719 \text{ kN} - 12.6412 \text{ kN} = 0,$$

$$\sum M_3 = 0,$$

$$M_s - R_{2z} \cdot 2 \text{ m} + R_{4z} \cdot 7 \text{ m} + M_{21} =$$

$$= 12.1849 \text{ kN} \cdot \text{m} - 27.2131 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 12.6412 \text{ kN} \cdot 7 \text{ m} + 130.766 \text{ kN} \cdot \text{m} = 0.0363 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

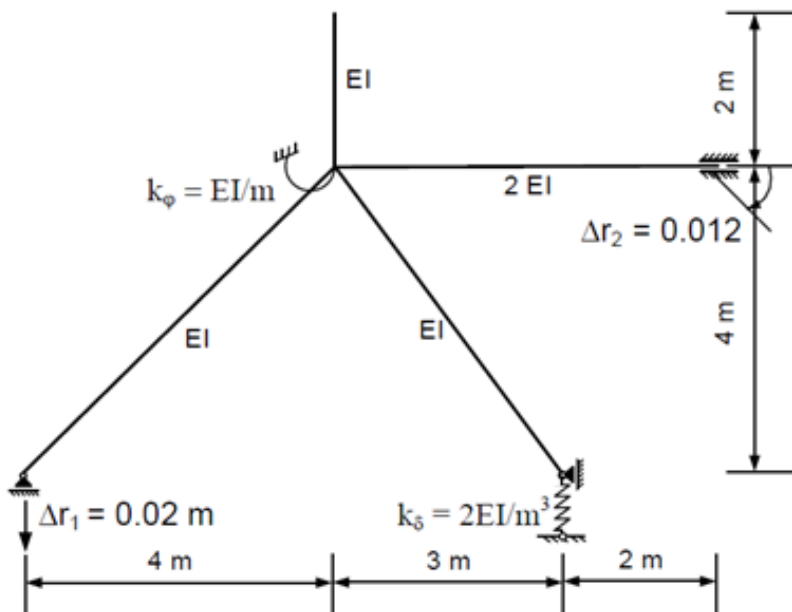
Sprawdzenie kinematycznej dopuszczalności rozwiązania (sprawdzenie przemieszczeń)

Analizowana rama jest 3-krotnie statycznie niewyznaczalna (patrz punkt 2), należałoby więc sprawdzić 3 przemieszczenia, których wartości znamy. Obciążenie jednostkowe do obliczenia przemieszczeń przyłożymy w układzie statycznie wyznaczalnym powstałym z układu danego przez usunięcie 3 więzi – obu więzi sprężystych i więzi momentowej w węźle 2. Przemieszczenia w miejscu usuniętych więzi powinny wynosić

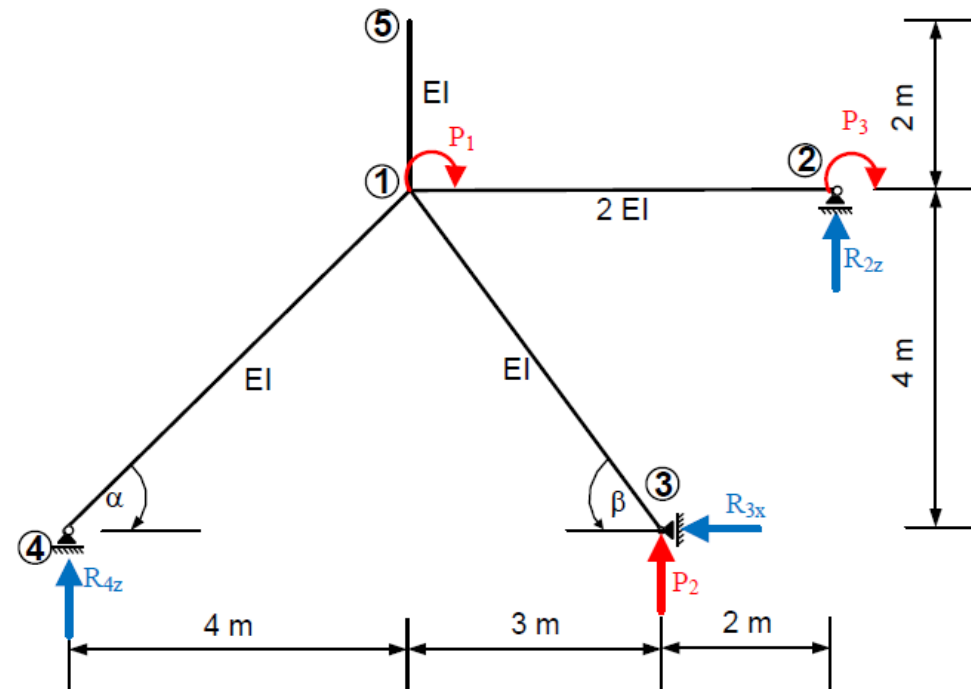
$$\Delta_1^{\Delta R} = -\frac{M_s^{\Delta r}}{k_\varphi} = \frac{-12.1849 \text{ kN} \cdot \text{m}}{EI / \text{m}} = \frac{-12.1849 \text{ kN m}^2}{EI} = \varphi_1 = -0.0010186,$$
$$\Delta_2^{\Delta R} = -\frac{R_s^{\Delta r}}{k_\delta} = -\frac{-14.5719 \text{ kN}}{2EI / \text{m}^3} = +7.2859 \frac{\text{kN m}^3}{EI} = +0.000604 \text{ m},$$
$$\Delta_3^{\Delta R} = \varphi_2 = 0.$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

Układ rzeczywisty



Układ podstawowy MS





Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

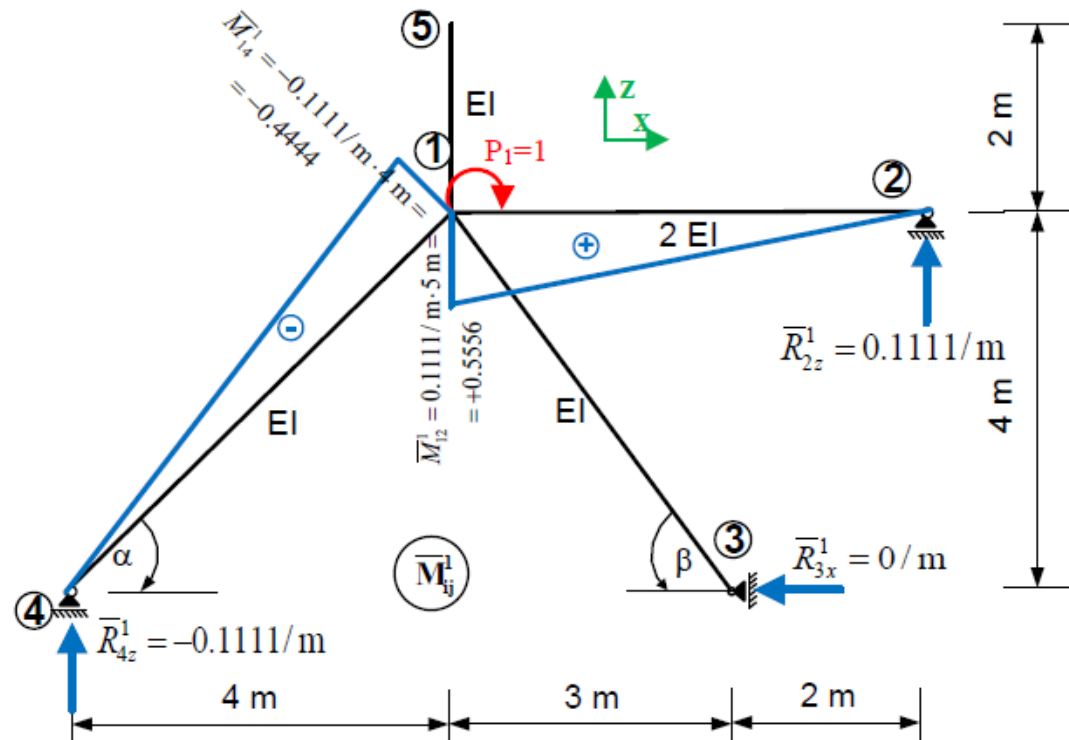
Rozwiązanie ramy statycznie wyznaczalnej od $P_1 = 1$

Obliczenie reakcji:

$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{R}_{3x}^1 = 0,$$

$$\sum M_3 = 0, \quad \bar{R}_{4z}^1 \cdot 9 \text{ m} + 1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{4z}^1 = -0.1111/\text{m},$$

$$\sum Z = 0, \quad \bar{R}_{4z}^1 + \bar{R}_{2z}^1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{2z}^1 = +0.1111/\text{m}.$$



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

$$\begin{aligned}\Delta_1^{\Delta r} &= \int_{1-2,1-4} \frac{M_{ij}^{\Delta r} \bar{M}_{ij}^1}{EI_{ij}} dx + \sum_n \frac{S_n^{\Delta r} \bar{S}_n^1}{k_n} - \sum_r \bar{R}_r^1 \Delta r_r = \\ &= \frac{5 \text{ m}}{6 \cdot 2EI} [5.2997 \text{ kN m} \cdot 0.5556 + 4 \cdot (-62.7332 \text{ kN m}) \cdot 0.5556/2 - 130.766 \text{ kN m} \cdot 0] + \\ &+ \frac{5.66 \text{ m}}{6EI} [-50.6151 \text{ kN m} \cdot (-0.4444) + 4 \cdot (-25.3075 \text{ kN m}) \cdot (-0.4444/2) + 0] + \\ &- \{(-0.111/\text{m}) \cdot (-0.02 \text{ m}) + 0 \cdot 0.012\} = 14.6188 \frac{\text{kN m}^2}{EI} - 0.00222 = \\ &= 14.6188 \frac{\text{kN m}^2}{12054 \text{ kN m}^2} - 0.00222 = 0.001213 - 0.00222 = -0.00101\end{aligned}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

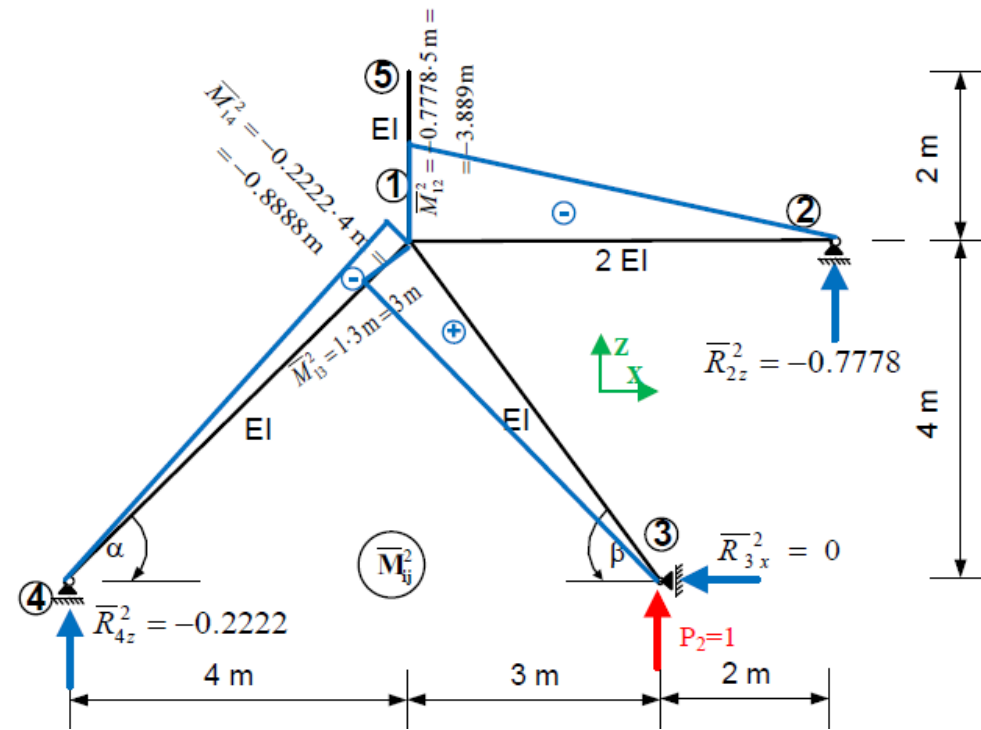
Rozwiązanie ramy statycznie wyznaczalnej od $P_2 = 1$

Obliczenie reakcji:

$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{R}_{3x}^2 = 0,$$

$$\sum M_3 = 0, \quad \bar{R}_{4z}^2 \cdot 9 \text{ m} + 1 \cdot 2 \text{ m} = 0 \Rightarrow \bar{R}_{4z}^2 = -0.2222,$$

$$\sum Z = 0, \quad \bar{R}_{4z}^2 + \bar{R}_{2z}^2 + 1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{2z}^2 = -0.7778.$$



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

$$\begin{aligned}\Delta_2^{\Delta r} &= \int_{1-2,1-3,1-4} \frac{M_{ij}^{\Delta r} \bar{M}_{ij}^2}{EI_{ij}} dx + \sum_n \frac{S_n^{\Delta r} \bar{S}_n^2}{k_n} - \sum_r \bar{R}_r^2 \Delta r_r = \\ &= \frac{5 \text{ m}}{6 \cdot 2EI} [5.2997 \text{ kN m} \cdot (-3.889 \text{ m}) + 4 \cdot (-62.7332 \text{ kN m}) \cdot (-3.889 \text{ m})/2 - 130.766 \text{ kN m} \cdot 0 \text{ m}] + \\ &+ \frac{5 \text{ m}}{6 \cdot EI} [-43.7376 \text{ kN m} \cdot 3 \text{ m} + 4 \cdot (-43.7376 \text{ kN m}) \cdot 3 \text{ m}/4 - 0 \text{ kN m} \cdot 0 \text{ m}] + \\ &+ \frac{5.66 \text{ m}}{6 EI} [-50.6151 \text{ kN m} \cdot (-0.8888 \text{ m}) + 4 \cdot (-25.3075 \text{ kN m}) \cdot (-0.8888 \text{ m}/2) + 0] + = \\ &- \{(-0.2222/\text{m}) \cdot (-0.02 \text{ m}) + 0 \cdot 0.012\} = 60.9020 \frac{\text{kN m}^3}{EI} - 0.004444 \text{ m} = \\ &= 60.9020 \frac{\text{kN m}^3}{12054 \text{ kN m}^2} - 0.004444 \text{ m} = 0.005052 \text{ m} - 0.004444 \text{ m} = 0.000608 \text{ m}\end{aligned}$$

Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

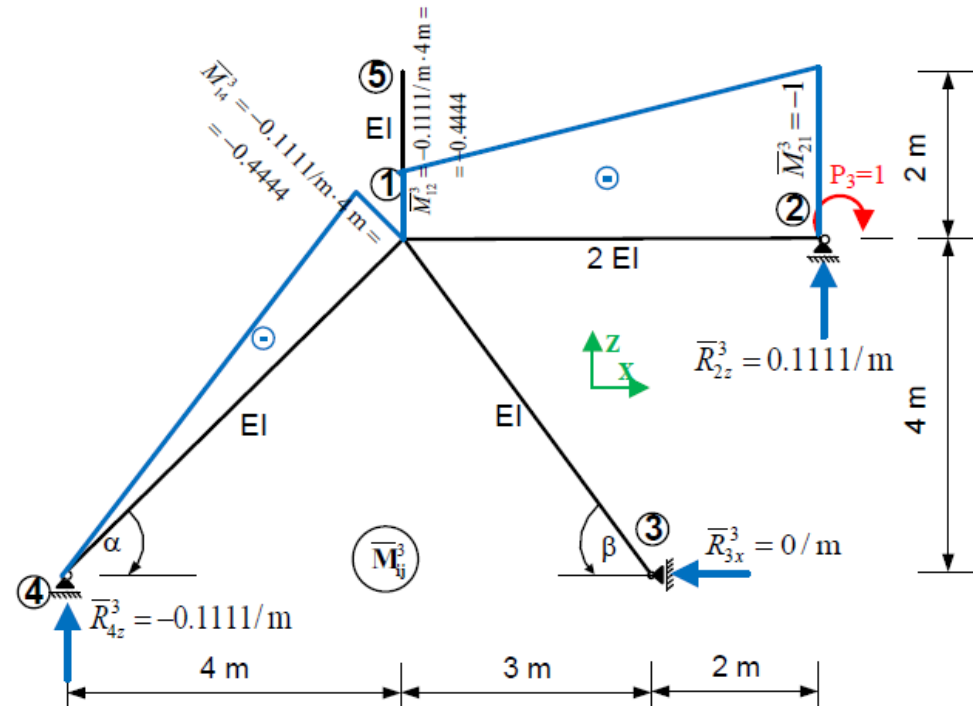
Rozwiązanie ramy statycznie wyznaczalnej od $P_3 = 1$

Obliczenie reakcji:

$$\sum X = 0 \Rightarrow \bar{R}_{3x}^3 = 0,$$

$$\sum M_3 = 0, \quad \bar{R}_{4z}^3 \cdot 9 \text{ m} + 1 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{4z}^3 = -0.1111/\text{m},$$

$$\sum Z = 0, \quad \bar{R}_{4z}^3 + \bar{R}_{2z}^3 = 0 \Rightarrow \bar{R}_{2z}^3 = +0.1111/\text{m}.$$



Przykład numeryczny - rozwiązanie ramy hiperstatycznej od obciążenia niemechanicznego

$$\begin{aligned}\Delta_3^{\Delta r} &= \int_{1-2,1-4} \frac{M_{ij}^{\Delta r} \bar{M}_{ij}^3}{EI_{ij}} dx + \sum_n \frac{S_n^{\Delta r} \bar{S}_n^3}{k_n} - \sum_r \bar{R}_r^3 \Delta r_r = \\ &= \frac{5 \text{ m}}{6 \cdot 2EI} [5.2997 \text{ kN m} \cdot (-0.4444) + 4 \cdot (-62.7332 \text{ kN m}) \cdot (-0.4444 - 1)/2 - 130.766 \text{ kN m} \cdot (-1)] + \\ &+ \frac{5.66 \text{ m}}{6 EI} [-50.6151 \text{ kN m} \cdot (-0.4444) + 4 \cdot (-25.3075 \text{ kN m}) \cdot (-0.4444/2) + 0] + \\ &- \{(-0.111/\text{m}) \cdot (-0.02 \text{ m}) + 1 \cdot 0.012\} = 171.4518 \frac{\text{kNm}^2}{EI} - 0.014222 = \\ &= 171.4518 \frac{\text{kNm}^2}{12054 \text{ kNm}^2} = 0.014224 - 0.014222 = 0.000002\end{aligned}$$