

Rama płaska przesuwna

Analiza stateczności metodą przemieszczeń

Opracowała: dr inż. Olga Szyłko-Bigus

Przykład opracowała: dr inż. Róża Sieniawska



HR EXCELLENCE IN RESEARCH



Politechnika Wroclawska

TEMAT ZADANIA

Temat oraz pierwszą stronę projektu należy pobrać ze strony:

<http://www.zits.pwr.wroc.pl/holubowski/didactics/download.htm#>

Mechanika budowli - laboratorium:

[Program SDS FRaMe STaBiLiTy 3.1](#)

[Temat zadania 1](#)

[Generator danych do zadania 1](#)

[Wytyczne do zadania 1](#)

[Temat zadania 2](#)

[Generator danych do zadania 2](#)

[Wytyczne do zadania 2](#)

[Temat zadania 3](#)

[Generator danych do zadania 3](#)

[Wytyczne do zadania 3](#)

Program SDS STaBiLiTy 3.1

Temat

Generator danych

Przykład

Mechanika budowli - przykłady:

[Dźwigar załamany w płanie](#)

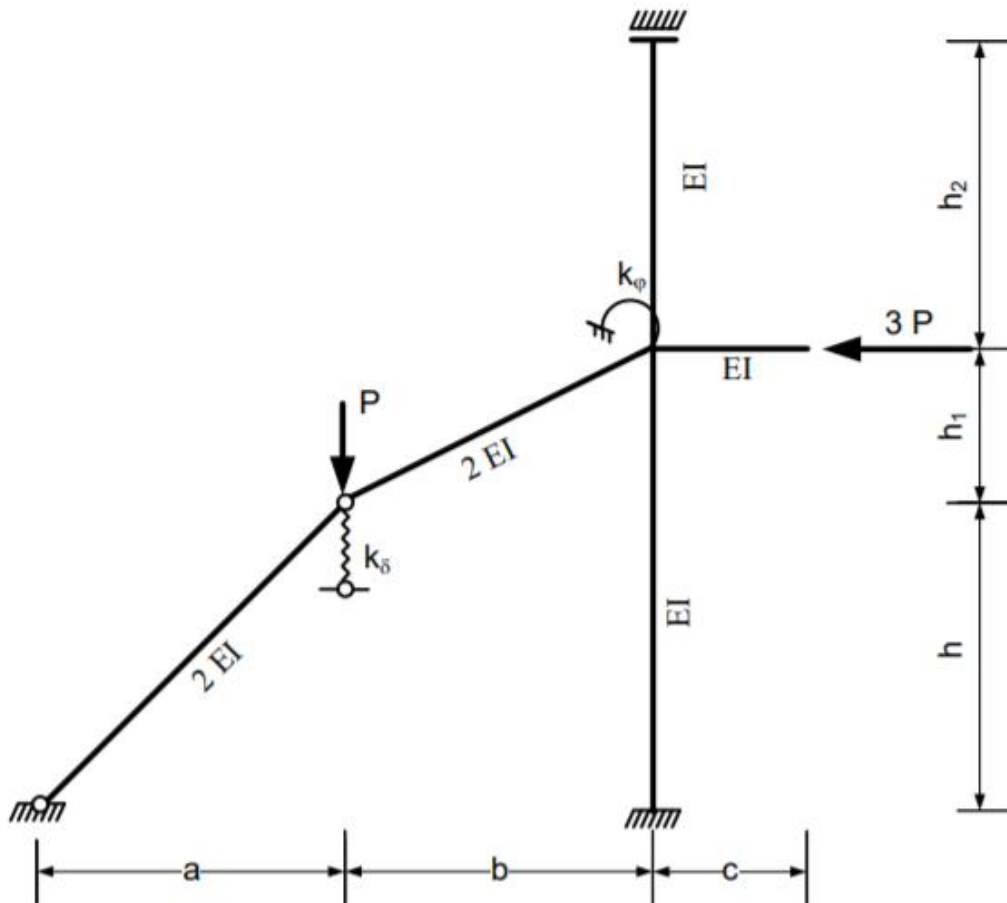
[Rama płaska - stateczność](#)



1. Dane i szukane

Dla ramy geometrycznie niewyznaczalnej o schemacie i obciążeniu jak na rysunku należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Korzystając z programu komputerowego wyznaczyć siły osiowe w prętach.
- Stosując metodę przemieszczeń zbudować równanie stateczności,
- Rozwiązać równanie stateczności, obliczyć mnożnik obciążenia krytycznego i współczynniki długości wybozeniowych prętów ściskanych (skorzystać z programów komputerowych).
- Skomentować uzyskane wyniki.



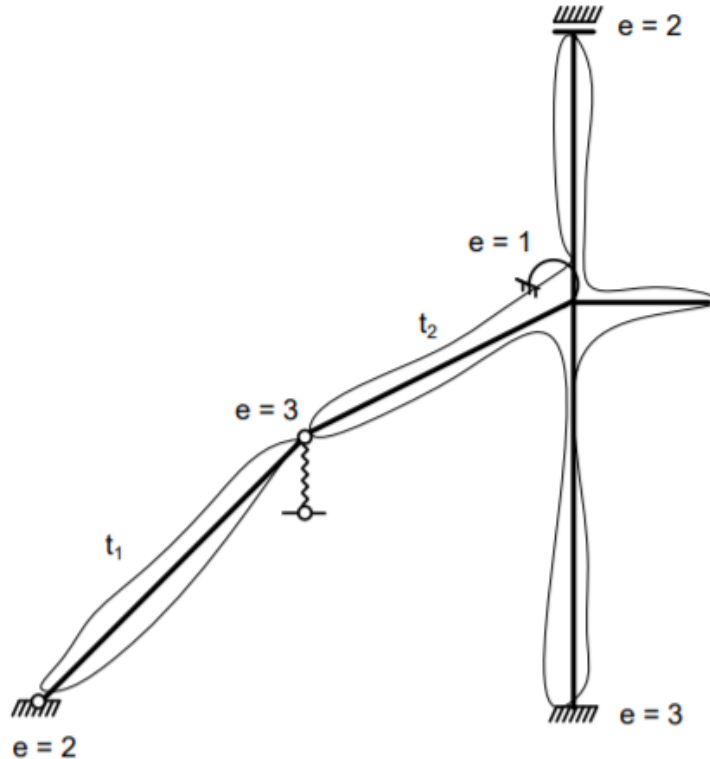
Dane do obliczeń:

$a = b = 2 \text{ m}$, $c = 1 \text{ m}$,
 $h = 2 \text{ m}$, $h_1 = 1 \text{ m}$, $h_2 = 2 \text{ m}$,
 $k_\phi = EI/m$, $k_\Delta = 2EI/m^3$.

Szukane: mnożnik krytyczny obciążenia γ
długości wybozeniowe prętów ściskanych.

2. Sprawdzenie geometrycznej niezmienności układu

Szkic tarcze – więzi



$$t = 2, \quad e = 2 + 3 + 2 + 1 + 3 = 11$$

Warunek ilościowy geometrycznej niezmienności: $e \stackrel{?}{\geq} 3 \cdot t$.

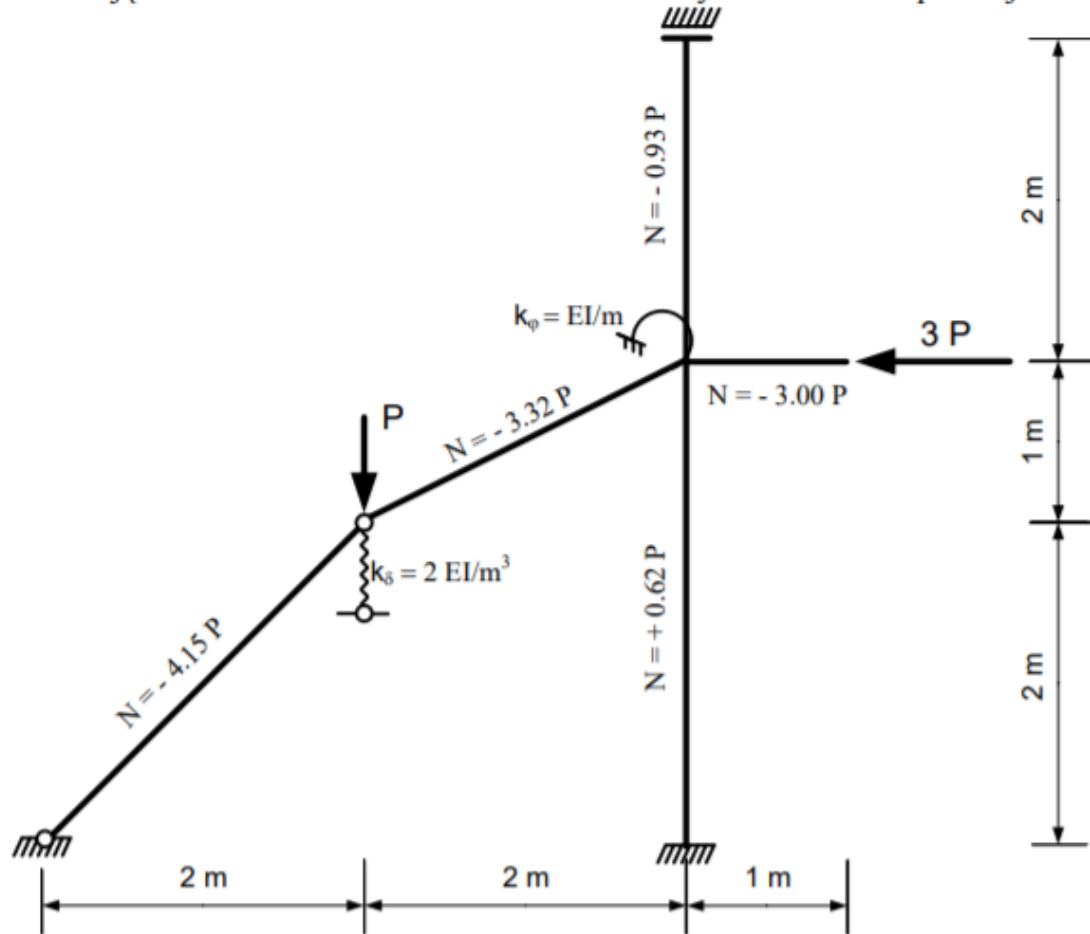
$11 > 6$, warunek spełniony.

Warunek jakościowy:

Układ składa się z 2 tarcz. Tarcza t_2 podparta jest 6 więziami wśród których można wyróżnić 3 niezbieżne, wobec tego $t_2 = t_0$, tarcza t_1 połączona jest z t_2 2 więziami i 2 więziami z t_0 , więc jest nieruchoma, $t_1 = t_0$.

3. Rozwiązanie ramy wg teorii rzędu I. Obliczenie sił osiowych

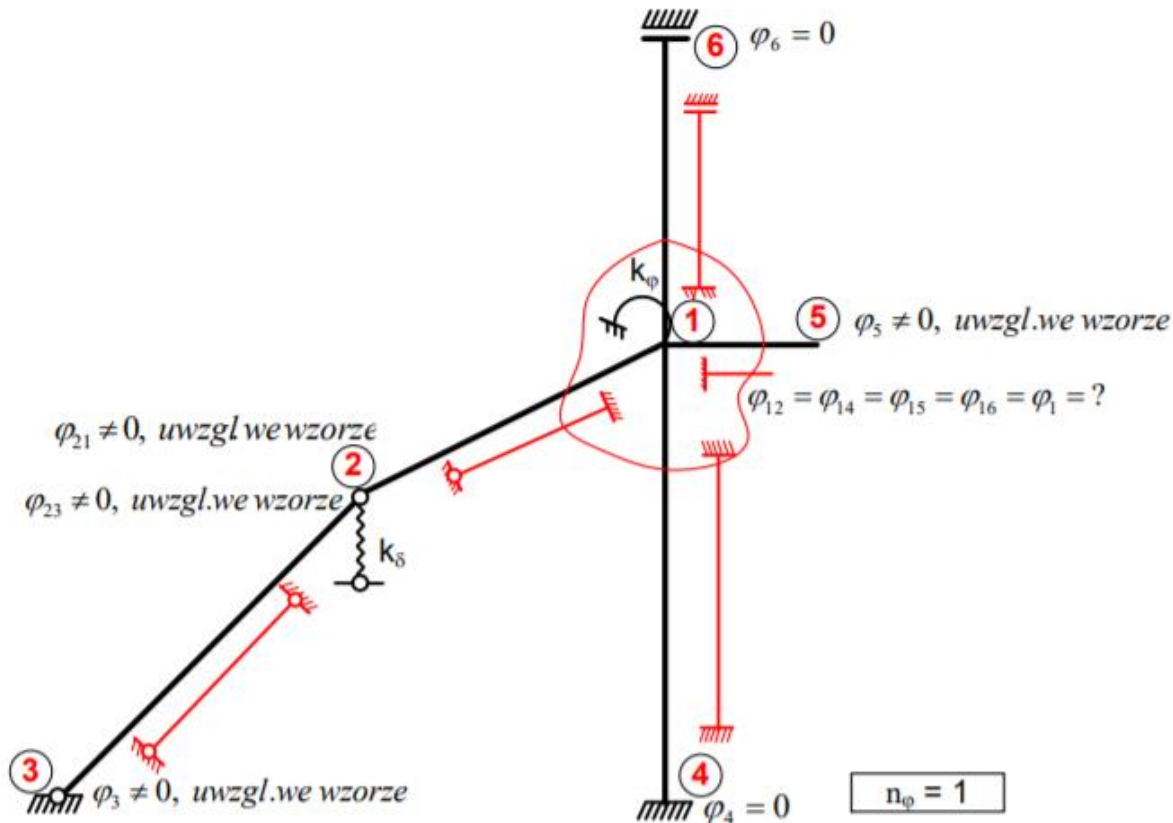
Korzystając z programu komputerowego ROBOT rozwiązano ramę od danego obciążenia, zakładając $P = 1$ kN. Obliczone wartości sił osiowych zestawiono poniżej



4. Obliczenie stopnia geometrycznej (kinematycznej) niewyznaczalności układu

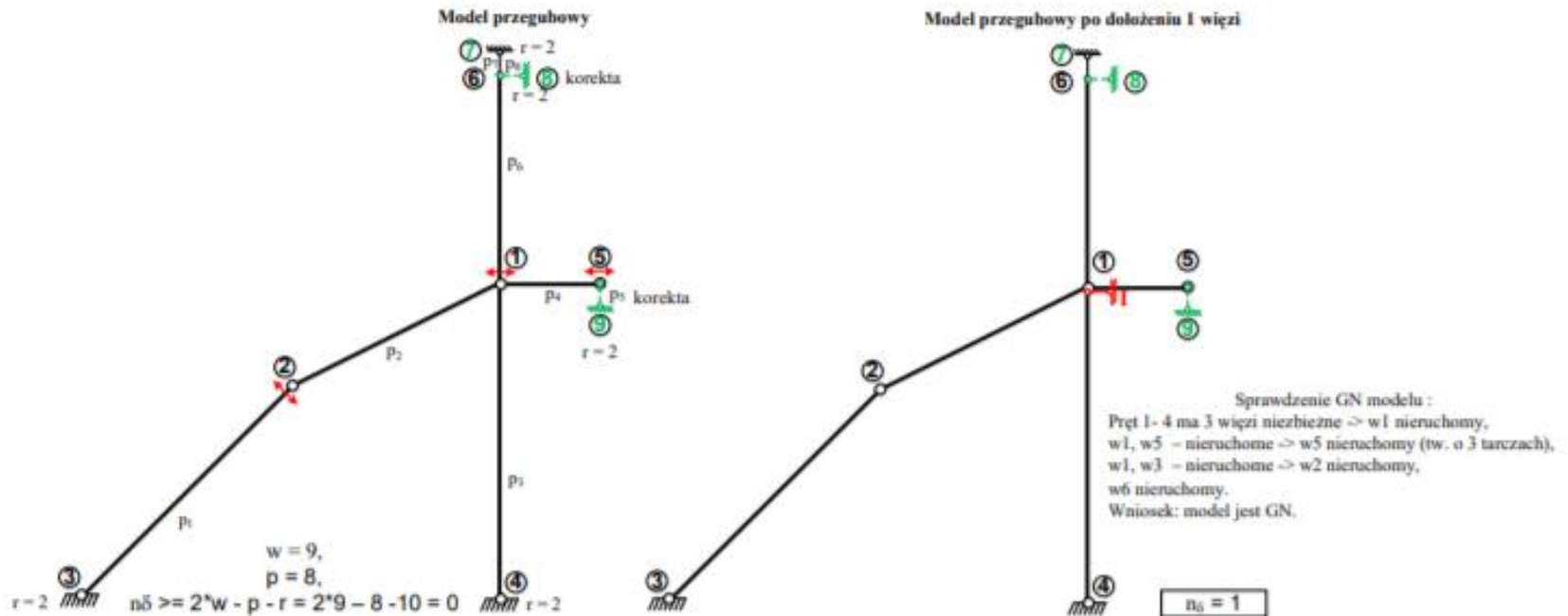
$$n_g = n_\varphi + n_\delta$$

4.1 Podział układu na elementy o znanych wzorach transformacyjnych i obliczenie liczby niezależnych obrotów n_φ



4.2 Zbudowanie modelu przegubowego układu i obliczenie liczby niezależnych przesunięć n_δ

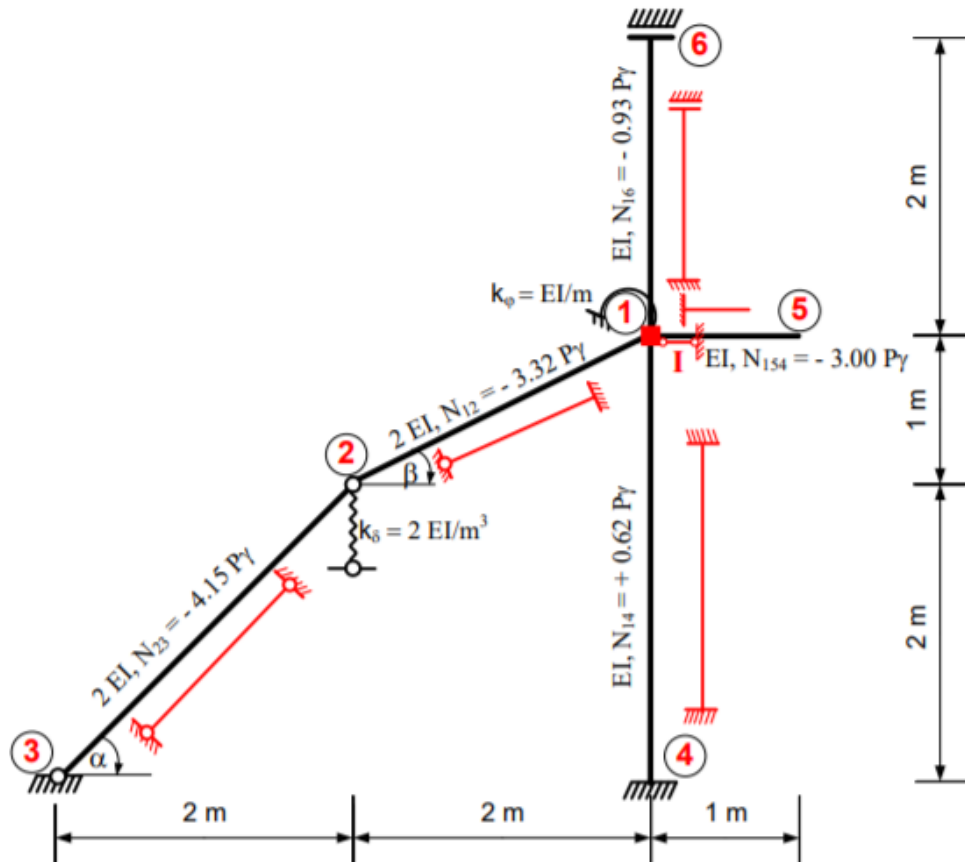
- odrzucamy więzi sprężyste, wszystkie węzły zamieniamy na przegubowe, dodajemy więź, jeśli stosujemy element typu wspornik i/lub sztywno – sztywno-suwny (przesuw prostopadły do osi pręta)



$$n_g = n_\varphi + n_\delta = 1 + 1 = 2$$

5. Przyjęcie układu podstawowego metody przemieszczeń do analizy stateczności (obciążenie siłami osiowymi pomnożonymi przez mnożnik γ)

Układ podstawowy – układ zadany, w którym dodano n_ϕ więzi rotacyjnych i n_s więzi translacyjnych. W układzie tym oznaczymy węzły – początkowe numery dajemy w węzłach z dodanymi więziami rotacyjnymi.



$$L_{12} = \sqrt{5} \text{ m} = 2.236 \text{ m}, \quad L_{23} = 2\sqrt{2} \text{ m} = 2.828 \text{ m},$$

$$\text{tg } \alpha = 1, \quad \text{tg } \beta = 1/2.$$



6. Ogólna postać równania stateczności

$$\det K(\lambda) = 0,$$

gdzie

$$K(\lambda) = \begin{bmatrix} k_{11}(\lambda) & k_{12}(\lambda) \\ k_{21}(\lambda) & k_{22}(\lambda) \end{bmatrix},$$

λ jest parametrem stateczności, $\lambda = \sqrt{\frac{N \cdot \gamma \cdot L^2}{EI}}$,

mnożnik krytyczny obciążenia $\gamma = \frac{\lambda^2 \cdot EI}{N \cdot L^2}$

WZORY TRANSFORMACYJNE DLA PRĘTA PROSTEGO WG TEORII RZĘDU 2-GO

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}) + M_{ij}^o, \quad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot (a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}) + M_{ji}^o,$$

$$V_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ij}^o, \quad V_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}^2} \cdot (-c_{ij} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \varphi_{ji} + d_{ij} \cdot \psi_{ij}) + V_{ji}^o$$

i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$	c_{ij}	c_{ji}	$d_{ij} = d_{ji}$
		$\alpha(\lambda)$	$\alpha(\lambda)$	$\beta(\lambda)$	$\vartheta(\lambda)$	$\vartheta(\lambda)$	$\delta(\lambda)$
		4	4	2	6	6	12
		$\alpha(\bar{\lambda})$	$\alpha(\bar{\lambda})$	$\beta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\vartheta(\bar{\lambda})$	$\delta(\bar{\lambda})$
		$\alpha'(\lambda)$	0	0	$\alpha'(\lambda)$	0	$\delta'(\lambda)$
		3	0	0	3	0	3
		$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	0	$\alpha'(\bar{\lambda})$	0	$\delta'(\bar{\lambda})$
		$\alpha''(\lambda)$	$\alpha''(\lambda)$	$\beta''(\lambda)$	0	0	0
		1	1	-1	0	0	0
		$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\alpha''(\bar{\lambda})$	$\beta''(\bar{\lambda})$	0	0	0
		$\alpha''(\lambda)$	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	0
		$\alpha''(\bar{\lambda})$	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	$-\lambda^2$
		0	0	0	0	0	0
		0	0	0	0	0	λ^2

7. Obliczenie elementów macierzy sztywności wg teorii II rzędu. Szczegółowa postać równania stateczności

7.1 Obliczenie parametrów stateczności elementów i wyrażenie ich poprzez parametr porównawczy

$$\lambda_{12} = 2.236 \text{ m} \sqrt{\frac{3.32P\gamma}{2EI}} = 2.88 \text{ m} \sqrt{\frac{P\gamma}{EI}} = 0.7072 \lambda,$$

$$\lambda_{23} = 2.828 \text{ m} \sqrt{\frac{4.15P\gamma}{2EI}} = 4.074 \text{ m} \sqrt{\frac{P\gamma}{EI}} = \lambda,$$

$$\bar{\lambda}_{14} = 3.0 \text{ m} \sqrt{\frac{0.62P\gamma}{EI}} = 2.362 \text{ m} \sqrt{\frac{P\gamma}{EI}} = 0.580 \bar{\lambda},$$

$$\lambda_{15} = 1.0 \text{ m} \sqrt{\frac{3.0P\gamma}{EI}} = 1.732 \text{ m} \sqrt{\frac{P\gamma}{EI}} = 0.425 \lambda,$$

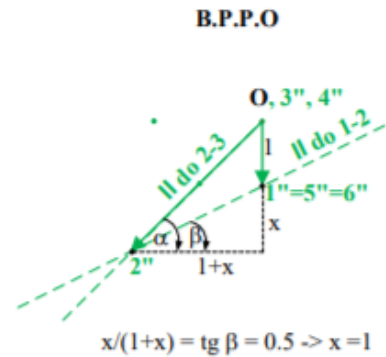
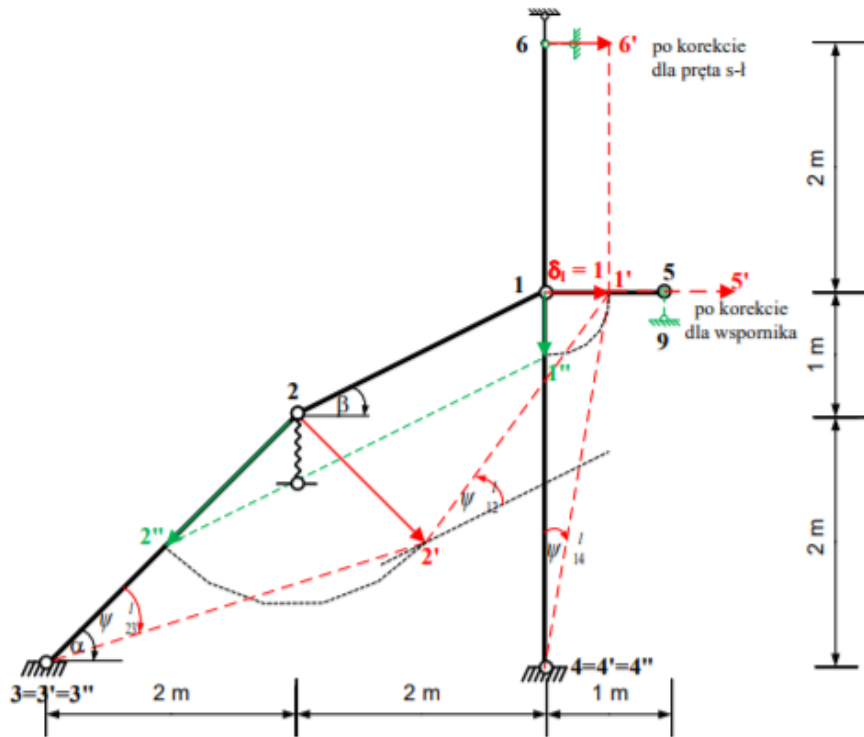
$$\lambda_{16} = 2.0 \text{ m} \sqrt{\frac{0.93P\gamma}{EI}} = 1.929 \text{ m} \sqrt{\frac{P\gamma}{EI}} = 0.473 \lambda.$$

$$\lambda = \sqrt{\frac{|N \cdot \gamma| L^2}{EI}},$$

Uwaga: jako parametr porównawczy przyjmujemy $\max \lambda_{ij}$ spośród prętów ściskanych.

**7.2 Rozwiązanie układu podstawowego od przemieszczenia $\delta_1 = 1$
– plan przesunięć obróconych i biegunowy plan przesunięć obróconych**

Plan przemieszczeń obróconych
i plan przemieszczeń możliwych



Kąty obrotu cięciw: $\psi_{ij}^I = \Delta_{ij}/L_{ij}$,

$$\psi_{12}^I = -\sqrt{5}/\sqrt{5}m = -1/m, \quad \psi_{23}^I = +2\sqrt{2}/2\sqrt{2}m = +1/m,$$

$$\psi_{14}^I = 1/3m = +0.3333/m, \quad \psi_{15}^I = \psi_{16}^I = 0.$$

Wzajemne przemieszczenia końców elementów

$$\Delta_{12} = -\sqrt{5} = -2.236, \quad \Delta_{23} = +2\sqrt{2} = 2.828, \quad \Delta_{14} = +1, \quad \Delta_{15} = \Delta_{16} = 0, \quad \delta_5^I = -2.$$

7.3 Obliczenie współczynników macierzy sztywności $K(\lambda)$

$$\begin{aligned}
 k_{11}(\lambda) &= \sum_j \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} a_{1j}(\lambda) + k_{\phi 1} = \\
 &= \underbrace{\frac{2EI}{2.236 \text{ m}} \cdot \alpha'(\lambda_{12})}_{1-2} + \underbrace{\frac{EI}{3 \text{ m}} \cdot \bar{\alpha}(\bar{\lambda}_{14})}_{1-4} + \underbrace{\frac{EI}{1 \text{ m}} \cdot \alpha'''(\lambda_{15})}_{1-5} + \underbrace{\frac{EI}{2 \text{ m}} \cdot \alpha''(\lambda_{16})}_{1-6} + \underbrace{\frac{EI}{\text{m}}}_{k_{\phi}} = \\
 &= \underbrace{0.8944 \frac{EI}{\text{m}} \cdot \alpha'(0.707\lambda)}_{1-2} + \underbrace{0.3333 \frac{EI}{\text{m}} \cdot \bar{\alpha}(0.58\bar{\lambda})}_{1-4} + \underbrace{\frac{EI}{\text{m}} \cdot \alpha'''(0.425\lambda)}_{1-5} + \underbrace{0.5 \frac{EI}{\text{m}} \cdot \alpha''(0.473\lambda)}_{1-6} + \underbrace{\frac{EI}{\text{m}}}_{k_{\phi}},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{11}(\lambda) &= -\sum_j \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} c_{1j} \cdot \psi'_{1j} = \\
 &= -\underbrace{\frac{2EI}{2.236 \text{ m}} \cdot \alpha'(\lambda_{12}) \cdot \left(\frac{-1}{\text{m}}\right)}_{1-2} - \underbrace{\frac{EI}{3 \text{ m}} \cdot \bar{\varrho}(\bar{\lambda}_{14}) \cdot \frac{0.3333}{\text{m}}}_{1-4} = \underbrace{0.8944 \frac{EI}{\text{m}^2} \cdot \alpha'(0.707\lambda)}_{1-2} - \underbrace{0.1111 \frac{EI}{\text{m}^2} \cdot \bar{\varrho}(0.58\bar{\lambda})}_{1-4},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 k_{11}(\lambda) &= \sum_{i,j} \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} d_{ij} \cdot \psi'_{ij} \cdot \psi'_{ij} + \sum_n k_{\delta n} \cdot \delta'_n \cdot \delta'_n = \\
 &= \underbrace{\frac{2EI}{2.236 \text{ m}} \cdot \delta'(\lambda_{12}) \cdot \left(\frac{-1}{\text{m}}\right) \cdot \left(\frac{-1}{\text{m}}\right)}_{1-2} + \underbrace{\frac{EI}{3 \text{ m}} \cdot \bar{\delta}(\bar{\lambda}_{14}) \cdot \frac{0.3333}{\text{m}} \cdot \frac{0.3333}{\text{m}}}_{1-4} + \underbrace{\frac{2EI}{2.828 \text{ m}} \cdot (-\lambda_{23}^2) \cdot \left(\frac{1}{\text{m}}\right) \cdot \left(\frac{1}{\text{m}}\right)}_{2-3} + \underbrace{\frac{2EI}{\text{m}^3} \cdot (-2) \cdot (-2)}_{k_{\delta}} = \\
 &= \underbrace{0.8944 \frac{EI}{\text{m}^3} \delta'(0.707\lambda)}_{1-2} + \underbrace{0.03704 \frac{EI}{\text{m}^3} \bar{\delta}(0.58\bar{\lambda})}_{1-4} - \underbrace{0.707 \frac{EI}{\text{m}^3} \lambda^2}_{2-3} + \underbrace{8 \frac{EI}{\text{m}^3}}_{k_{\delta}},
 \end{aligned}$$

$$k_{11} = k_{11}$$

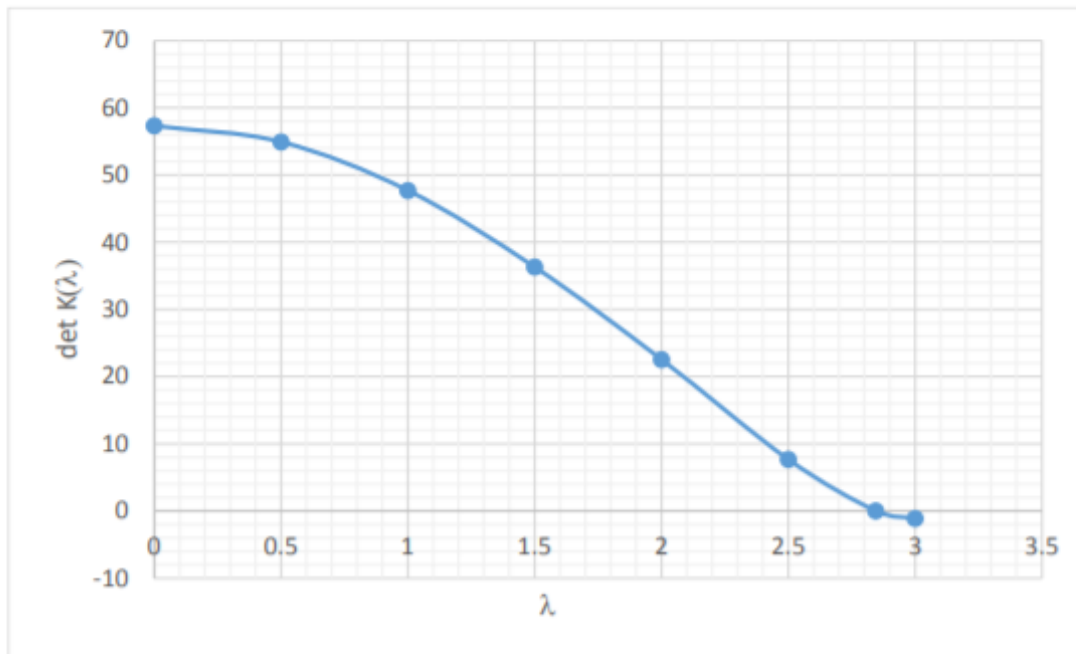
7.4 Szczegółowa postać równania stateczności i jego rozwiązanie

$$\begin{aligned}
 \det \begin{bmatrix} k_{11}(\lambda) & k_{12}(\lambda) \\ k_{21}(\lambda) & k_{22}(\lambda) \end{bmatrix} &= k_{11}(\lambda) \cdot k_{22}(\lambda) - k_{12}(\lambda) \cdot k_{21}(\lambda) = \\
 &= \left\{ 0.8944 \frac{EI}{m} \cdot \alpha'(0.707\lambda) + 0.3333 \frac{EI}{m} \cdot \bar{\alpha}(0.58\bar{\lambda}) + \frac{EI}{m} \cdot \alpha'''(0.425\lambda) + 0.5 \frac{EI}{m} \cdot \alpha''(0.473\lambda) + \frac{EI}{m} \right\} \cdot \\
 &\cdot \left\{ 0.8944 \frac{EI}{m^3} \delta'(0.707\lambda) + 0.03704 \frac{EI}{m^3} \bar{\delta}(0.58\bar{\lambda}) - 0.707 \frac{EI}{m^3} \lambda^2 + 8 \frac{EI}{m^3} \right\} + \\
 &- \left\{ 0.8944 \frac{EI}{m^2} \cdot \alpha'(0.707\lambda) - 0.1111 \frac{EI}{m^2} \cdot \bar{\vartheta}(0.58\bar{\lambda}) \right\}^2 = 0
 \end{aligned}$$

7.4 Szczegółowa postać równania stateczności i jego rozwiązanie

Równanie stateczności ma wiele rozwiązań. Interesuje nas najmniejsza wartość parametru stateczności i odpowiadający jej krytyczny mnożnik obciążenia oraz współczynniki długości wyboczeniowych prętów ściskanych. Rozwiązanie można uzyskać drogą kolejnych przybliżeń: podstawiając odpowiednie wartości funkcji dla różnych wartości parametru λ i obliczanie wartości wyznacznika. Obliczenia wykonano w Excelu.

λ	det K(λ)
0	57.32
0.00001	57.32
0.5	54.92559
1	47.7029
1.5	36.31
2	22.55
2.5	7.675
2.84595	-0.00041
3	-1.109



Mnożnik obciążenia krytycznego ($P = 1$ kN) wynosi

$$\gamma = \frac{\lambda^2 \cdot EI}{N \cdot L^2} = \frac{2.846 \cdot 2.846 \cdot 2EI}{4.1489 \text{ kN} \cdot 2.828 \text{ m} \cdot 2.828 \text{ m}} = 0.4882 \frac{EI}{\text{kN} \cdot \text{m}^2}.$$

7.4 Szczegółowa postać równania stateczności i jego rozwiązanie

W programie ROBOT wybierając jako typ analizy „Wyboczenie” i min 2 siły krytyczne po wykonaniu obliczeń odczytamy wartości sił krytycznych (przy obliczeniach dla danych ogólnych minimalna siła krytyczna jest równa krytycznemu mnożnikowi obciążenia). Uwaga: wartość zależy od liczby elementów dlatego każdy pręt należy podzielić na min 10 elementów.

W rozpatrywanym przykładzie otrzymano

$$\gamma = 0.48806 \frac{EI}{\text{kN} \cdot \text{m}^2}, \quad \text{odpowiadający parametr stateczności wynosi } 2.8456$$

Obliczenie współczynników długości wyboczeniowych prętów ściskanych

$$\mu_{ij} = \frac{\pi}{\lambda_{ij}}$$

pręt	$\lambda_{ij,kr}$	$\mu_{ij} = \pi / \lambda_{ij,kr}$		$\mu_{ij,lok}$
12	2,01163	1,561717704	>	0,7
23	2,84595	1,103881886	>	1
14	1,64958	0 (pręt. rozciągany)		
15	1,21002	2,596321435	>	2
16	1,34691	2,332443444	>	1

Wszystkie obliczone współczynniki długości wyboczeniowych są większe niż lokalne współczynniki długości wyboczeniowych prętów, więc o nośności układu decyduje utrata stateczności w bazie globalnej.