Opracowała: dr inż. Kamila Jarczewska
na podstawie wykładu prof. dr hab. inż. Wojciecha Glabisza

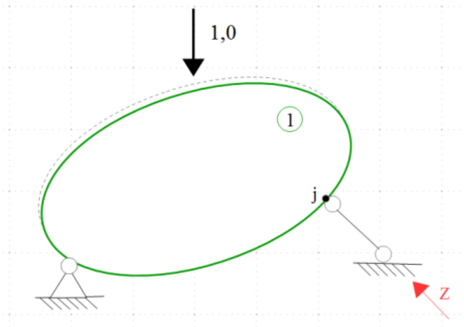
Wykład nr 13

Linie wpływu wielkości statycznych w płaskich układach prętowych statycznie wyznaczalnych cz.2.

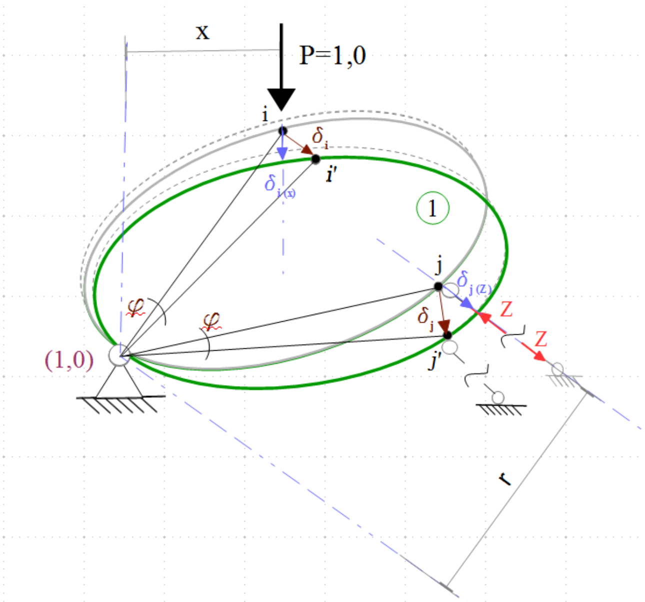
/ **sposób kinematyczny**/

Sposób kinematyczny wyznaczania linii wpływu wielkości statycznych bazuje na zasadzie prac przygotowanych (ZPP) przy 1-krotnym wymuszeniu kinematycznym.

- Rozważmy tarczę sztywną podpartą z ostoją trzema niezbieżnymi więziami obciążoną siłą jednostkową, która może zmieniać swoje położenie zgodnie z ustalonym torem usytuowania siły, oznaczonym przerywaną linią i wyznaczmy wartości reakcji „Z" zależną od usytuowania siły jednostkowej.



- Obróćmy tarczę o kąt φ nadając jej wirtualne przemieszczenie:



$$\delta_{j(Z)} = r \cdot \varphi$$

$$\delta_{i(x)} = x \cdot \varphi$$

- **Z zasady prac przygotowanych ZPP** dla układów nieodkształcalnych wynika:

$$1 * \delta_{i(x)} + Z * \delta_{j(Z)} = 0$$

$$\boldsymbol{Z = -\frac{\delta_{i(x)}}{\delta_{j(Z)}}}$$

**Zasada Prac Przygotowanych dla tarcz doskonale sztywnych:*
Suma prac wszystkich sił wewnętrznych (czynnych i biernych) na wirtualnych przemieszczeniach zgodnych z kinematycznymi właściwościami układu jest równa zeru.

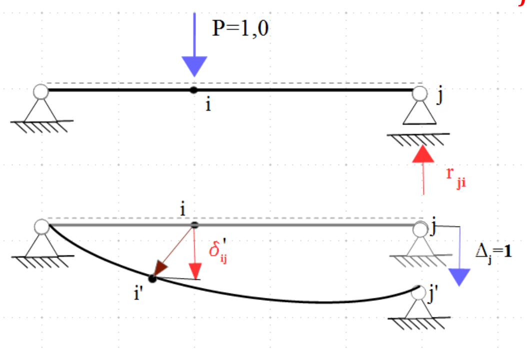
- Jeżeli $\boldsymbol{\delta_{j(Z)} = -1}$ to $\boldsymbol{Z = \delta_{i(x)}}$, czyli wielkość **Z** będzie zależna od wartości przemieszczenia w miejscu i na kierunku przyłożenia siły jednostkowej.

*Wniosek:

Lina wpływu wielkości statycznej „Z” jest proporcjonalna do wykresu przemieszczeń toru siły jednostkowej przy założeniu, że więź odpowiadająca za wielkość „Z” została przecięta. ***Jeżeli w miejscu i kierunku wielkości „Z” nadamy przemieszczenie $\delta_{j(z)} = -1$, to linia wpływu wielkości „Z” jest równa wykresowi przemieszczeń toru siły jednostkowej ($L.w.\text{"Z"} = \delta_{i(x)}$).***

- Analizując **twierdzenie o wzajemności reakcji i przemieszczeń** wynikające z twierdzenie Bettiego dla ustrojów sprężystych mamy:

$$r_{ji} = -\delta'_{ij}$$



**Twierdzenie o wzajemności reakcji i przemieszczeń:*

Przemieszczenie w miejscu i na kierunku „i” wywołane jednostkowym przemieszczeniem w miejscu i na kierunku „j” jest równe co do modułu ale przeciwne co do znaku reakcji w miejscu i kierunku „j” wywołanej jednostkowym obciążeniem zadanym działającym w miejscu i na kierunku „i” .

Wielkość reakcji r_{ji}, którą możemy symbolicznie nazwać Z, będzie zależna od wartości przemieszczenia w miejscu i na kierunku przyłożenia siły jednostkowej, przy założeniu, że przemieszczenie to zostało wywołane jednostkowym przemieszczeniem $\Delta_j = 1$ o zwrocie przeciwnym do wielkości Z i występującym w miejscu na kierunku szukanej wielkości Z.

*Wniosek:

Jeżeli w miejscu i kierunku wielkości „Z” nadamy przemieszczenie $\Delta_j = -1$, to linia wpływu wielkości „Z” jest równa wykresowi przemieszczeń toru siły jednostkowej.

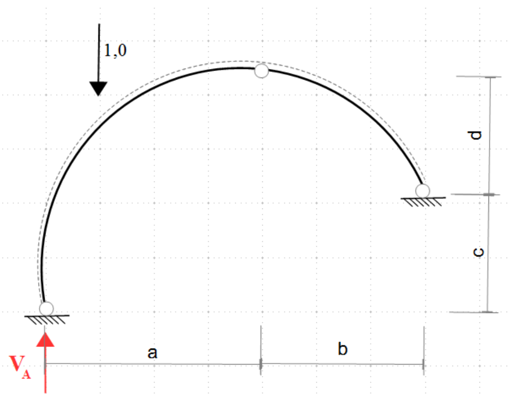
Uwaga:

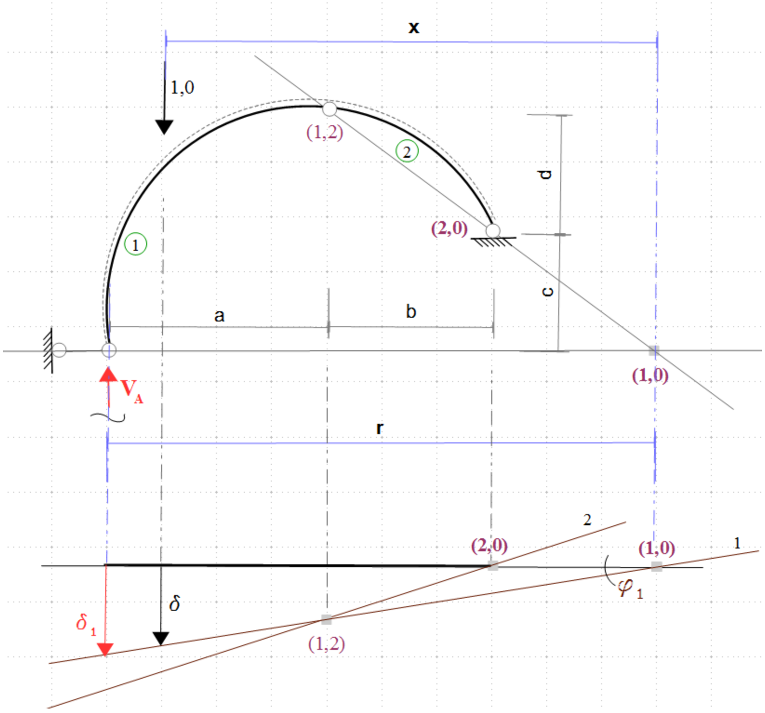
Z zasady prac przygotowanych dla tarcz doskonale sztywnych oraz z twierdzenia o wzajemności reakcji i przemieszczeń sformułowanego dla układów odkształcalnych wynika, że kinematyczna interpretacji linii wpływu wielkości statycznej jest jednoznaczna dla układów odkształcalnych jak i nieodkształcalnych.

Przykład

Sposobem kinematycznym należy wyznaczyć linię wpływu reakcji V_A w ramie trójprzegubowej jak na rysunku.

L.w. „V_A”=?





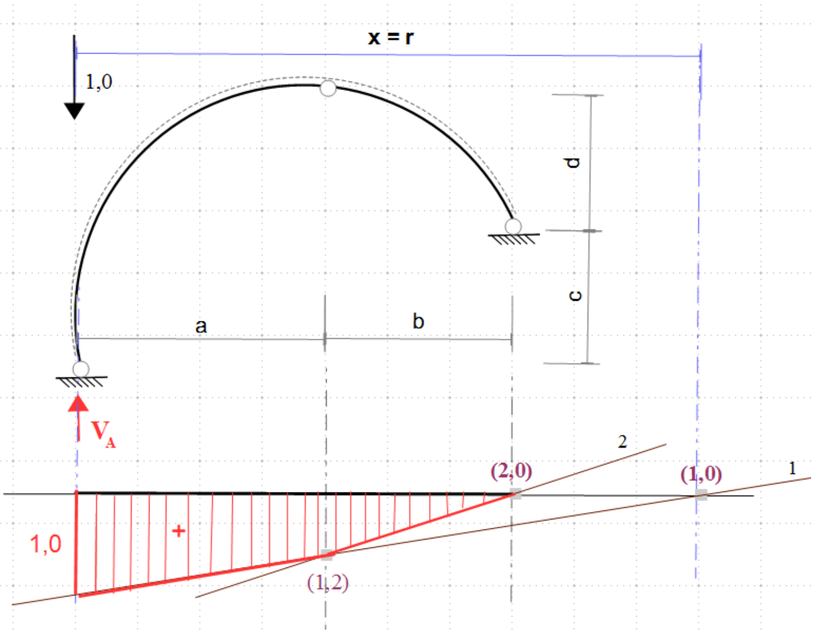
ZPP: równanie prac: $\mathbf{1 * \delta - V_A * \delta_1 = 0}$

$$1 * x * \varphi_1 - V_A * r * \varphi_1 = 0 \;/ : \varphi_1$$

$$\boldsymbol{V_A = \frac{x}{r}}$$

gdy : $\boldsymbol{x = r}$ wówczas $\boldsymbol{V_A = 1,0}$

L.w. „V_A”



Tok postępowania przy wyznaczaniu linii wpływu wielkości statycznej sposobem kinematycznym:

(założenie: siła jednostkowa zmieniająca położenie po ustalonym torze jest pionowa siłą skupioną)

pkt.1. Należy zadany układ przekształcić w mechanizm przecinając więź odpowiadającą poszukiwanej wielkości statycznej, a w miejsce przeciętej więzi wprowadzić siły ją zastępujące.

pkt.2. Nalży określić liczbę tarcz w mechanizmie oraz wyznaczyć środki obrotu poszczególnych tarcz względem ostoi.

pkt.3. Należy wymusić możliwy ruch jednej tarczy (tak by poszukiwana wielkość statyczna wykonywała pracę ujemną), następnie należy sporządzić wykres przemieszczeń pozostałych tarcz, zgodny warunkami ciągłości i podparcia układu.

pkt.4. Z równania prac przygotowanych dla układów sztywnych wyznaczyć wartość rzędnej linii wpływu.

pkt.5. Ustalić ostateczny zakres ważności składowych pionowych przemieszczeń tarcz, który zależy od ustalonego toru siły jednostkowej. W ten sposób uzyskuje się wykres przemieszczeń toru siły jednostkowej, który jest jednoznaczny z linią wpływu poszukiwanej wielkości statycznej.

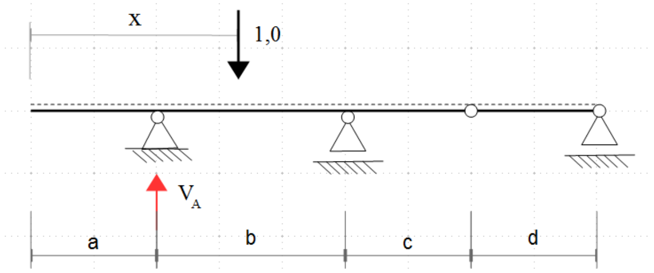
*Uwaga:

Wykres będący linią wpływu wielkości statycznej lub kinematycznej powinien mieć poprawny kształt, znak oraz zaznaczoną wartość jednej rzędnej (pozostałe rzędne można wyliczyć stosując zasady trygonometrii).

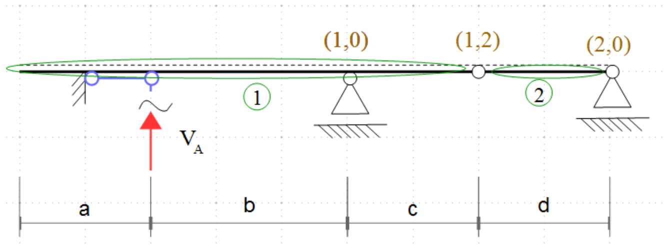
Przykład 1.

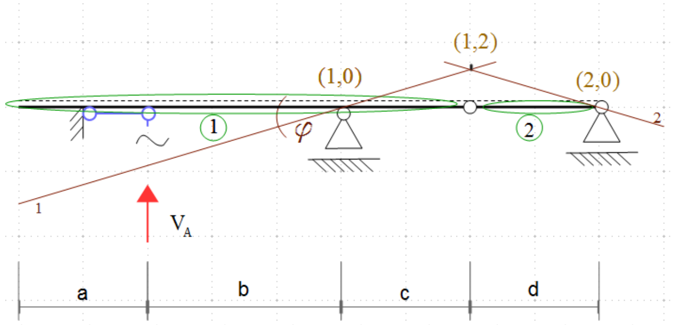
Wyznacz sposobem kinematycznym linię wpływu reakcji V_A w belce jak na rysunku.

L.w. „V_A”=?



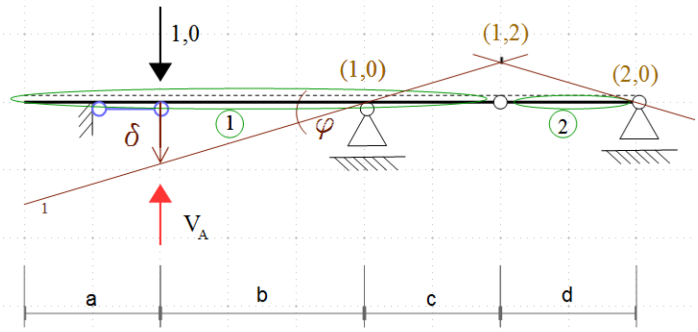
pkt.1 i pkt.2.





pkt.3.

Wymuszono ruch tarczy „1" obracając ją w lewo o kąt φ.



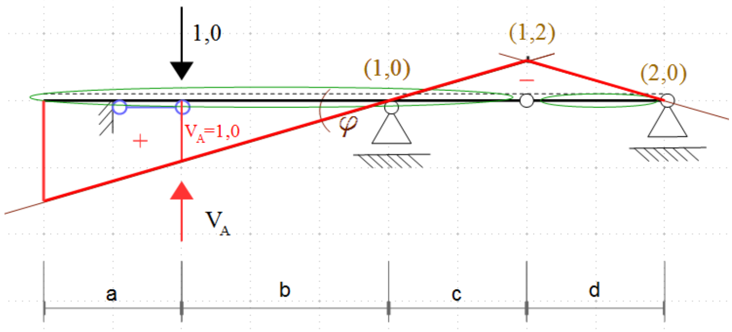
pkt.4.

Ustawiono siłę jednostkową w dowolnym miejscu tak, by przemieszczenie pod siłą nie było zerowe i wyliczono pracę sił (P=1,0 i V_A) na odpowiadających im przemieszczeniach.

ZPP
równanie prac:

$$1 * \delta - V_A * \delta = 0$$
$$\boldsymbol{V_A = 1,0}$$

L.w. „V_A"



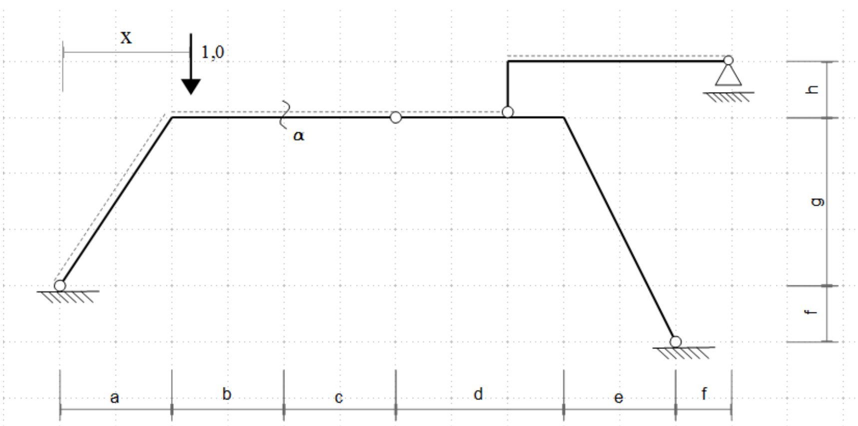
pkt. 5.

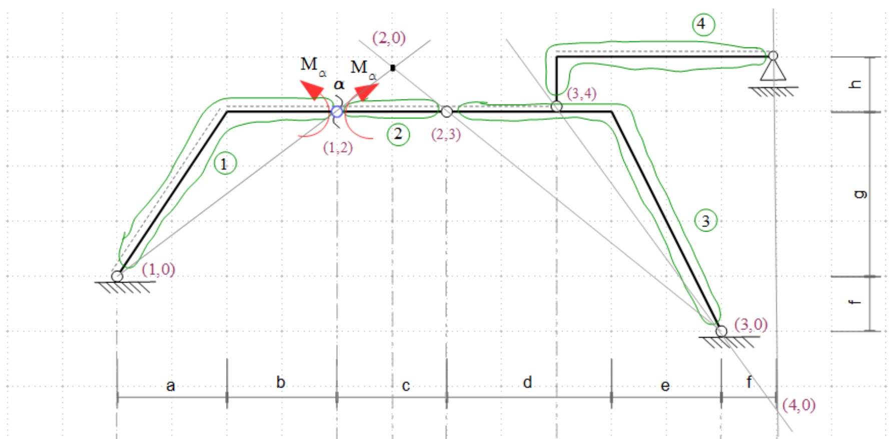
Zaznaczono ostateczny kształt wykresu.

Przykład 2.

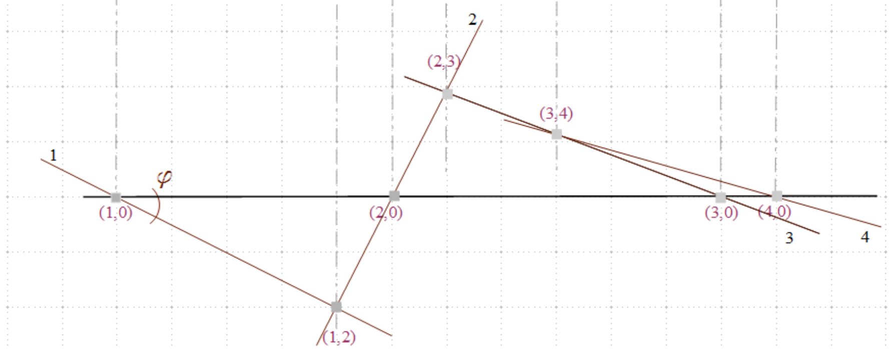
Wyznacz sposobem kinematycznym linię wpływu momentu zginającego w przekroju α (M_α) w ramie jak na rysunku.

L.w. „M_α"=?



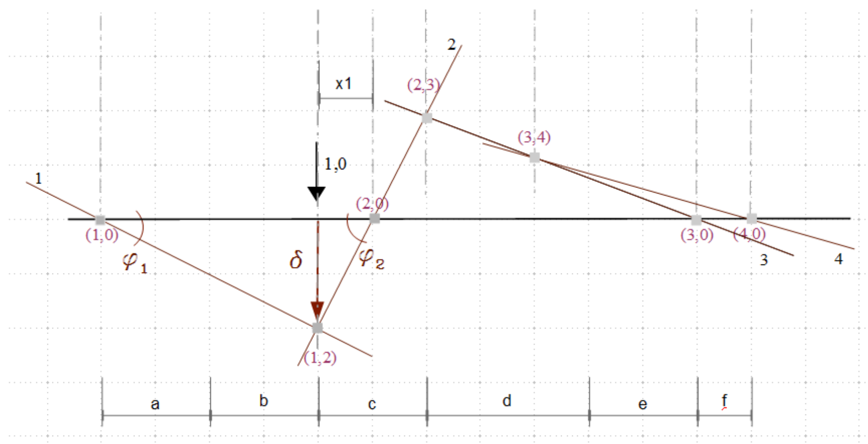


pkt.1 i pkt.2



pkt. 3

Wymuszono ruch tarczy „1” obracając ją w prawo o kąt $\varphi = \varphi_1$, następnie zaznaczono przemieszczenia pionowe pozostałych tarcz.



pkt. 4

Ustawiono siłę jednostkową w dowolnym miejscu tak, by przemieszczenie pod siłą nie było zerowe i wyliczono pracę sił (P=1,0 i M_α) na odpowiadających im przemieszczeniach.

ZPP

Równanie prac: $\boldsymbol{1 * \delta - M_\alpha * \varphi_1 - M_\alpha * \varphi_2 = 0}$

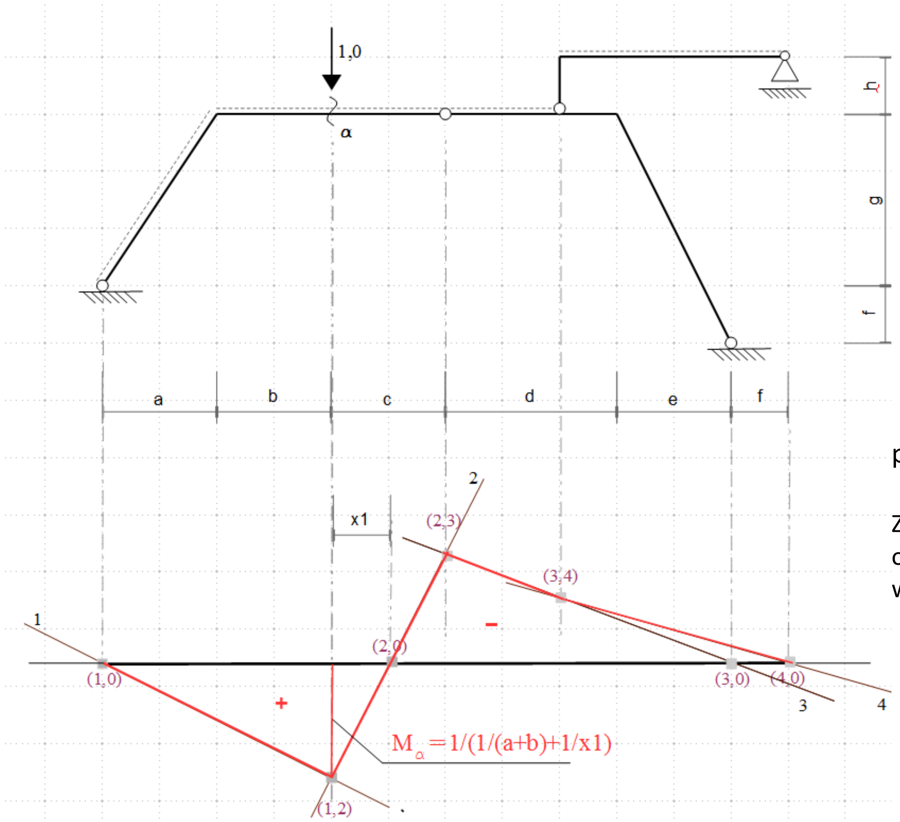
$$\left|\varphi_1 = \frac{\delta}{a+b};\ \ \varphi_2 = \frac{\delta}{x1};\right.$$

$$1 * \delta - M_\alpha * \frac{\delta}{a+b} - M_\alpha * \frac{\delta}{x1} = 0 \ \ /:\delta$$

$$\boldsymbol{M_\alpha = 1/(\frac{1}{a+b} + \frac{1}{x1})}$$

***Uwaga:**
Należy wyliczyć odległość **x1**, która wynika z przecięcia się prostych wyznaczających środek wzajemnego obrotu tarczy 2 i 0 (2,0).

L.w. „M_α”



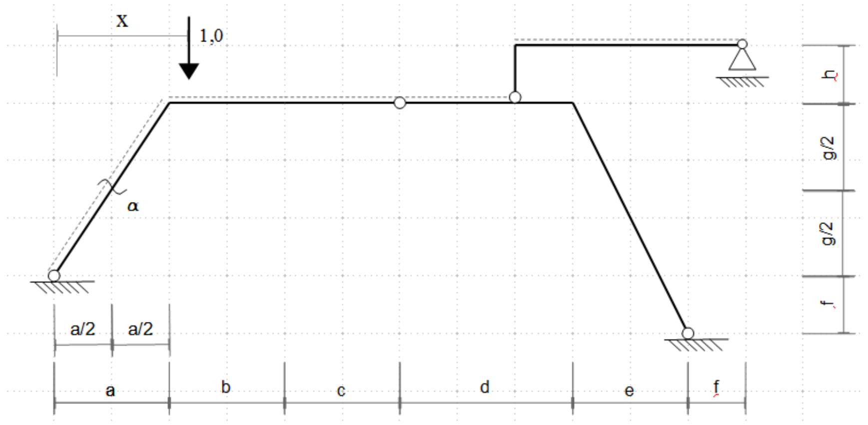
pkt. 5

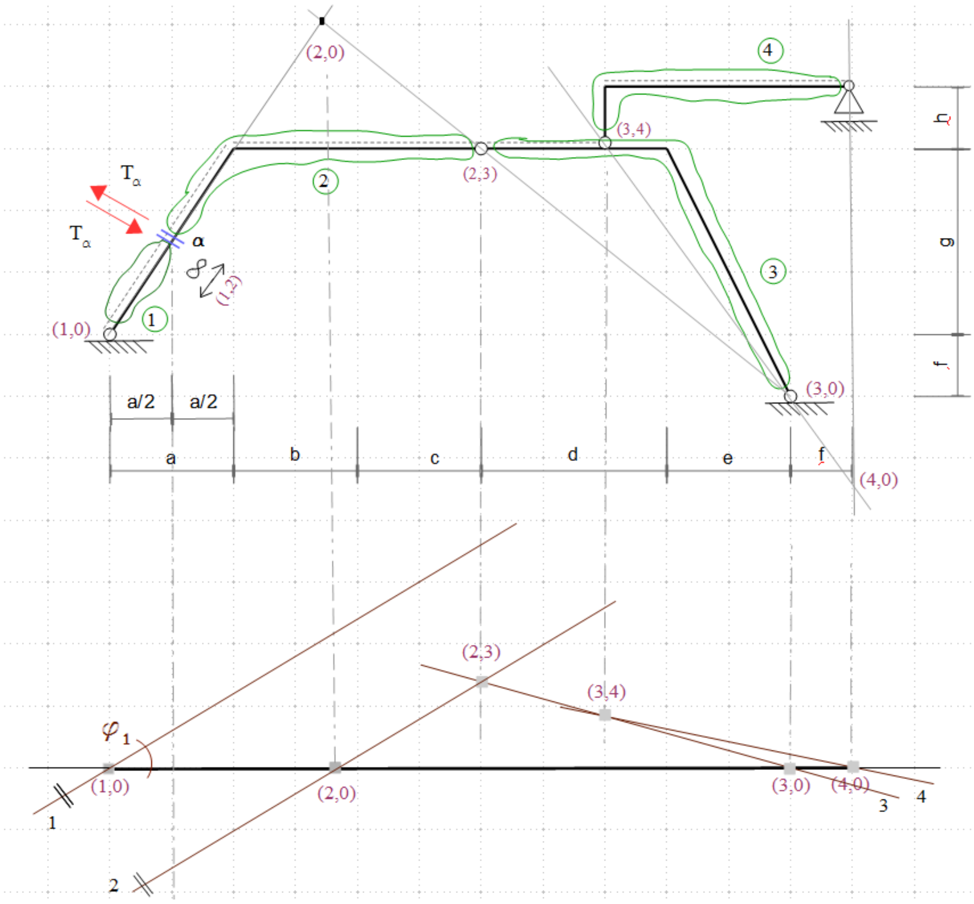
Zaznaczono ostateczny kształt wykresu.

Przykład 3.

Wyznacz sposobem kinematycznym linię wpływu siły tnącej w przekroju α (T_α)w ramie jak na rysunku.

L.w.„T_α”=?



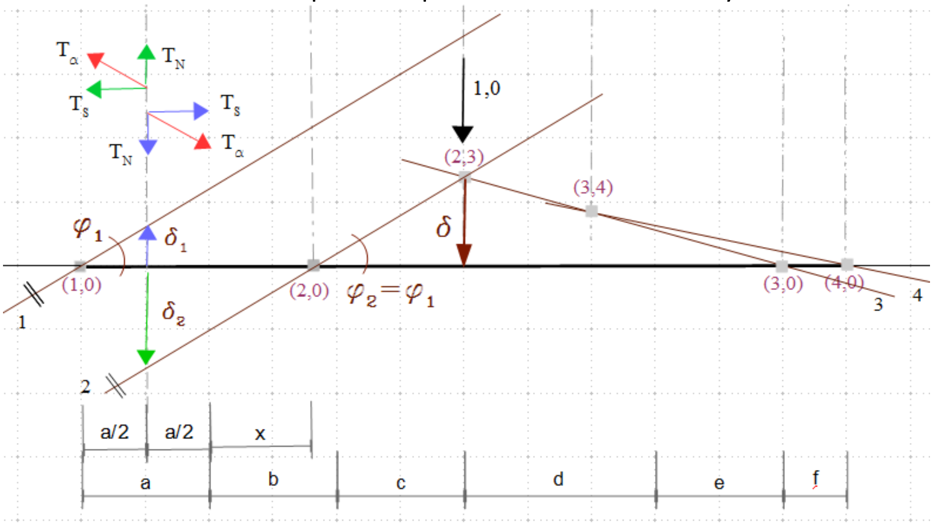


pkt. 1 i pkt. 2

pkt. 3

Wymuszono ruch tarczy „1” obracając ją w lewo o kąt φ_1, następnie zaznaczono przemieszczenia pionowe pozostałych tarcz.

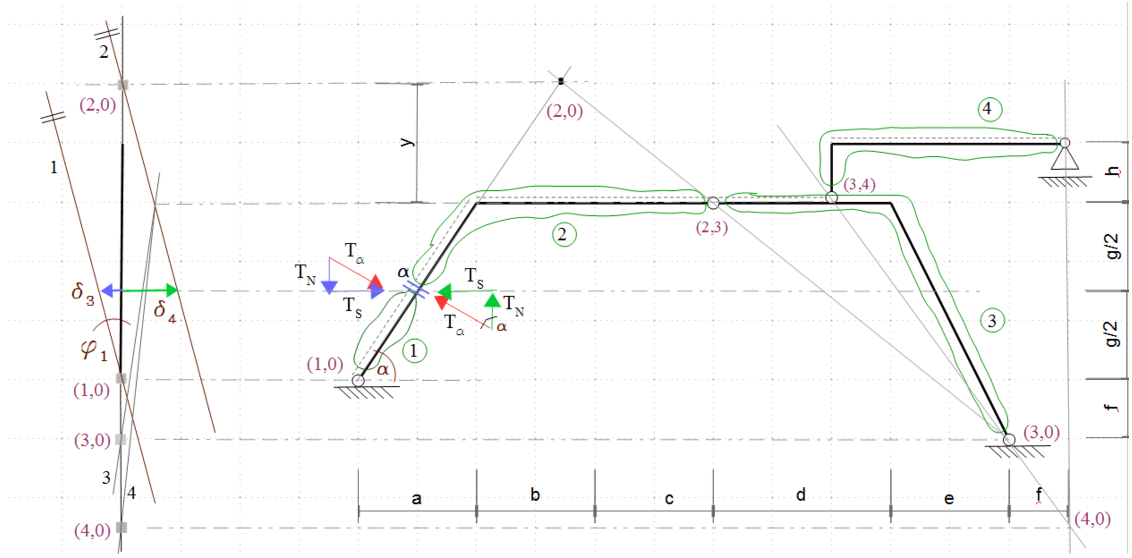
Składowe pionowe przemieszczeń zaznaczonych tarcz



pkt. 4

Ustawiono siłę jednostkową w dowolnym miejscu tak, by przemieszczenie pod siłą nie było zerowe i uwzględniono pracę sił pionowych (P=1,0 i T_N- składowe pionowe siły tnącej T_α) na odpowiadających im przemieszczeniach pionowych.

Składowe pioziome przemieszczeń zaznaczonych tarcz



Uwzględniono pracę sił poziomych (T_s- składowych poziomych siły tnącej T_α)na odpowiadających im przemieszczeniach poziomych

Równanie prac: $\mathbf{1 * \delta - T_N * \delta_1 - T_N * \delta_2 - T_S * \delta_3 - T_S * \delta_4 = 0}$

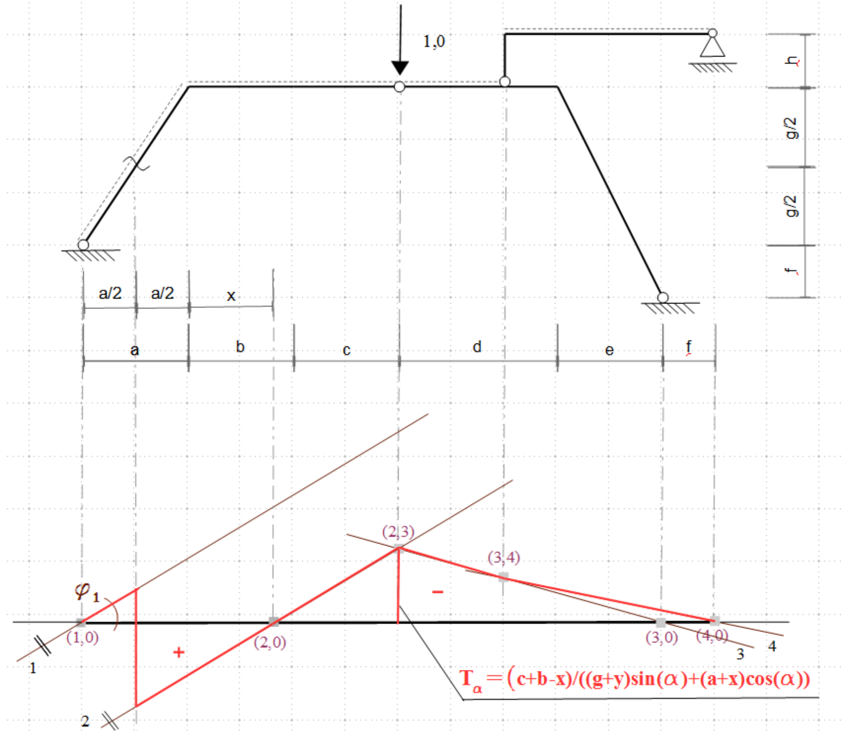
ZPP $|T_N = T_\alpha \cos(\alpha)\,;\, T_s = T_\alpha \sin(\alpha)$

$|\varphi_1 = \varphi_2;\;\; \delta_1 = \frac{a}{2}\varphi_1\,;\, \delta_2 = (\frac{a}{2}+x)\varphi_1;\, \delta_3 = \frac{g}{2}\varphi_1;\, \delta_4 = (\frac{g}{2}+y)\varphi_1;\, \delta = (c+b-x)\varphi_1$

$$\mathbf{1 * (c + b - x)\varphi_1 - T_\alpha \cos(\alpha) * \frac{a}{2}\varphi_1 - T_\alpha \cos(\alpha) * (\frac{a}{2} + x)\varphi_1 - T_\alpha \sin(\alpha) * \frac{g}{2}\varphi_1 +}$$
$$\mathbf{- T_\alpha \sin(\alpha)(\frac{g}{2} + y)\varphi_1 = 0\;\; / : \varphi_1}$$

$$\boldsymbol{T_\alpha = \frac{c + b - x}{[(a + x)\cos(\alpha) + (g + y)\sin(\alpha)]}}$$

Należy dodatkowo wyliczyć odległość **x** i **y**, które wynikają z przecięcia się prostych wyznaczających środek obrotu (2,0).



L.w. „T_α”

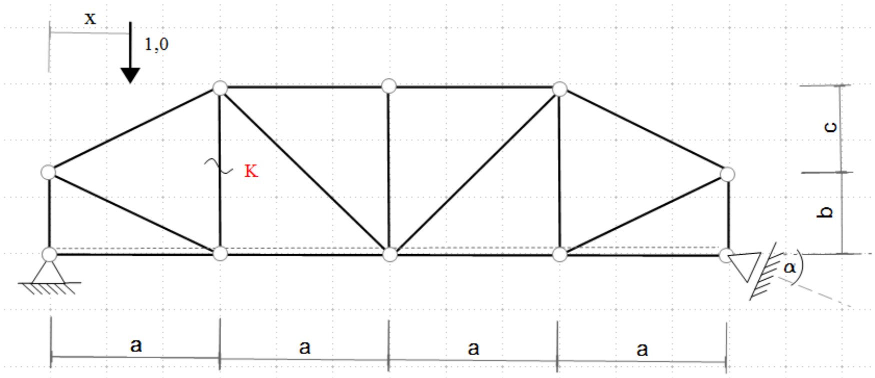
pkt. 5

Zaznaczono ostateczny kształt wykresu.

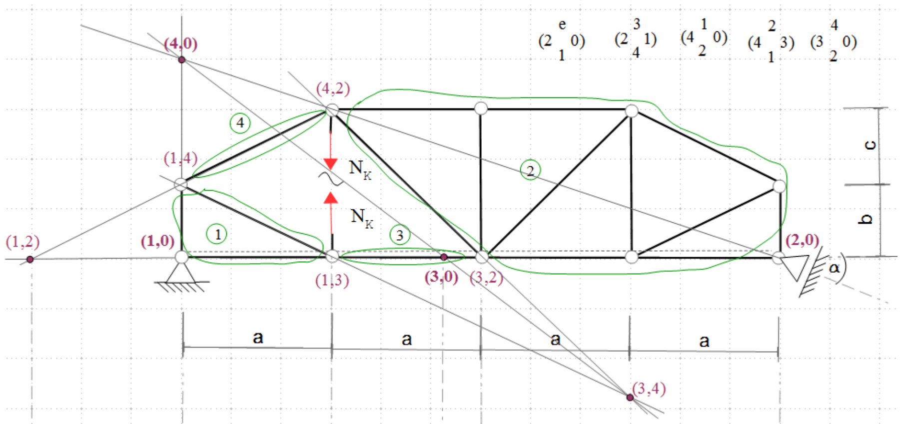
Przykład 4.

Wyznacz sposobem kinematycznym linię wpływu siły osiowej w pręcie K w kratownicy jak na rysunku.

L.w. „N_K"=?

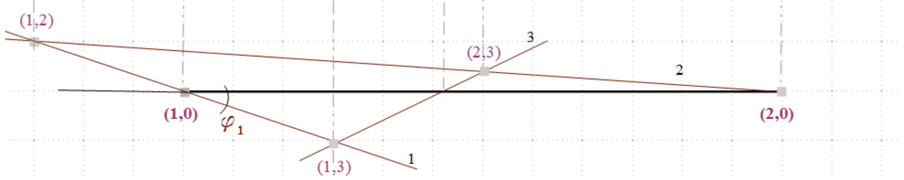


pkt. 1 i pkt. 2



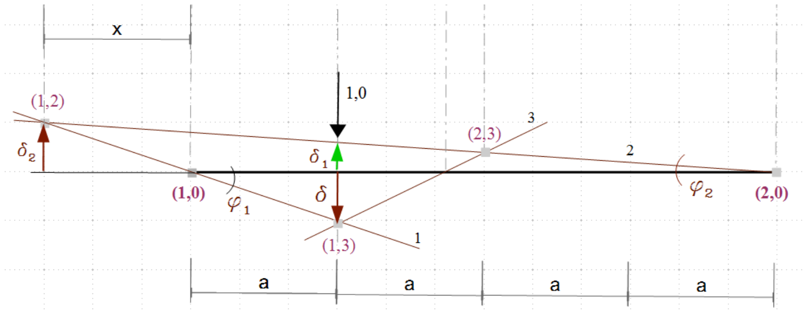
pkt. 3

Wymuszono ruch tarczy „1" obracając ją w prawo o kąt φ_1, następnie zaznaczono przemieszczenia pionowe pozostałych tarcz.



pkt. 4

Ustawiono siłę P=1,0 w dowolnym miejscu tak, by przemieszczenie pod siłą nie było zerowe i wyliczono pracę sił (P=1,0 i N_K) na odpowiadających im przemieszczeniach pionowych.



ZPP

Równanie prac: $\mathbf{1} * \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{N_K} * \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{N_K} * \boldsymbol{\delta_1} = \mathbf{0}$

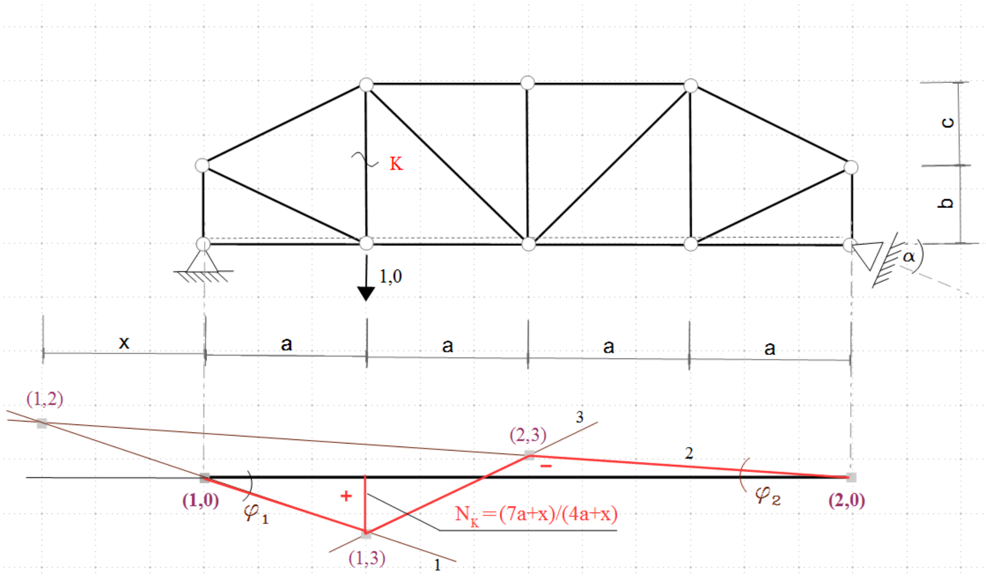
$\delta = a * \varphi_1; \quad \delta_1 = 3a * \varphi_2;$

$\delta_2 = a * \varphi_1; \; \delta_2 = (4a + x) * \varphi_2; \quad a * \varphi_1 = (4a + x) * \varphi_2 = \delta$

$$\mathbf{1} * (4a + x) * \varphi_2 - \boldsymbol{N_K} * (4a + x) * \varphi_2 - \boldsymbol{N_K} * 3a * \varphi_2 = \mathbf{0} \; /: \varphi_2$$

$$\boldsymbol{N_K} = (\mathbf{4}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x})/(\mathbf{7}\boldsymbol{a} + \boldsymbol{x})$$

L.w. „N_K”



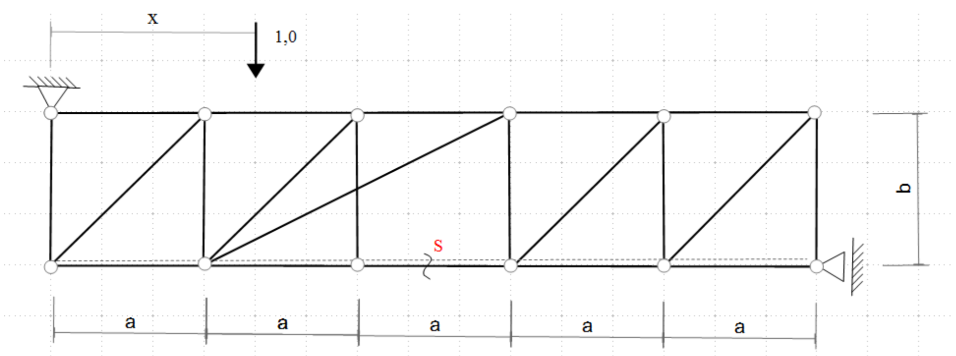
pkt. 5

Zaznaczono ostateczny kształt wykresu.

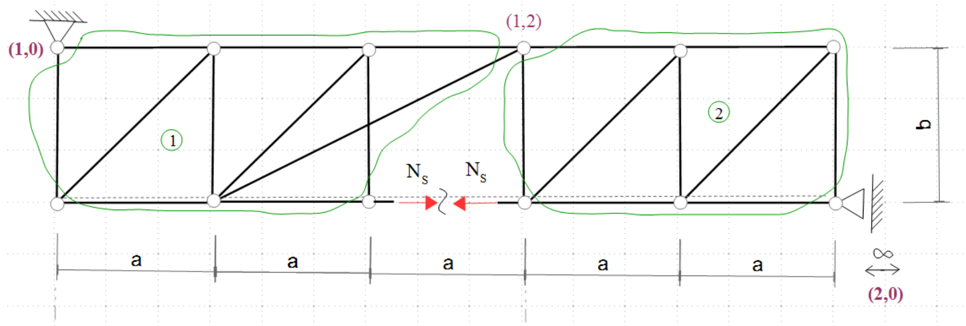
Przykład 5.

Wyznacz sposobem kinematycznym linię wpływu siły osiowej w pręcie S w kratownicy jak na rysunku.

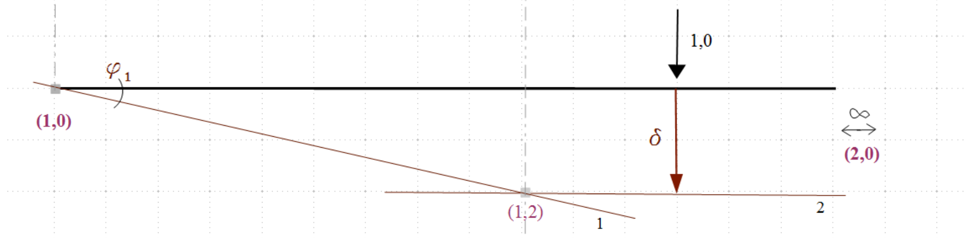
L.w. „N_S”=?



pkt. 1 i pkt. 2

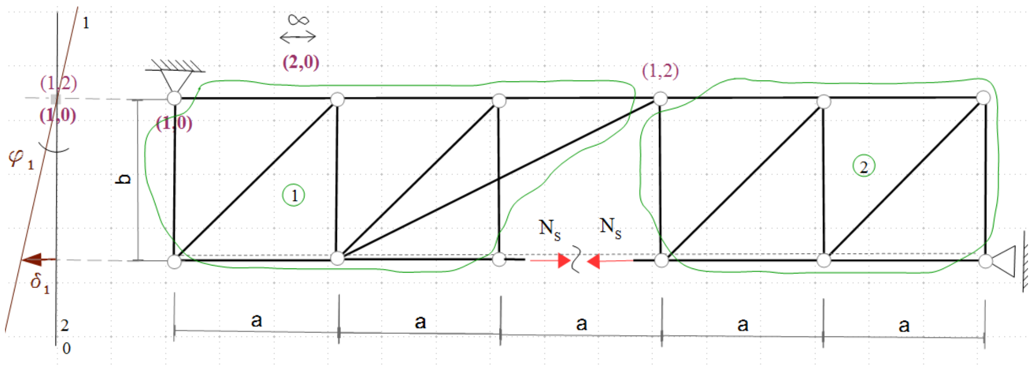


pkt. 3



Zaznaczono siłę $P = 1{,}0$ oraz odpowiadające jej przemieszczenie pionowe.

Składowe poziome przemieszczeń tarcz



pkt. 4

Zaznaczono siłę N_S oraz odpowiadające przemieszczenia poziome.

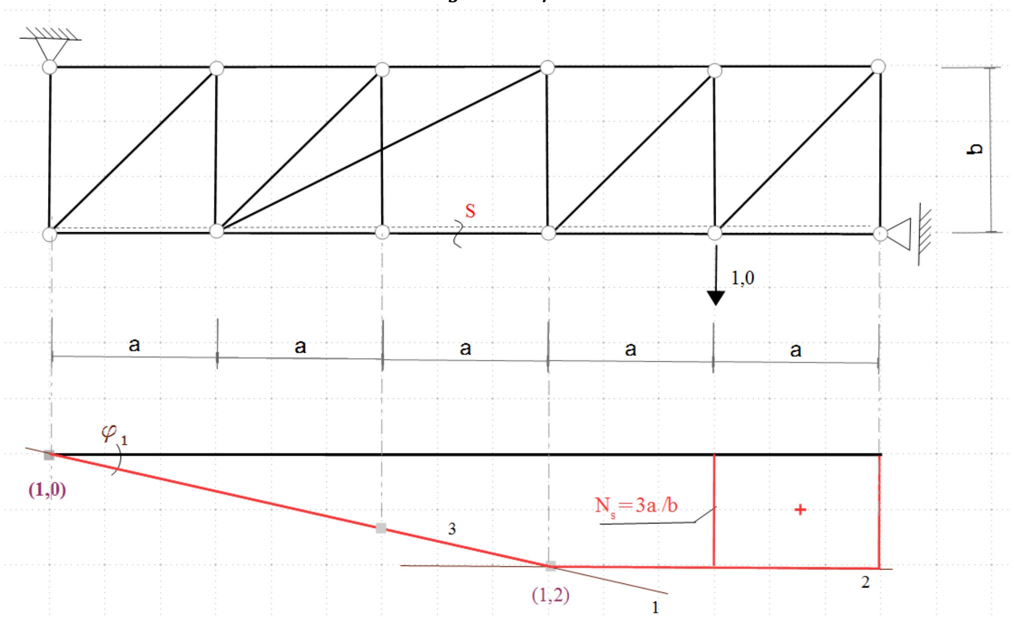
ZPP

Równanie prac: $\mathbf{1 * \delta - N_s * \delta_1 = 0}$

$\delta = 3a * \varphi_1; \quad \delta_1 = b * \varphi_1;$

$$\mathbf{1} * 3a * \varphi_1 - \boldsymbol{N_s} * b * \varphi_1 = \mathbf{0} \quad /: \varphi_1$$
$$\boldsymbol{N_s = 3a/b}$$

L.w. „N_S"



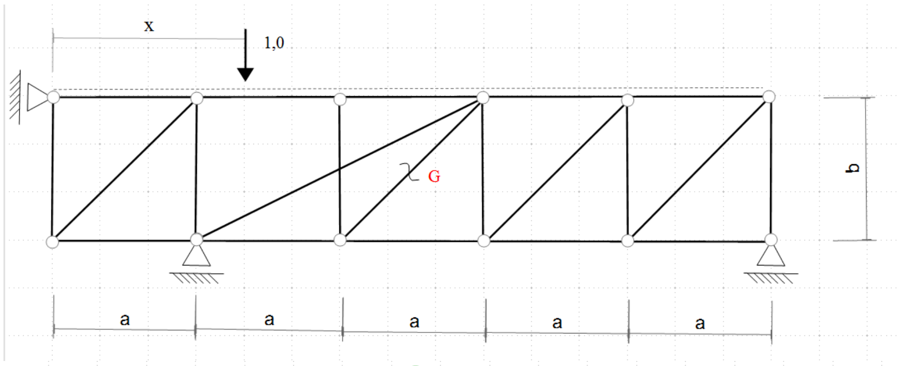
pkt. 5

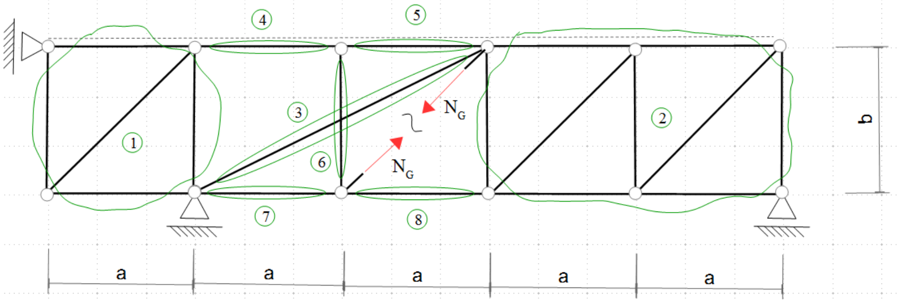
Zaznaczono ostateczny kształt wykresu.

Przykład 6.

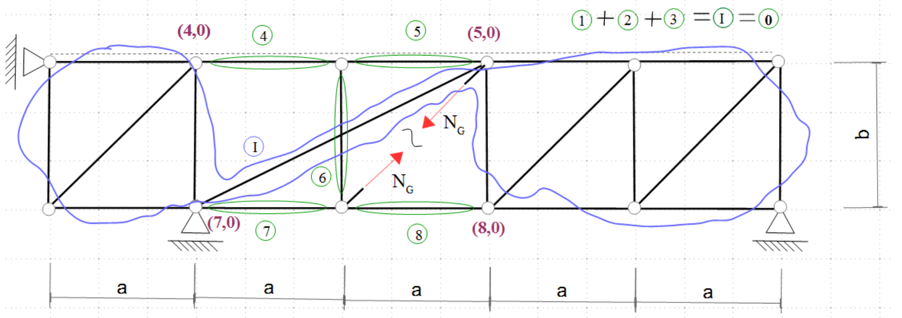
Wyznaczyć sposobem kinematycznym linię wpływu siły osiowej w pręcie G w kratownicy jak na rysunku.

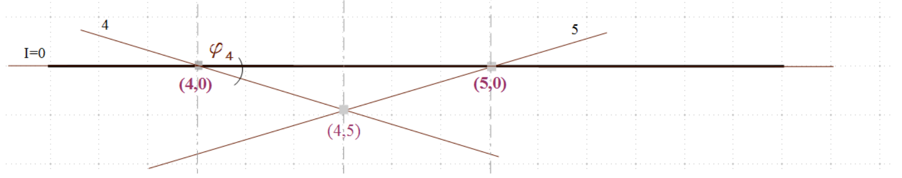
Lw „N_G”=?





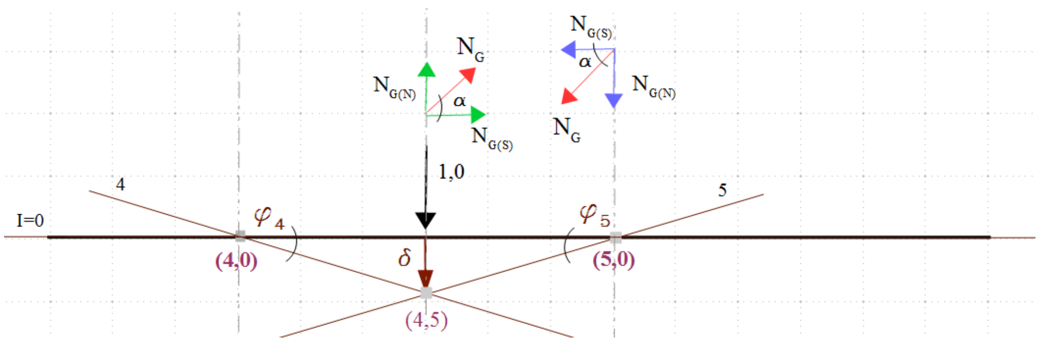
pkt. 1,
pkt. 2





pkt. 3

Wymuszono ruch tarczy „4” obracając ją w prawo o kąt φ_4, następnie zaznaczono przemieszczenia pionowe pozostałych tarcz



pkt. 4

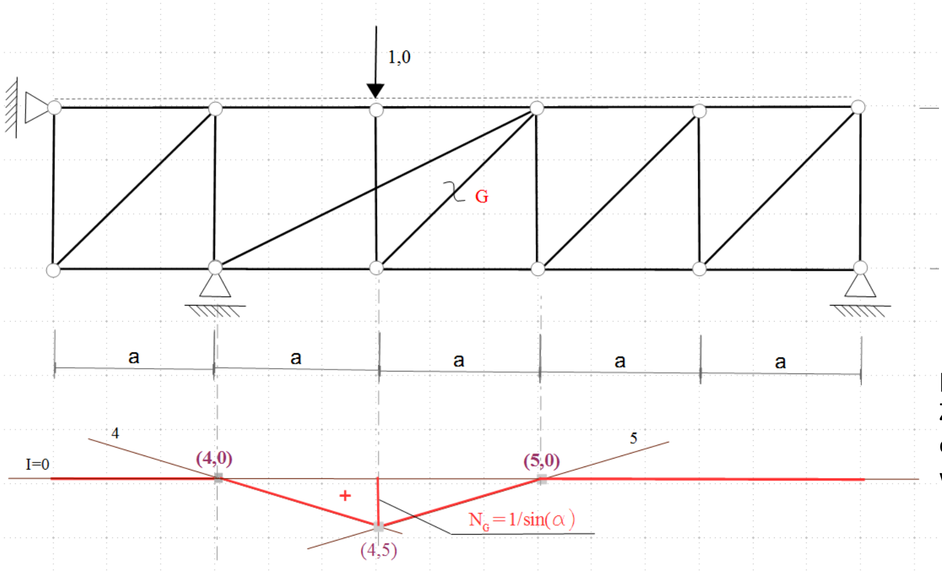
zaznaczono siły pionowe (P= 1,0 i siły $N_{G(N)}$) oraz odpowiadające im przemieszczeniach pionowe.

Siły $N_{G(s)}$ nie wykonują pracy, bo przemieszczenia poziome są zerowe.

ZPP Równanie prac: $\mathbf{1 * \delta - N_{G(N)} * \delta = 0}$

$|N_{G(S)} = N_G \cos(\alpha)\,;\, N_{G(N)} = N_G \sin(\alpha)$

$$\mathbf{1 * \delta} - N_G \sin(\alpha) * \mathbf{\delta = 0} \quad /: \boldsymbol{\delta}$$
$$\boldsymbol{N_G = 1/\sin(\alpha)}$$



L.w. „N_G”

pkt. 5
Zaznaczono ostateczny kształt wykresu.