

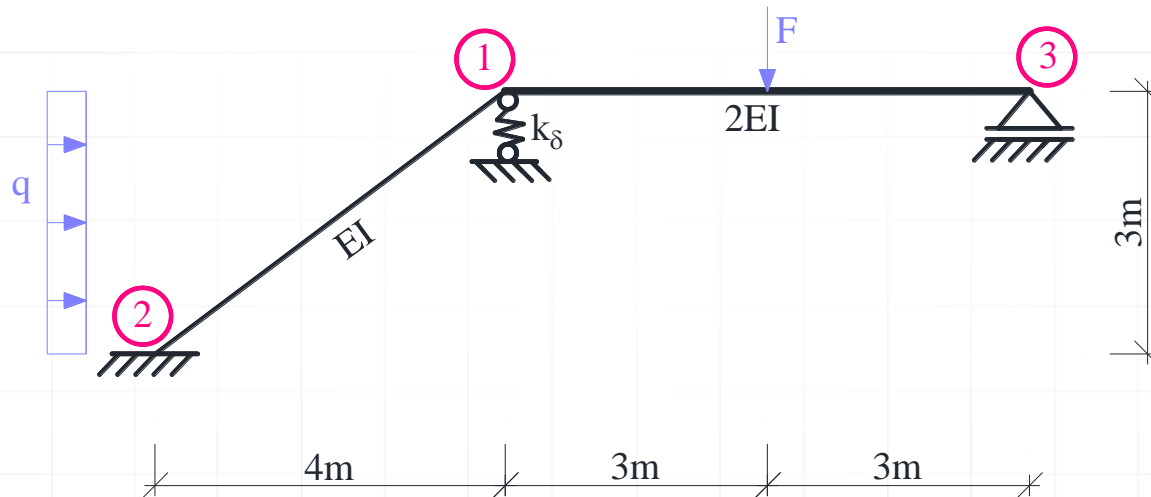
METODA PRZEMIESZCZEŃ

METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku. Należy:

- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia mechanicznego (obliczyć siły) przekrojowe i sporządzić ich wykresy.

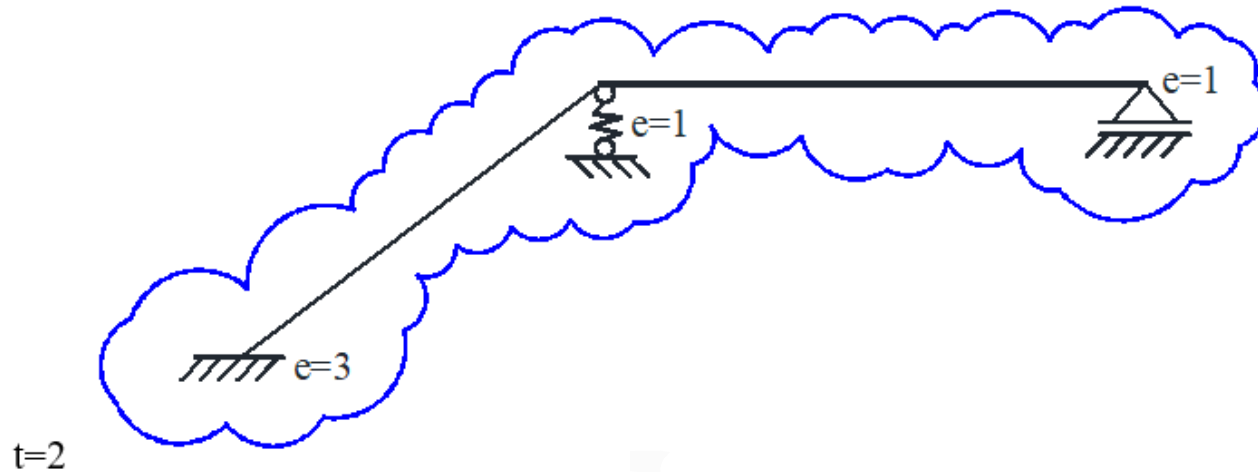
Dane do obliczeń: $F = 12 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$; $k_{\delta} = 10EI/m^3$,



Rys. 1. Schemat statyczny

SPRAWDZENIE GEOMETRYCZNEJ NIEZMIENNOŚCI UKŁADU I OBLICZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

Stopień statycznej niewyznaczalności



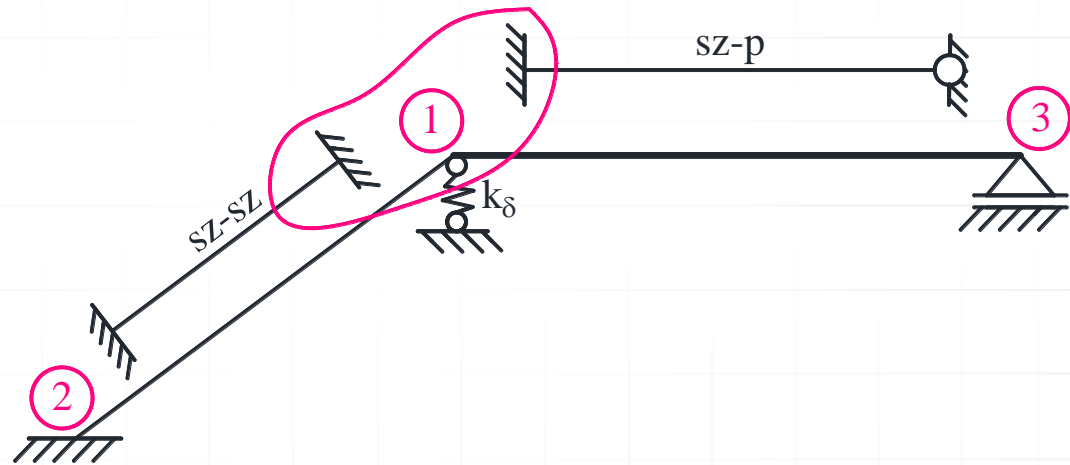
Rys. 2. Tarcze i więzi

$$t = 1, e = 5, \quad n_h = 5 - 3 \cdot 1 = 2$$

Układ składa się z jednej tarczy połączonej z ostoją pięcioma więziami, wśród których można wyróżnić co najmniej 3 niezbieżne. Cała rama wraz z ostoją tworzy układ geometrycznie niezmienny

PODZIAŁ UKŁADU NA ELEMENTY, DLA KTÓRYCH DANE SĄ WZORY TRANSFORMACYJNE I WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY OBROTU WĘZŁÓW

i	j

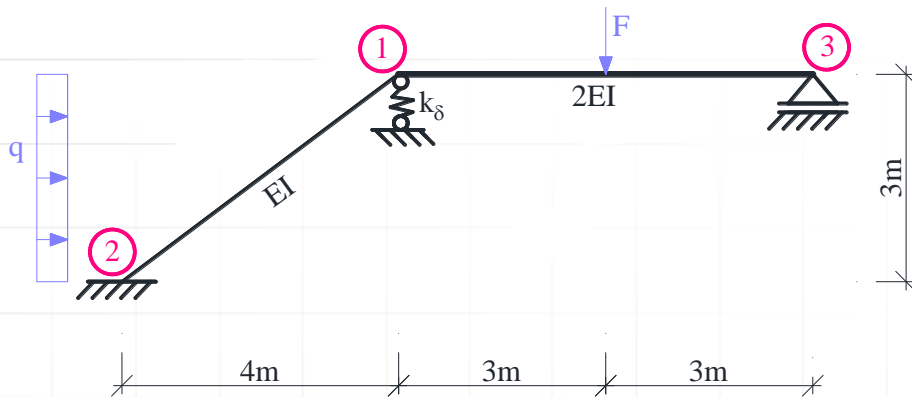


Rys. 3. Numeracja węzłów i typy prętów

WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

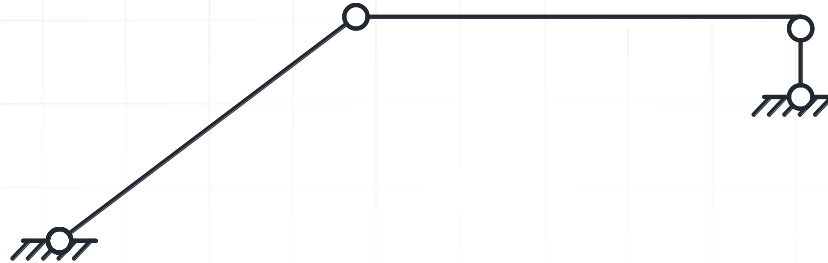
Do wyznaczenia liczby stopni swobody przesuwu węzłów budowany jest model przegubowy. Należy:

- zwolnić więzi przenoszące momenty
- pominąć więzi sprężyste
- należy odebrać stopnie swobody przesuwu prętom typu wspornik, oraz prętom o lewym końcu utwierdzonym, a prawym utwierdzonym z przesuwem poprzecznym (należy dodać więź oznaczoną linią przerywaną)



Rys. 4. Model przegubowy

WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW



Rys. 4. Model przegubowy

Oszacowanie liczby stopni swobody przesuwności węzłów

$$n_s \geq 2 \cdot w - p - r = 2 \cdot 4 - 3 - 4 = 1$$

gdzie: $w = 4$ - liczba węzłów modelu,

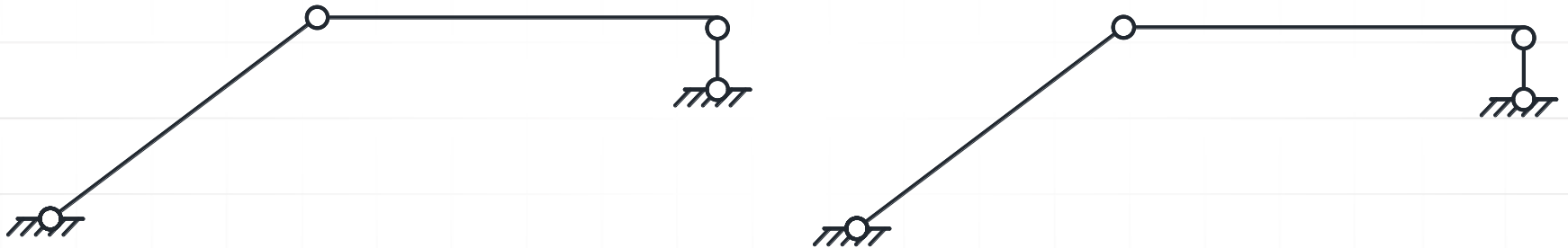
$p = 3$ - liczba prętów w modelu,

$r = 4$ - liczba więzi podporowych modelu.

Oznacza to, że aby układ o węzłach przegubowych był geometrycznie niezmienny należy dodać co najmniej jedną więź.

WYZNACZENIE LICZBY STOPNI SWOBODY PRZESUWU WĘZŁÓW

Dopiero analiza kinematyczna potwierdza, że model przegubowy po dodaniu więzi jest geometrycznie niezmienny, tak więc stopień swobody przesuwności węzłów $n_\delta =$

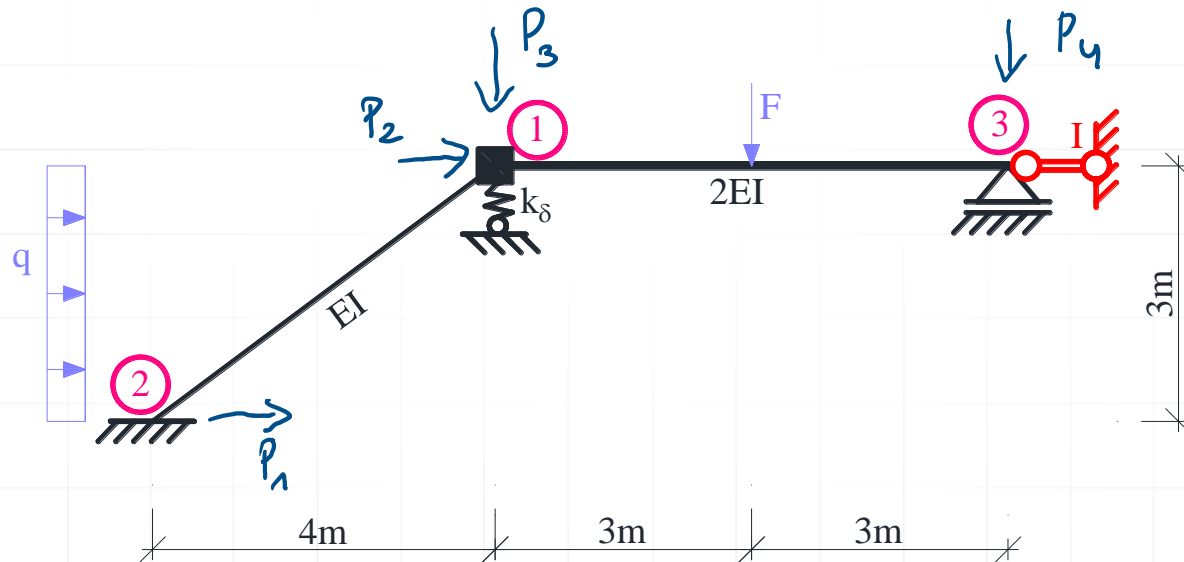


Rys. 5. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

UKŁAD PODSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez dodanie n_φ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych (w tym przykładzie 2 więzi rotacyjne i 2 więzi translacyjne). Układ podstawowy metody przemieszczeń, pokazany na rysunku jest geometrycznie wyznaczalny.

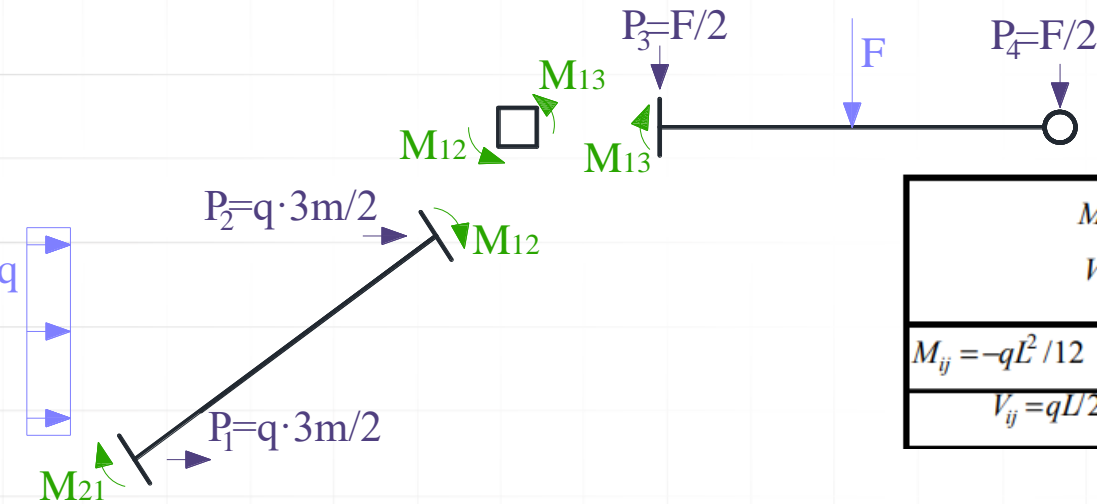
$$n_g = n_\varphi + n_\delta = 1 + 1 = 2$$



Rys. 6. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia danego

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \delta_1 = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla przyjętych elementów wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



M_{ij} V_{ij}	M_{ij} V_{ij}	M_{ji} V_{ji}
$M_{ij} = -qL^2/12$ $V_{ij} = qL/2$	q	$M_{ji} = qL^2/12$ $V_{ji} = -qL/2$

$$M_{12}^0 = \frac{qL^2}{12} = \frac{4\text{ kN/m} \cdot (3\text{ m})^2}{12} = 3\text{ kN} \cdot \text{m},$$

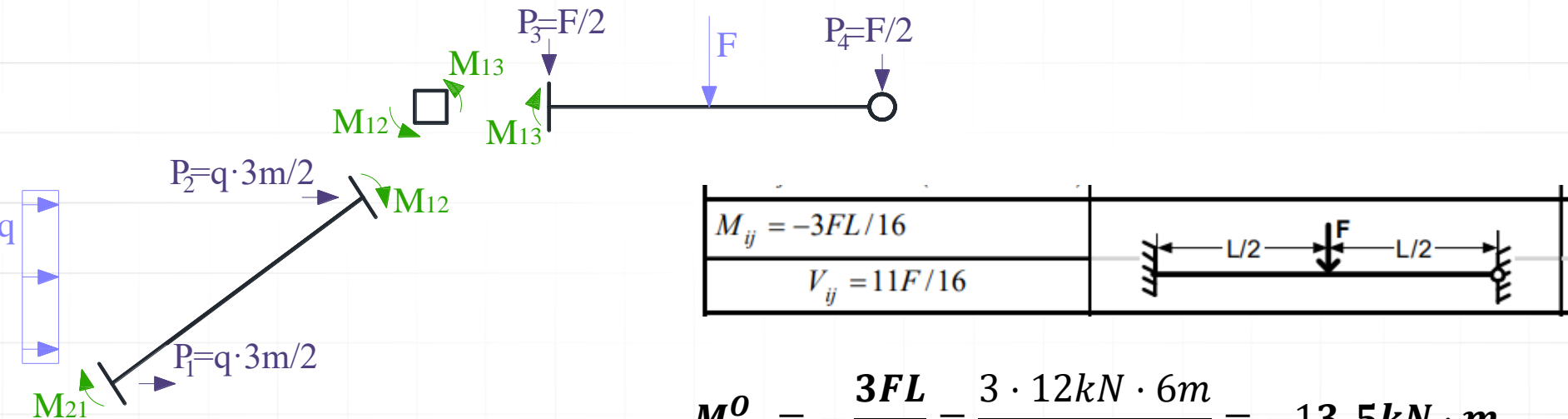
$$M_{21}^0 = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{4\text{ kN/m} \cdot (3\text{ m})^2}{12} = -3\text{ kN} \cdot \text{m},$$

Rys. 7.

Dane do obliczeń: $F = 12\text{ kN}$; $q = 4\text{ kN/m}$;

Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia danego

Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_1 = \delta_1 = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla przyjętych elementów wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.



$$M_{13}^0 = -\frac{3FL}{16} = \frac{3 \cdot 12\text{kN} \cdot 6\text{m}}{16} = -13,5\text{kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{31}^0 = 0.$$

Rys. 7.

Dane do obliczeń: $F = 12 \text{ kN}$; $q = 4 \text{ kN/m}$;

Rozwiązanie układu podstawowego od obciążenia danego

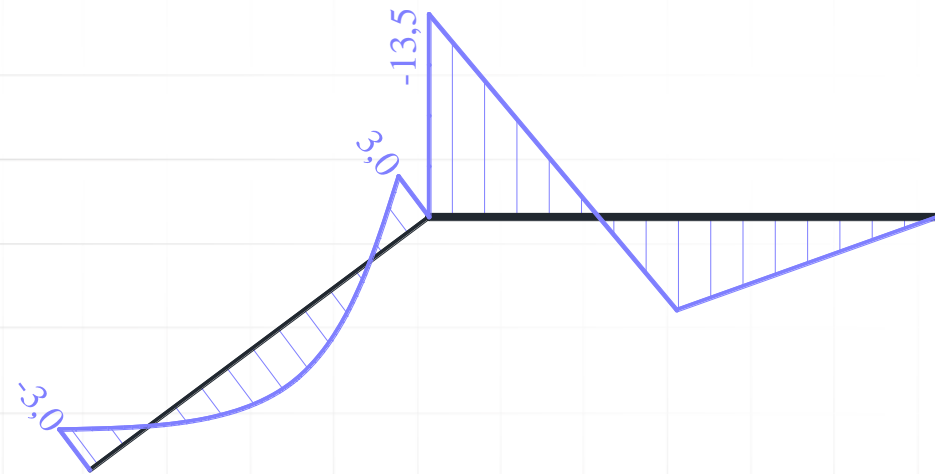
Należy pamiętać, że poszczególne stany obciążeń rozpatrywane są rozłącznie, to jest, że stanowi obciążeń danych towarzyszy $\varphi_I = \delta_I = 0$, co oznacza, że do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_{ij} = \varphi_{ji} = \psi_{ji} = 0$. Dla przyjętych elementów wzory na momenty węzłowe odczytujemy z tablic, pamiętając, że dla przyjętych elementów momenty prawoskrętne są dodatnie.

$$M_{12}^O = \frac{qL^2}{12} = \frac{4\text{kN/m} \cdot (3\text{m})^2}{12} = 3\text{kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{21}^O = -\frac{qL^2}{12} = -\frac{4\text{kN/m} \cdot (3\text{m})^2}{12} = -3\text{kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{13}^O = -\frac{3FL}{16} = \frac{3 \cdot 12\text{kN} \cdot 6\text{m}}{16} = -13,5\text{kN} \cdot \text{m},$$

$$M_{31}^O = 0.$$



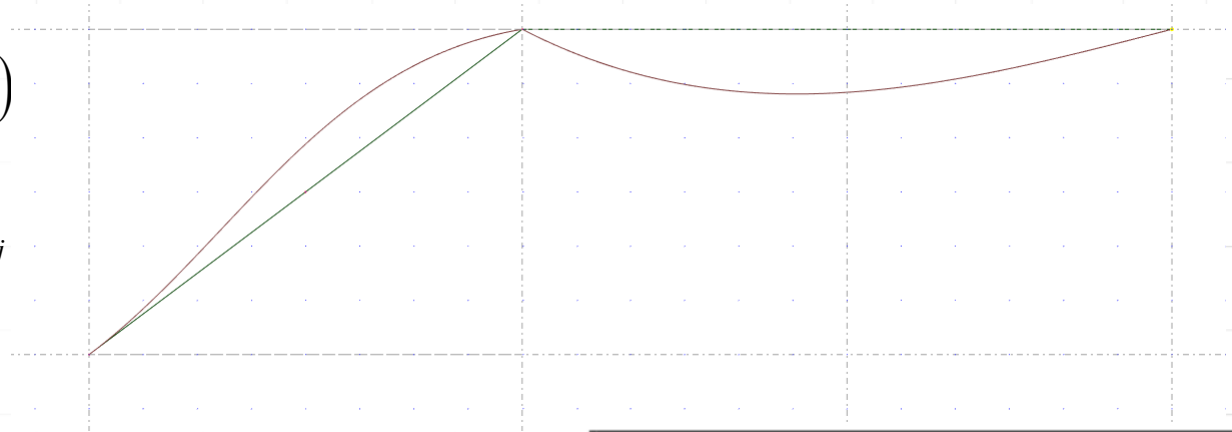
Rys. 8. Wykres momentów M^O w $\text{kN} \cdot \text{m}$

Rozwiązanie układu podstawowego od pierwszego stanu rotacyjnego

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_1 = \varphi_{1j} = 1$, $\delta_1 = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{1j}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{1j} \cdot \varphi_{1j} + b_{1j} \cdot \varphi_{j1})$$

$$M_{j1}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{j1} \cdot \varphi_{j1} + b_{j1} \cdot \varphi_{1j})$$



$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21})$$

$$M_{21}^1 = \frac{EI_{21}}{L_{21}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12})$$

$$M_{13}^1 = \frac{EI_{13}}{L_{13}} (a_{13} \cdot \varphi_{13} + b_{13} \cdot \varphi_{31})$$

$$M_{31}^1 = \frac{EI_{13}}{L_{13}} (a_{31} \cdot \varphi_{31} + b_{31} \cdot \varphi_{13})$$

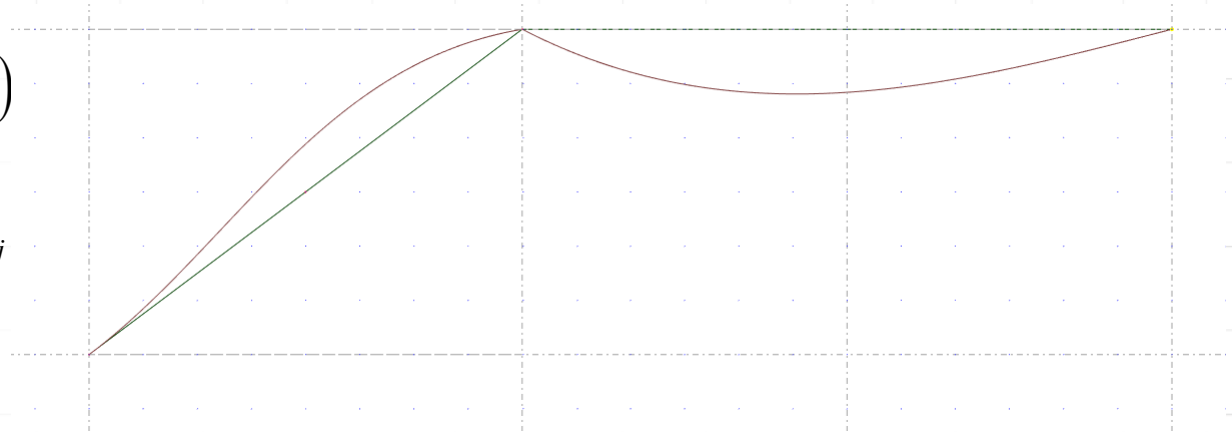
i	j	a_{ij}	a_{ji}	$b_{ij} = b_{ji}$
		4	4	2
		3	0	0
		1	1	-1
		0	0	0
		0	0	0

Rozwiązanie układu podstawowego od pierwszego stanu rotacyjnego

W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_1 = \varphi_{1j} = 1$, $\delta_1 = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{1j}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{1j} \cdot \varphi_{1j} + b_{1j} \cdot \varphi_{j1})$$

$$M_{j1}^1 = \frac{EI_{1j}}{L_{1j}} (a_{j1} \cdot \varphi_{j1} + b_{j1} \cdot \varphi_{1j})$$



$$M_{12}^1 = \frac{EI_{12}}{L_{12}} (a_{12} \cdot \varphi_{12} + b_{12} \cdot \varphi_{21}) = \frac{EI}{5m} (4 \cdot 1 + 2 \cdot 0) = \frac{4EI}{5m},$$

$$M_{21}^1 = \frac{EI_{21}}{L_{21}} (a_{21} \cdot \varphi_{21} + b_{21} \cdot \varphi_{12}) = \frac{EI}{5m} (4 \cdot 0 + 2 \cdot 1) = \frac{2EI}{5m},$$

$$M_{13}^1 = \frac{EI_{13}}{L_{13}} (a_{13} \cdot \varphi_{13} + b_{13} \cdot \varphi_{31}) = \frac{2EI}{6m} (3 \cdot 1 + 3 \cdot \varphi_{31}) = 1 \frac{EI}{m},$$

$$M_{31}^1 = \frac{EI_{13}}{L_{13}} (a_{31} \cdot \varphi_{31} + b_{31} \cdot \varphi_{13}) = \frac{2EI}{6m} (0 \cdot \varphi_{31} + 0 \cdot 1) = 0.$$

Rozwiązanie układu podstawowego od pierwszego stanu rotacyjnego

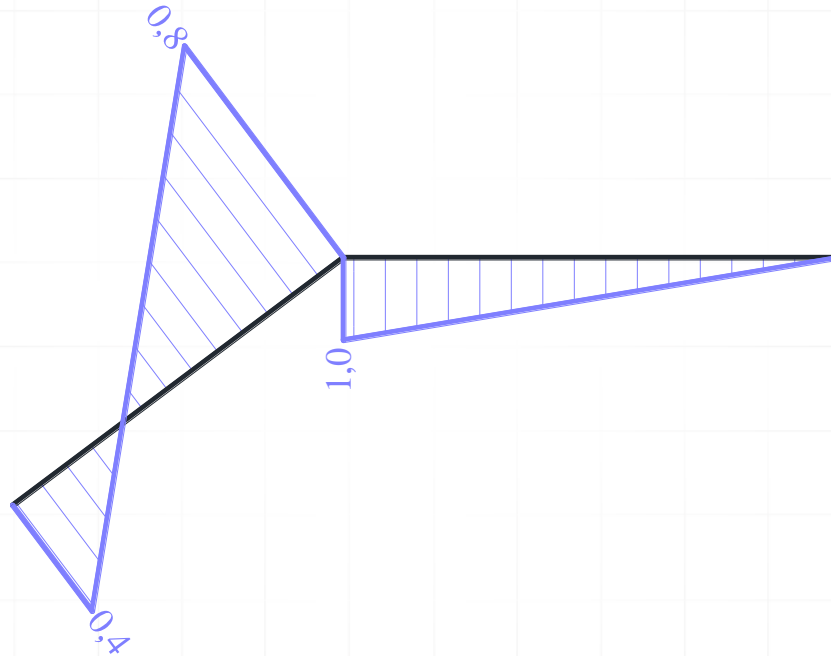
W tym stanie obciążenia do wzorów transformacyjnych podstawiamy $\varphi_I = \varphi_{Ij} = 1$, $\delta_I = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{12}^1 = \frac{4EI}{5m},$$

$$M_{21}^1 = \frac{2EI}{5m},$$

$$M_{13}^1 = 1 \frac{EI}{m},$$

$$M_{31}^1 = 0.$$



Rys. 9. Wykres momentów M^1 w EI/m

Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_1 = 0$, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_1 = 1$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I, \quad M_{ji}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \psi_{ij}^I.$$



W celu wyznaczenia szukanych kątów obrotu cięciw prętów rozpatrywany jest przegubowy model układu z dodanymi więzami translacyjnymi oraz wymuszane jest przesunięcie o wartości 1 w miejscu i na kierunku dodanej więzi I. Aby wyznaczyć szukane przemieszczenia oraz kąty obrotu cięciw prętów sporządzany jest biegunowy plan przesunięć obróconych.

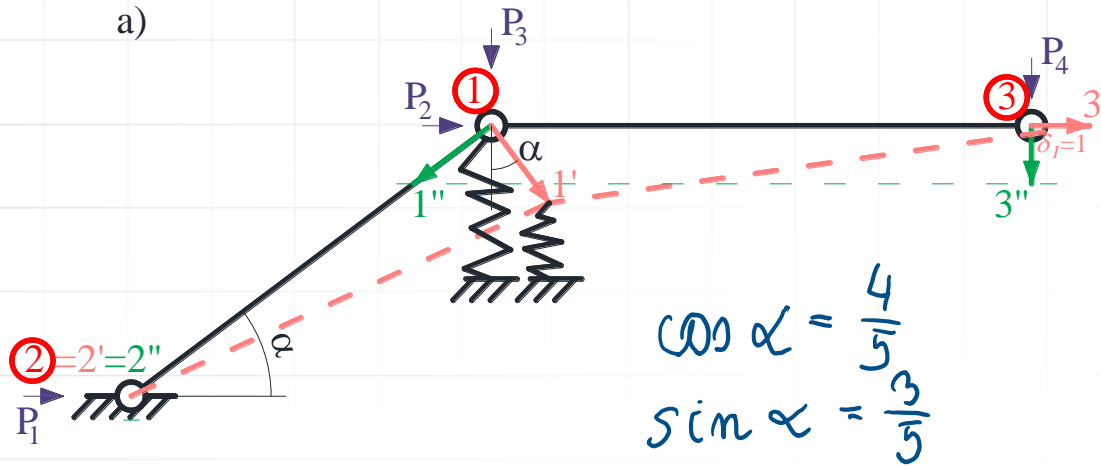
Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_1 = 0$, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_1 = 1$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:



Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego

a)



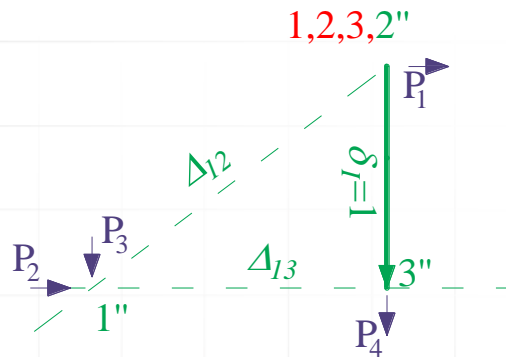
Wartości wzajemnych przesunięć

końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{12}^I = |1''2''| = \frac{5}{3}$$

$$\Delta_{13}^I = |1''3''| = -\frac{4}{3}$$

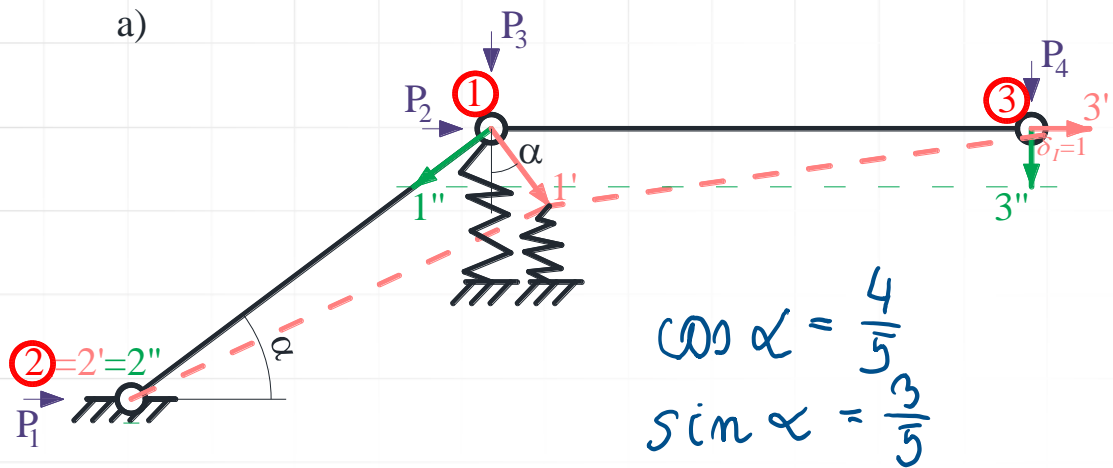
b)



Rys. 10. a) plan przesunięć i plan przesunięć obróconych

b) biegunowy plan przesunięć obróconych

Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego



Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{12}^I = |1''2''| = \frac{5}{3},$$

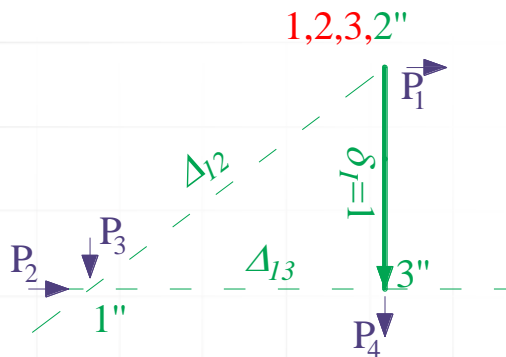
$$\Delta_{13}^I = |1''3''| = -\frac{4}{3}.$$

Kąty obrotów cięwi wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m} = 0, (3) \frac{1}{m},$$

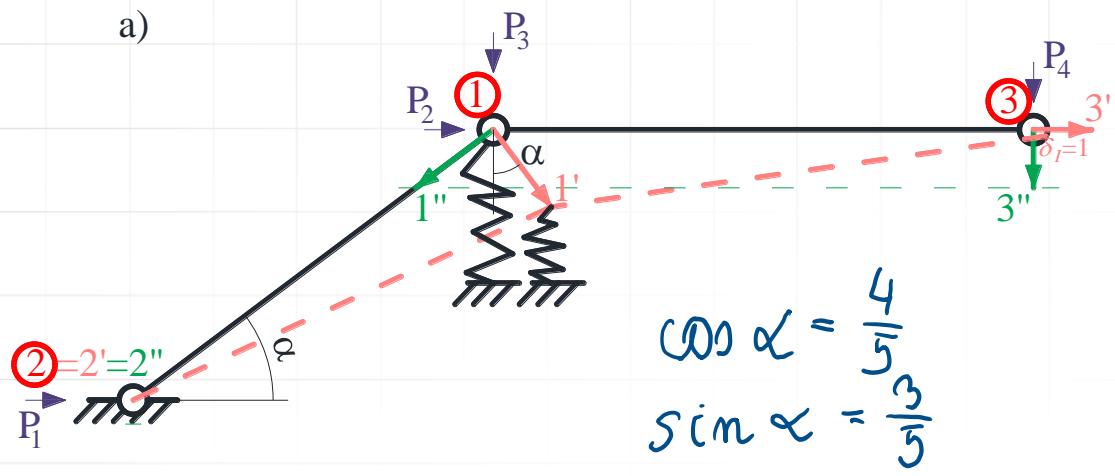
$$\psi_{13}^I = \frac{\Delta_{13}^I}{L_{13}} = \frac{-\frac{4}{3}}{6m} = -\frac{2}{9m} = -0, (2) \frac{1}{m}.$$

b)



Rys. 10. a) plan przesunięć i plan przesunięć obróconych
 b) biegunowy plan przesunięć obróconych

Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego



Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta_{12}^I = |1''2''| = \frac{5}{3}$$

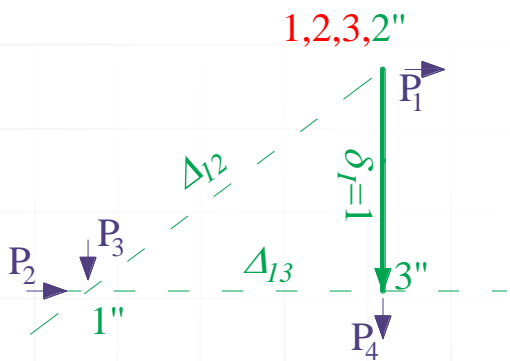
$$\Delta_{13}^I = |1''3''| = -\frac{4}{3}$$

Kąty obrotów cięwi wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m} = 0, (3) \frac{1}{m}$$

$$\psi_{13}^I = \frac{\Delta_{13}^I}{L_{13}} = \frac{-\frac{4}{3}}{6m} = -\frac{2}{9m} = -0, (2) \frac{1}{m}$$

b)



Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_1

$$M_{21}^I = M_{12}^I = -\frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot c_{21} \cdot \psi_{12}^I = -\frac{EI}{5m} \cdot 6 \cdot \frac{1}{3m} = -\frac{2EI}{5m^2}$$

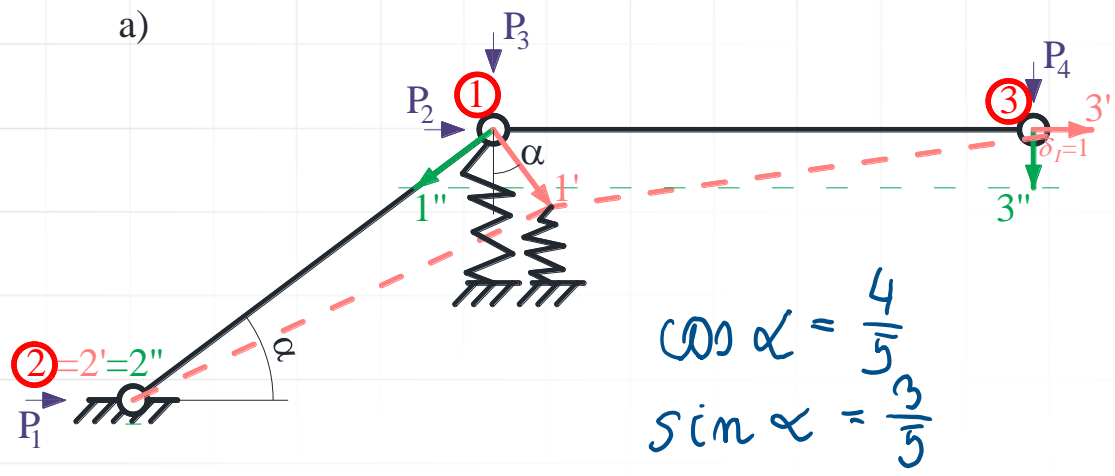
$$M_{13}^I = -\frac{EI_{13}}{L_{13}} \cdot c_{13} \cdot \psi_{13}^I = -\frac{2EI}{6m} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{2}{9m}\right) = \frac{2EI}{9m^2}$$

$$M_{31}^I = 0.$$

$$M_{ij}^I = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \psi_{ij}^I$$

i	j	$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
1	2	6
1	3	3
3	1	0

Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego



Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

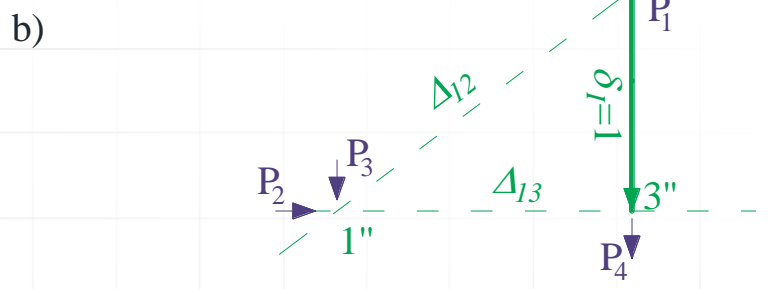
$$\Delta_{12}^I = |1''2''| = \frac{5}{3}$$

$$\Delta_{13}^I = |1''3''| = -\frac{4}{3}$$

Kąty obrotów cięwi wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m} = 0, (3) \frac{1}{m}$$

$$\psi_{13}^I = \frac{\Delta_{13}^I}{L_{13}} = \frac{-\frac{4}{3}}{6m} = -\frac{2}{9m} = -0, (2) \frac{1}{m}$$



$$\delta_1^I = 0, \quad \delta_2^I = 1, \quad \delta_3^I = \frac{4}{3}, \quad \delta_4^I = 0.$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L_{k_\delta}^I = -\cos \alpha \cdot |1''1| = -\left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{3}$, (skrócenie)

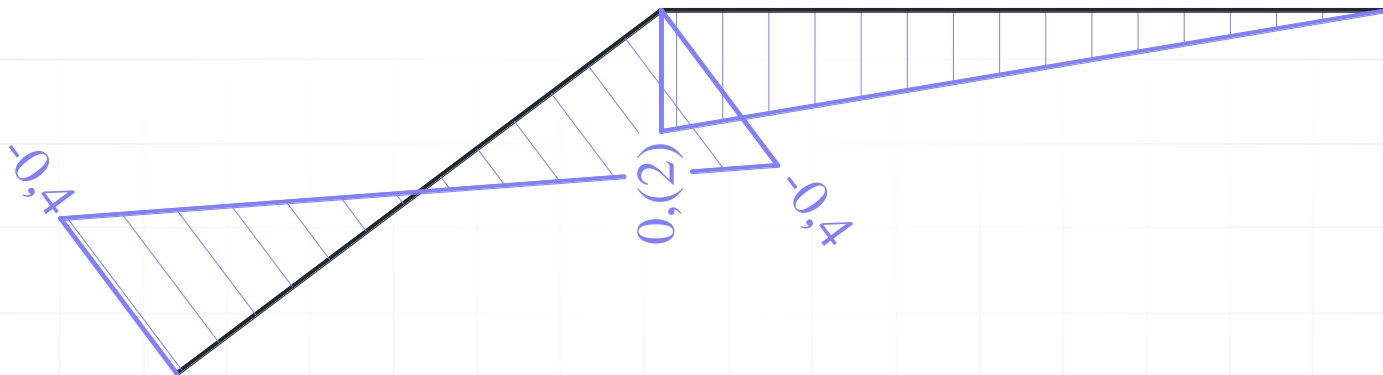
Rozwiązanie układu podstawowego od stanu translacyjnego

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_i

$$M_{21}^I = M_{12}^I = -\frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot c_{21} \cdot \psi_{12}^I = -\frac{EI}{5m} \cdot 6 \cdot \frac{1}{3m} = -\frac{2EI}{5m^2},$$

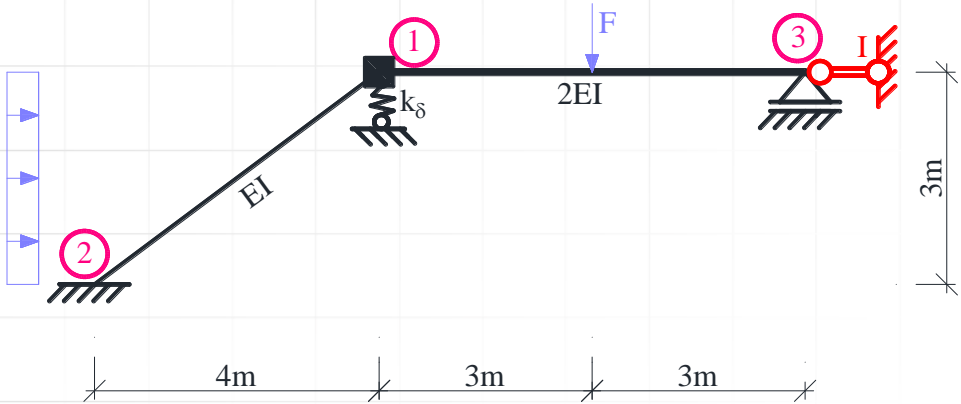
$$M_{13}^I = -\frac{EI_{13}}{L_{13}} \cdot c_{13} \cdot \psi_{13}^I = -\frac{2EI}{6m} \cdot 3 \cdot \left(-\frac{2}{9m}\right) = \frac{2EI}{9m^2},$$

$$M_{31}^I = 0.$$



Rys. 11. Wykres momentów M^I w EI/m^2

Postać ogólna układu równań metody przemieszczeń



$$\begin{bmatrix} k_{11}, & \dots & k_{1n_\varphi}, & k_{1I}, & \dots & k_{1n_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\varphi 1}, & \dots & k_{n_\varphi n_\varphi}, & k_{n_\varphi I}, & \dots & k_{n_\varphi n_\delta} \\ k_{I1}, & \dots & k_{In_\varphi}, & k_{II}, & \dots & k_{In_\delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ k_{n_\delta 1}, & \dots & k_{n_\delta n_\varphi}, & k_{n_\delta I}, & \dots & k_{n_\delta n_\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_{n_\varphi} \\ \delta_I \\ \vdots \\ \delta_{n_\delta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_{10} \\ \vdots \\ k_{n_\varphi 0} \\ k_{I0} \\ \vdots \\ k_{n_\delta 0} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi\varphi}, & \mathbf{K}_{\varphi\delta} \\ \mathbf{K}_{\delta\varphi}, & \mathbf{K}_{\delta\delta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Phi \\ \Delta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\varphi 0} \\ \mathbf{K}_{\delta 0} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{K}_0 = 0$$

$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{10} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{II} \cdot \delta_I + k_{I0} = 0$$

$$k_{ii} = \sum_j M_{ij}^i + k_i^\varphi = \sum_j a_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} + k_i^\varphi,$$

$$k_{i\beta} = \sum_j M_{ij}^\beta = -\sum_j c_{ij} \cdot EJ_{ij} / L_{ij} \cdot \psi_{ij}^\beta$$

$$k_{iF} = \sum_j M_{ij}^{oF} - M_i^o$$

$$k_{i\Delta} = \sum_j M_{ij}^{o\Delta}$$

$$k_{i\Delta} = \sum_j M_{ij}^{oT}$$

Obliczenie współczynników układu równań

$$k_{11} = \sum_j M_{1j}^1 + k_1^\varphi = M_{12}^1 + M_{13}^1 =$$

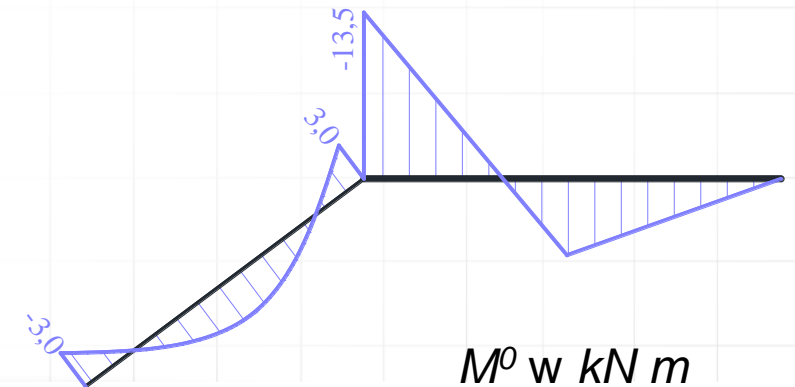
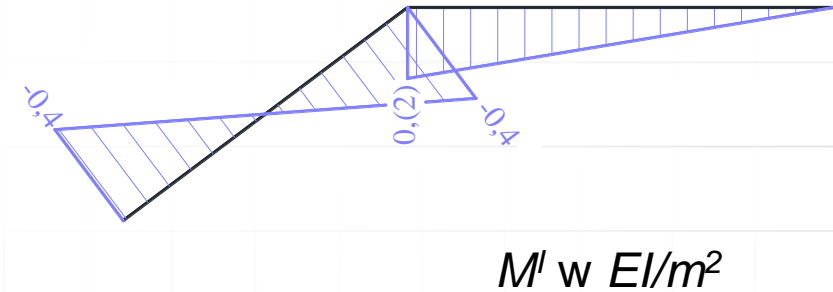
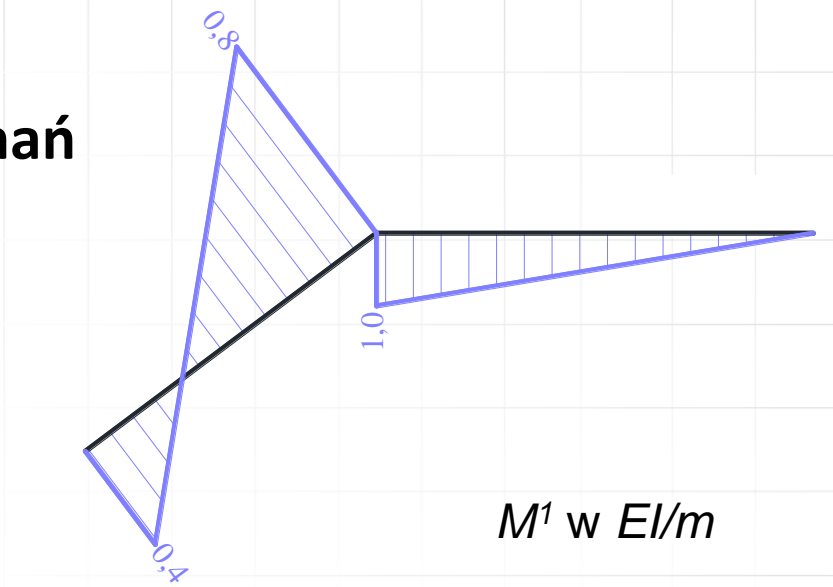
$$0,8 \frac{EI}{m} + 1,0 \frac{EI}{m} = 1,8 \frac{EI}{m},$$

$$k_{1I} = \sum_j M_{1j}^I = M_{12}^I + M_{13}^I =$$

$$-0,4 \frac{EI}{m^2} + 0, (2) \frac{EI}{m^2} = -0,1(7) \frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1o} = \sum_j M_{1j}^o - M = M_{12}^o + M_{13}^o =$$

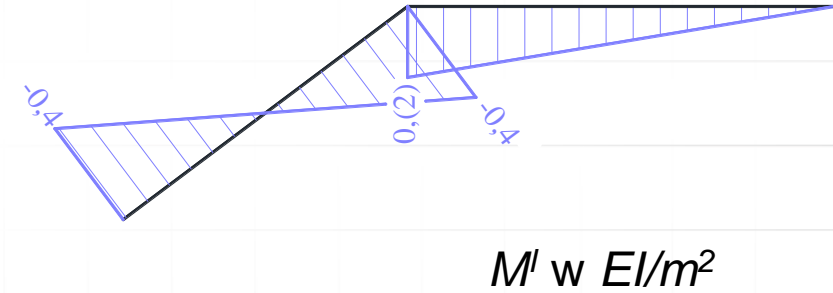
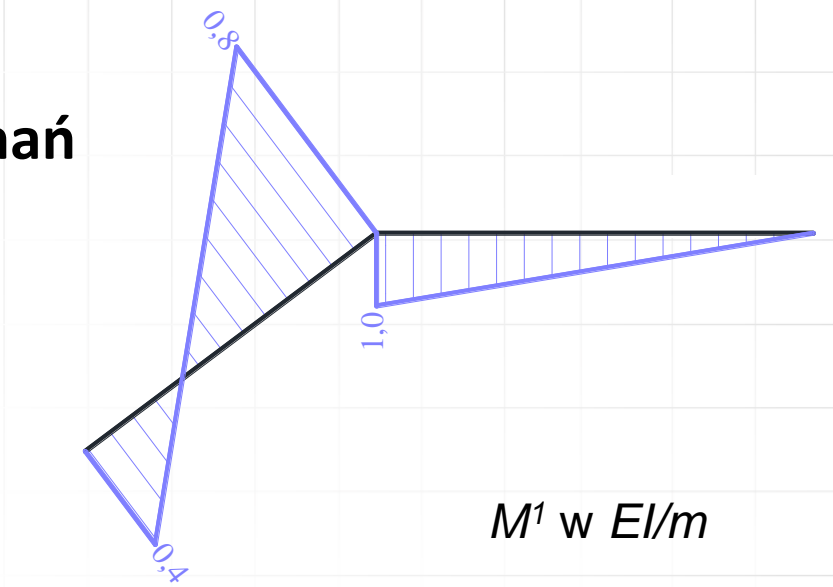
$$3 \text{ kN} \cdot \text{m} - 13,5 \text{ kN} \cdot \text{m} = -10,5 \text{ kN} \cdot \text{m},$$



Obliczenie współczynników układu równań

$$k_{I1} = - \sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi_{ij}^I$$

$$k_{I,I} = - \sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^I$$



Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

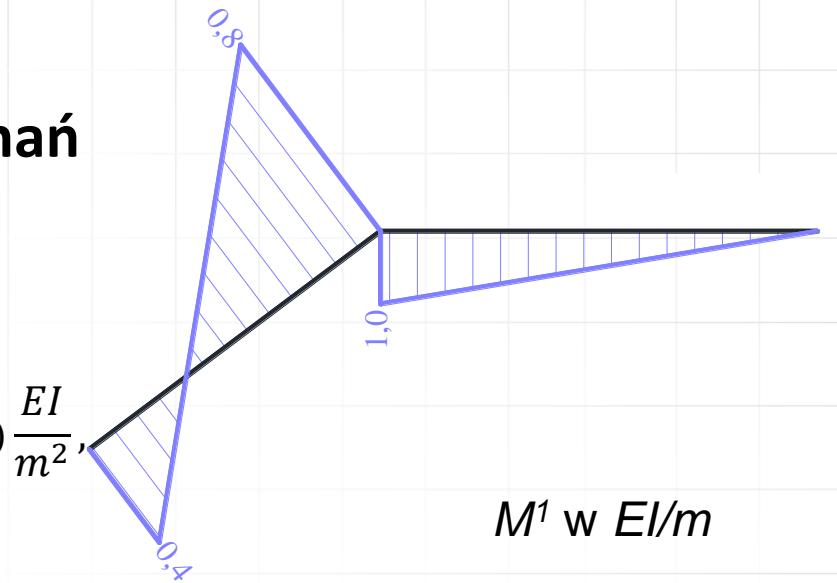
$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m} = 0, (3) \frac{1}{m},$$

$$\psi_{13}^I = \frac{\Delta_{13}^I}{L_{13}} = \frac{-\frac{4}{3}}{6m} = -\frac{2}{9m} = -0, (2) \frac{1}{m},$$

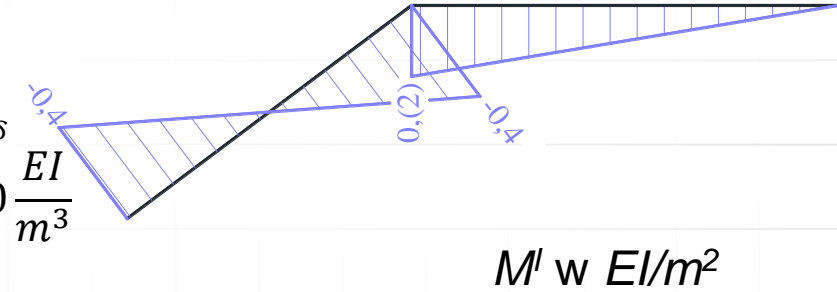
$$\Delta L_{k_s}^I = -\cos \alpha \cdot |1''1| = -\left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

Obliczenie współczynników układu równań

$$\begin{aligned}
 k_{I1} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^1 + M_{ji}^1) \psi_{ij}^I \\
 &= -(M_{12}^1 + M_{21}^1) \psi_{12}^I - (M_{13}^1 + M_{31}^1) \psi_{1A}^I \\
 &= - \left(0,4 \frac{EI}{m} + 0,8 \frac{EI}{m} \right) \frac{1}{3m} - \left(1 \frac{EI}{m} + 0 \right) \left(-\frac{2}{9m} \right) = -0,1(7) \frac{EI}{m^2},
 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
 k_{I,I} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^I + M_{ji}^I) \psi_{ij}^I + \sum_{ij} k_s^\delta \cdot \delta_s^I \cdot \delta_s^I \\
 &= -(M_{12}^I + M_{21}^I) \psi_{12}^I - (M_{13}^I + M_{31}^I) \psi_{13}^I + k_\delta \cdot \Delta L_{k_\delta}^I \cdot \Delta L_{k_\delta}^I \\
 &= - \left(-0,4 \frac{EI}{m^2} - 0,4 \frac{EI}{m^2} \right) \frac{1}{3m} - \left(\frac{2 EI}{9 m^2} + 0 \right) \cdot \left(-\frac{2}{9m} \right) + 10 \frac{EI}{m^3} \\
 &\cdot \left(-\frac{4}{3} \right)^2 = 18,0938 \frac{EI}{m^3},
 \end{aligned}$$



Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m} = 0, (3) \frac{1}{m},$$

$$\psi_{13}^I = \frac{\Delta_{13}^I}{L_{13}} = \frac{-\frac{4}{3}}{6m} = -\frac{2}{9m} = -0, (2) \frac{1}{m}.$$

$$\Delta L_{k_\delta}^I = -\cos \alpha \cdot |1''1| = -\left(\frac{4}{5}\right) \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

Obliczenie współczynników układu równań

$$k_{Io} = - \sum_{ij} (M_{ij}^o + M_{ji}^o) \psi_{ij}^I - \sum_P P_P \cdot \delta_P^I$$

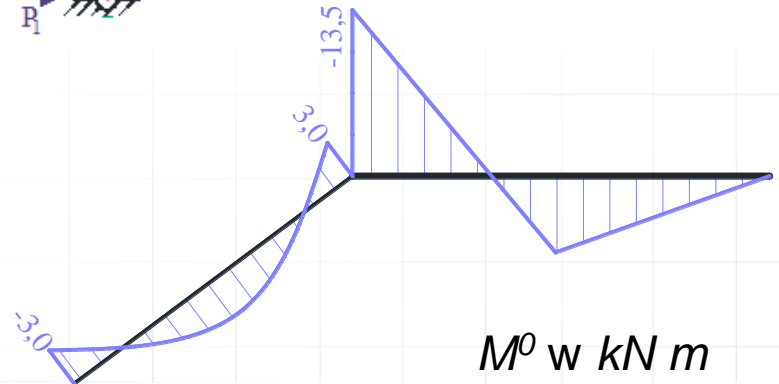
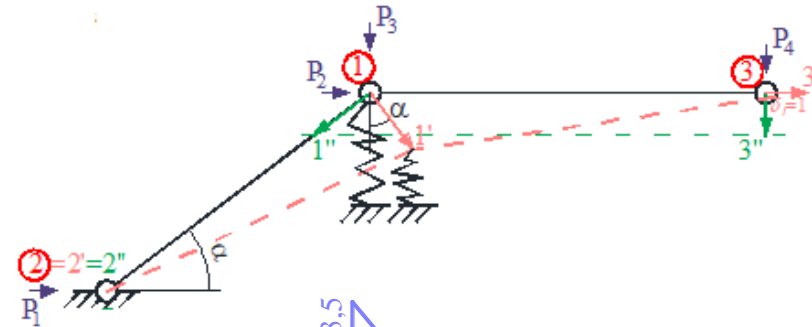
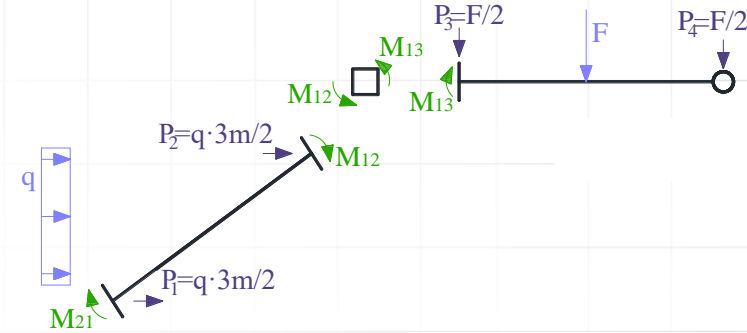
Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^I = \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m} = 0, (3) \frac{1}{m},$$

$$\psi_{13}^I = \frac{\Delta_{13}^I}{L_{13}} = \frac{-\frac{4}{3}}{6m} = -\frac{2}{9m} = -0, (2) \frac{1}{m}.$$

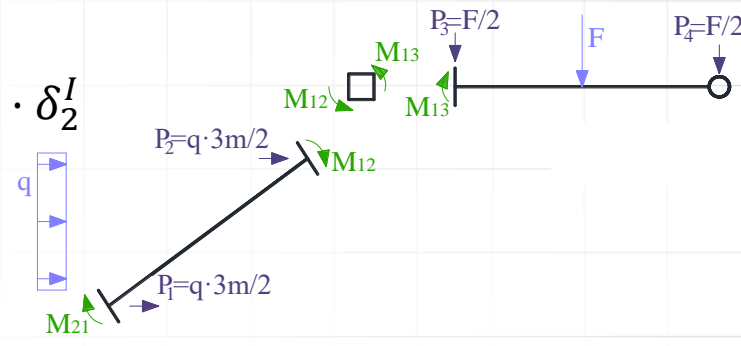
Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1^I = 0, \quad \delta_2^I = 1, \quad \delta_3^I = \frac{4}{3}, \quad \delta_4^I = 0.$$



Obliczenie współczynników układu równań

$$\begin{aligned}
 k_{Io} &= - \sum_{ij} (M_{ij}^o + M_{ji}^o) \psi_{ij}^I - \sum_P P_P \cdot \delta_P^I \\
 &= -(M_{12}^o + M_{21}^o) \psi_{12}^I - (M_{13}^o + M_{31}^o) \psi_{13}^I - P_1 \cdot \delta_1^I - P_2 \cdot \delta_2^I \\
 &\quad - P_3 \cdot \delta_3^I - P_4 \cdot \delta_4^I \\
 &= -(-3kN \cdot m + 3kN \cdot m) \frac{1}{3m} - (-13,5kN \cdot m + 0) \\
 &\quad \cdot \left(-\frac{2}{9m}\right) - 6kN \cdot 0 - 6kN \cdot 1 - 6kN \cdot \left(\frac{4}{3}\right) - 6kN \cdot 0 \\
 &= -17kN.
 \end{aligned}$$

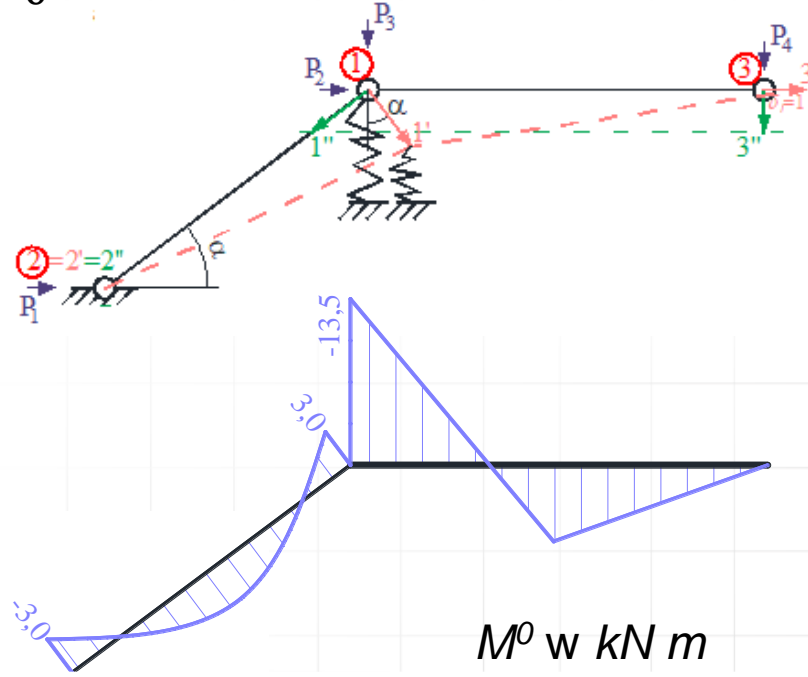


Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^I = \frac{\Delta_{ij}^I}{L_{ij}}$):

$$\begin{aligned}
 \psi_{12}^I &= \frac{\Delta_{12}^I}{L_{12}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m} = 0, (3) \frac{1}{m}, \\
 \psi_{13}^I &= \frac{\Delta_{13}^I}{L_{13}} = \frac{-\frac{4}{3}}{6m} = -\frac{2}{9m} = -0, (2) \frac{1}{m}.
 \end{aligned}$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1^I = 0, \quad \delta_2^I = 1, \quad \delta_3^I = \frac{4}{3}, \quad \delta_4^I = 0.$$



Szczegółowa postać układu równań metody przemieszczeń

$$\begin{aligned}1,8 \frac{EI}{m} \cdot \varphi_1 - 0,1(7) \frac{EI}{m^2} \cdot \delta_I - 10,5kN \cdot m &= 0 \\ -0,1(7) \frac{EI}{m^2} \cdot \varphi_1 + 18,0938 \frac{EI}{m^3} \cdot \delta_I - 17kN &= 0 \\ \varphi_1 = 5,932 \frac{kN \cdot m^2}{EI}, & \quad \delta_I = 0,9979 \frac{kN \cdot m^3}{EI}\end{aligned}$$

Obliczenie momentów brzegowych i sił w więziach sprężystych

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^1 \cdot \varphi_1 + M_{ij}^I \cdot \delta_I + M_{ij}^o,$$

Pręt	Punkt	$\frac{M_{ij}^1}{EI}$ m	φ_1	$\frac{M_{ij}^I}{EI}$ m ²	δ_I	$\frac{M_{ij}^o}{kN \cdot m}$	$\frac{M_{ij}}{kN \cdot m}$
			$\frac{kN \cdot m^2}{EI}$		$\frac{kN \cdot m^3}{EI}$		
12	2	0,4	5,932	-0,4	0,9979	-3,0	-1,026
	1	0,8		-0,4		3,0	7,346
13	1	1,0		0,(2)		-13,5	-7,346
	3	0		0		0	0

Siła więzi sprężystej:

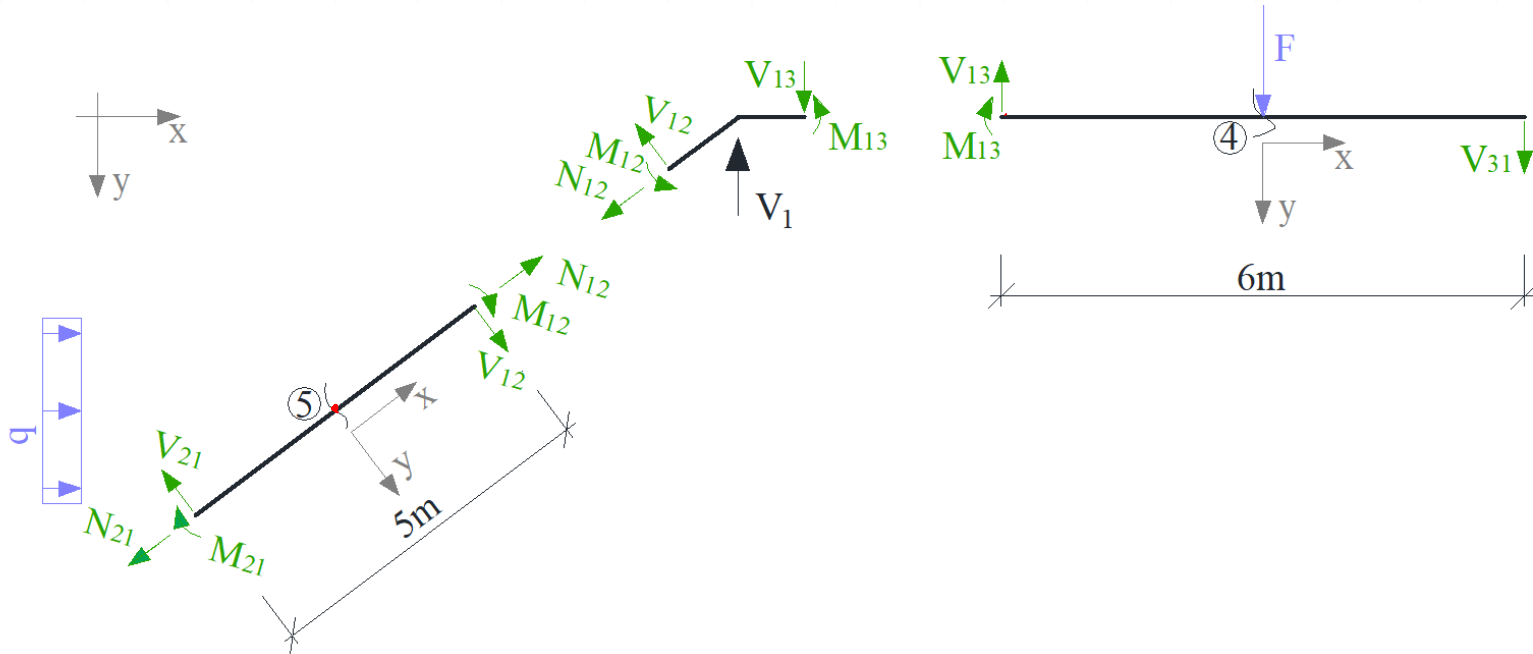
$$S_\delta = S_1^{\delta_I} \cdot \delta_I = -\frac{40 EI}{3 m^3} \cdot 0,9979 \frac{kN \cdot m^3}{EI} = -13,305 kN$$

$$V_1 = -S_\delta = 13,305 kN$$



Obliczenie sił osiowych i tnących oraz sporządzenie wykresów

Siły tnące określamy korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach. Siły osiowe wyznaczamy ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących oraz obciążeń działających w węzłach. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi.



Rys. 12. Podział na pręty, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

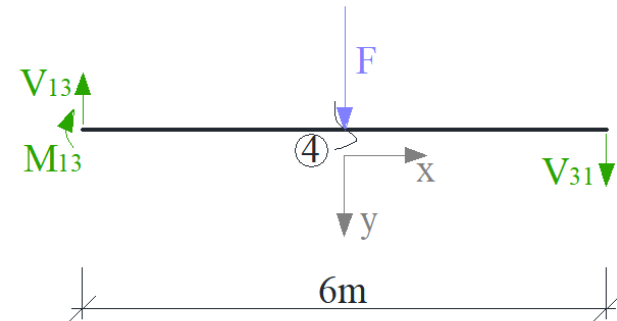
Obliczenie sił osiowych i tnących oraz sporządzenie wykresów

Pręt 1-3

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M_{13} - V_{31} \cdot 6m + F \cdot 3m = -7,346kN \cdot m + V_{31} \cdot 6m + 12kN \cdot 3m = 0$$

$$\Rightarrow V_{31} = -4,776kN$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_{13} - V_{31} - F = V_{13} + 4,776kN - 12kN = 0 \Rightarrow V_{13} = 7,224kN$$



Pręt 1-2

$$\sum M_1 = 0 \Rightarrow M_{12} + M_{21} + V_{21} \cdot 5m - q \cdot 3m \cdot 1,5m =$$

$$= 7,346kN \cdot m - 1,026kN \cdot m + V_{21} \cdot 5m - 4 \frac{kN}{m} \cdot 3m \cdot 1,5m = 0$$

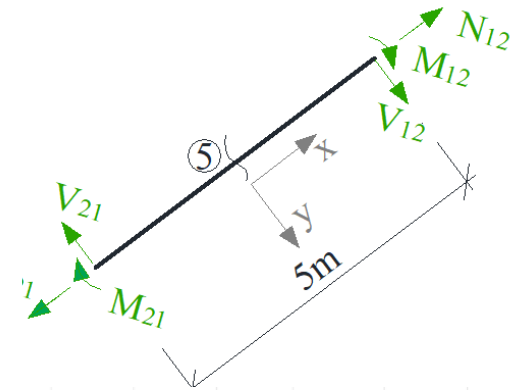
$$\Rightarrow V_{21} = 2,336kN,$$

$$\sum M_2 = 0 \Rightarrow M_{12} + M_{21} + V_{12} \cdot 5m + q \cdot 3m \cdot 1,5m =$$

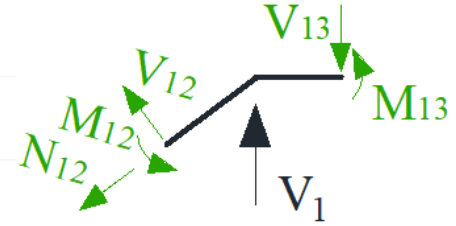
$$= 7,346kN \cdot m - 1,026kN \cdot m + V_{12} \cdot 5m + 4 \frac{kN}{m} \cdot 3m \cdot 1,5m = 0$$

$$\Rightarrow V_{12} = -4,864kN,$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow N_{12} - N_{21} + q \cdot 3m \cdot \cos\alpha \Rightarrow N_{21} = N_{12} + 9,6kN$$



Obliczenie sił osiowych i tnących oraz sporządzenie wykresów



Węzeł 1

$$\sum M = 0 \Rightarrow M_{12} + M_{13} = 0 \Rightarrow 7,346kN\ m - 7,346kN\ m = 0$$

$$\sum X = 0 \Rightarrow -V_{12} \cdot \sin\alpha - N_{12} \cdot \cos\alpha = 0 \Rightarrow N_{12} = -V_{12} \cdot \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 4,864kN \cdot \frac{3}{4} = 3,650kN$$

$$\sum Y = 0 \Rightarrow V_{13} - V_{12} \cdot \cos\alpha + N_{12} \cdot \sin\alpha - V_1 =$$

$$= 07,224kN + 4,864kN \cdot \frac{4}{5} + 3,650kN \cdot \frac{3}{5} - 13,305kN = 0$$

$$\text{Z trzeciego równania dla pręta 1-2 } N_{21} = N_{12} + 9,6kN = 3,650kN + 9,6kN = 13,25kN$$

Obliczenie sił osiowych i tnących oraz sporządzenie wykresów

Sporządzenie wykresów momentów zginających

$$M_{zgin,21} = M_{21} = -1,026 kN m$$

$$M_{zgin,12} = -M_{12} = -7,346 kN m$$

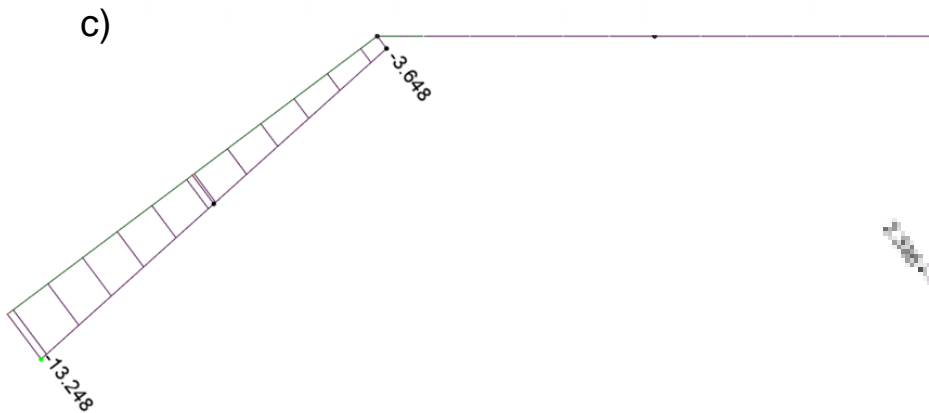
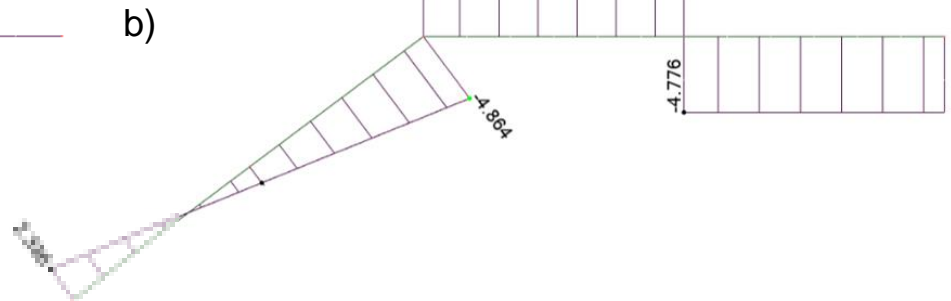
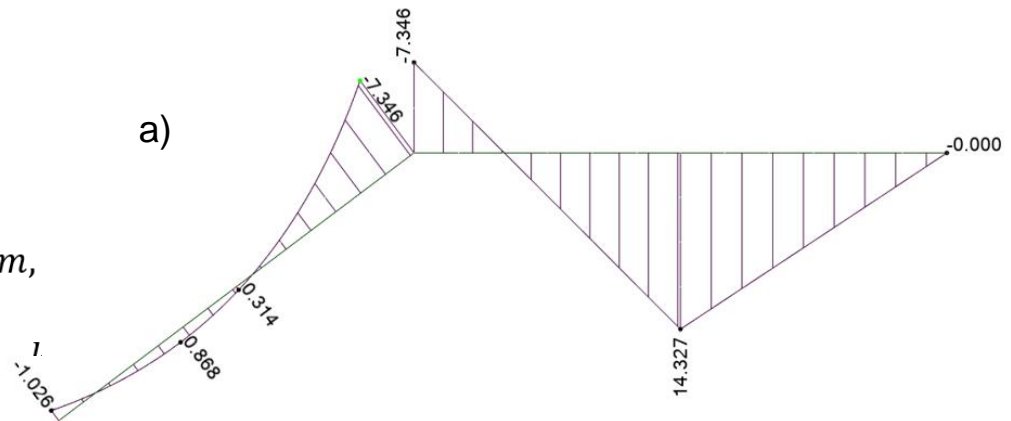
$$M_{zgin,13} = M_{13} = -7,346 kN m$$

$$M_{zgin,4}^P = -V_{31} \cdot 3m = 4,776 kN \cdot 3m = 14,328 kN m,$$

$$M_{zgin,5}^L = M_{12} + V_{21} \cdot 2,5m - q \cdot 1,5m \cdot 0,75m$$

$$= -1,026 kN m + 2,336 kN \cdot 2,5 m -$$

$$- 4 \frac{kN}{m} \cdot 1,5m \cdot 0,75m = 0,314 kN m,$$

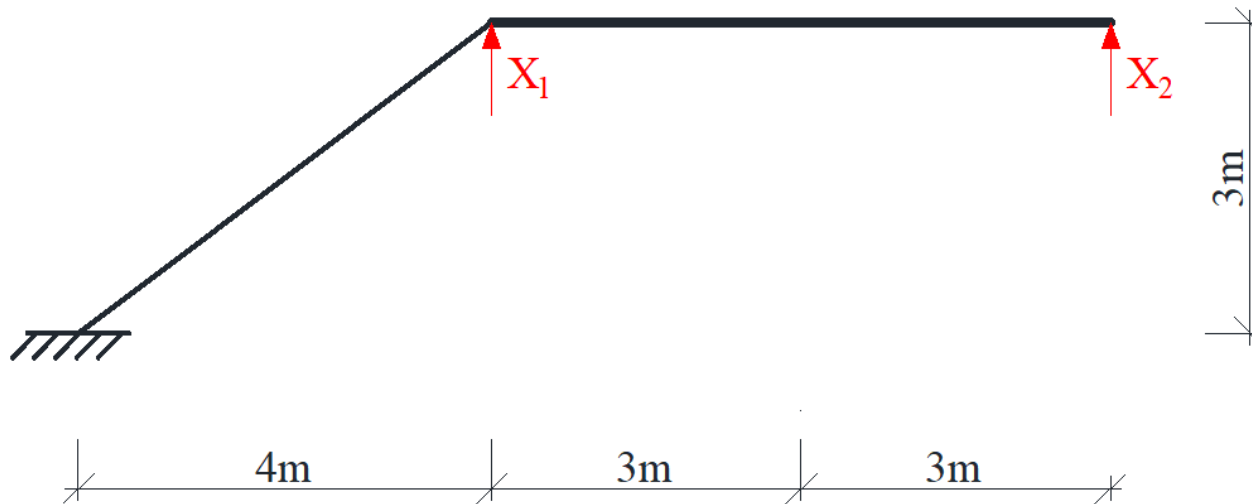


Rys. 13. Wykres a) momentów zginających w $kN m$, b) sił tnących w kN , c) sił osiowych w kN .

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach przeciętych więzi. W tym celu dobierany jest układ podstawowy metody sił. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu. Ponieważ dany układ jest trzykrotnie statycznie niewyznaczalny dobrano układ podstawowy przecinając trzy więzi podporowe. Przemieszczenia obliczane są za pomocą wzoru

$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n}$$

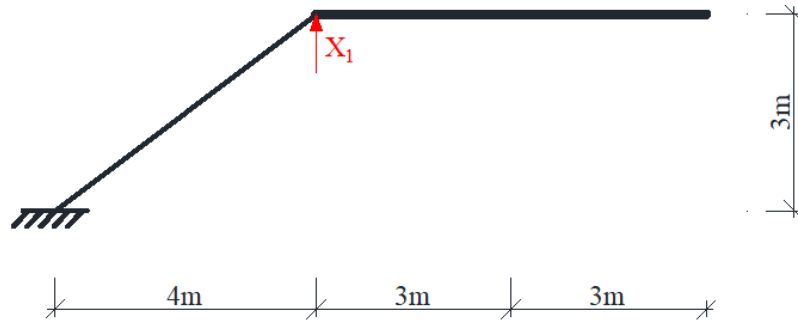


Rys. 14. Układ podstawowy metody sił bez obciążenia danego .

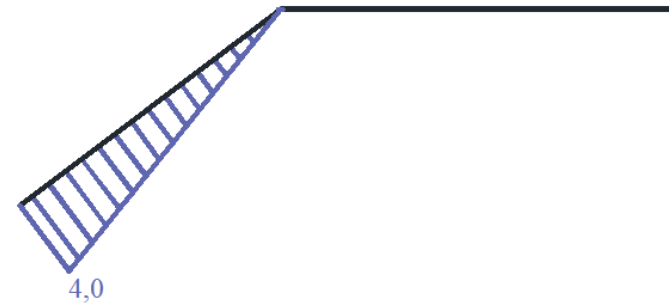
KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_1 = 1$

a)



b)



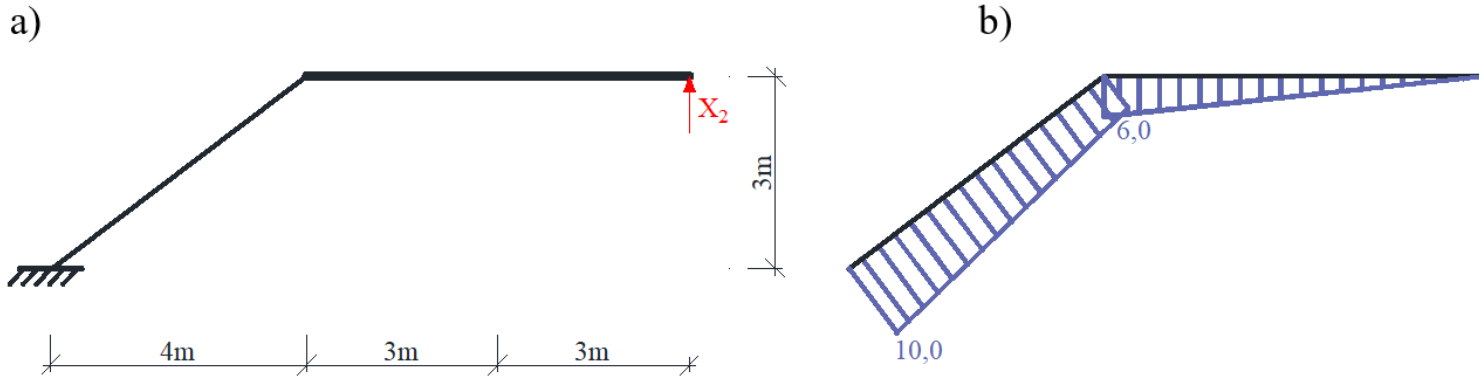
Rys. 15. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_1=1$,
b) wykres momentów zginających \bar{M}^1

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_\delta^1 = -1$

$$\begin{aligned} \Delta_{1F} &= \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^F}{k_n} \\ &= \frac{5m}{6 \cdot 1EI} [4 \cdot (-1,026)kN \cdot m + 4 \cdot 2 \cdot 0,314kN \cdot m + 0 \cdot (-7,346)kN \cdot m] \\ &\quad + \frac{(-1) \cdot (-13,305)kN}{10 \frac{EI}{m^3}} = 0,0038 \frac{kN m^3}{EI} \end{aligned}$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

- Przemieszczenie w miejscu i kierunku siły jednostkowej $X_2 = 1$



Rys. 16. a) Układ podstawowy metody sił obciążony siłą jednostkową $X_2=1$,
b) wykres momentów zginających \bar{M}^2

Siła w więzi sprężystej: $\bar{S}_8^2 = 0$

$$\Delta_{2F} = \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^F}{k_n}$$

$$= \frac{5m}{6 \cdot 1EI} [10 \cdot (-1,026)kN \cdot m + 4 \cdot 8 \cdot 0,314kN \cdot m + 6 \cdot (-7,346)kN \cdot m]$$

$$+ \frac{3m}{6 \cdot 2EI} [6 \cdot (-7,346)kN \cdot m + 4 \cdot 4,5 \cdot 3,494kN \cdot m + 3 \cdot 14,327kN \cdot m]$$

$$+ \frac{3m}{6 \cdot 2EI} [3 \cdot 14,327kN \cdot m + 4 \cdot 1,5 \cdot 7,164kN \cdot m + 0 \cdot 0]$$

$$+ \frac{0 \cdot (-13,305)kN}{10 \frac{EI}{m^3}} \cong 0$$