Mechanika Budowli

Laboratorium nr 4

Opracowała: dr inż. Olga Szyłko-Bigus *olga.szylko@pwr.edu.pl*

Laboratorium nr 4

METODA PRZEMIESZCZEŃ - RAMA PŁASKA

Dana jest rama płaska o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku. Należy:

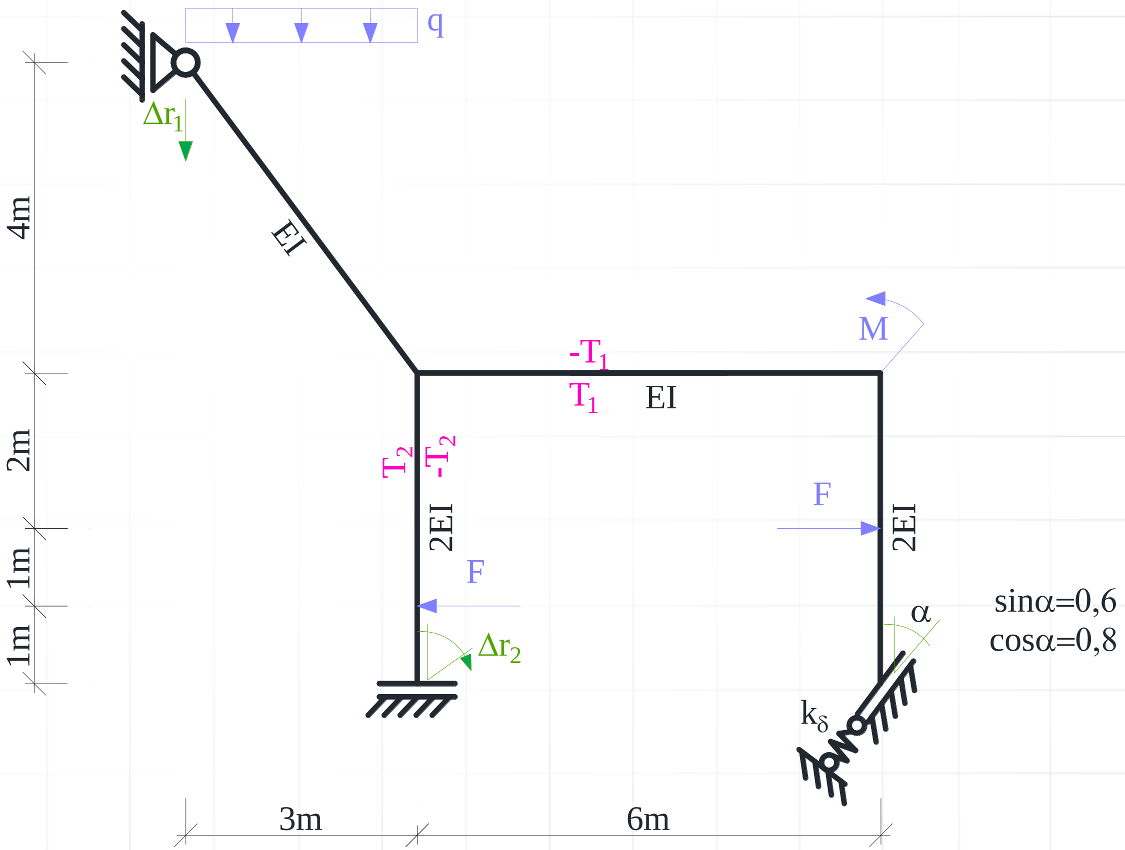
- Sprawdzić warunek ilościowy i jakościowy geometrycznej niezmienności układu.
- Stosując metodę przemieszczeń rozwiązać ramę od podanego obciążenia mechanicznego (obliczyć siły) przekrojowe i sporządzić ich wykresy.
- Zaprojektować wstępnie przekroje na zginanie.
- Rozwiązać ramę od zadanego obciążenia niemechanicznego.
- Przeprowadzić stosowne kontrole rozwiązania w obu przypadkach..

Dane do obliczeń: $F = 8$ kN;

$q = 4$ kN/m; $M = 20$ kN m;

$k_\delta = 8\ EI/m^3$, $T_1 = 20$ °C; $T_2 = 25$ °C;

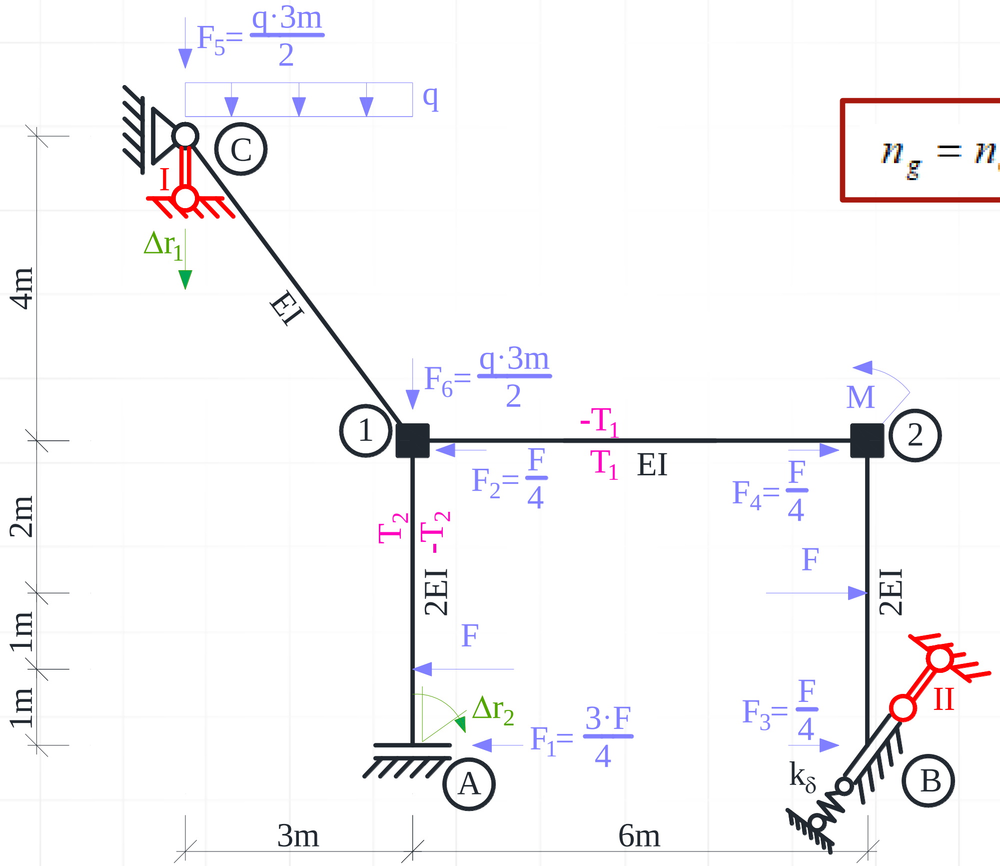
$\Delta r_1 = 0{,}02$ m; $\Delta r_2 = 0{,}03$ rad.



Rys. 1. Schemat statyczny

UKŁAD PODSTAWOWY METODY PRZEMIESZCZEŃ

Układ podstawowy tworzymy z układu danego przez dodanie n_φ więzi rotacyjnych i n_δ więzi translacyjnych (w tym przykładzie 2 więzi rotacyjne i 2 więzi translacyjne). Układ podstawowy metody przemieszczeń, pokazany na rysunku jest geometrycznie wyznaczalny.



$$n_g = n_\varphi + n_\delta = 2 + 2 = 4$$

Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

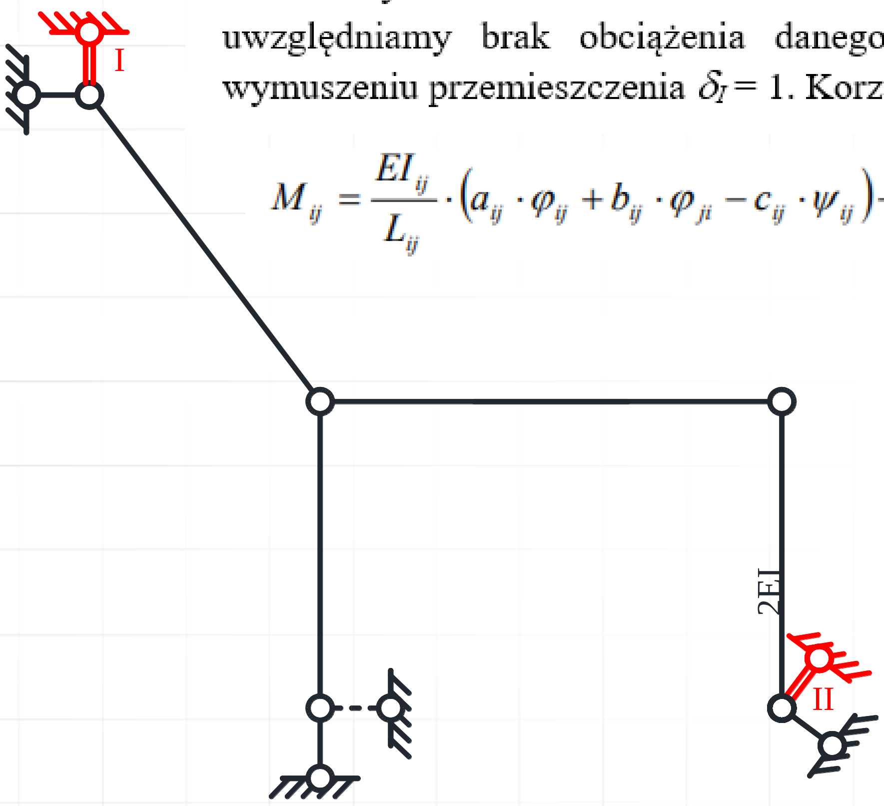
Laboratorium nr 4

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_{II} = 0$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_I = 1$. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:

$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \left(a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}\right) + M^{o}_{ij}, \qquad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \left(a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}\right) + M^{o}_{ji},$$

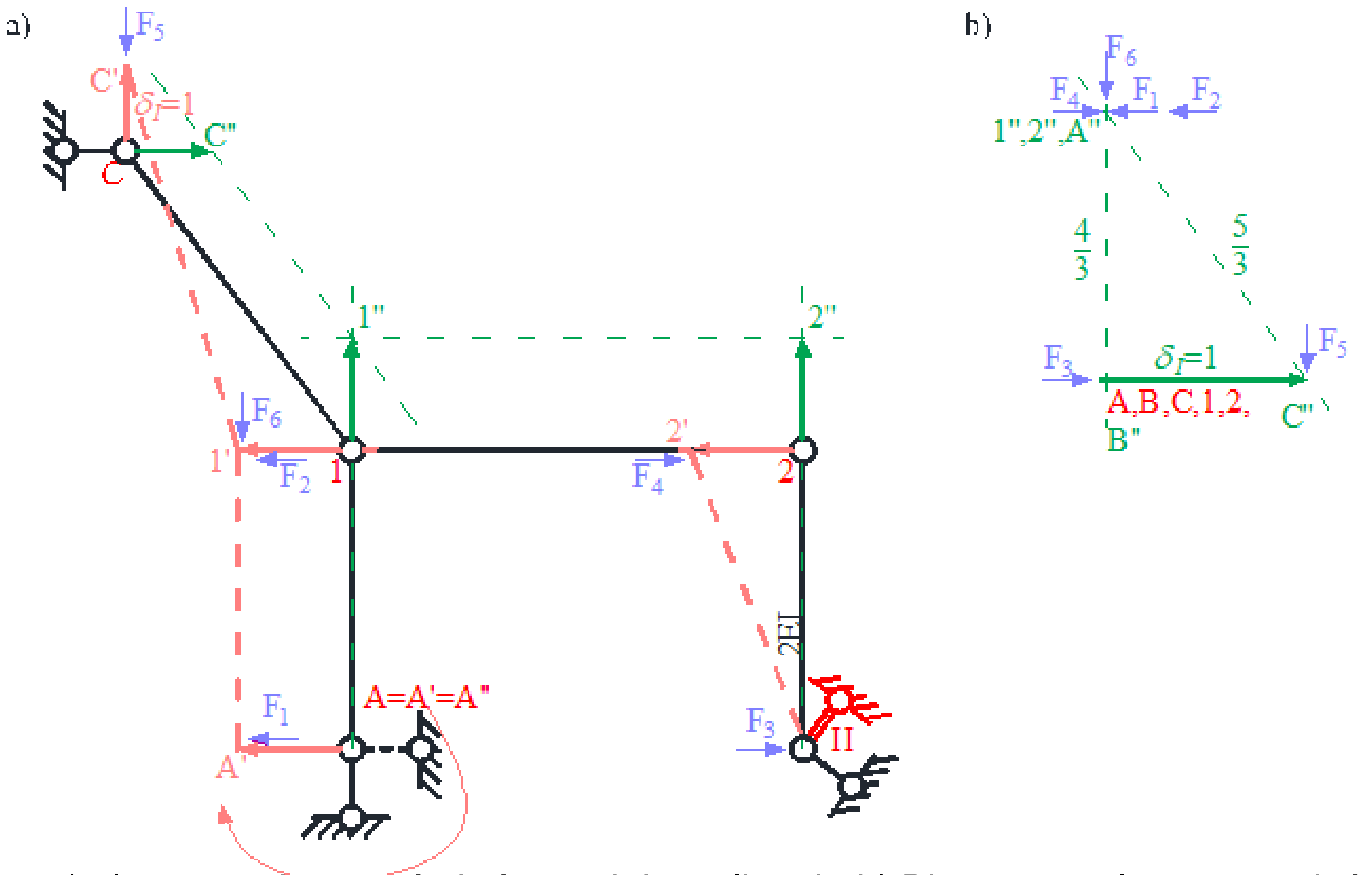
$$M^{I}_{ij} = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \Psi^{I}_{ij}, \qquad M^{I}_{ji} = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \Psi^{I}_{ij}.$$



Rys. 3. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY

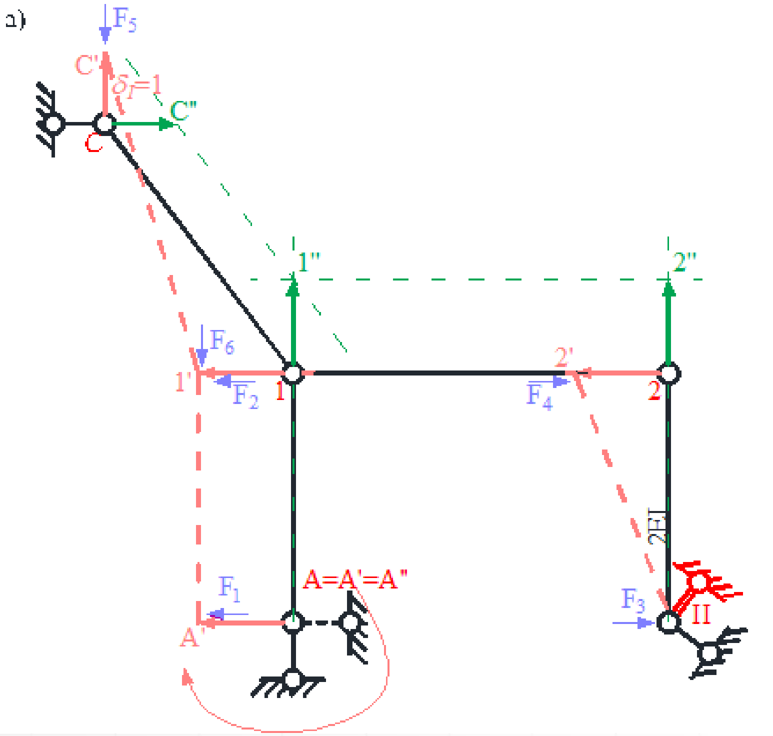


Rys. 4. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) Biegunowy plan przesunięć obróconych

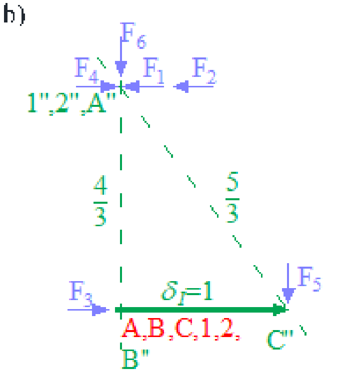
Laboratorium nr 4

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY

a)



b)



Rys. 4. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) Biegunowy plan przesunięć obróconych

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$$\Delta^I_{2B} = -|2''B''| = -\frac{4}{3}$$ („-” ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo)

$$\Delta^I_{1C} = +|1''C''| = +\frac{5}{3}$$ („+” ponieważ obrót pręta nastąpił w prawo)

$$\Delta^I_{12} = |1''2''| = 0$$

$$\Delta^I_{1A} = |1''A''| = 0$$

Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi^I_{ij} = \frac{\Delta^I_{ij}}{L_{ij}}$):

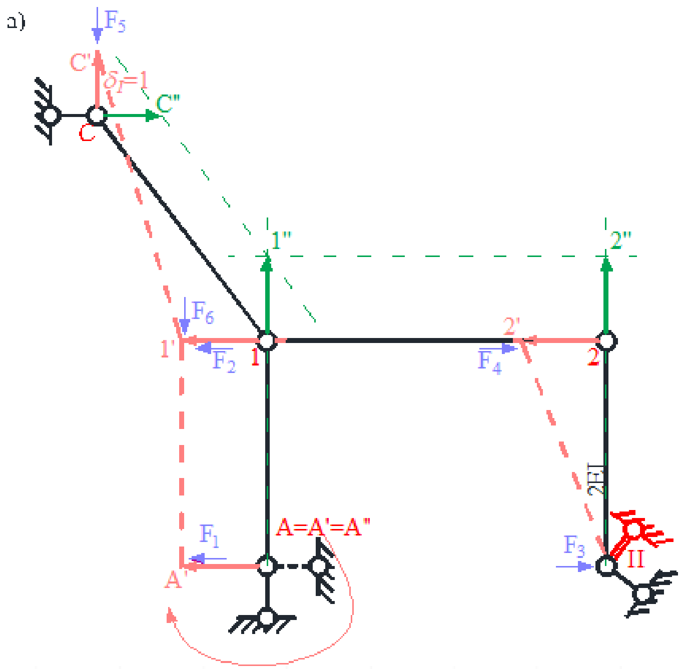
$$\psi^I_{2B} = \frac{\Delta^I_{2B}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m}$$

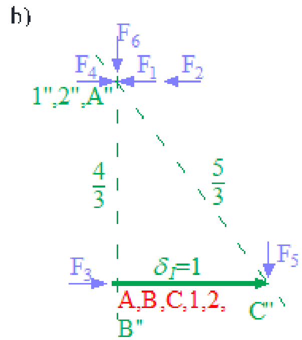
$$\psi^I_{1C} = \frac{\Delta^I_{1C}}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m}$$

$$\psi^I_{1A} = \psi^I_{12} = 0$$

Laboratorium nr 4

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY





Rys. 4. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) Biegunowy plan przesunięć obróconych

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_I

$$M^I_{2B} = M^I_{B2} = -\frac{EI_{2B}}{L_{2B}} \cdot c_{2B} \cdot \psi^I_{2B} = -\frac{2EI}{4m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{3m}\right) = 1\frac{EI}{m^2}$$

$$M^I_{1C} = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{1C} \cdot \psi^I_{1C} = -\frac{EI}{5m} \cdot 3 \cdot \frac{1}{3m} = -\frac{1}{5}\frac{EI}{m^2}$$

$$M^I_{C1} = -\frac{EI_{1C}}{L_{1C}} \cdot c_{C1} \cdot \psi^I_{1C} = -\frac{EI}{5m} \cdot 0 \cdot \frac{1}{3m} = 0,$$

$$M^I_{14} = M^I_{41} = M^I_{12} = M^I_{21} = 0$$

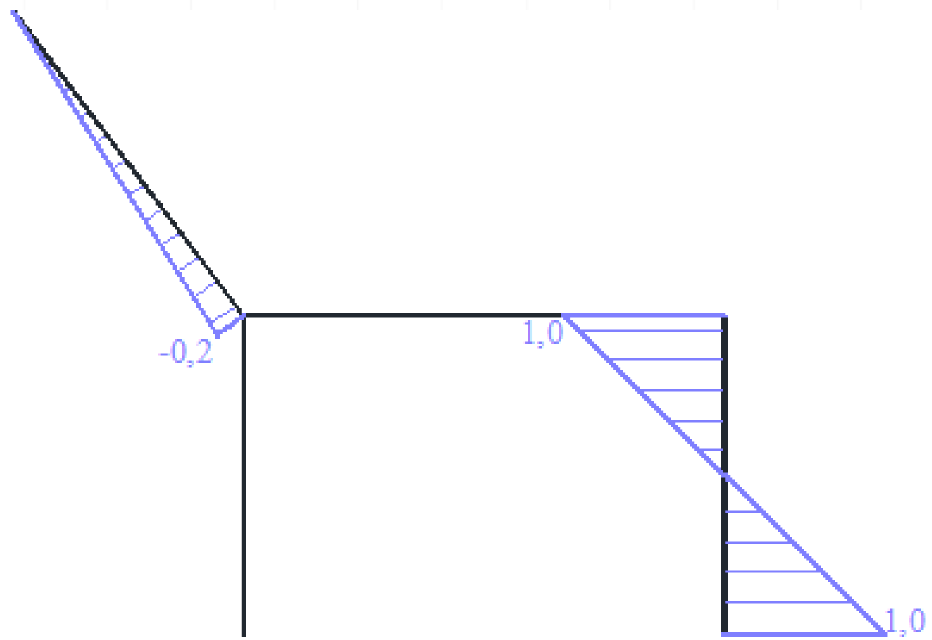
Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta^I_1 = \frac{4}{3}, \quad \delta^I_2 = \frac{4}{3}, \quad \delta^I_3 = 0, \quad \delta^I_4 = -\frac{4}{3}, \quad ,\delta^I_5 = -1, \quad \delta^I_6 = 0.$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L^I_{k_5} = 0$

Siła w więzi sprężystej: $S_1^{\delta_I} = k_5 \cdot \Delta L^I_{k_5} = 8\frac{EI}{3} \cdot 0 = 0$

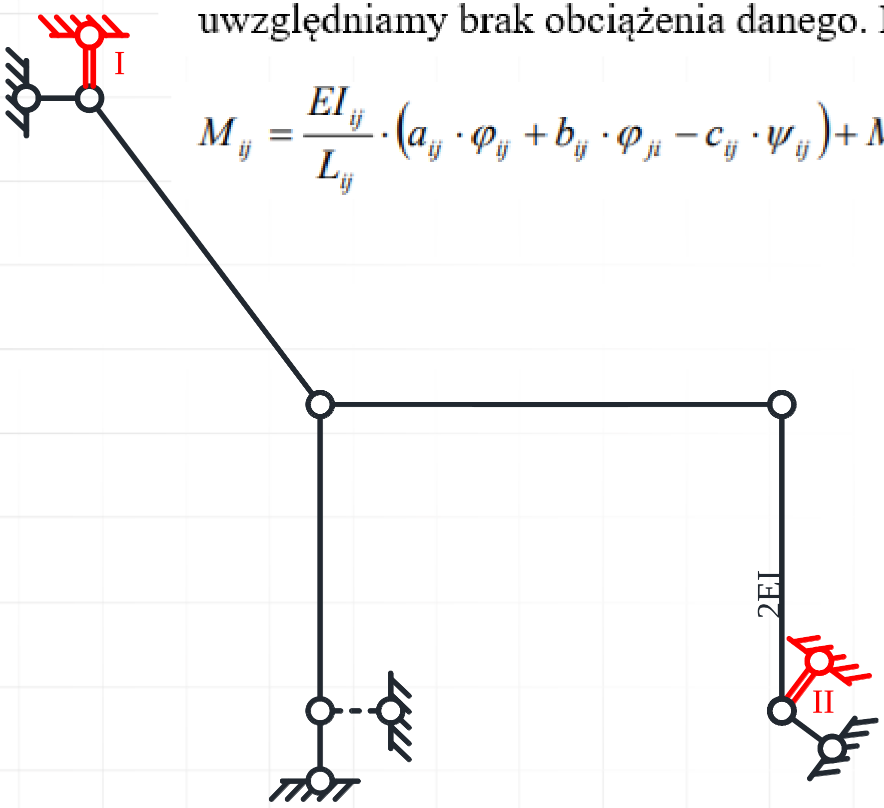
ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY



Rys. 5. Wykres momentów M^{I} w EI/m^2.

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - DRUGI STAN TRANSLACYJNY

W tym stanie do wzorów transformacyjnych podstawiamy: $\varphi_1 = \varphi_2 = \delta_I = 0$, kąty obrotu cięciw prętów ψ_{ij} określone po wymuszeniu przemieszczenia $\delta_{II} = 1$ oraz uwzględniamy brak obciążenia danego. Korzystamy więc ze wzorów w postaci:



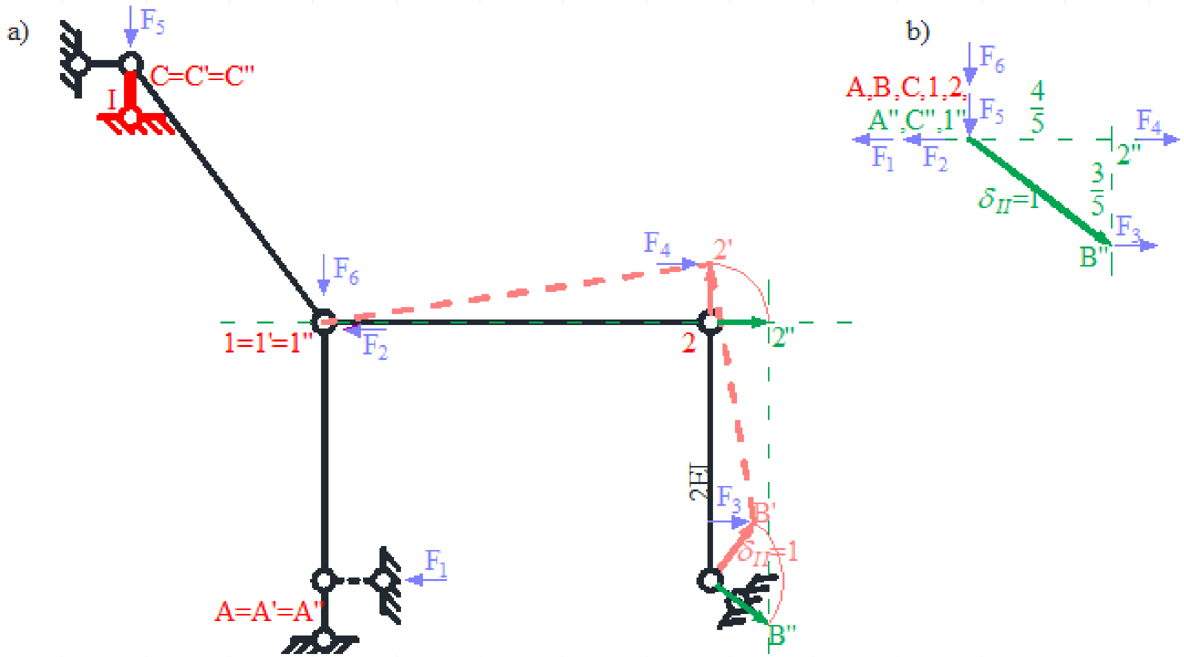
$$M_{ij} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \left(a_{ij} \cdot \varphi_{ij} + b_{ij} \cdot \varphi_{ji} - c_{ij} \cdot \psi_{ij}\right) + M^{o}_{ij}, \qquad M_{ji} = \frac{EI_{ij}}{L_{ij}} \cdot \left(a_{ji} \cdot \varphi_{ji} + b_{ji} \cdot \varphi_{ij} - c_{ji} \cdot \psi_{ij}\right) + M^{o}_{ji},$$

$$M^{II}_{ij} = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ij} \cdot \Psi^{II}_{ij}, \qquad M^{II}_{ji} = -\frac{EI_{ij}}{L_{ij}} c_{ji} \cdot \Psi^{II}_{ji}.$$

Rys. 6. Model przegubowy po dodaniu więzi translacyjnych

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - DRUGI STAN TRANSLACYJNY

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - DRUGI STAN TRANSLACYJNY



Rys. 7. a) plan przemieszczeń obróconych i możliwych, b) biegunowy plan przesunięć obróconych

Wartości wzajemnych przesunięć końców prętów wynoszą:

$\Delta_{12}^{II} = -|1"2"| = -\frac{4}{5}$ („-" ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo)

$\Delta_{12}^{II} = -|2"B"| = -\frac{3}{5}$ („-" ponieważ obrót pręta nastąpił w lewo)

$\Delta_{1A}^{II} = |1"A"| = 0$

$\Delta_{1C}^{II} = |1"C"| = 0$

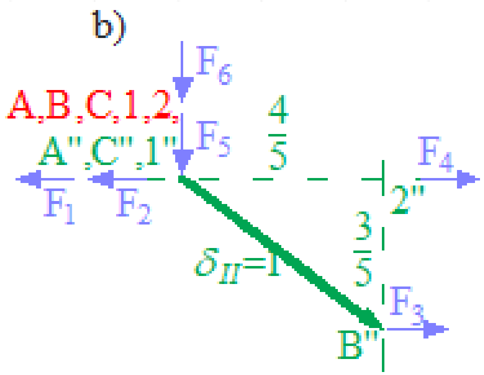
Kąty obrotów cięciw wynoszą ($\psi_{ij}^{II} = \frac{\Delta_{ij}^{II}}{L_{ij}}$):

$$\psi_{12}^{II} = \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m}$$

$$\psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m}$$

$$\psi_{1A}^{II} = \psi_{1C}^{II} = 0$$

ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - DRUGI STAN TRANSLACYJNY



Rys. 7. b) B.B.P.O.

Momenty węzłowe w układzie podstawowym od przemieszczenia δ_I wynoszą:

$$M_{12}^{II} = M_{21}^{II} = -\frac{EI_{12}}{L_{12}} \cdot c_{12} \cdot \psi_{12}^{II} = -\frac{EI}{6m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{2}{15m}\right) = \frac{2}{15}\frac{EI}{m^2}$$

$$M_{2B}^{II} = M_{B2}^{II} = -\frac{EI_{2B}}{L_{2B}} \cdot c_{2B} \cdot \psi_{2B}^{II} = -\frac{2EI}{4m} \cdot 6 \cdot \left(-\frac{3}{20m}\right) = \frac{9}{20}\frac{EI}{m^2}$$

$$M_{1A}^{II} = M_{A1}^{II} = M_{1C}^{II} = M_{C1}^{II} = 0$$

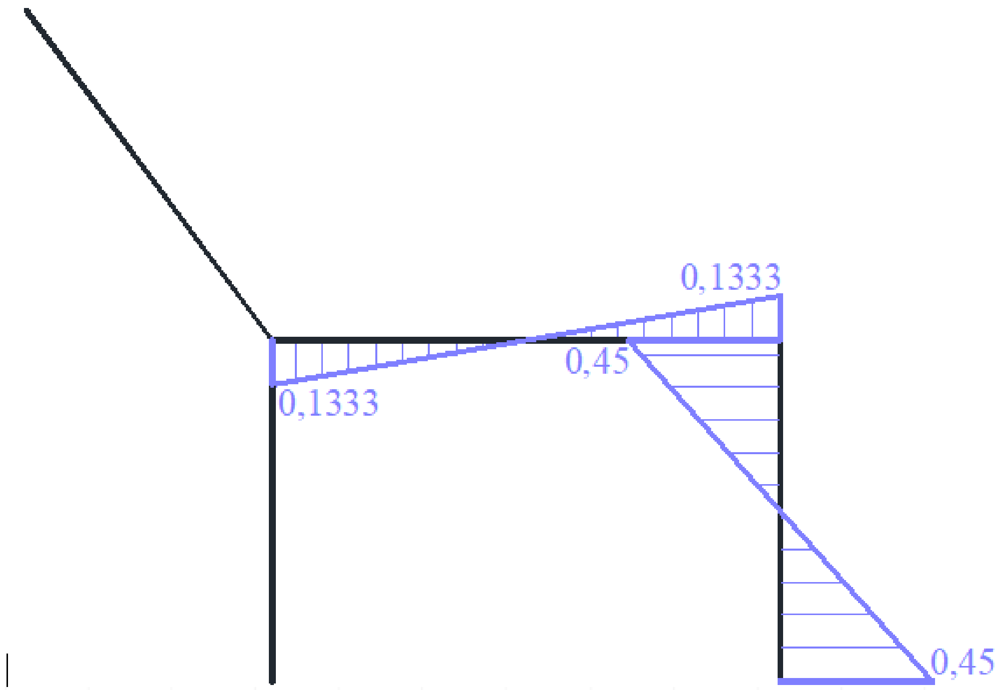
Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1^{II} = 0, \quad \delta_2^{II} = 0, \quad \delta_3^{II} = \frac{3}{5}, \quad \delta_4^{II} = 0, \quad \delta_5^{II} = 0, \quad \delta_6^{II} = 0$$

Zmiana długości więzi sprężystej: $\Delta L_{k_5}^{II} = 1$

Siła w więzi sprężystej: $S_1^{\delta_{II}} = k_5 \cdot \Delta L_{k_5}^{2} = 8\frac{EI}{m^3} \cdot 1 = 8\frac{EI}{m^3}$

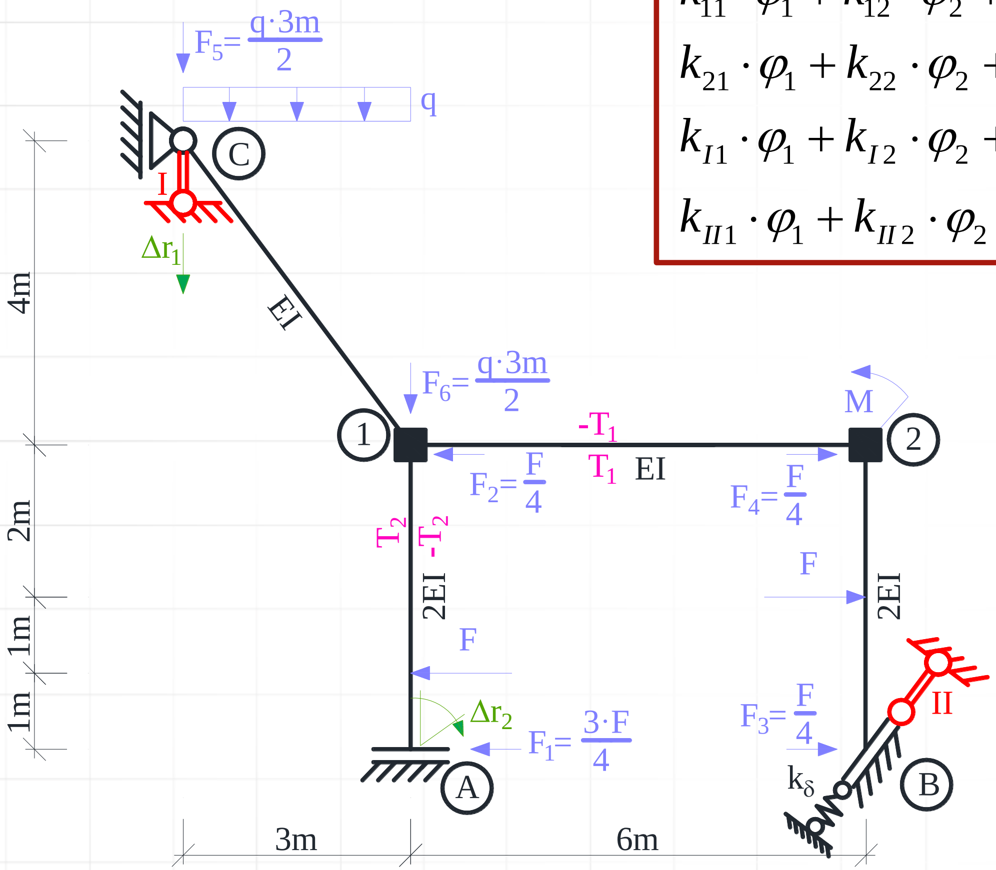
ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO METODY PRZEMIESZCZEŃ OD STANÓW TRANSLACYJNYCH - PIERWSZY STAN TRANSLACYJNY



Rys. 8. Wykres momentów M^{II} *w* EI/m^2.

POSTAĆ OGÓLNA UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$
\boxed{\begin{aligned}
&k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0\\
&k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0\\
&k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0\\
&k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0
\end{aligned}}
$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

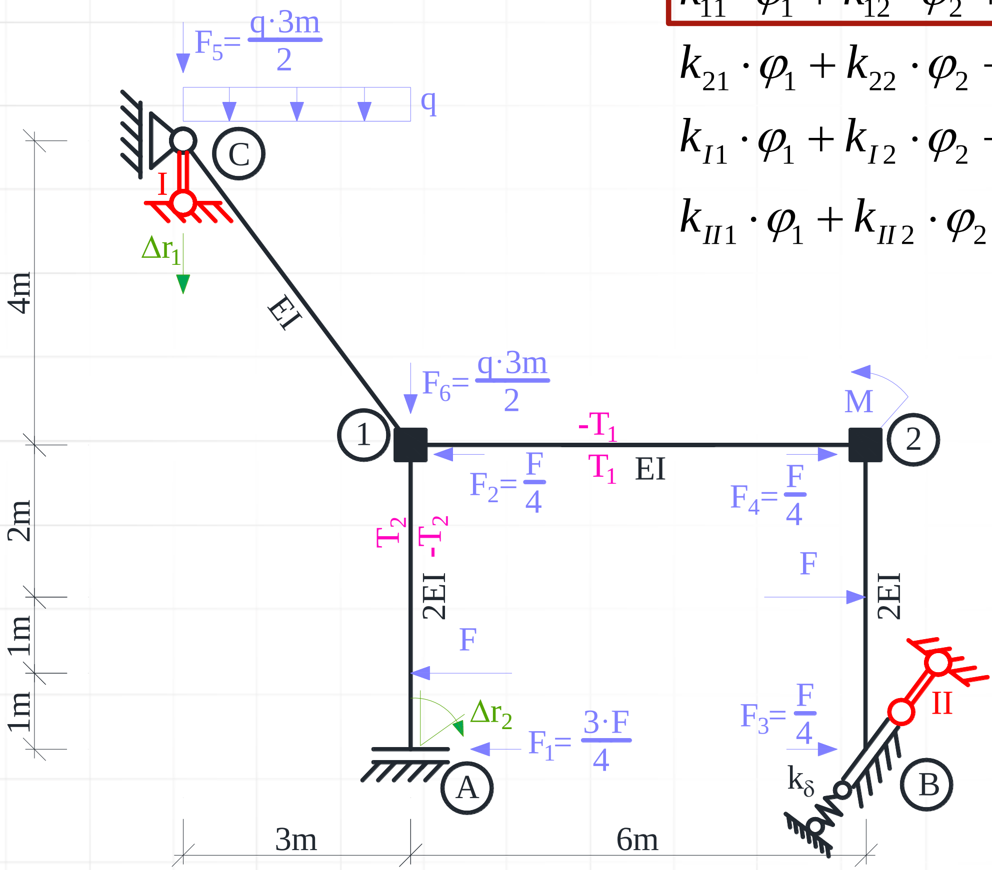
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$\boxed{k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0}$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

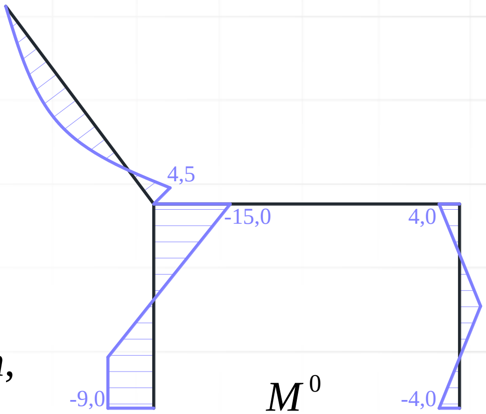
$$k_{11}=\sum_j M_{1j}^{1}+k_1^{\varphi}=M_{12}^{1}+M_{1A}^{1}+M_{1C}^{1}+k_1^{\varphi}=\left(0,6667+0,5+0,6+0\right)\frac{EI}{m}=\frac{53}{30}\frac{EI}{m}=1,7667\frac{EI}{m},$$

$$k_{12}=\sum_j M_{1j}^{2}=M_{12}^{2}+M_{1A}^{2}+M_{1C}^{2}=\left(0,3333+0+0\right)\frac{EI}{m}=0,3333\frac{EI}{m},$$

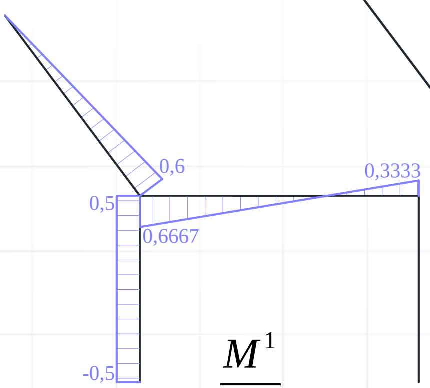
$$k_{1I}=\sum_j M_{1j}^{I}=M_{12}^{I}+M_{1A}^{I}+M_{1C}^{I}=0+0+\left(-\frac{1}{5}\right)\frac{EI}{m^2}=-0,2\frac{EI}{m^2},$$

$$k_{1II}=\sum_j M_{1j}^{II}=M_{12}^{II}+M_{1A}^{II}+M_{1C}^{II}=\frac{2}{15}\frac{EI}{m^2}+0+0=0,1333\frac{EI}{m^2},$$

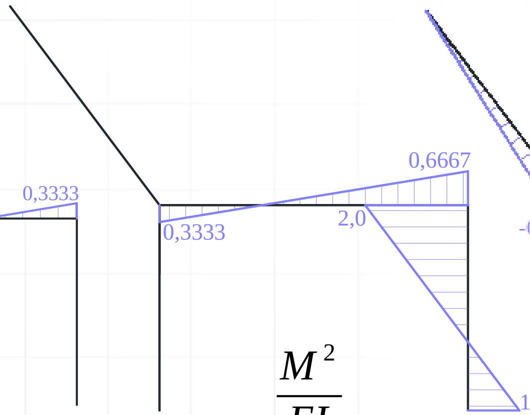
$$k_{1o}=\sum_j M_{1j}^{o}=M_{12}^{o}+M_{1A}^{o}+M_{1C}^{o}=0-15kN\cdot m+4,5kN\cdot m=-10,5kN\cdot m,$$



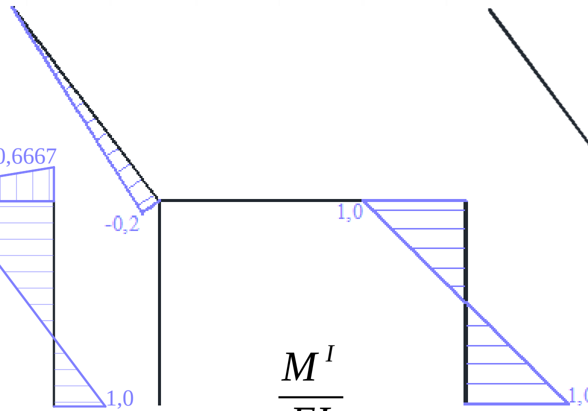
$$\frac{M^0}{kN\cdot m}$$



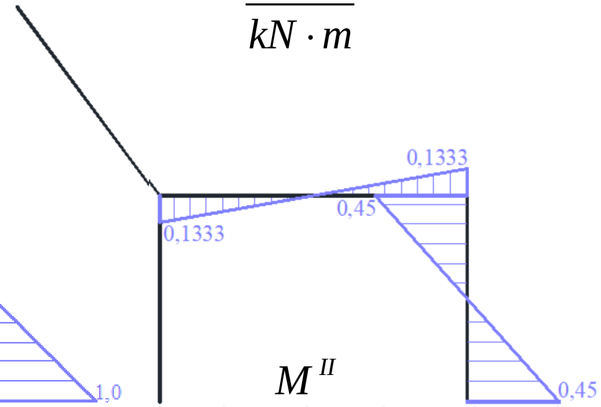
$$\frac{M^1}{\frac{EI}{m}}$$



$$\frac{M^2}{\frac{EI}{m}}$$



$$\frac{M^I}{\frac{EI}{m^2}}$$



$$\frac{M^{II}}{\frac{EI}{m^2}}$$

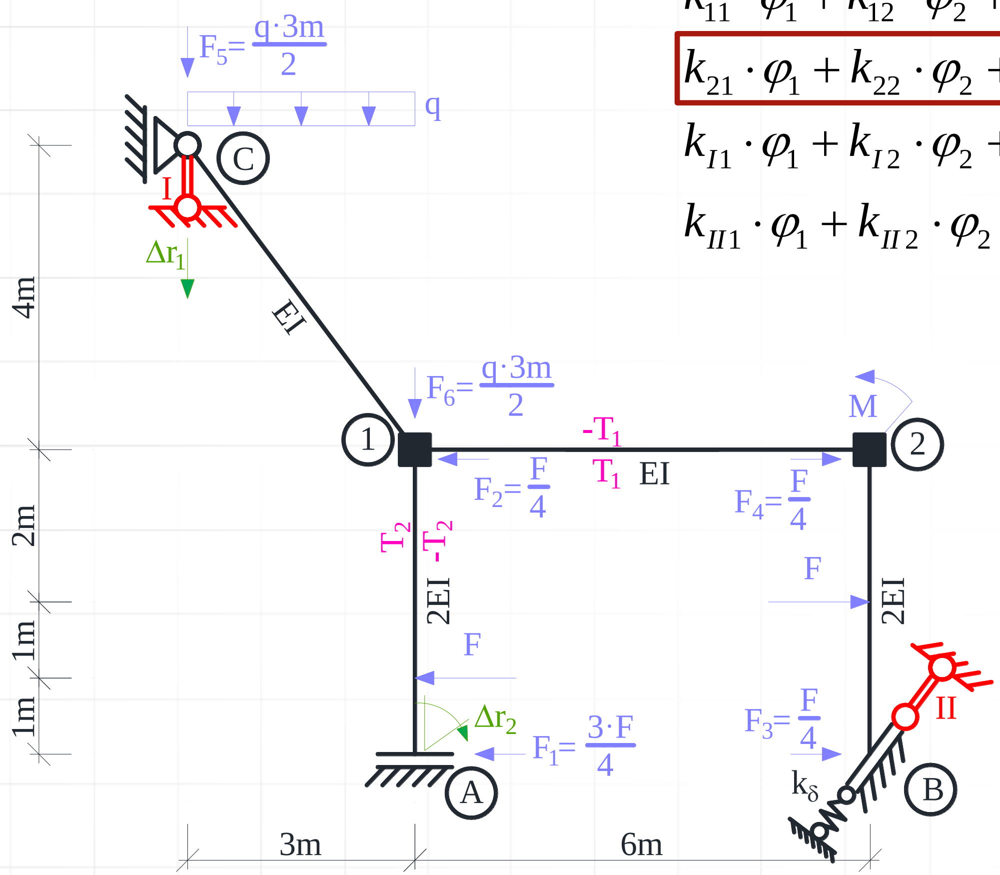
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$\boxed{k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0}$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

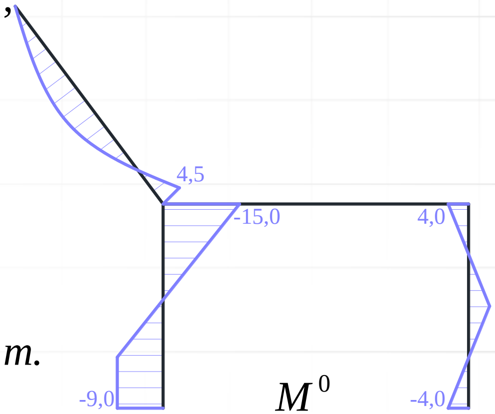
$$k_{21} = \sum_j M^1_{2j} = M^1_{21} + M^1_{2B} = \left(0{,}3333 + 0\right)\frac{EI}{m} = 0{,}3333\frac{EI}{m},$$

$$k_{22} = \sum_j M^2_{2j} + k_2^{\varphi} = M^2_{21} + M^2_{2B} + k_2^{\varphi} = \left(\frac{2}{3} + 2 + 0\right)\frac{EI}{m} = \frac{8}{3}\frac{EI}{m} = 2{,}6667\frac{EI}{m},$$

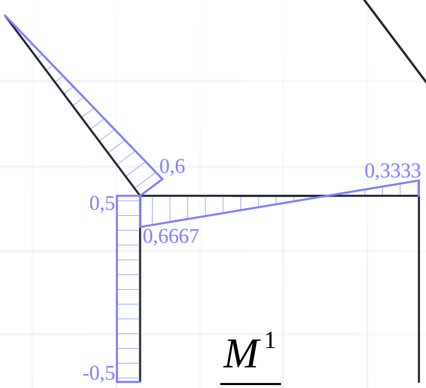
$$k_{2I} = \sum_j M^I_{2j} = M^I_{21} + M^I_{2B} = 0 + 1\frac{EI}{m^2} = 1\frac{EI}{m^2},$$

$$k_{2II} = \sum_j M^I_{2j} = M^{II}_{21} + M^{II}_{2B} = \left(\frac{2}{15}\right)\frac{EI}{m^2} + \left(\frac{9}{20}\right)\frac{EI}{m^2} = \frac{7}{12}\frac{EI}{m^2} = 0{,}5833\frac{EI}{m^2},$$

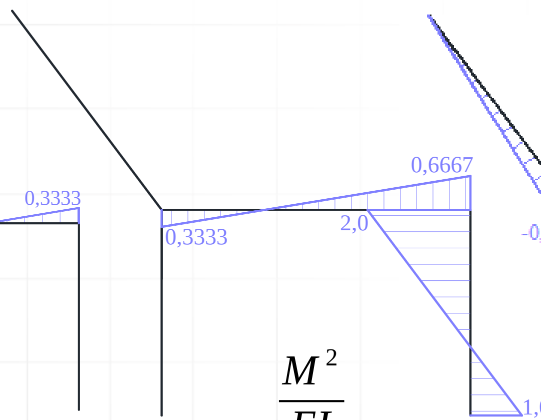
$$k_{2o} = \sum_j M^o_{2j} - M^o_2 = M^o_{21} + M^o_{2B} - (-M) = \left[0 + 4 - (-20)\right] kN \cdot m = 24 kN \cdot m.$$



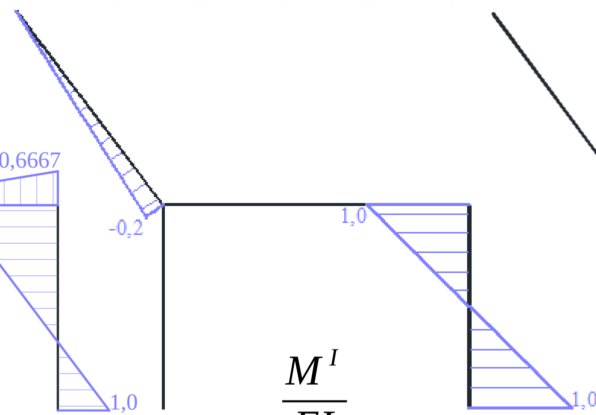
$$\frac{M^0}{kN \cdot m}$$



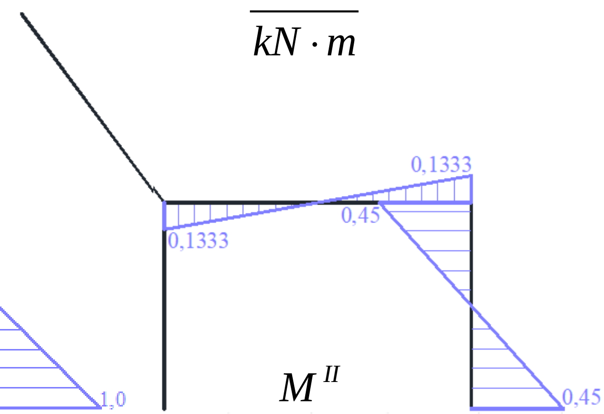
$$\frac{M^1}{\frac{EI}{m}}$$



$$\frac{M^2}{\frac{EI}{m}}$$

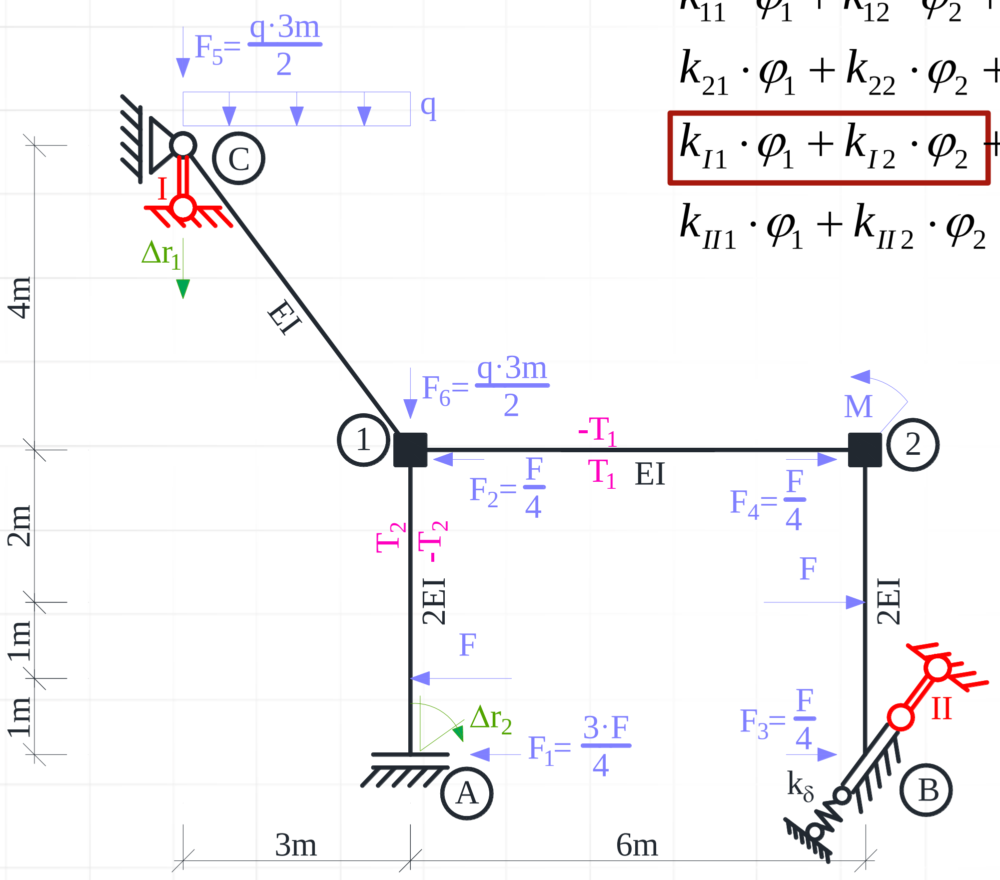


$$\frac{M^I}{\frac{EI}{m^2}}$$



$$\frac{M^{II}}{\frac{EI}{m^2}}$$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ



$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$\boxed{k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2} + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

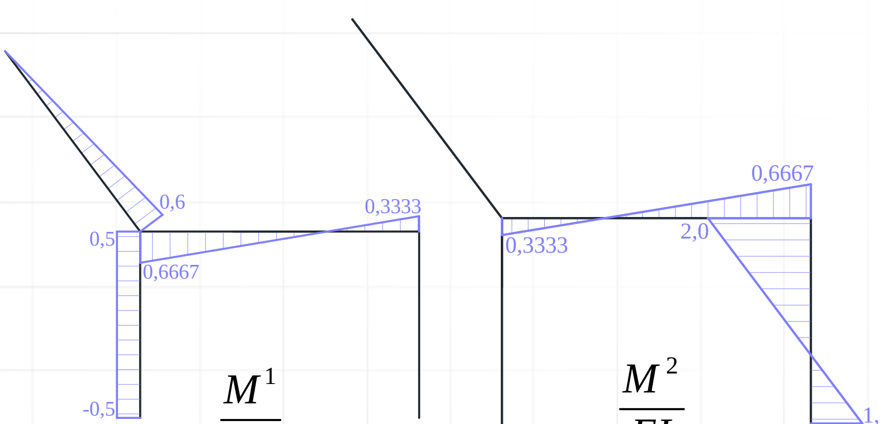
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{I1}=-\sum_{ij}\left(M_{ij}^{1}+M_{ji}^{1}\right)\psi_{ij}^{I}=-\left(M_{12}^{1}+M_{21}^{1}\right)\psi_{12}^{I}-\left(M_{1A}^{1}+M_{A1}^{1}\right)\psi_{1A}^{I}-\left(M_{1C}^{1}+M_{C1}^{1}\right)\psi_{1C}^{I}-\left(M_{2B}^{1}+M_{B2}^{1}\right)\psi_{2B}^{I}=$$

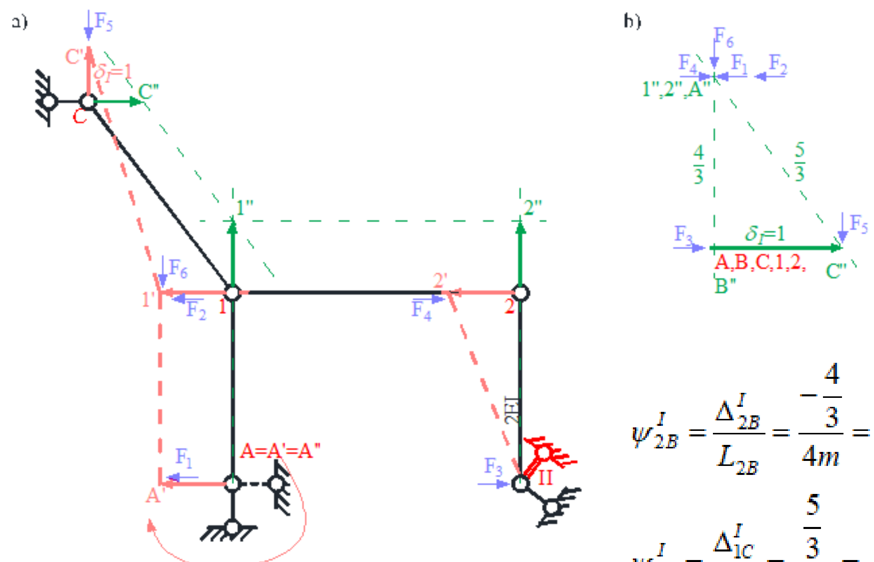
$$=-\left(0,6667\frac{EI}{m}+0,3333\frac{EI}{m}\right)\cdot 0-\left(0,5\frac{EI}{m}-0,5\frac{EI}{m}\right)\cdot 0-\left(0,6\frac{EI}{m}+0\right)\cdot\frac{1}{3m}-(0+0)\cdot(-\frac{1}{3m})=-0,2\frac{EI}{m^{2}},$$

$$k_{I2}=-\sum_{ij}\left(M_{ij}^{2}+M_{ji}^{2}\right)\psi_{ij}^{I}=-\left(M_{12}^{2}+M_{21}^{2}\right)\psi_{12}^{I}-\left(M_{1A}^{2}+M_{A1}^{2}\right)\psi_{1A}^{I}-\left(M_{1C}^{2}+M_{C1}^{2}\right)\psi_{1C}^{I}-\left(M_{2B}^{2}+M_{B2}^{2}\right)\psi_{2B}^{I}=$$

$$=-\left(0,3333\frac{EI}{m}+0,6667\frac{EI}{m}\right)\cdot 0-(0-0)\cdot 0-(0+0)\cdot\frac{1}{3m}-\left(1\frac{EI}{m}+2\frac{EI}{m}\right)\cdot(-\frac{1}{3m})=1\frac{EI}{m^{2}},$$



$\dfrac{M^{1}}{\dfrac{EI}{m}}$ $\dfrac{M^{2}}{\dfrac{EI}{m}}$



$$\psi_{2B}^{I}=\frac{\Delta_{2B}^{I}}{L_{2B}}=\frac{-\frac{4}{3}}{4m}=-\frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1C}^{I}=\frac{\Delta_{1C}^{I}}{L_{1C}}=\frac{\frac{5}{3}}{5m}=\frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1A}^{I}=\psi_{12}^{I}=0$$

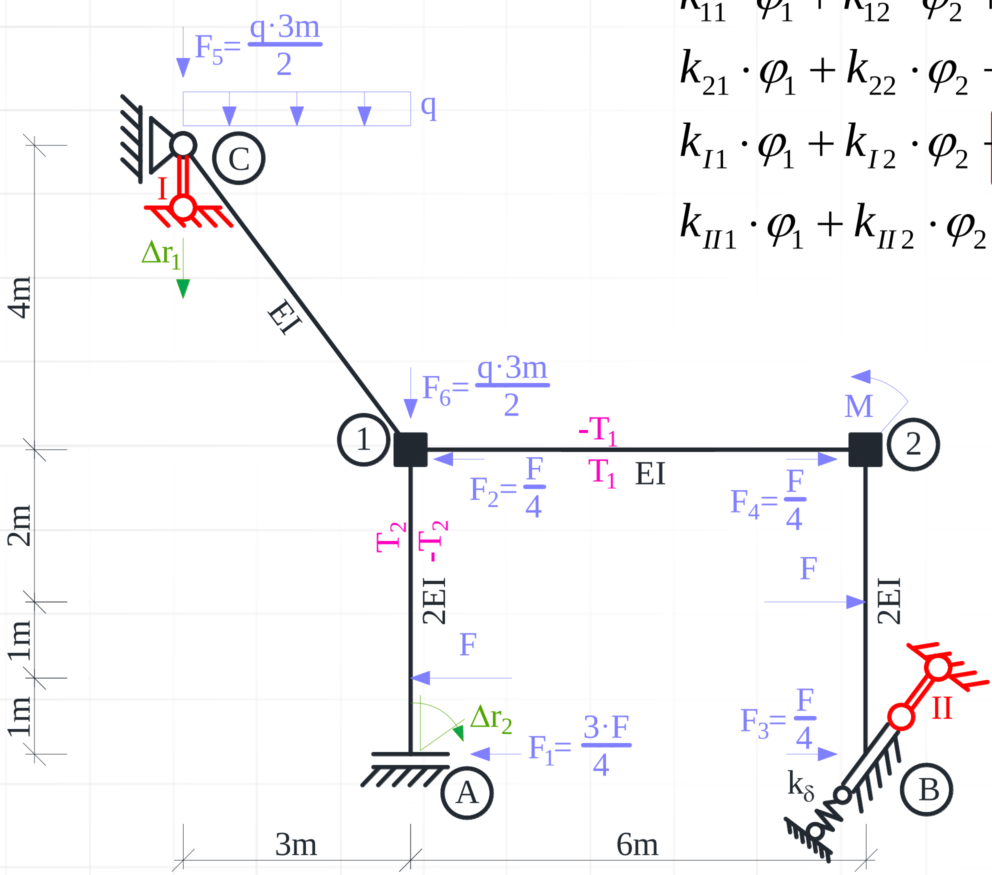
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 \boxed{+ k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II}} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Laboratorium nr 4

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{I,I} = -\sum_{ij}\left(M_{ij}^{I}+M_{ji}^{I}\right)\psi_{ij}^{I} + \sum_{ij} k_s^{\delta}\cdot\delta_s^{I}\cdot\delta_s^{I} = -\left(M_{12}^{I}+M_{21}^{I}\right)\psi_{12}^{I} - \left(M_{1A}^{I}+M_{A1}^{I}\right)\psi_{1A}^{I} - \left(M_{1C}^{I}+M_{C1}^{I}\right)\psi_{1C}^{I} -$$

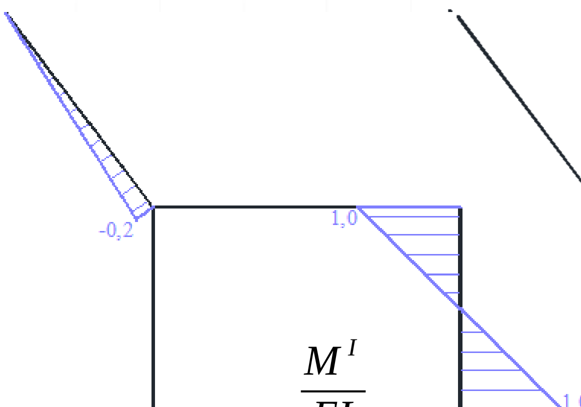
$$-\left(M_{2B}^{I}+M_{B2}^{I}\right)\psi_{2B}^{I} + k^{\delta}\cdot\delta^{I}\cdot\delta^{I} = -(0+0)\cdot 0 - (0-0)\cdot 0 - \left(-\frac{1}{5}\frac{EI}{m^2}+0\right)\cdot\frac{1}{3m} - \left(1\frac{EI}{m^2}+1\frac{EI}{m^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3m}\right) +$$

$$+8\frac{EI}{m^3}\cdot 0\cdot 0 = 0,7333\frac{EI}{m^3},$$

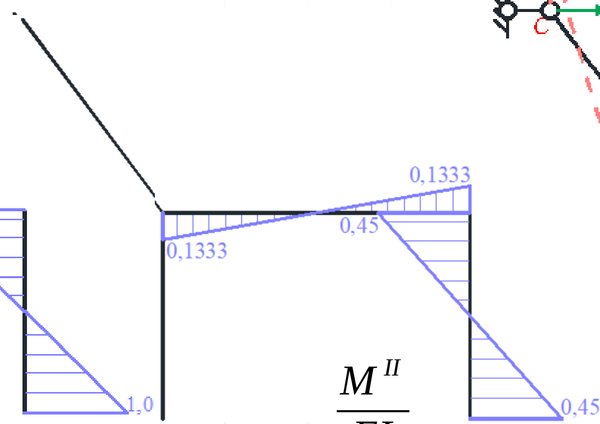
$$k_{I,II} = -\sum_{ij}\left(M_{ij}^{II}+M_{ji}^{II}\right)\psi_{ij}^{I} + \sum_{ij} k_s^{\delta}\cdot\delta_s^{I}\cdot\delta_s^{II} = -\left(M_{12}^{II}+M_{21}^{II}\right)\psi_{12}^{I} - \left(M_{1A}^{II}+M_{A1}^{II}\right)\psi_{1A}^{I} - \left(M_{1C}^{II}+M_{C1}^{II}\right)\psi_{1C}^{I} -$$

$$-\left(M_{2B}^{II}+M_{B2}^{II}\right)\psi_{2B}^{I} + k^{\delta}\cdot\delta^{I}\cdot\delta^{II} = -\left(\frac{2}{15}\frac{EI}{m^2}+\frac{2}{15}\frac{EI}{m^2}\right)\cdot 0 - (0-0)\cdot 0 - (0+0)\cdot 0 - \left(\frac{9}{20}\frac{EI}{m^2}+\frac{9}{20}\frac{EI}{m^2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{3m}\right) +$$

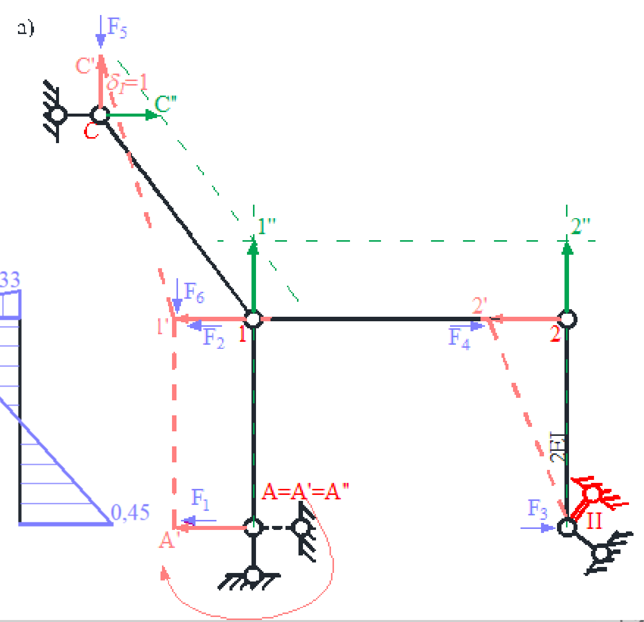
$$+8\frac{EI}{m^3}\cdot 0\cdot 1 = 0,3\frac{EI}{m^3},$$

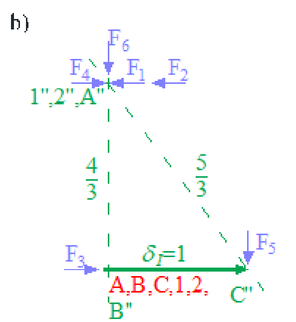


$$\frac{M^{I}}{\frac{EI}{m^2}}$$



$$\frac{M^{II}}{\frac{EI}{m^2}}$$





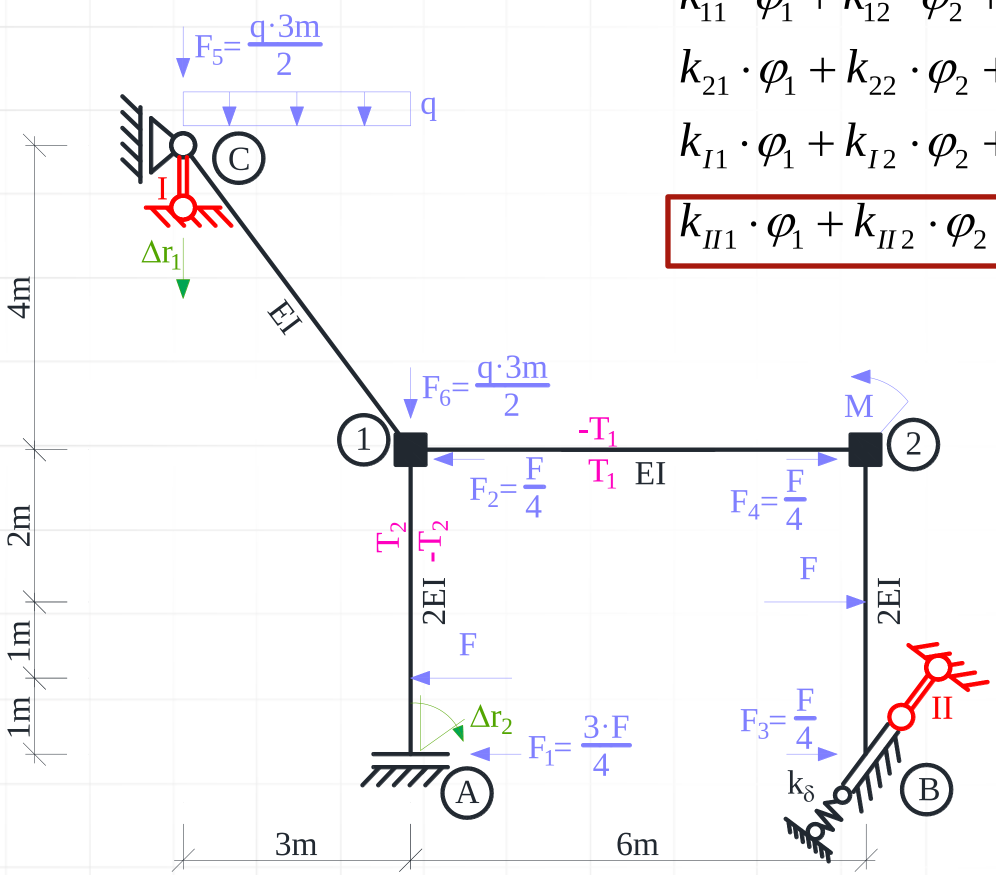
$$\psi_{2B}^{I} = \frac{\Delta_{2B}^{I}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1C}^{I} = \frac{\Delta_{1C}^{I}}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1A}^{I} = \psi_{12}^{I} = 0$$

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{11}\cdot\varphi_1+k_{12}\cdot\varphi_2+k_{1I}\cdot\delta_I+k_{1II}\cdot\delta_{II}+k_{1o}=0$$
$$k_{21}\cdot\varphi_1+k_{22}\cdot\varphi_2+k_{2I}\cdot\delta_I+k_{2II}\cdot\delta_{II}+k_{2o}=0$$
$$k_{I1}\cdot\varphi_1+k_{I2}\cdot\varphi_2+k_{I\,I}\cdot\delta_I+k_{I\,II}\cdot\delta_{II}+k_{Io}=0$$
$$\boxed{k_{II1}\cdot\varphi_1+k_{II2}\cdot\varphi_2+}k_{II\,I}\cdot\delta_I+k_{II\,II}\cdot\delta_{II}+k_{IIo}=0$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

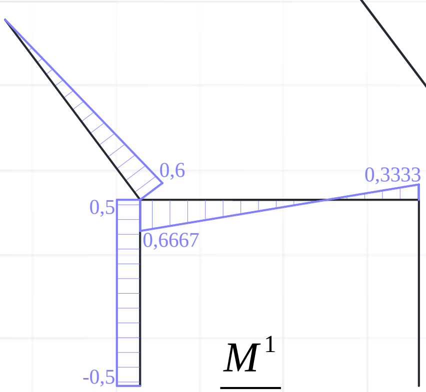
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{II1} = -\sum_{ij}\left(M_{ij}^{1}+M_{ji}^{1}\right)\psi_{ij}^{II} = -\left(M_{12}^{1}+M_{21}^{1}\right)\psi_{12}^{II} - \left(M_{1A}^{1}+M_{A1}^{1}\right)\psi_{1A}^{II} - \left(M_{1C}^{1}+M_{C1}^{1}\right)\psi_{1C}^{II} - \left(M_{2B}^{1}+M_{B2}^{1}\right)\psi_{2B}^{II} =$$

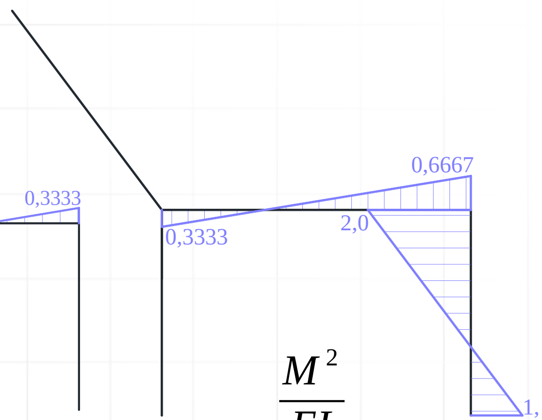
$$= -\left(0{,}6667\frac{EI}{m}+0{,}3333\frac{EI}{m}\right)\cdot\left(-\frac{4}{30m}\right) - \left(0{,}5\frac{EI}{m}-0{,}5\frac{EI}{m}\right)\cdot 0 - \left(0{,}6\frac{EI}{m}+0\right)\cdot 0 - \left(0+0\right)\cdot\left(-\frac{3}{20m}\right) = \frac{2}{15}\frac{EI}{m^2},$$

$$k_{II2} = -\sum_{ij}\left(M_{ij}^{2}+M_{ji}^{2}\right)\psi_{ij}^{II} = -\left(M_{12}^{2}+M_{21}^{2}\right)\psi_{12}^{II} - \left(M_{1A}^{2}+M_{A1}^{2}\right)\psi_{1A}^{II} - \left(M_{1C}^{2}+M_{C1}^{2}\right)\psi_{1C}^{II} - \left(M_{2B}^{2}+M_{B2}^{2}\right)\psi_{2B}^{II} =$$

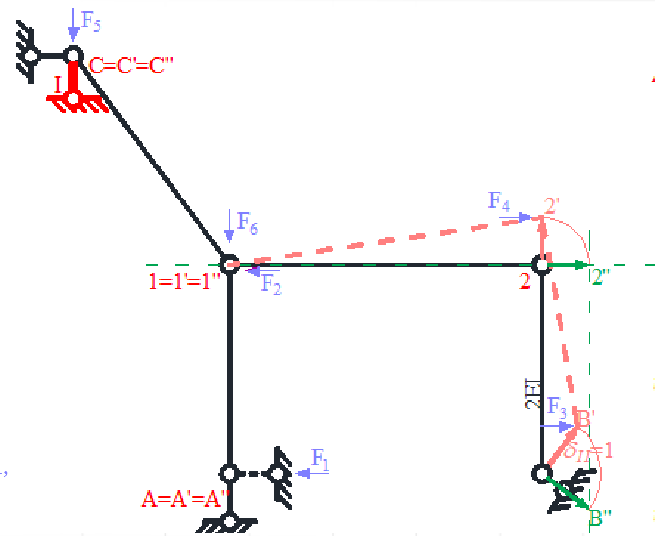
$$= -\left(0{,}3333\frac{EI}{m}+0{,}6667\frac{EI}{m}\right)\cdot\left(-\frac{4}{30m}\right) - \left(0-0\right)\cdot 0 - \left(0+0\right)\cdot 0 - \left(1\frac{EI}{m}+2\frac{EI}{m}\right)\cdot\left(-\frac{3}{20m}\right) = 0{,}5833\frac{EI}{m^2},$$

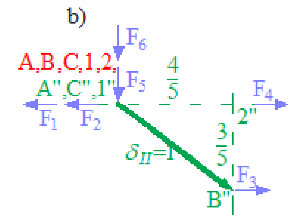


$$\frac{M^1}{\frac{EI}{m}}$$



$$\frac{M^2}{\frac{EI}{m}}$$





$$\psi_{12}^{II} = \frac{\Delta_{12}^{II}}{L_{12}} = \frac{-\frac{4}{5}}{6m} = -\frac{2}{15m}$$

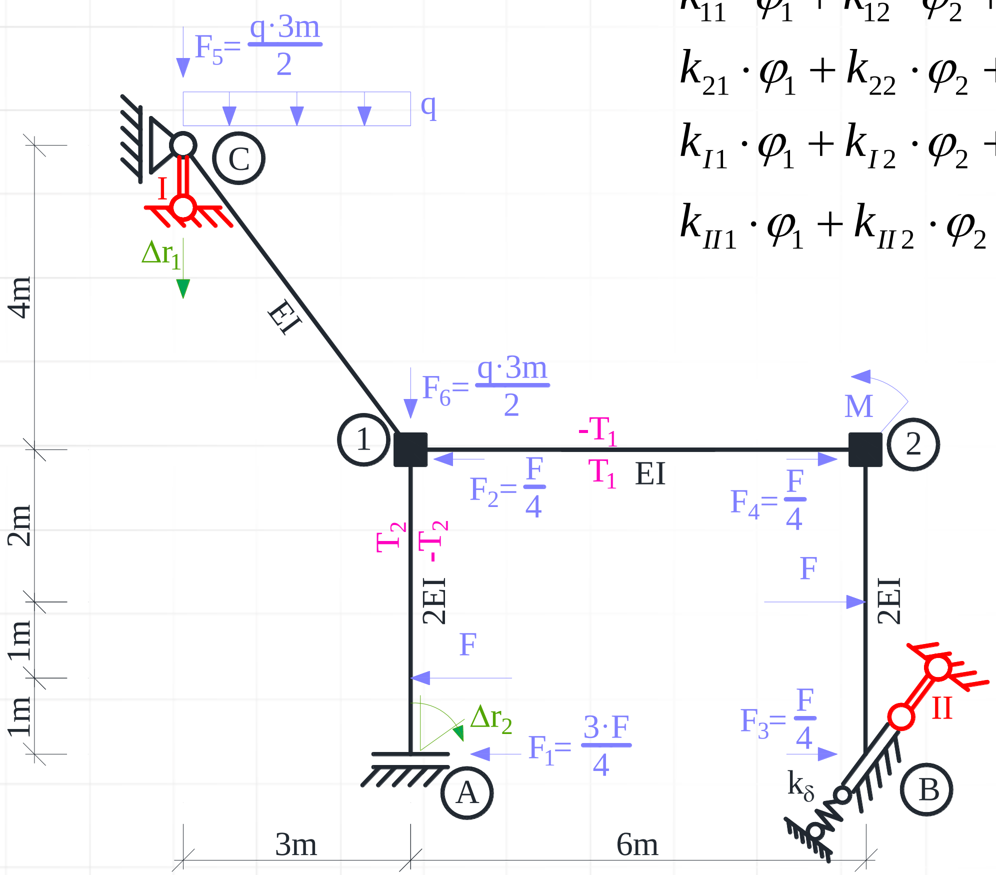
$$\psi_{2B}^{II} = \frac{\Delta_{2B}^{II}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{3}{5}}{4m} = -\frac{3}{20m}$$

$$\psi_{1A}^{II} = \psi_{1C}^{II} = 0$$

Laboratorium nr 4

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$
$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$
$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$
$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + \boxed{k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II}} + k_{IIo} = 0$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Laboratorium nr 4

WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{II,I} = -\sum_{ij}\left(M^{I}_{ij}+M^{I}_{ji}\right)\psi^{II}_{ij} + \sum_{ij} k^{\delta}_{s}\cdot\delta^{II}_{s}\cdot\delta^{I}_{s} = -\left(M^{I}_{12}+M^{I}_{21}\right)\psi^{II}_{12} - \left(M^{I}_{1A}+M^{I}_{A1}\right)\psi^{II}_{1A} - \left(M^{I}_{1C}+M^{I}_{C1}\right)\psi^{II}_{1C} -$$

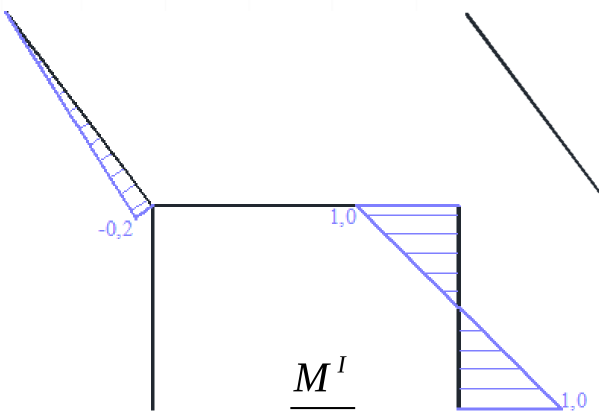
$$-\left(M^{I}_{2B}+M^{I}_{B2}\right)\psi^{II}_{2B} + k^{\delta}\cdot\delta^{II}\cdot\delta^{I} = -(0+0)\cdot(-\frac{4}{30m}) - (0+0)\cdot 0 - \left(-\frac{1}{5}\frac{EI}{m^2}+0\right)\cdot 0 - \left(1\frac{EI}{m^2}+1\frac{EI}{m^2}\right)\cdot(-\frac{3}{20m}) +$$

$$+8\frac{EI}{m^3}\cdot 1\cdot 0 = 0,3\frac{EI}{m^3},$$

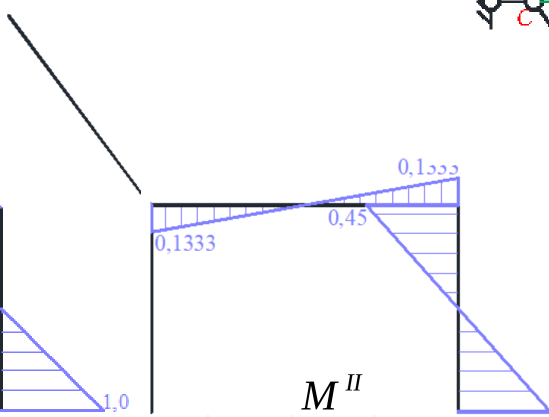
$$k_{II,II} = -\sum_{ij}\left(M^{II}_{ij}+M^{II}_{ji}\right)\psi^{II}_{ij} + \sum_{ij} k^{\delta}_{s}\cdot\delta^{II}_{s}\cdot\delta^{II}_{s} = -\left(M^{II}_{12}+M^{II}_{21}\right)\psi^{II}_{12} - \left(M^{II}_{1A}+M^{II}_{A1}\right)\psi^{II}_{1A} - \left(M^{II}_{1C}+M^{II}_{C1}\right)\psi^{II}_{1C} -$$

$$-\left(M^{II}_{2B}+M^{II}_{B2}\right)\psi^{II}_{2B} + k^{\delta}\cdot\delta^{II}\cdot\delta^{II} = -\left(\frac{2}{15}\frac{EI}{m^2}+\frac{2}{15}\frac{EI}{m^2}\right)\cdot(-\frac{4}{30m}) - (0-0)\cdot 0 - (0+0)\cdot 0 -$$

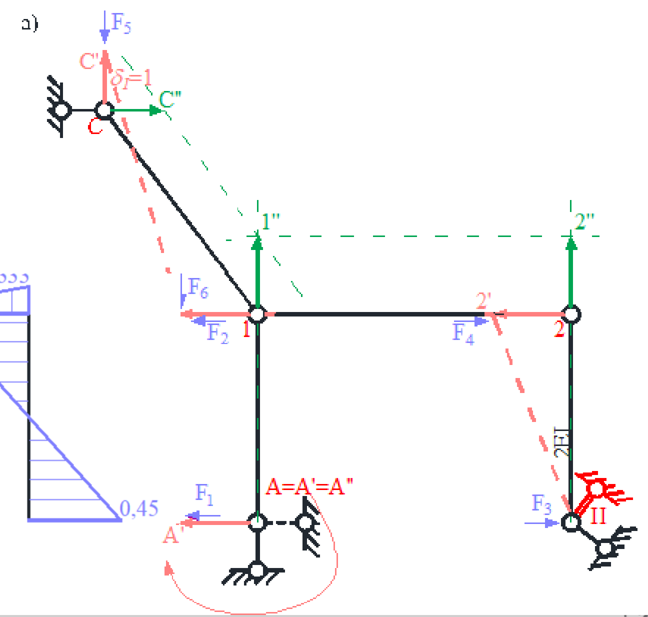
$$-\left(\frac{9}{20}\frac{EI}{m^2}+\frac{9}{20}\frac{EI}{m^2}\right)\cdot(-\frac{3}{20m}) + 8\frac{EI}{m^3}\cdot 1\cdot 1 = 8,1705.$$

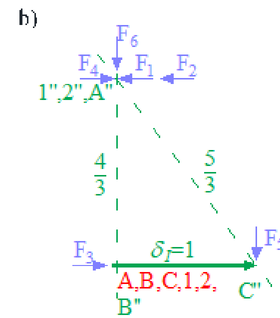


$$\frac{M^{I}}{\frac{EI}{m^2}}$$



$$\frac{M^{II}}{\frac{EI}{m^2}}$$





$$\psi^{I}_{2B} = \frac{\Delta^{I}_{2B}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m}$$

$$\psi^{I}_{1C} = \frac{\Delta^{I}_{1C}}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m}$$

$$\psi^{I}_{1A} = \psi^{I}_{12} = 0$$

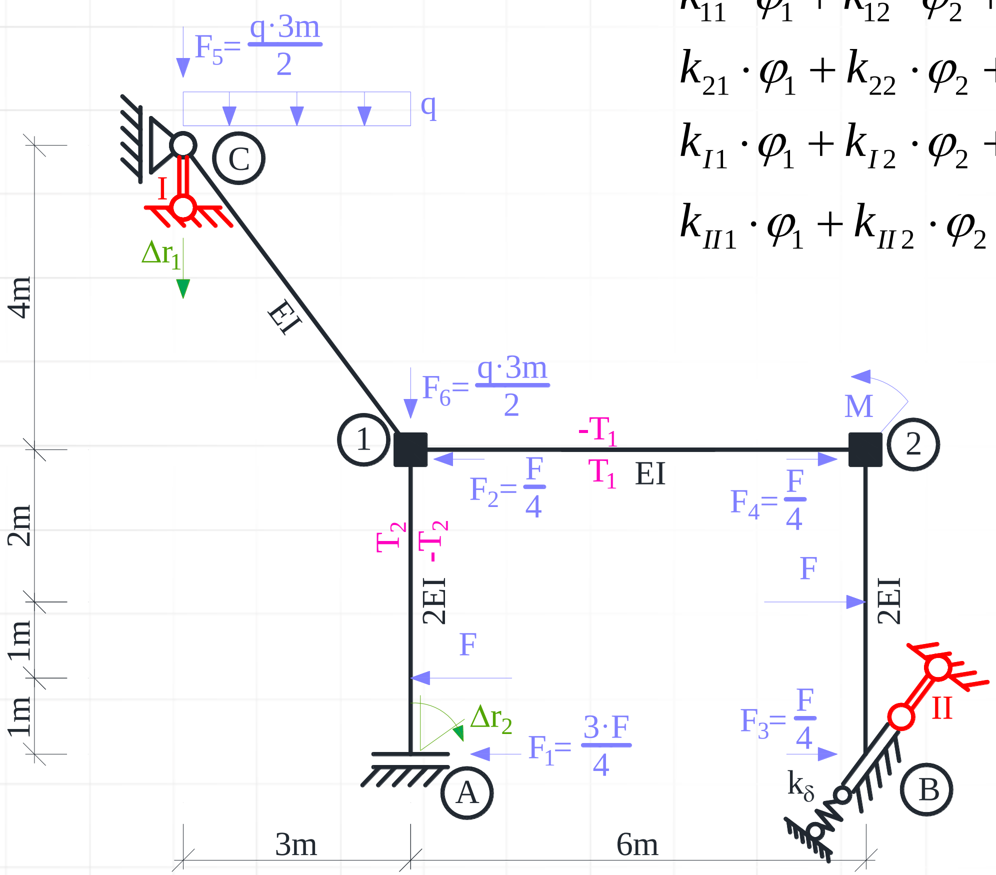
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{11}\cdot\varphi_1+k_{12}\cdot\varphi_2+k_{1I}\cdot\delta_I+k_{1II}\cdot\delta_{II}+k_{1o}=0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1+k_{22}\cdot\varphi_2+k_{2I}\cdot\delta_I+k_{2II}\cdot\delta_{II}+k_{2o}=0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1+k_{I2}\cdot\varphi_2+k_{I\,I}\cdot\delta_I+k_{I\,II}\cdot\delta_{II}+k_{Io}=0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1+k_{II2}\cdot\varphi_2+k_{II\,I}\cdot\delta_I+k_{II\,II}\cdot\delta_{II}+k_{IIo}=0$$



Rys. 2. Układ podstawowy metody przemieszczeń

Laboratorium nr 4

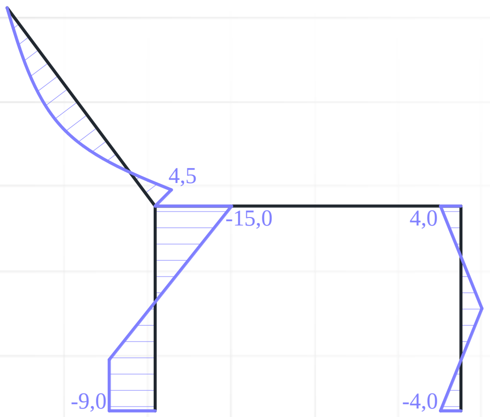
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{Io} = -\sum_{ij}\left(M_{ij}^{o} + M_{ji}^{o}\right)\psi_{ij}^{I} - \sum_{P} P_{P}\cdot\delta_{P}^{I} = -\left(M_{12}^{o} + M_{21}^{o}\right)\psi_{12}^{I} - \left(M_{1A}^{o} + M_{A1}^{o}\right)\psi_{1A}^{I} - \left(M_{1C}^{o} + M_{C1}^{o}\right)\psi_{1C}^{I} -$$

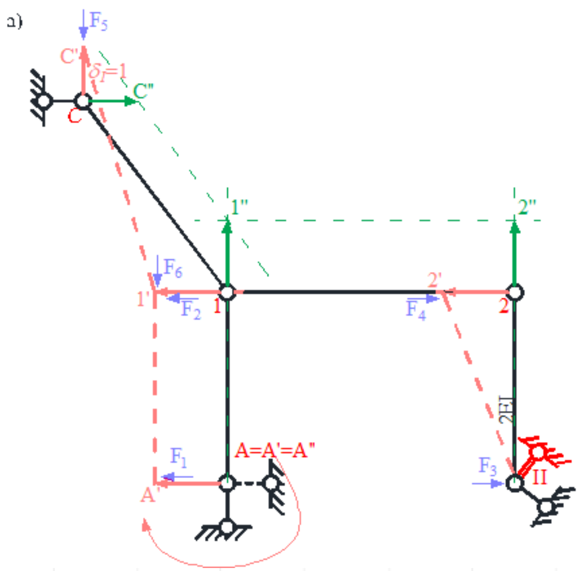
$$-\left(M_{2B}^{o} + M_{B2}^{o}\right)\psi_{2B}^{I} - P_1\cdot\delta_1^{I} - P_2\cdot\delta_2^{I} - P_3\cdot\delta_3^{I} - P_4\cdot\delta_4^{I} - P_5\cdot\delta_5^{I} - P_6\cdot\delta_6^{I} = -(0+0)\cdot 0 -$$

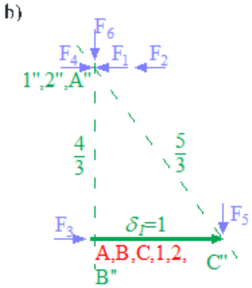
$$-(-15kN\cdot m - 9kN\cdot m)\cdot 0 - (0 + 4{,}5kN\cdot m)\cdot\frac{1}{3m} - (4kN\cdot m - 4kN\cdot m)\cdot(-\frac{1}{3m}) - 6kN\cdot\frac{4}{3} - 2kN\cdot\frac{4}{3} -$$

$$-4kN\cdot 0 - 4kN\cdot(-\frac{4}{3}) - 6kN\cdot(-1) - 6kN\cdot 0 = -0{,}8333kN,$$



$$\frac{M^{0}}{kN\cdot m}$$





$$\psi_{2B}^{I} = \frac{\Delta_{2B}^{I}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1C}^{I} = \frac{\Delta_{1C}^{I}}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m}$$

$$\psi_{1A}^{I} = \psi_{12}^{I} = 0$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta_1^{I} = \frac{4}{3},\qquad \delta_2^{I} = \frac{4}{3},\qquad \delta_3^{I} = 0,\qquad \delta_4^{I} = -\frac{4}{3},\qquad ,\delta_5^{I} = -1,\qquad \delta_6^{I} = 0.$$

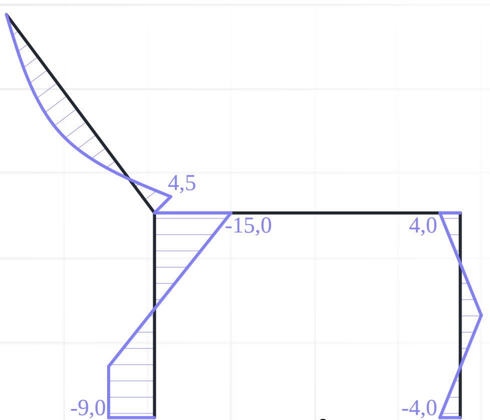
WSPÓŁCZYNNIKI UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ

$$k_{IIo} = -\sum_{ij}\left(M^{o}_{ij}+M^{o}_{ji}\right)\psi^{II}_{ij} - \sum_{P} P_P\cdot\delta^{II}_{P} = -\left(M^{o}_{12}+M^{o}_{21}\right)\psi^{II}_{12} - \left(M^{o}_{1A}+M^{o}_{A1}\right)\psi^{II}_{1A} - \left(M^{o}_{1C}+M^{o}_{C1}\right)\psi^{II}_{1C} -$$

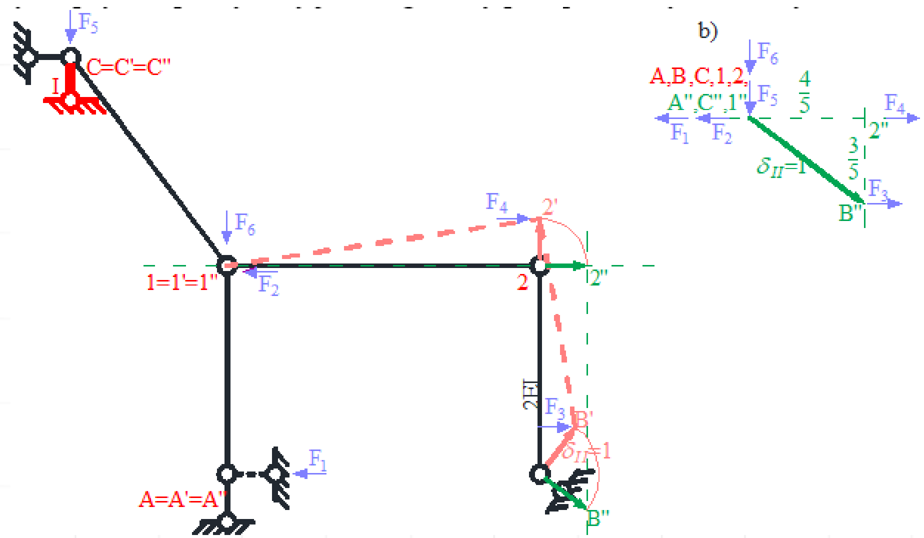
$$-\left(M^{o}_{2B}+M^{o}_{B2}\right)\psi^{II}_{2B} - P_1\cdot\delta^{II}_1 - P_2\cdot\delta^{II}_2 - P_3\cdot\delta^{II}_3 - P_4\cdot\delta^{II}_4 - P_5\cdot\delta^{II}_5 - P_6\cdot\delta^{II}_6 = -(0+0)\cdot\left(-\frac{4}{30m}\right) -$$

$$-\left(-15kN\cdot m - 9kN\cdot m\right)\cdot 0 - \left(0+4,5kN\cdot m\right)\cdot 0 - \left(4kN\cdot m - 4kN\cdot m\right)\cdot\left(-\frac{3}{20m}\right) - 6kN\cdot 0 - 2kN\cdot 0 -$$

$$-4kN\cdot\frac{3}{5} - 4kN\cdot 0 - 6kN\cdot 0 - 6kN\cdot 0 = -2,4kN.$$



$$\frac{M^0}{kN\cdot m}$$



$$\psi^{I}_{2B} = \frac{\Delta^{I}_{2B}}{L_{2B}} = \frac{-\frac{4}{3}}{4m} = -\frac{1}{3m}$$

$$\psi^{I}_{1C} = \frac{\Delta^{I}_{1C}}{L_{1C}} = \frac{\frac{5}{3}}{5m} = \frac{1}{3m}$$

$$\psi^{I}_{1A} = \psi^{I}_{12} = 0$$

Przesunięcia w miejscach sił równoważnych:

$$\delta^{II}_1 = 0, \quad \delta^{II}_2 = 0, \quad \delta^{II}_3 = \frac{3}{5}, \quad \delta^{II}_4 = 0, \quad \delta^{II}_5 = 0, \quad \delta^{II}_6 = 0$$

SZCZEGÓŁOWA POSTAĆ UKŁADU RÓWNAŃ METODY PRZEMIESZCZEŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

$$1{,}7667\frac{EI}{m}\cdot\varphi_1+0{,}3333\frac{EI}{m}\cdot\varphi_2-0{,}2\frac{EI}{m^2}\cdot\delta_I+\frac{2}{15}\frac{EI}{m^2}\cdot\delta_{II}-10{,}5kN\cdot m=0$$

$$0{,}3333\frac{EI}{m}\cdot\varphi_1+2{,}66671\frac{EI}{m}\cdot\varphi_2+1\frac{EI}{m^2}\cdot\delta_I+0{,}5833\frac{EI}{m^2}\cdot\delta_{II}+24kN\cdot m=0$$

$$-0{,}2\frac{EI}{m^2}\cdot\varphi_1+1\frac{EI}{m^2}\cdot\varphi_2+0{,}7333\frac{EI}{m^3}\cdot\delta_I+0{,}3\frac{EI}{m^3}\cdot\delta_{II}-0{,}8333kN=0$$

$$\frac{2}{15}\frac{EI}{m^2}\cdot\varphi_1+0{,}5833\frac{EI}{m^2}\cdot\varphi_2+0{,}3\frac{EI}{m^3}\cdot\delta_I+8{,}1705\frac{EI}{m^3}\cdot\delta_{II}-2{,}4kN=0$$

$$\varphi_1=15{,}6360\frac{kN\cdot m^2}{EI},\qquad \varphi_2=-26{,}6186\frac{kN\cdot m^2}{EI},$$

$$\delta_I=41{,}5294\frac{kN\cdot m^3}{EI},\qquad \delta_{II}=0{,}4142\frac{kN\cdot m^3}{EI}.$$

OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^{1} \cdot \varphi_1 + M_{ij}^{2} \cdot \varphi_2 + M_{ij}^{I} \cdot \delta_I + M_{ij}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{ij}^{o},$$

Momenty brzegowe

$$M_{12} = M_{12}^{1} \cdot \varphi_1 + M_{12}^{2} \cdot \varphi_2 + M_{12}^{I} \cdot \delta_I + M_{12}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{12}^{o} = 0,6667 \frac{EI}{m} \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+0,3333 \frac{EI}{m} \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 = 1,6034 kN \cdot m$$

$$M_{21} = M_{21}^{1} \cdot \varphi_1 + M_{21}^{2} \cdot \varphi_2 + M_{21}^{I} \cdot \delta_I + M_{12}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{21}^{o} = 0,3333 \frac{EI}{m} \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+0,6667 \frac{EI}{m} \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0,1333 \frac{EI}{m^2} \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 = -12,4785 kN \cdot m$$

$$M_{1A} = M_{1A}^{1} \cdot \varphi_1 + M_{1A}^{2} \cdot \varphi_2 + M_{1A}^{I} \cdot \delta_I + M_{1A}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1A}^{o} = 0,5 \frac{EI}{m} \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0 \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + (-15) kN \cdot m = -7,1820 kN \cdot m$$

$$M_{A1} = M_{A1}^{1} \cdot \varphi_1 + M_{A1}^{2} \cdot \varphi_2 + M_{A1}^{I} \cdot \delta_I + M_{A1}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{A1}^{o} = -0,5 \frac{EI}{m} \cdot 15,6360 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0 \cdot (-26,6186) \frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

$$+0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 \cdot 41,5294 \frac{kN \cdot m^3}{EI} + (-9) kN \cdot m = -16,8180 kN \cdot m$$

OBLICZENIE WARTOŚCI SIŁ PRZEKROJOWYCH

Momenty brzegowe określamy korzystając z zasady superpozycji na podstawie wzoru:

$$M_{ij} = M_{ij}^{1} \cdot \varphi_1 + M_{ij}^{2} \cdot \varphi_2 + M_{ij}^{I} \cdot \delta_I + M_{ij}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{ij}^{o},$$

Momenty brzegowe:

$$M_{1C} = M_{1C}^{1} \cdot \varphi_1 + M_{1C}^{2} \cdot \varphi_2 + M_{1C}^{I} \cdot \delta_I + M_{1C}^{II} \cdot \delta_{II} + M_{1C}^{o} = 0,6\frac{EI}{m} \cdot 15,6360\frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0 \cdot (-26,6186)\frac{kN \cdot m^2}{EI} +$$

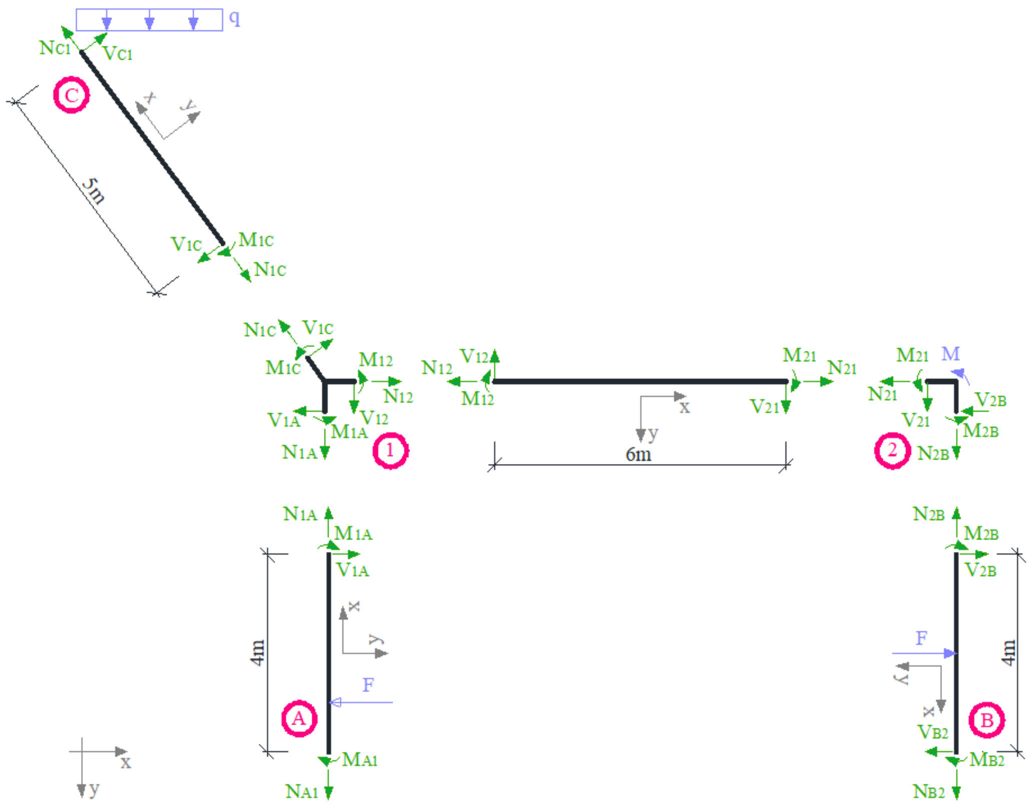
$$+(-0,2)\frac{EI}{m^2} \cdot 41,5294\frac{kN \cdot m^3}{EI} + 0 \cdot 41,5294\frac{kN \cdot m^3}{EI} + 4,5kN \cdot m = 5,5757kN \cdot m.$$

Moment w więzi sprężystej:

$$S_{\delta} = S_1^{\delta_I} \cdot \delta_I + S_1^{\delta_{II}} \cdot \delta_{II} = 0 \cdot 41,5294\frac{kN \cdot m^3}{EI} + 8\frac{EI}{m^3} \cdot 0,4142\frac{kN \cdot m^3}{EI} = 3,3136\frac{EI}{m^3}$$

OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH

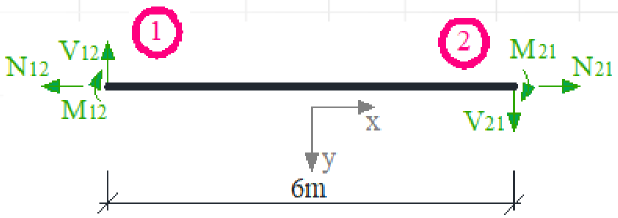
Siły tnące określamy korzystając ze statycznych równań równowagi elementów (prętów) przy wyznaczonych już momentach brzegowych z uwzględnieniem obciążenia zewnętrznego na elementach. Siły osiowe wyznaczamy ze statycznych równań równowagi wyciętych węzłów z uwzględnieniem już wyznaczonych brzegowych sił tnących oraz obciążeń działających w węzłach. W tym celu układ dzielimy na pręty i węzły, obciążając wydzielone elementy obciążeniem danym i na brzegach siłami brzegowymi.



Rys. 8. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH

Pręt 1-2

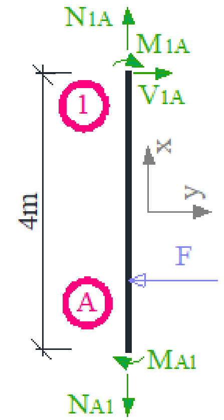


$$\sum M_1 = M_{12} + M_{21}^F + V_{21}\cdot 6m = \left[1{,}6037 + (-12{,}4785) + V_{21}\cdot 6\right]kN\cdot m = 0 \Rightarrow V_{21} = 1{,}8120kN,$$

$$\sum V = V_{12} - V_{21} = \left[V_{12} - 1{,}8120\right]kN = 0 \Rightarrow V_{12} = 1{,}8120,$$

$$\sum N = N_{12} - N_{21} = 0 \Rightarrow N_{12} = N_{21}.$$

Pręt 1-A

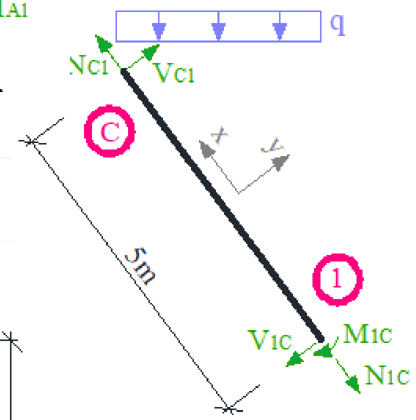


$$\sum V = -V_{1A} + F = \left[-V_{1A} + 8\right]kN = 0 \Rightarrow V_{1A} = 8kN,$$

$$\sum M_A = M_{A1} + M_{1A} + V_{1A}\cdot 4m - F\cdot 1m = \left[(-16{,}8180) + (-7{,}1820) + 8\cdot 4 - 8\cdot 1\right]kN\cdot m = 0,$$

$$\sum N = N_{A1} - N_{1A} = 0 \Rightarrow N_{A1} = N_{1A}.$$

Pręt 1-C

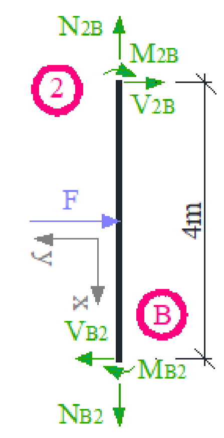


$$\sum M_C = M_{1C} + V_{1C}\cdot 5m + q\cdot 3m\cdot 1{,}5m = \left[5{,}5757 + V_{1C}\cdot 5 + 4\cdot 3\cdot 1{,}5\right]kN\cdot m = 0 \Rightarrow V_{1C} = -4{,}7151kN,$$

$$\sum M_1 = M_{1C} + V_{C1}\cdot 5m - q\cdot 3m\cdot \cos\alpha = \left[5{,}1908 + V_{C1}\cdot 5 - 4\cdot 3\cdot 1{,}5\right]kN\cdot m = 0 \Rightarrow V_{C1} = 2{,}4849kN,$$

$$\sum N = N_{1C} - N_{C1} + q\cdot 3m\cdot\cos\alpha = \left[N_{1C} - N_{C1} + 4\cdot 3\cdot 0{,}8\right]kN = 0 \Rightarrow N_{C1} = N_{1C} + 9{,}6kN.$$

Pręt 2-B



$$\sum M_B = M_{B2} + M_{2B} + V_{2B}\cdot 4m + F\cdot 2m = \left[11{,}0972 + (-7{,}5214) + V_{2B}\cdot 4 + 8\cdot 2\right]kN\cdot m = 0$$

$$\Rightarrow V_{2B} = -4{,}8940kN,$$

$$\sum V = V_{2B} - V_{B2} + F = \left[-4{,}8940 - V_{B2} + 8\right]kN = 0 \Rightarrow V_{B2} = 3{,}1060kN,$$

$$\sum N = N_{2B} - N_{B2} = 0 \Rightarrow N_{B2} = N_{2B}.$$

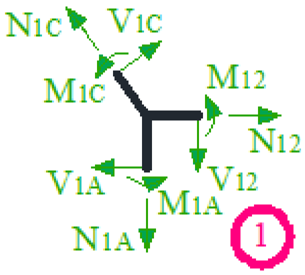
OBLICZENIE SIŁ OSIOWYCH I TNĄCYCH

Węzeł 2

$$\sum M_2 = M_{21} + M_{2B} + M = \left[-12,4785 + (-7,5214) + 20\right] kN \cdot m = 0,0001,$$

$$\sum X = V_{2B} + N_{21} = \left[-4,8940 + N_{21}\right] kN = 0 \Rightarrow N_{21} = 4,8940 kN,$$

$$\sum Y = V_{21} - N_{2B} = \left[1,8120 - N_{2B}\right] kN = 0 \Rightarrow N_{2B} = 1,8120 kN.$$



Z trzeciego równania dla pręta 2-B $N_{B2} = N_{2B} = 1,8120 kN.$

Z trzeciego równania dla pręta 1-2 $N_{12} = N_{21} = 4,8940 kN.$

Węzeł 1

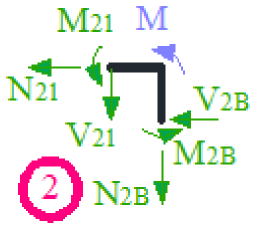
$$\sum M_1 = M_{12} + M_{1A} + M_{1C} = \left[1,6034 + (-7,1820) + 5,5757\right] kN \cdot m = 0,0001 kN \cdot m,$$

$$\sum X = N_{12} - V_{1A} + V_{1C} \sin\alpha - N_{1C} \cdot \cos\alpha = \left[4,8940 - 8 + (-4,7151) \cdot 0,8 - N_{1C} \cdot 0,6\right] kN = 0$$

$$\Rightarrow N_{1C} = -11,4634 kN.$$

$$\sum Y = V_{12} + N_{1A} - V_{1C} \cdot \cos\alpha - N_{1C} \cdot \sin\alpha = \left[1,8120 + N_{1A} - (-4,7151) \cdot 0,6 - (-11,3609) \cdot 0,8\right] kN = 0 kN$$

$$\Rightarrow N_{1A} = -13,7299 kN$$



Z trzeciego równania dla pręta 1-A $N_{A1} = N_{1A} \Rightarrow N_{A1} = -13,7299 kN.$

Z trzeciego równania dla pręta 1-C $N_{C1} = N_{1C} + 9,6 kN = -13,7299 kN + 9,6 kN = -4,1298 kN$

OBLICZENIE MOMENTÓW ZGINAJĄCYCH

$$M_{zgin,12} = M_{12} = 1,6034 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,21} = -M_{21} = 12,4875 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,1A} = -M_{1A} = 7,1820 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,A1} = M_{A1} = -16,8180 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,1C} = M_{1C} = 5,5757 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,C1} = -M_{C1} = 0$$

$$M_{zgin,4} = -V_{C1} \cdot 2,5m + q \cdot 1,5m \cdot \frac{1,5m}{2} =$$

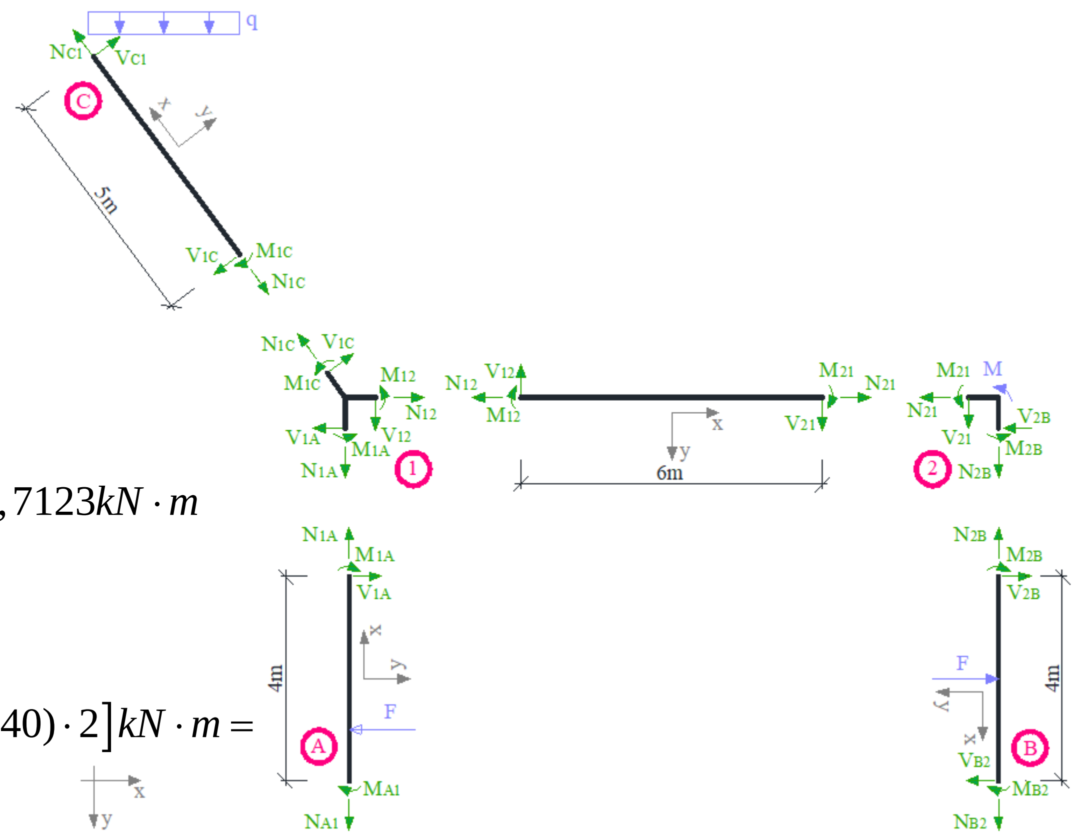
$$= [-2,4849 \cdot 2,5m + 4 \cdot 1,5m \cdot 0,75m] kN \cdot m = -1,7123 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,2B} = M_{2B} = -7,5214 kN \cdot m$$

$$M_{zgin,B2} = -M_{B2} = -11,0972 kN \cdot m$$

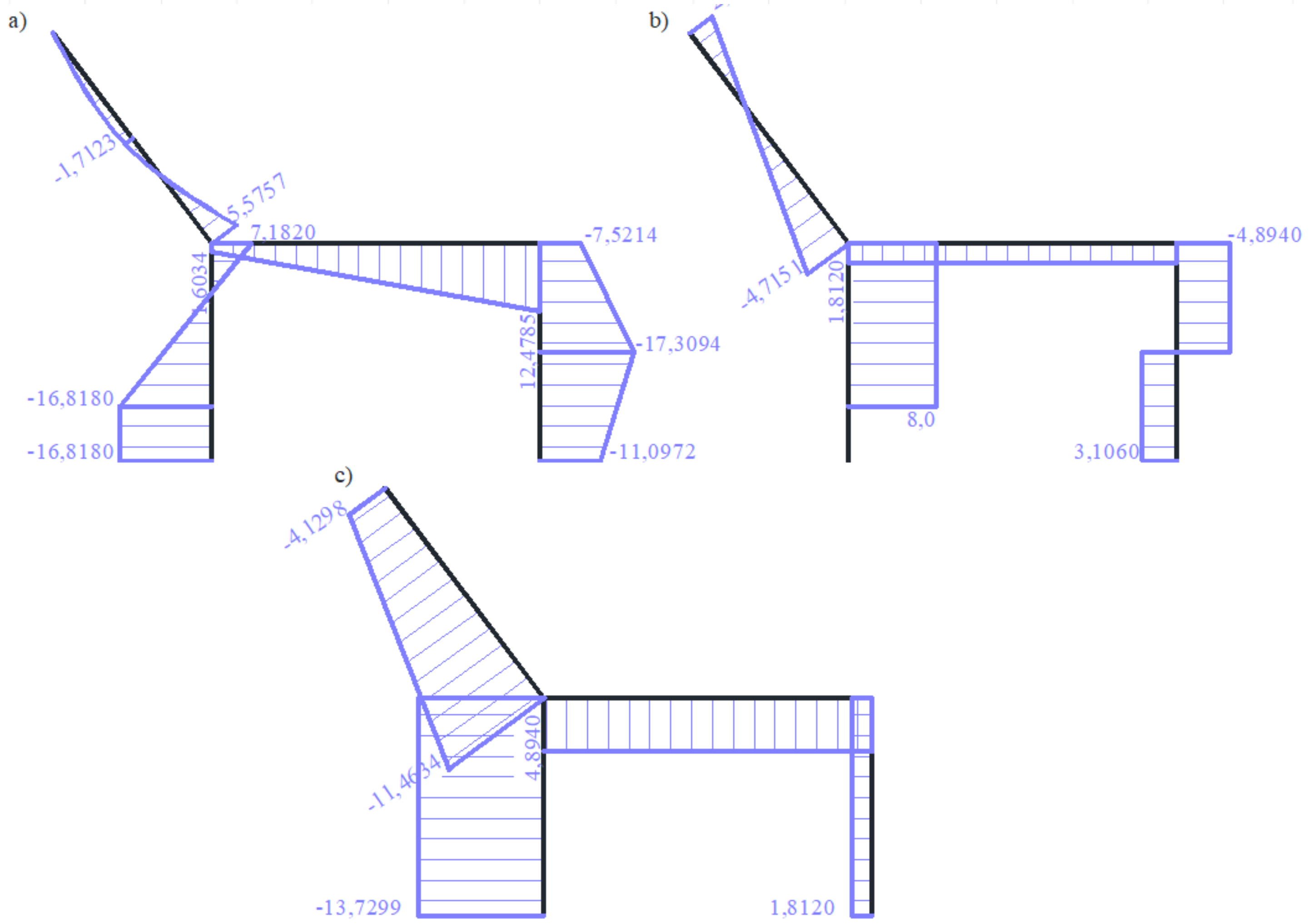
$$M_{zgin,5} = M_{2B,zgin} + V_{2B} \cdot 2m = [-7,5214 + (-4,8940) \cdot 2] kN \cdot m =$$

$$= -17,3094 kN \cdot m$$



Rys. 8. Podział na pręty i węzły, dla których sprawdzono po 3 warunki równowagi

WYKRESY SIŁ WEWNĘTRZNYCH



Rys. 9. Wykres a) momentów zginających *w kN·m,* b) sił tnących *w kN*, c) sił osiowych *w kN*

WSTĘPNE PROJEKTOWANIE PRZEKROJÓW PRĘTÓW

Projektowanie prętów przyjmując założenia:

średni współczynnik obciążenia: $\gamma_f = 1.5$,
wytrzymałość obliczeniową stali $fd = 215$ MPa,
moduł Younga: $E = 210$ GPa.

$$W \geq \frac{\max M \cdot \gamma_f}{f_d} = \frac{17,3094 \cdot 1,5}{215000} m^3 = 0,00012076 m^3 = 120,76 cm^3$$

Uwzględniając, że układ składa się z prętów o sztywności EI oraz 2EI przyjęto dwuteownik równoległościenny IPE 180 dla prętów o sztywności EI oraz 2 IPE 180 dla pręta o sztywności 2EI

$W_{IPE\ 180} = 146,7\ cm^3$, $I_{IPE\ 180} = 1320\ cm^4$.

$EI = 210000000 kN/m^2 * 1320 * 10^{-8} m^4 = 2835\ kNm^2$,
$k_\delta = 8\ EI/m^3 = 22680\ kN/m$.

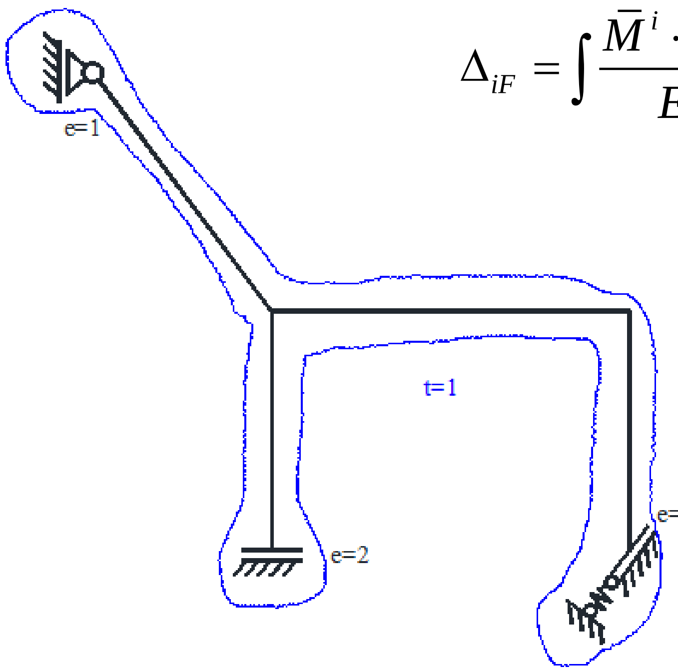
KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA

Kontrola kinematycznej dopuszczalności rozwiązania polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w miejscach i na kierunkach przeciętych więzi. W tym celu dobierany jest układ podstawowy metody sił. Wartości obliczonych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu. Ponieważ dany układ jest pięciokrotnie statycznie niewyznaczalny dobrano układ podstawowy przecinając pięć więzi podporowych. Przemieszczenia obliczane są za pomocą wzoru

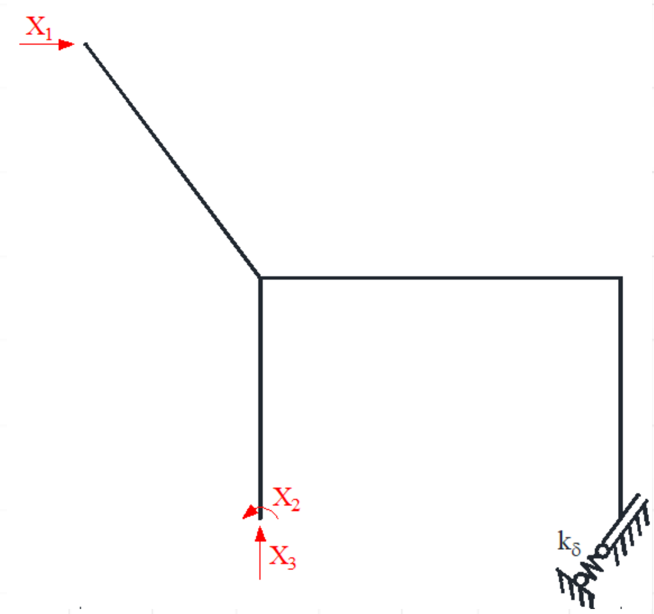
$$\Delta_{iF} = \int \frac{\bar{M}^i \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^i \cdot S_n^F}{k_n}$$

$$t = 1, \; e = 2 + 3 + 1 = 6,$$

$$n_h = e - 3 \cdot t = 6 - 3 \cdot 1 = 3$$

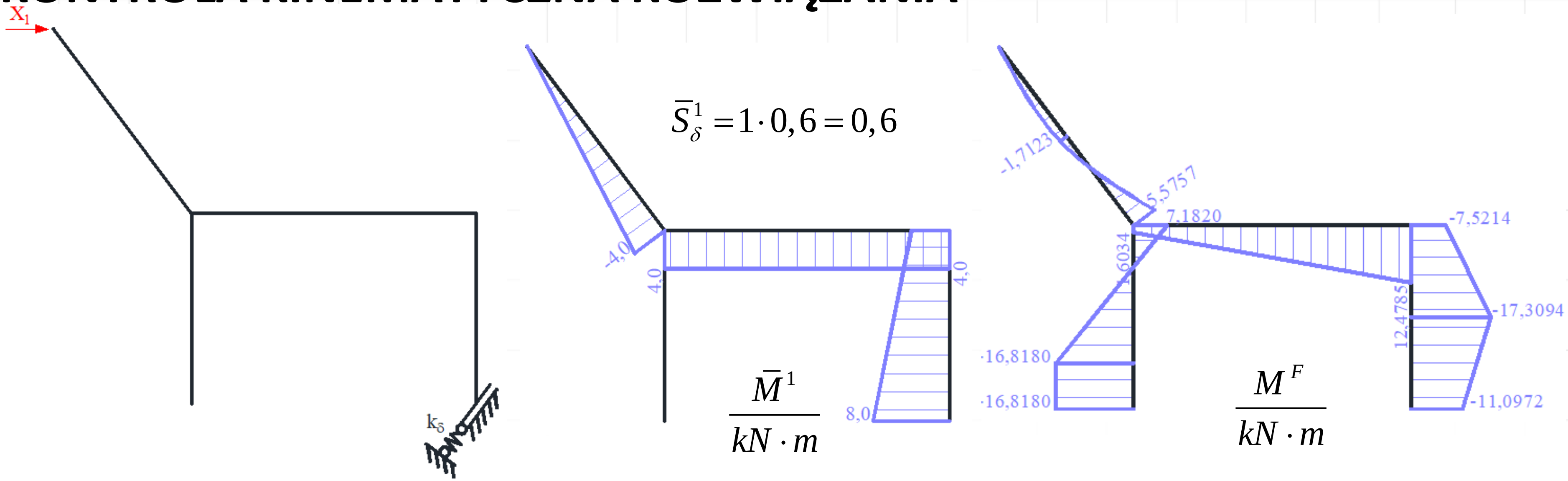


Rys. 10. Tarcze i więzi



Rys.11. Układ podstawowy metody sił

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$\Delta_{1F} = \int \frac{\bar{M}^1 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^1 \cdot S_n^F}{k_n} = +\frac{6m}{6 \cdot EI}\left[4m \cdot 1,6034 kN \cdot m + 4m \cdot 3m \cdot 7,0424 kN \cdot m + 4m \cdot 12,4785 kN \cdot m\right] +$$

$$+\frac{2m}{6 \cdot 2EI}\left[4m \cdot (-7,5214) kN \cdot m + 5 \cdot 6m \cdot (-12,4154) kN \cdot m + 6m \cdot (-17,3094) kN \cdot m\right] +$$

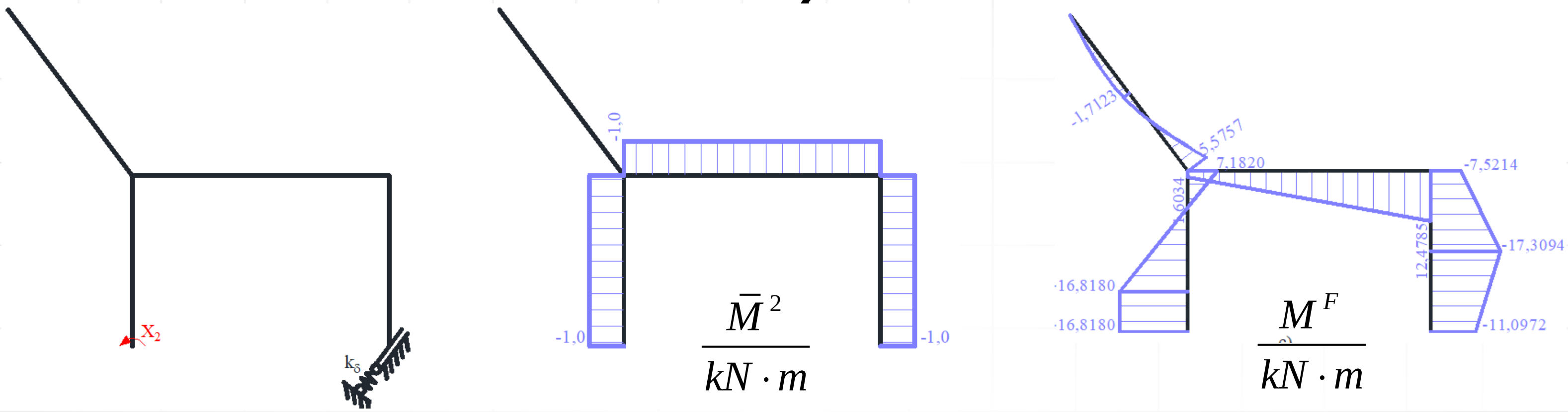
$$+\frac{2m}{6 \cdot 2EI}\left[6m \cdot (-17,3094) kN \cdot m + 4 \cdot 7m \cdot (-14,2033) kN \cdot m + 8m \cdot (-11,0972) kN \cdot m\right] +$$

$$+\frac{5m}{6 \cdot EI}\left[0 \cdot 0 + 4 \cdot 2m \cdot (-1,7123) kN \cdot m + 4m \cdot 5,5757 kN \cdot m\right] + \frac{0,6 \cdot 3,3136 kN}{8 \frac{EI}{m^3}} =$$

$$= 169,0184 \frac{kN \cdot m^2}{EI} - 63,7084 \frac{kN \cdot m^2}{EI} - 98,3877 \frac{kN \cdot m^2}{EI} - 7,1715 \frac{kN \cdot m^2}{EI} + 0,2485 \frac{kN \cdot m^2}{EI} =$$

$$= -0,00006 \frac{kN \cdot m^2}{EI}$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$\Delta_{2F} = \int \frac{\bar{M}^2 \cdot M^F}{EI} dx + \sum_n \frac{\bar{S}_n^2 \cdot S_n^F}{k_n} =$$

$$= \frac{1m}{6 \cdot 2EI}\left[(-1)\cdot(-16{,}8180)kN \cdot m + 4\cdot(-1)\cdot(-16{,}8180)kN \cdot m + (-1)\cdot(-16{,}8180)kN \cdot m\right] +$$

$$+ \frac{3m}{6 \cdot 2EI}\left[(-1)\cdot(-16{,}8180)kN \cdot m + 4\cdot(-1)\cdot(-4{,}818)kN \cdot m + (-1)\cdot 7{,}182kN \cdot m\right] +$$

$$+ \frac{6m}{6 \cdot EI}\left[(-1)\cdot 1{,}6034kN \cdot m + 4\cdot(-1)\cdot 7{,}0424kN \cdot m + (-1)\cdot 12{,}4785kN \cdot m\right] +$$

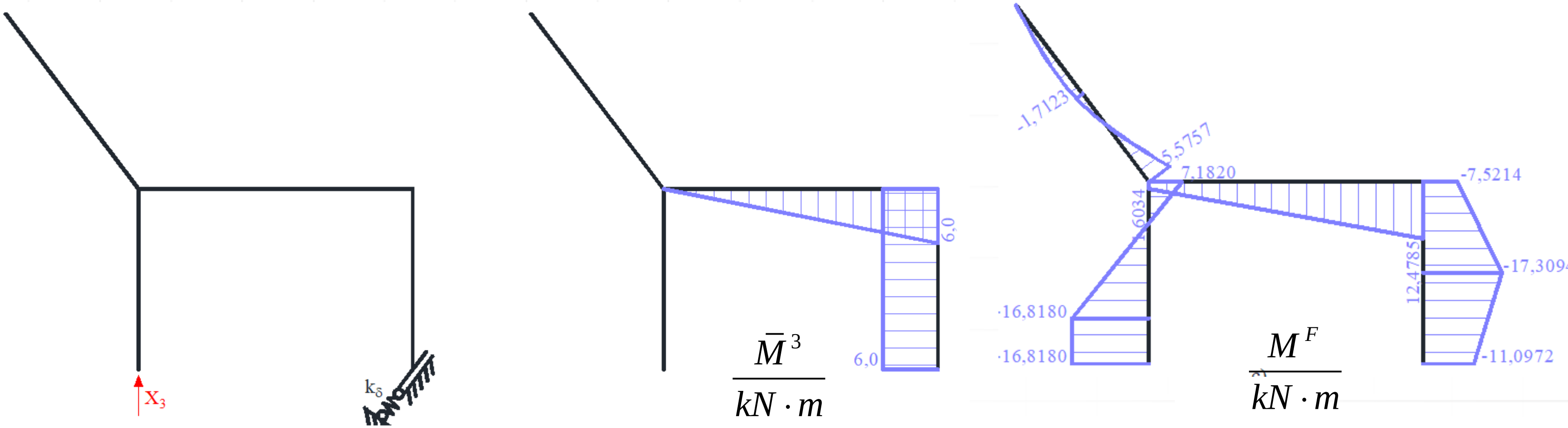
$$+ \frac{2m}{6 \cdot 2EI}\left[(-1)\cdot(-7{,}5214)kN \cdot m + 4\cdot(-1)\cdot(-12{,}4154)kN \cdot m + (-1)\cdot(-17{,}3094)kN \cdot m\right] +$$

$$+ \frac{2m}{6 \cdot 2EI}\left[(-1)\cdot(-17{,}3094)kN \cdot m + 4\cdot(-1)\cdot(-14{,}2033)kN \cdot m + (-1)\cdot(-11{,}0972)kN \cdot m\right] =$$

$$= 8{,}4090\frac{kN \cdot m^2}{EI} + 7{,}2270\frac{kN \cdot m^2}{EI} - 42{,}2457\frac{kN \cdot m^2}{EI} + 12{,}4154\frac{kN \cdot m^2}{EI} + 14{,}2035\frac{kN \cdot m^2}{EI} =$$

$$= 0{,}00915\frac{kN \cdot m^2}{EI}$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$\Delta_{3F}=\int\frac{\overline{M}^{3}\cdot M^{F}}{EI}dx+\sum_{n}\frac{\overline{S}_{n}^{3}\cdot S_{n}^{F}}{k_{n}}=+\frac{6m}{6\cdot EI}\left[0\cdot 1,6034kN\cdot m+4\cdot 3m\cdot 7,0455kN\cdot m+6m\cdot 12,4785kN\cdot m\right]+$$

$$+\frac{2m}{6\cdot 2EI}\left[6m\cdot(-7,5214)kN\cdot m+4\cdot 6m\cdot(-12,4154)kN\cdot m+6m\cdot(-17,3094)kN\cdot m\right]+$$

$$+\frac{2m}{6\cdot 2EI}\left[6m\cdot(-17,3094)kN\cdot m+4\cdot 6m\cdot(-14,2033)kN\cdot m+6m\cdot(-11,0972)kN\cdot m\right]+\frac{0,8\cdot 3,3136kN}{8\frac{EI}{m^{3}}}=$$

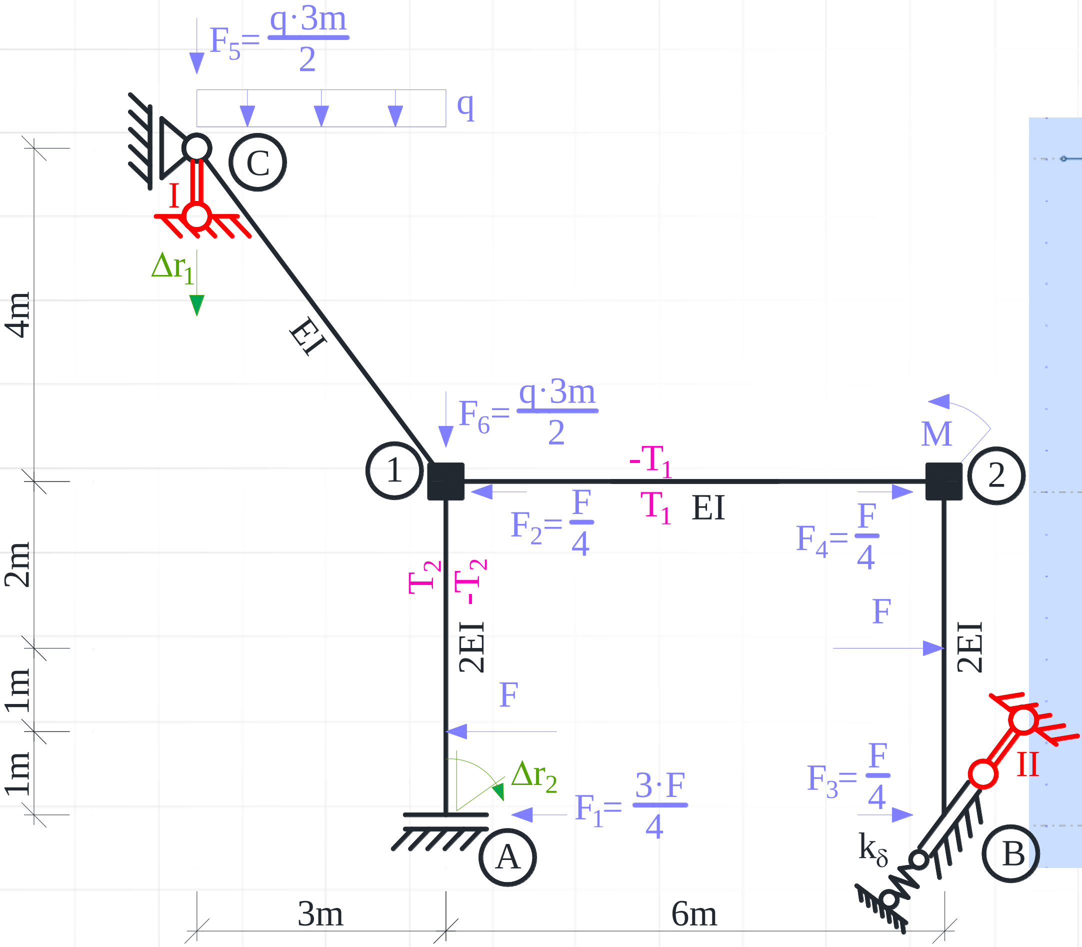
$$=159,3802\frac{kN\cdot m^{2}}{EI}-74,4924\frac{kN\cdot m^{2}}{EI}-85,2198\frac{kN\cdot m^{2}}{EI}+0,3314\frac{kN\cdot m^{2}}{EI}=0,0006\frac{kN\cdot m^{2}}{EI}$$

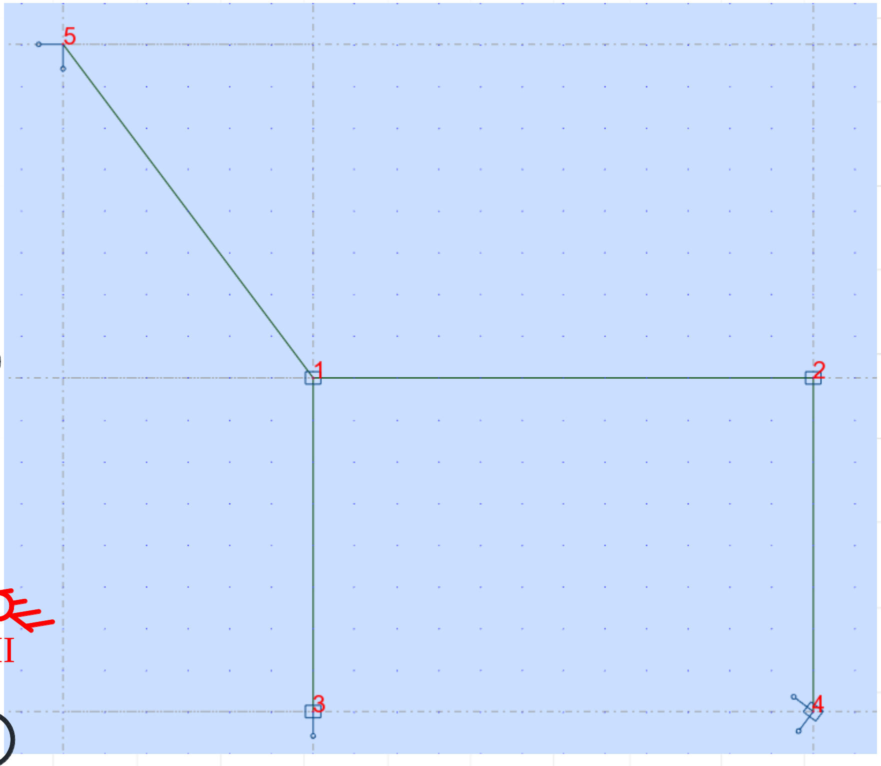
Zadanie domowe (projekt nr 2)

1. Obliczyć współczynniki układu równań metody przemieszczeń.
2. Sporządzenie wykresów sił.
3. Zaprojektować przekroje prętów.

UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Do programu ROBOT wprowadzamy układ podstawowy metody przemieszczeń.

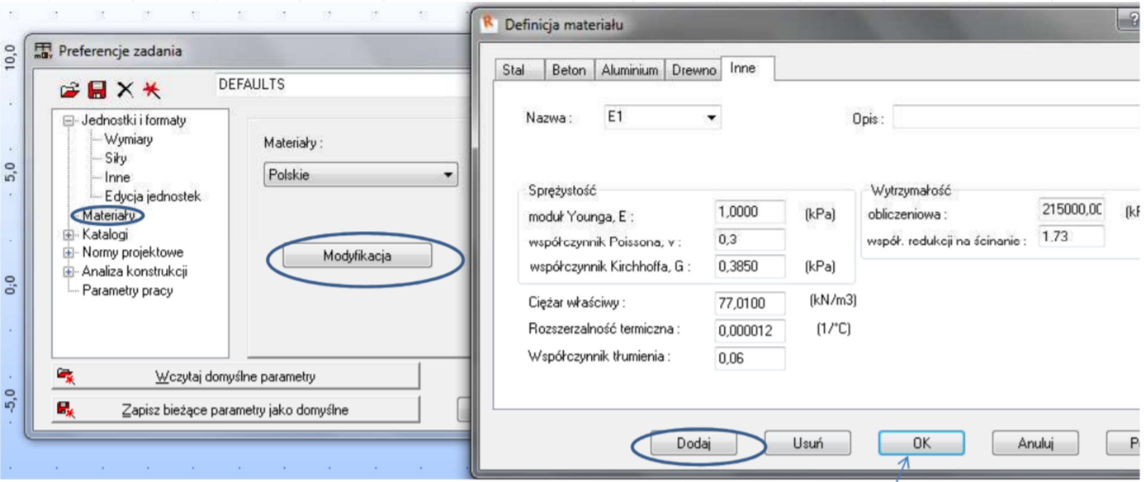




Politechnika Wrocławska

UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Zdefiniowanie materiału:



Najpierw należy dodać, a potem kliknąć OK

E=1kPa

ν= 0,3

G=0,385kPa

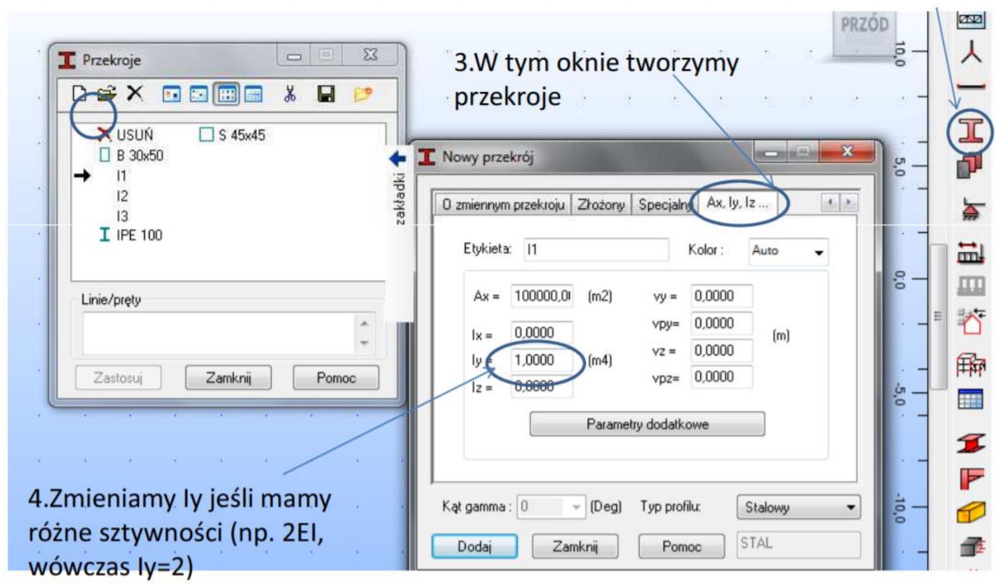
Zdefiniowanie przekroju:

A_x=1 000 000 m^4

I_y=1m^4←EI

I_y=2m^4←2EI

I_x, I_z=0

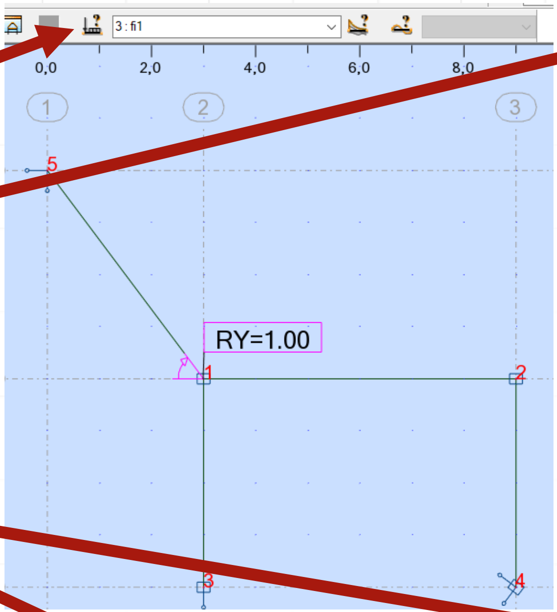


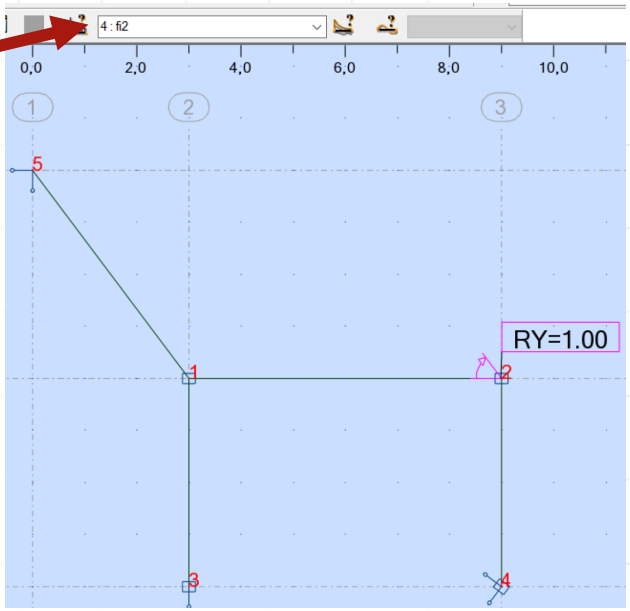
Laboratorium nr 4

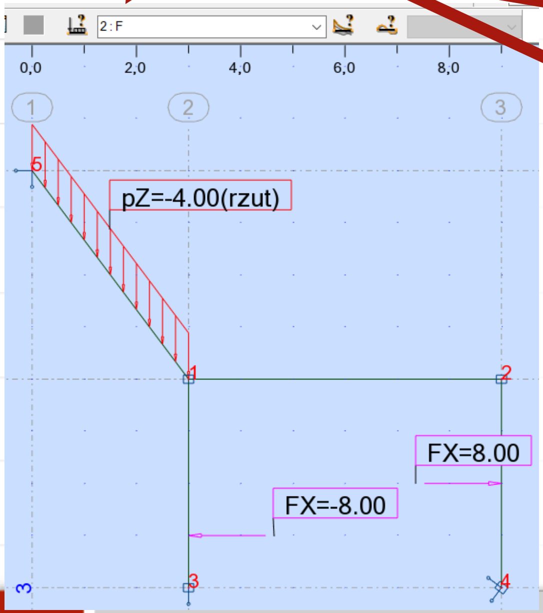
UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

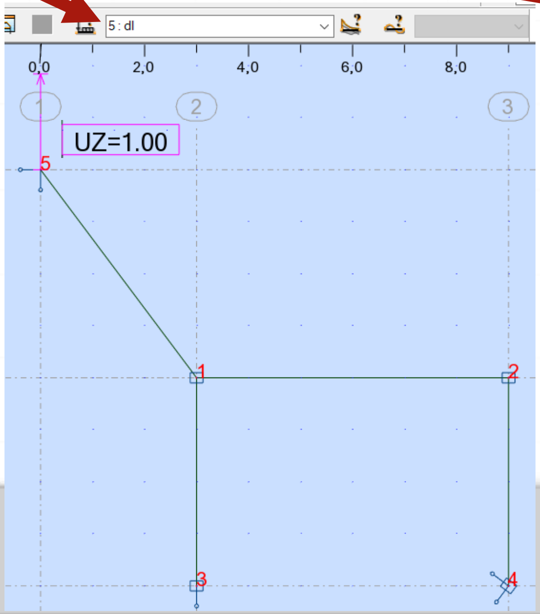
Przypadki obciążenia:

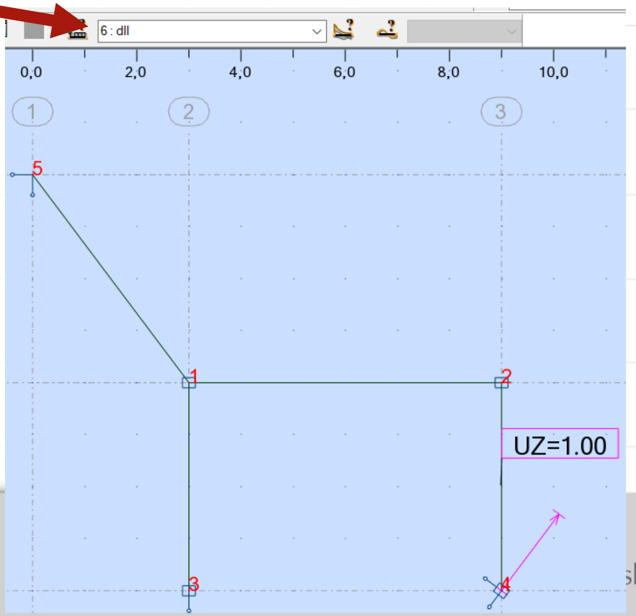
1. Ciężar własny
2. Obciążenie dane
3. φ_1
4. φ_2
5. δ_I
6. δ_{II}











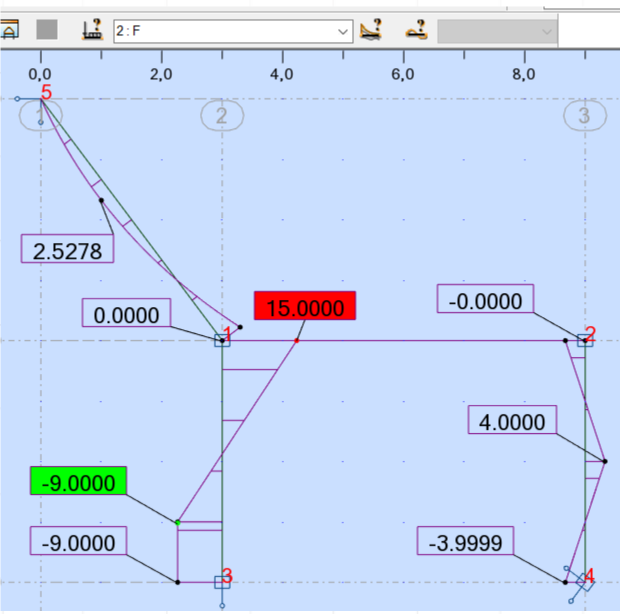
UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

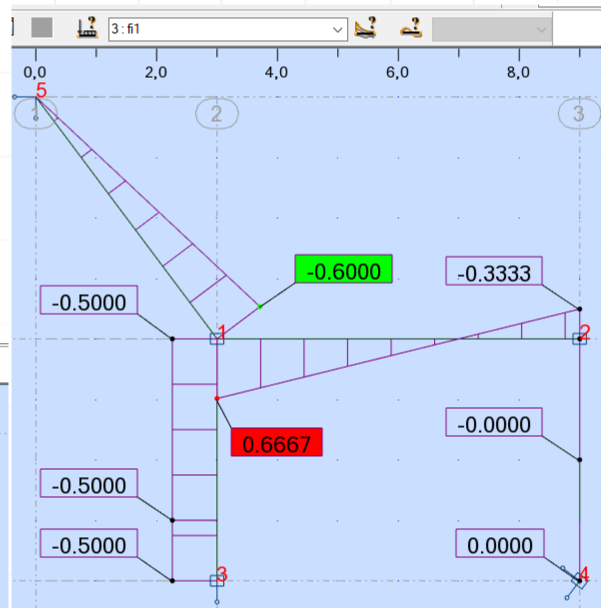
Wykresy momentów

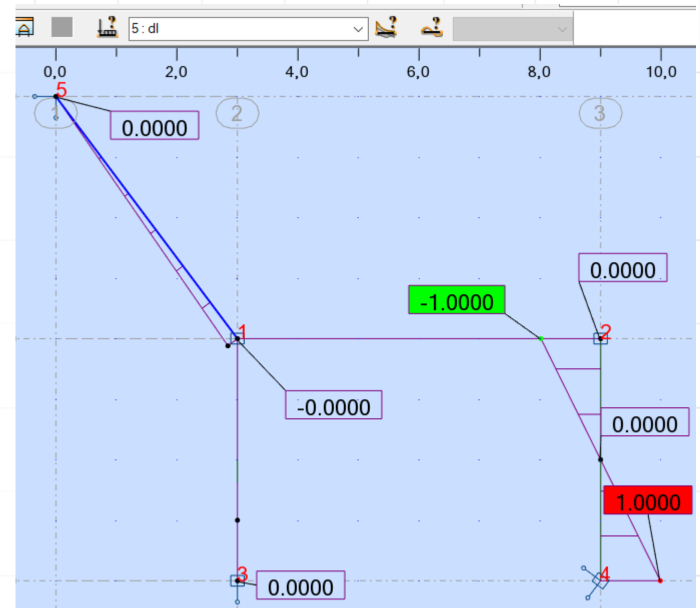
Zginających w układzie

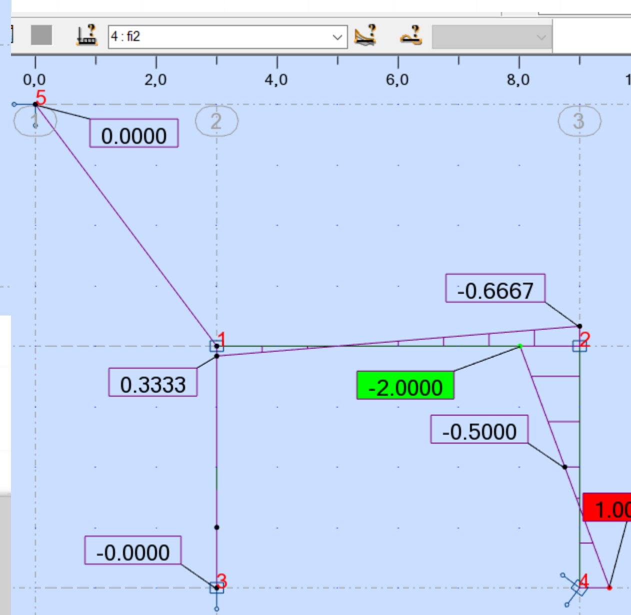
podstawowym metody

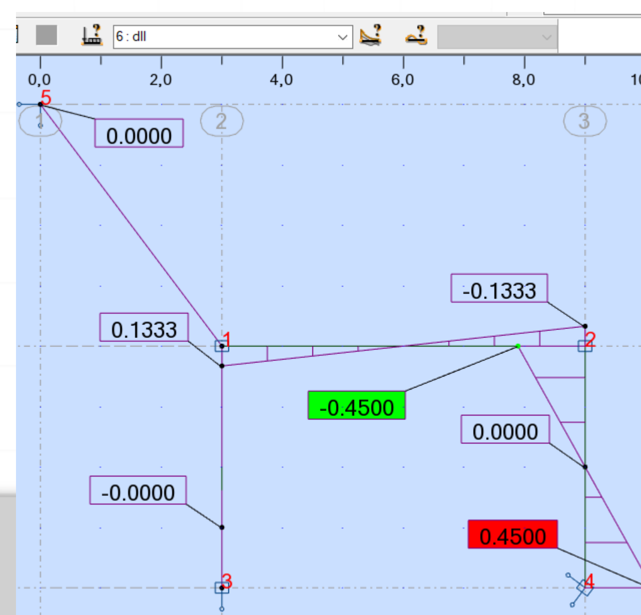
przemieszczeń





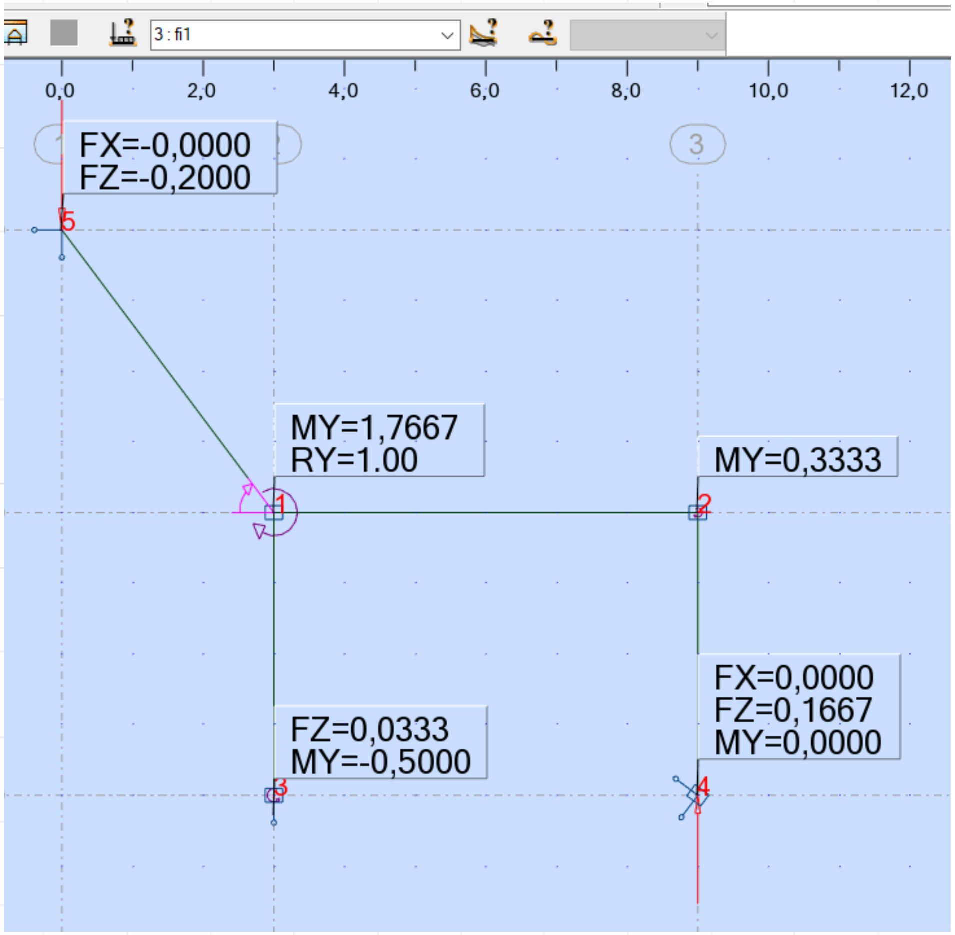






UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Odczytywanie współczynników: reakcje w dodanych więziach.



$$\boxed{k_{11}} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

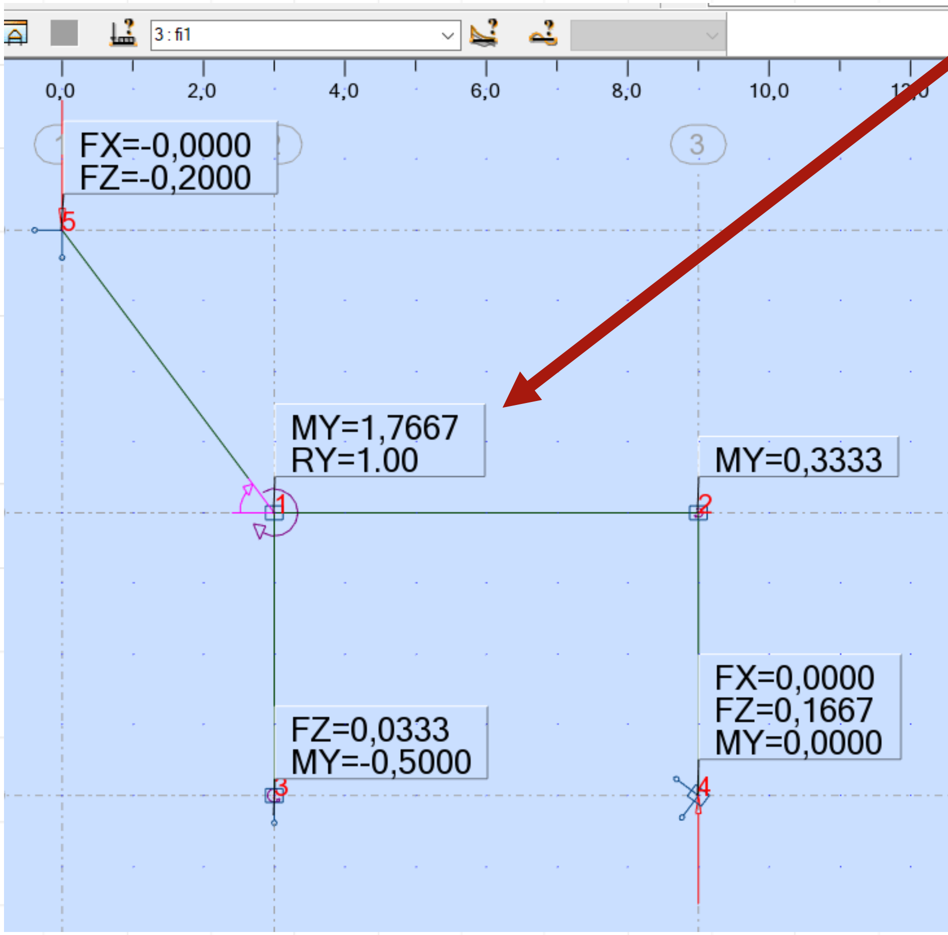
$$\boxed{k_{21}} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$\boxed{k_{I1}} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\,I} \cdot \delta_I + k_{I\,II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$\boxed{k_{II1}} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\,I} \cdot \delta_I + k_{II\,II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Odczytywanie współczynników: reakcje w dodanych więziach.



$$\boxed{k_{11}} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

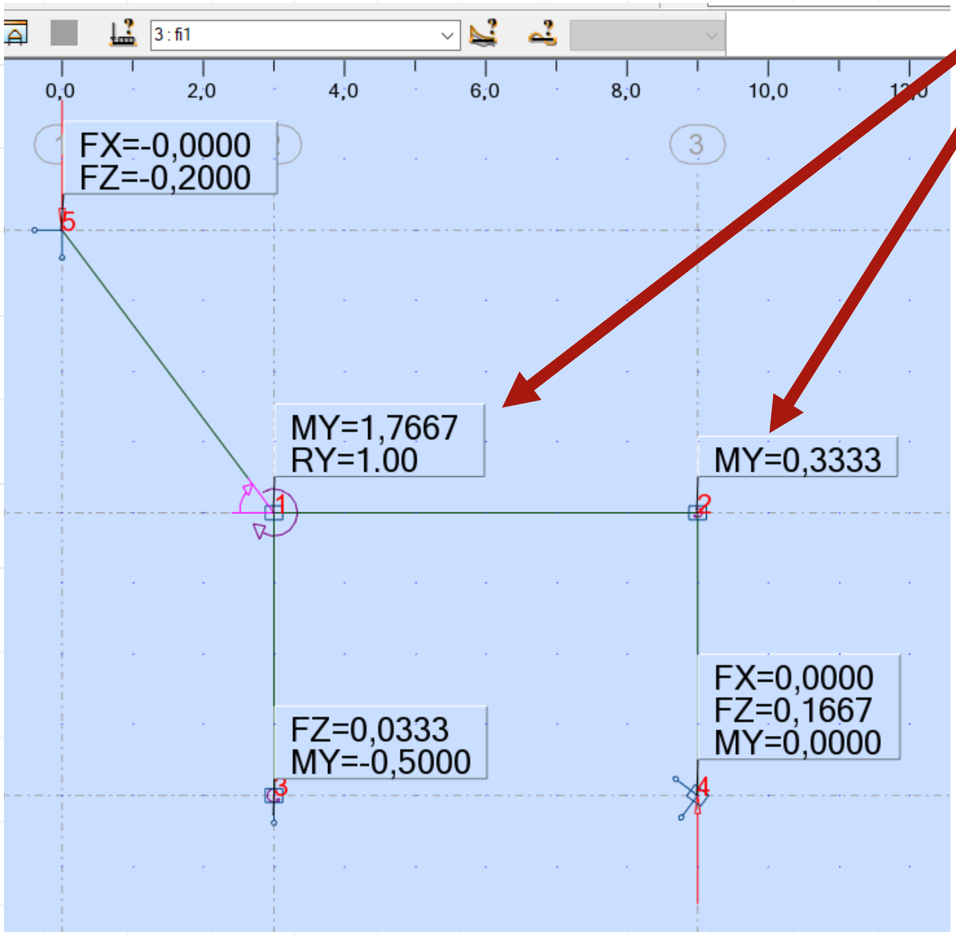
$$\boxed{k_{21}} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$\boxed{k_{I1}} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\,I} \cdot \delta_I + k_{I\,II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$\boxed{k_{II1}} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\,I} \cdot \delta_I + k_{II\,II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Odczytywanie współczynników: reakcje w dodanych więziach.



$$k_{11}\cdot\varphi_1+k_{12}\cdot\varphi_2+k_{1I}\cdot\delta_I+k_{1II}\cdot\delta_{II}+k_{1o}=0$$

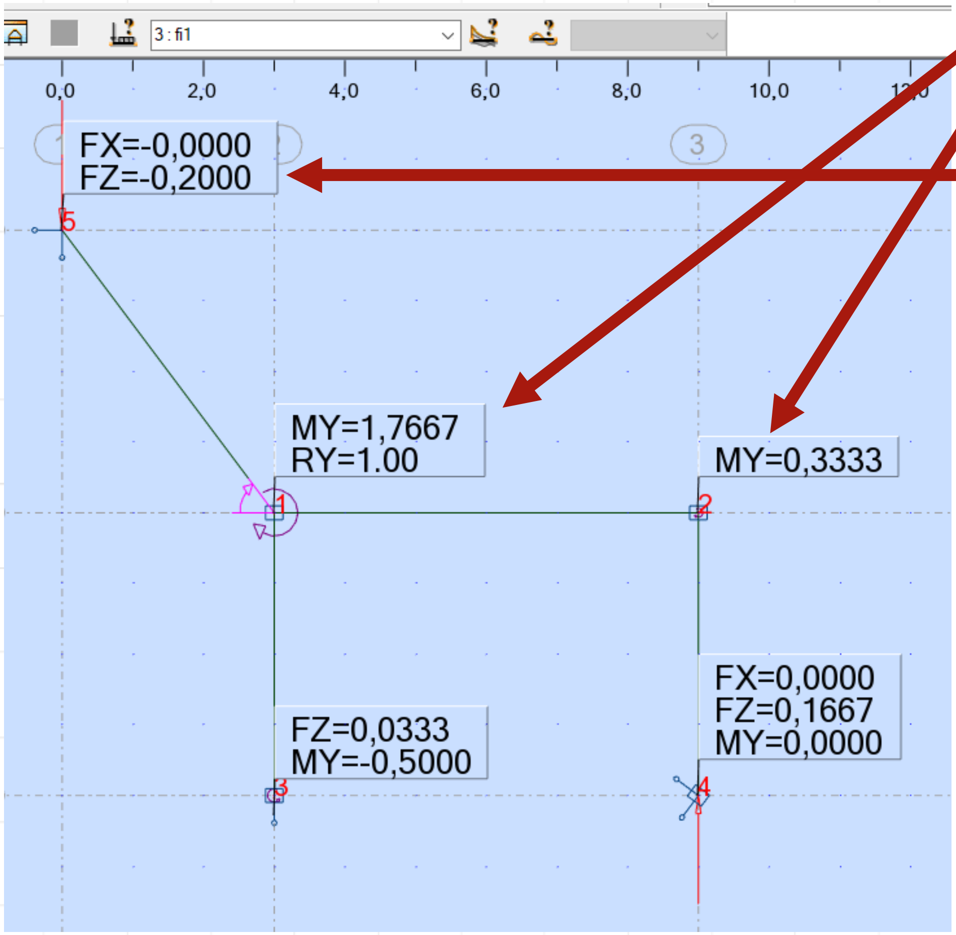
$$k_{21}\cdot\varphi_1+k_{22}\cdot\varphi_2+k_{2I}\cdot\delta_I+k_{2II}\cdot\delta_{II}+k_{2o}=0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1+k_{I2}\cdot\varphi_2+k_{I\,I}\cdot\delta_I+k_{I\,II}\cdot\delta_{II}+k_{Io}=0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1+k_{II2}\cdot\varphi_2+k_{II\,I}\cdot\delta_I+k_{II\,II}\cdot\delta_{II}+k_{IIo}=0$$

UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Odczytywanie współczynników: reakcje w dodanych więziach.



$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

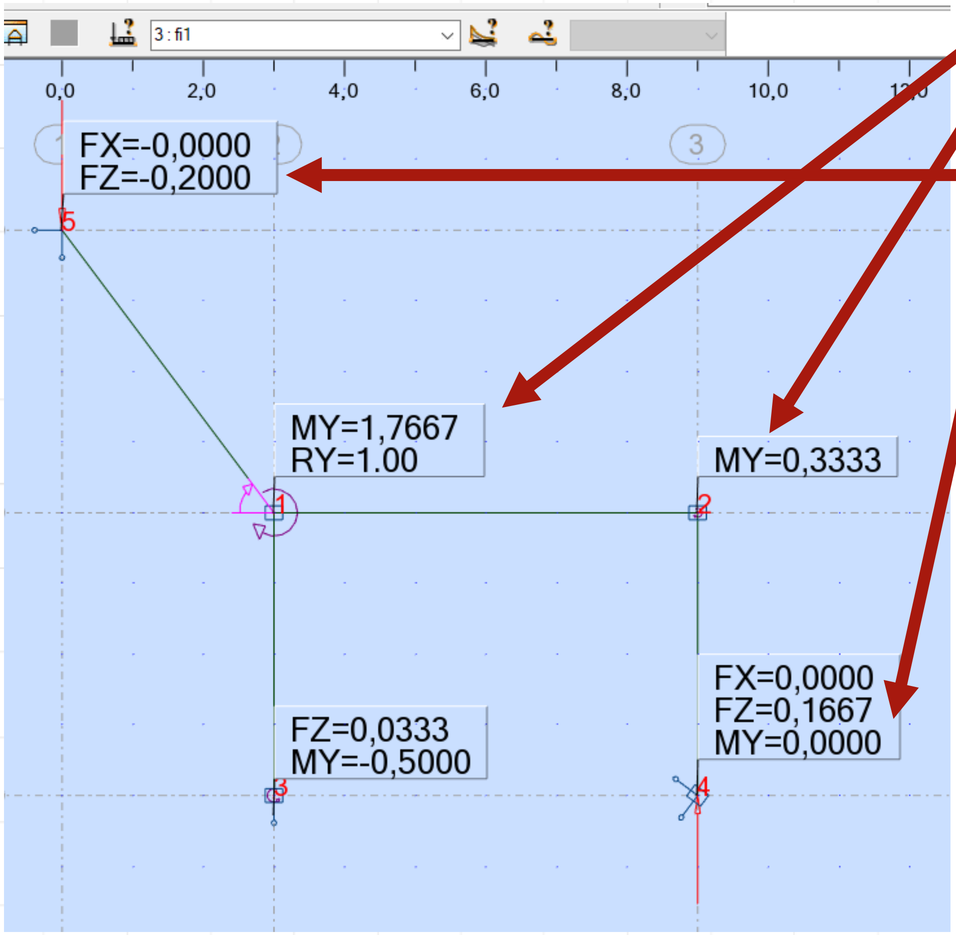
$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\,I} \cdot \delta_I + k_{I\,II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\,I} \cdot \delta_I + k_{II\,II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

Laboratorium nr 4

UKŁAD WPROWADZANY DO PROGRAMU ROBOT-UKŁAD PODSTAWOWY

Odczytywanie współczynników: reakcje w dodanych więziach.



$$k_{11}\cdot\varphi_1+k_{12}\cdot\varphi_2+k_{1I}\cdot\delta_I+k_{1II}\cdot\delta_{II}+k_{1o}=0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1+k_{22}\cdot\varphi_2+k_{2I}\cdot\delta_I+k_{2II}\cdot\delta_{II}+k_{2o}=0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1+k_{I2}\cdot\varphi_2+k_{I\,I}\cdot\delta_I+k_{I\,II}\cdot\delta_{II}+k_{Io}=0$$

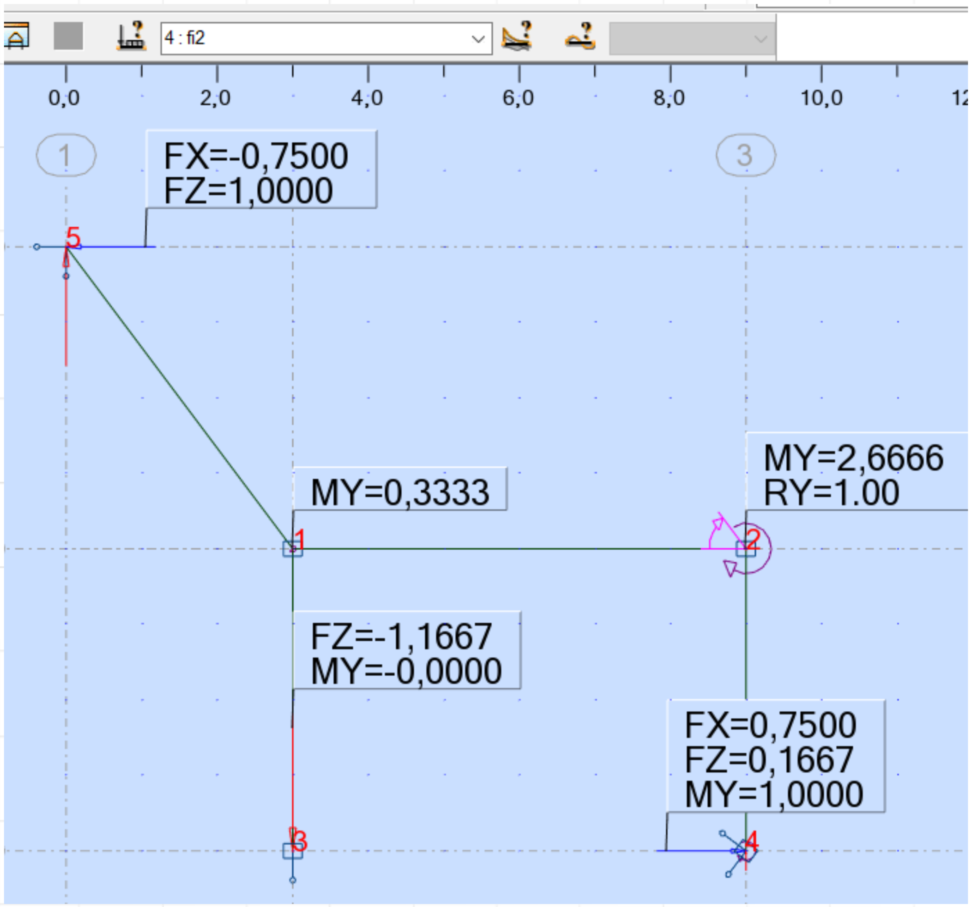
$$k_{II1}\cdot\varphi_1+k_{II2}\cdot\varphi_2+k_{II\,I}\cdot\delta_I+k_{II\,II}\cdot\delta_{II}+k_{IIo}=0$$

$$k_{I1}=FX\cdot\sin\alpha+FZ\cdot\cos\alpha=$$

$$0\cdot 0{,}6+0{,}1667m\cdot 0{,}8=0{,}1334m$$

Laboratorium nr 4

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



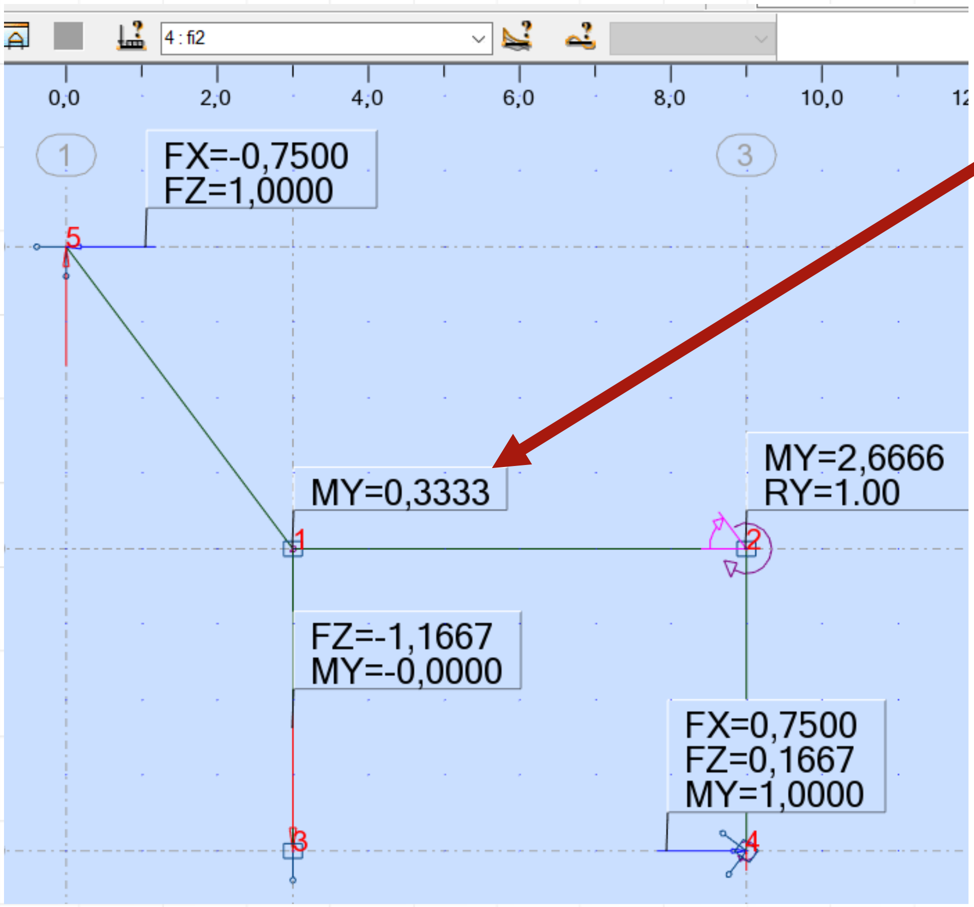
$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

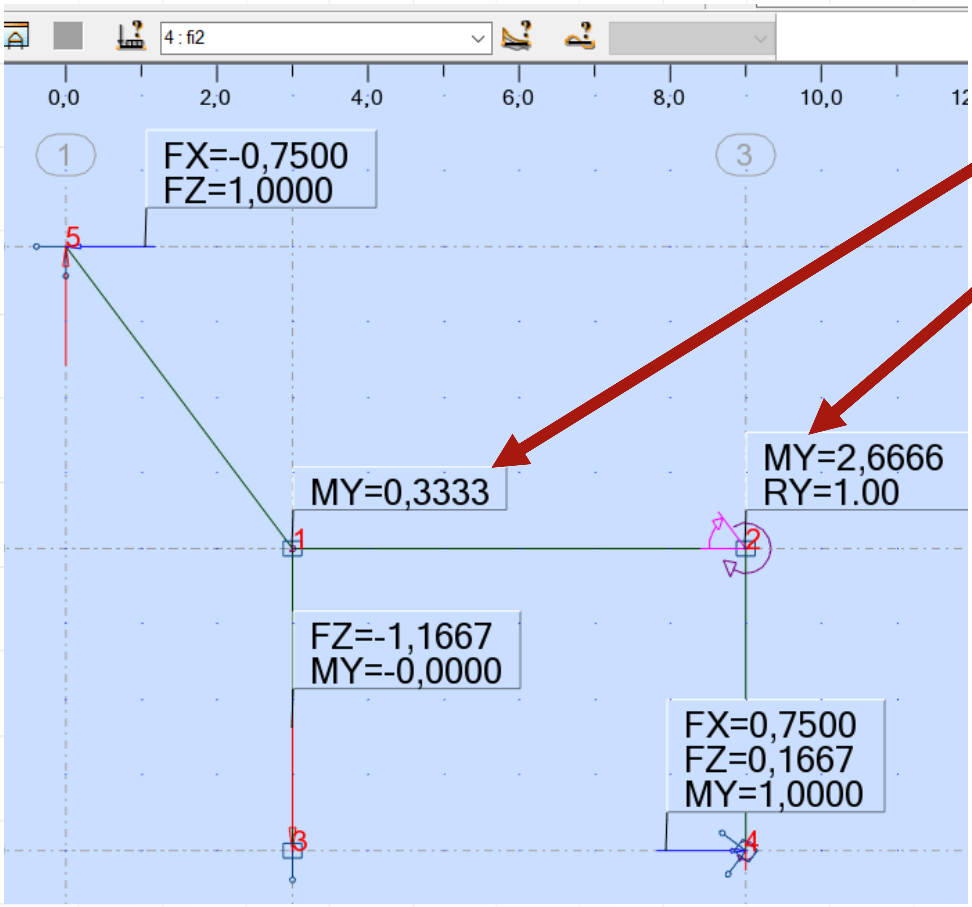
$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$k_{11}\cdot\varphi_1+\boxed{k_{12}}\cdot\varphi_2+k_{1I}\cdot\delta_I+k_{1II}\cdot\delta_{II}+k_{1o}=0$$
$$k_{21}\cdot\varphi_1+\boxed{k_{22}}\cdot\varphi_2+k_{2I}\cdot\delta_I+k_{2II}\cdot\delta_{II}+k_{2o}=0$$
$$k_{I1}\cdot\varphi_1+\boxed{k_{I2}}\cdot\varphi_2+k_{I\,I}\cdot\delta_I+k_{I\,II}\cdot\delta_{II}+k_{Io}=0$$
$$k_{II1}\cdot\varphi_1+\boxed{k_{II2}}\cdot\varphi_2+k_{II\,I}\cdot\delta_I+k_{II\,II}\cdot\delta_{II}+k_{IIo}=0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



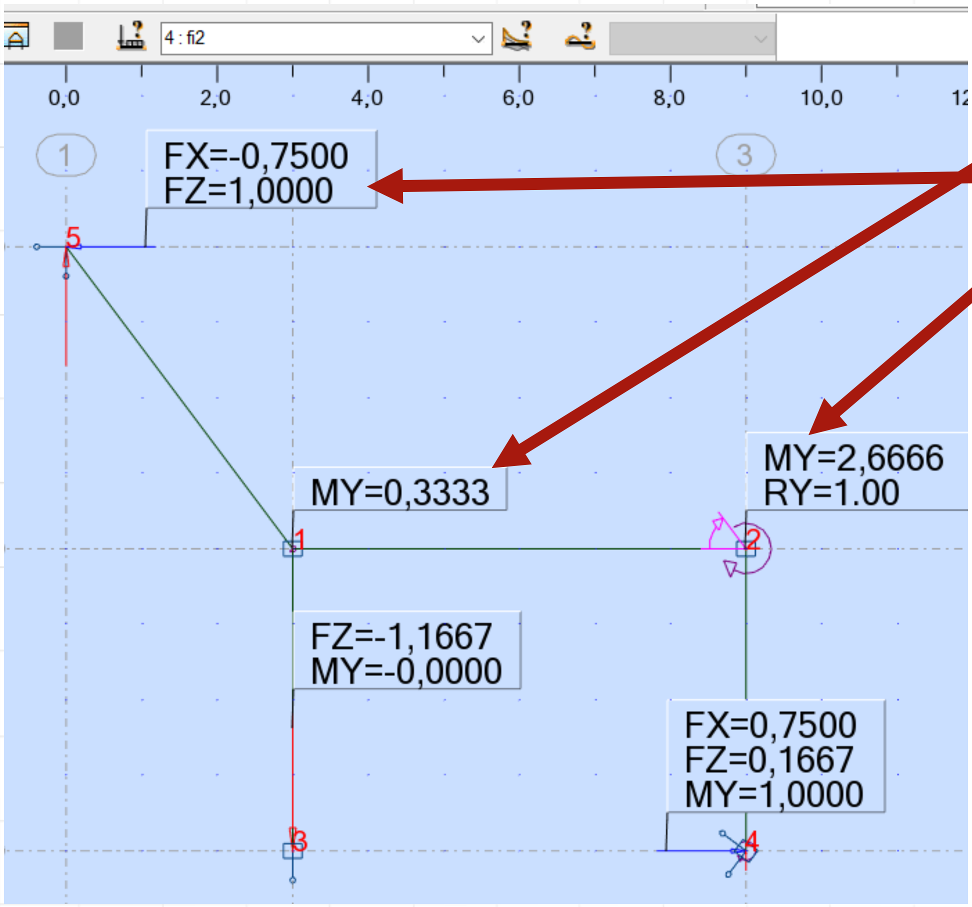
$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\,I} \cdot \delta_I + k_{I\,II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\,I} \cdot \delta_I + k_{II\,II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



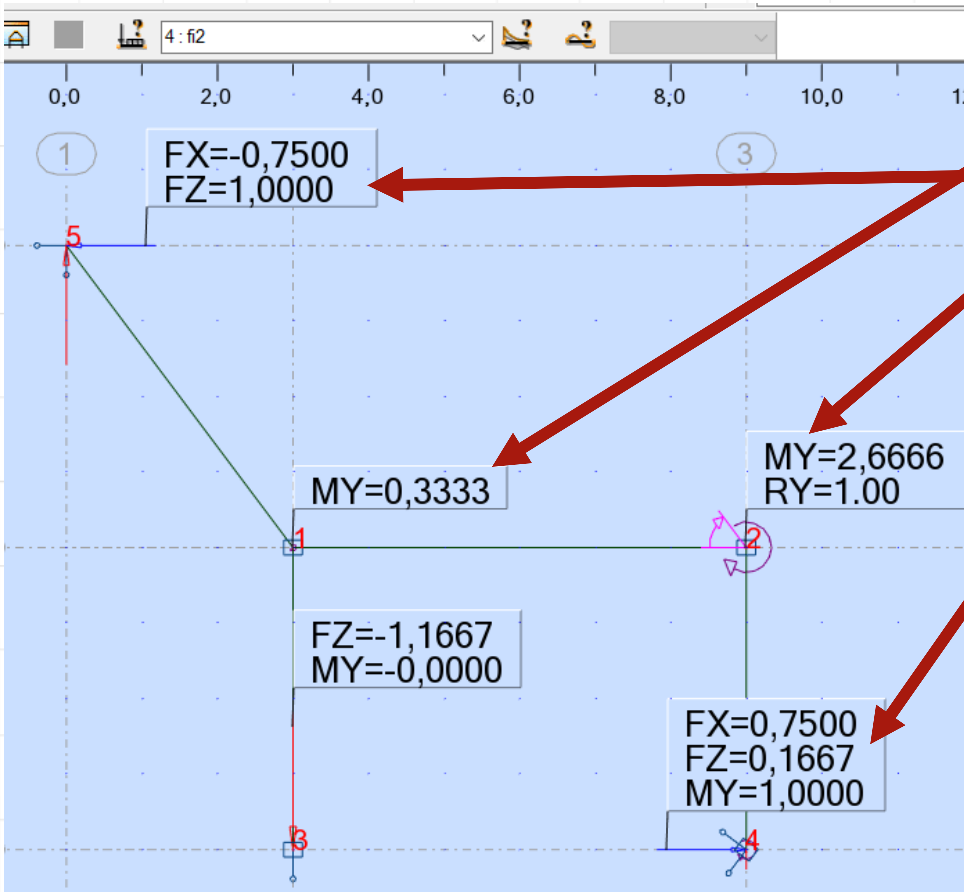
$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$k_{11}\cdot\varphi_1+\boxed{k_{12}}\cdot\varphi_2+k_{1I}\cdot\delta_I+k_{1II}\cdot\delta_{II}+k_{1o}=0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1+\boxed{k_{22}}\cdot\varphi_2+k_{2I}\cdot\delta_I+k_{2II}\cdot\delta_{II}+k_{2o}=0$$

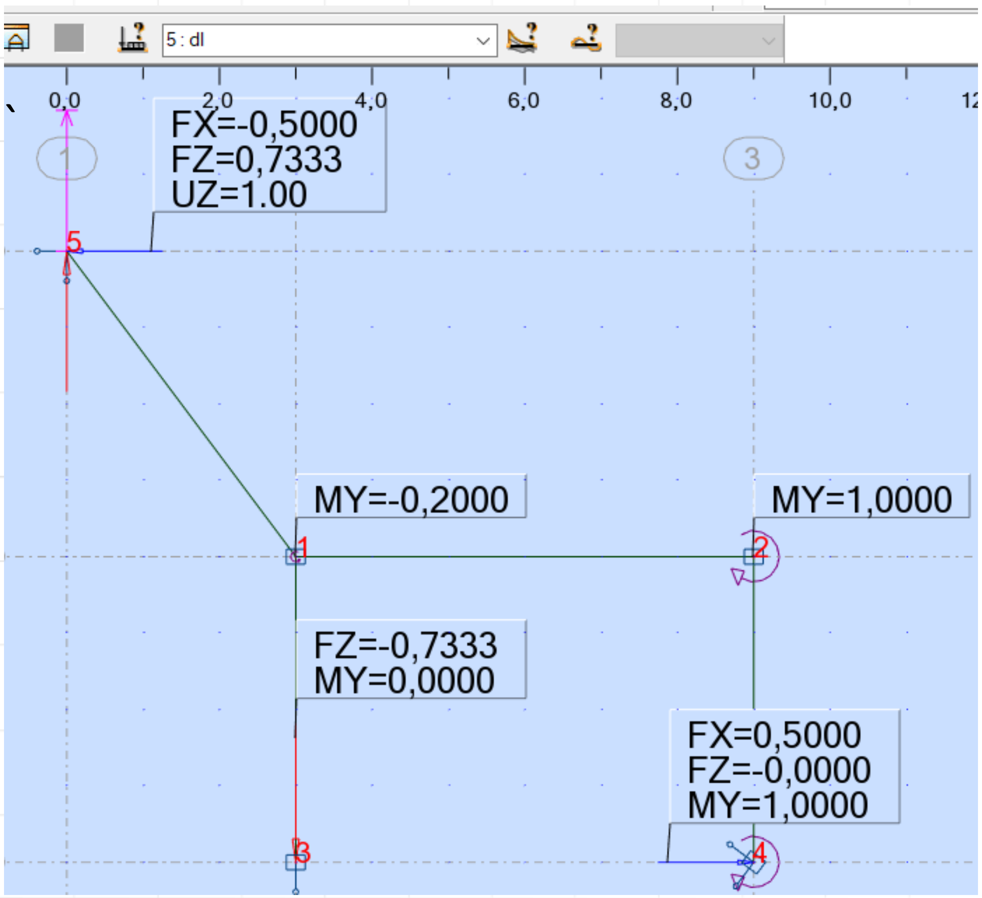
$$k_{I1}\cdot\varphi_1+\boxed{k_{I2}}\cdot\varphi_2+k_{I\,I}\cdot\delta_I+k_{I\,II}\cdot\delta_{II}+k_{Io}=0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1+\boxed{k_{II2}}\cdot\varphi_2+k_{II\,I}\cdot\delta_I+k_{II\,II}\cdot\delta_{II}+k_{IIo}=0$$

$$k_{II2}=FX\cdot\sin\alpha+FZ\cdot\cos\alpha=$$

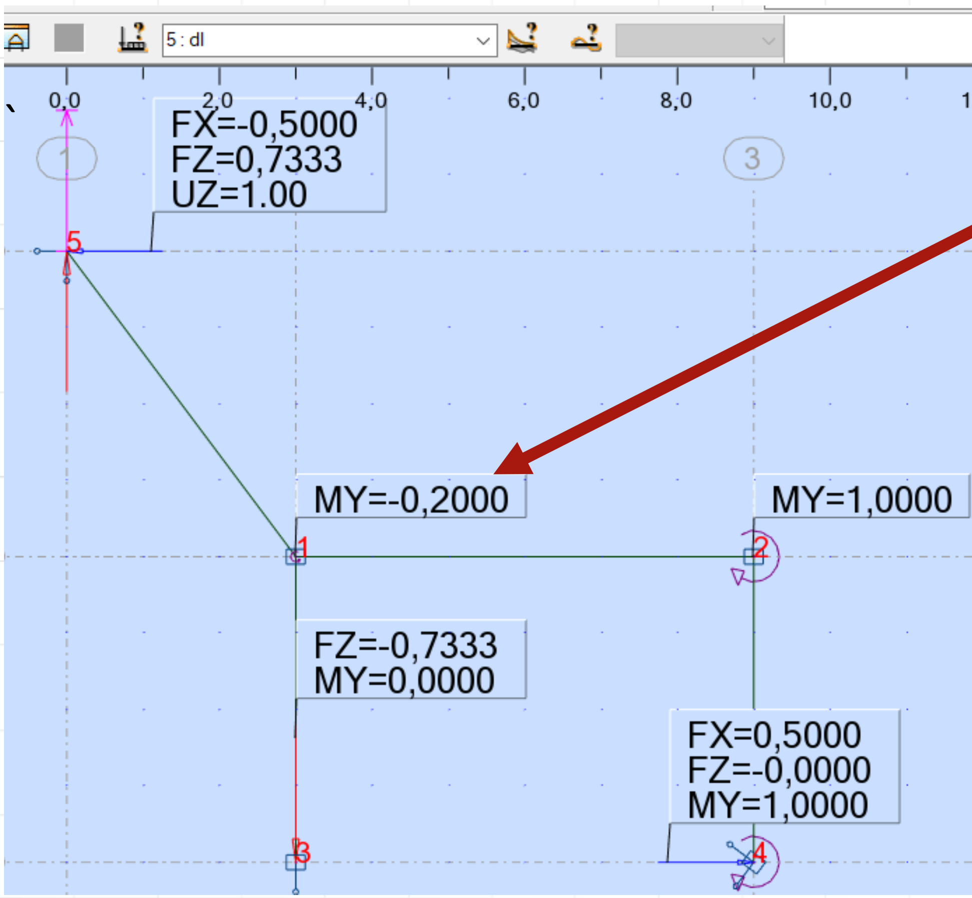
$$0,75m\cdot 0,6+0,1667m\cdot 0,8=0,5834m$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$
\begin{aligned}
k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} &= 0\\
k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} &= 0\\
k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} &= 0\\
k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} &= 0
\end{aligned}
$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



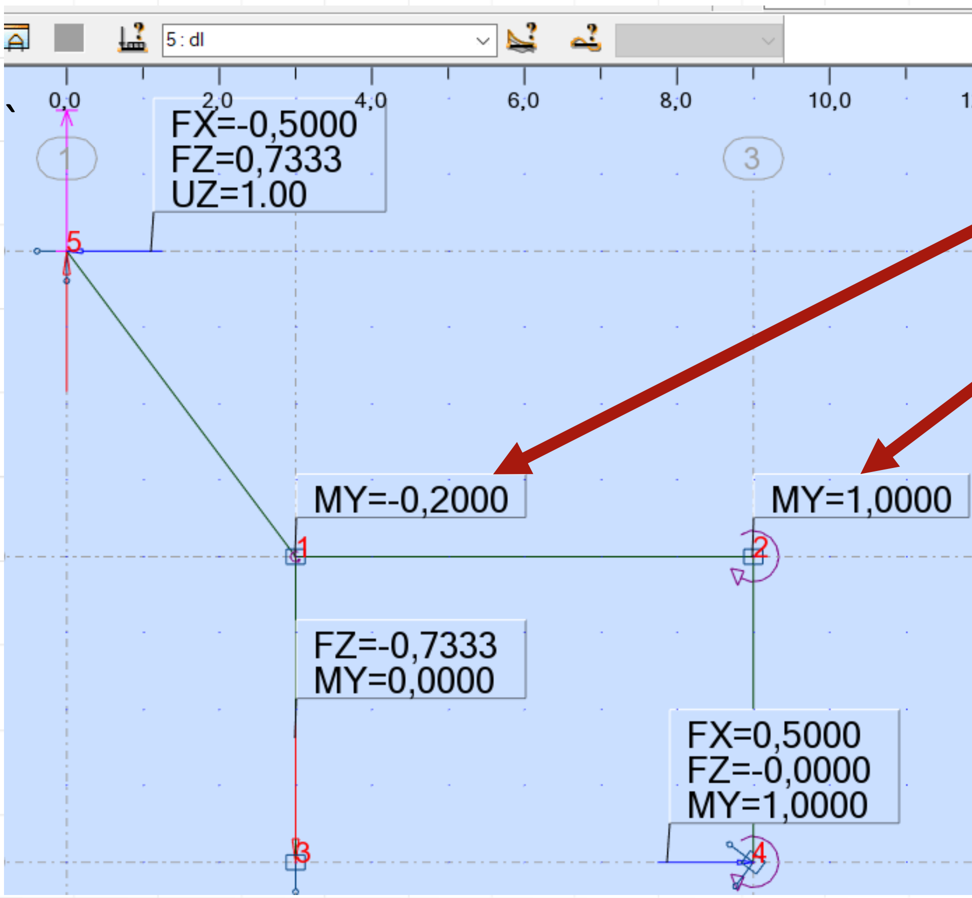
$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\,I} \cdot \delta_I + k_{I\,II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

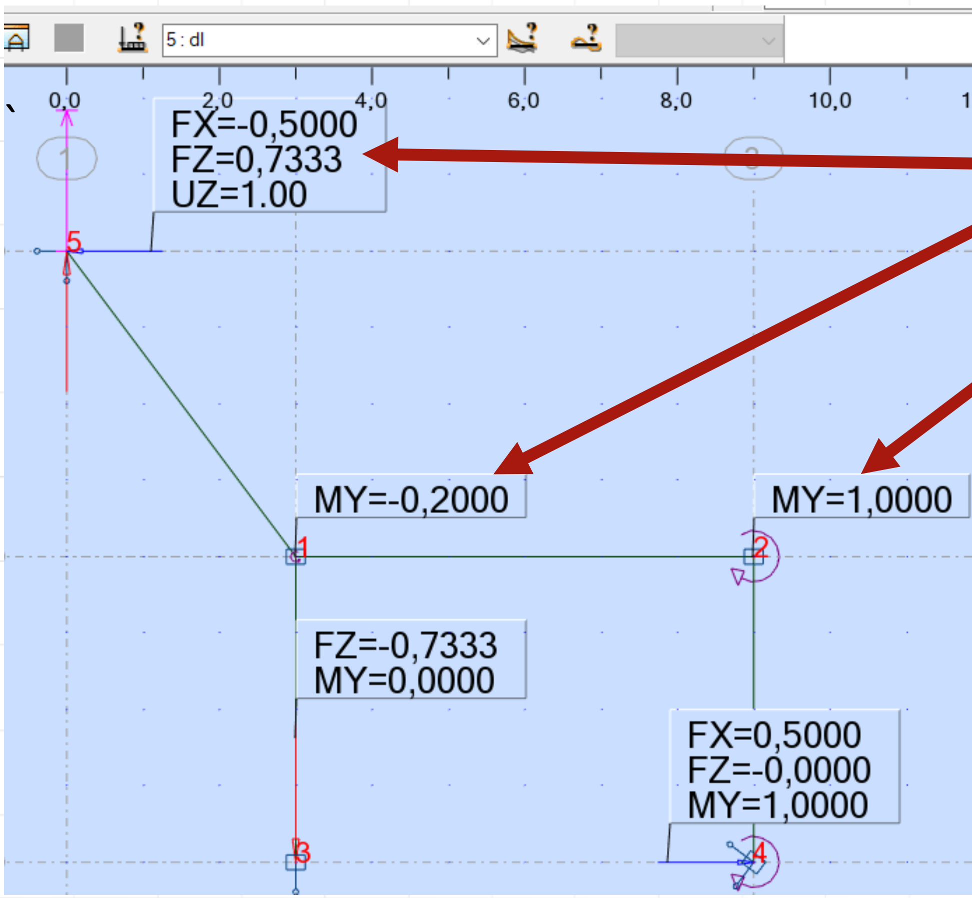
$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\,I} \cdot \delta_I + k_{II\,II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$
\begin{aligned}
k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} &= 0\\
k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} &= 0\\
k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} &= 0\\
k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} &= 0
\end{aligned}
$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



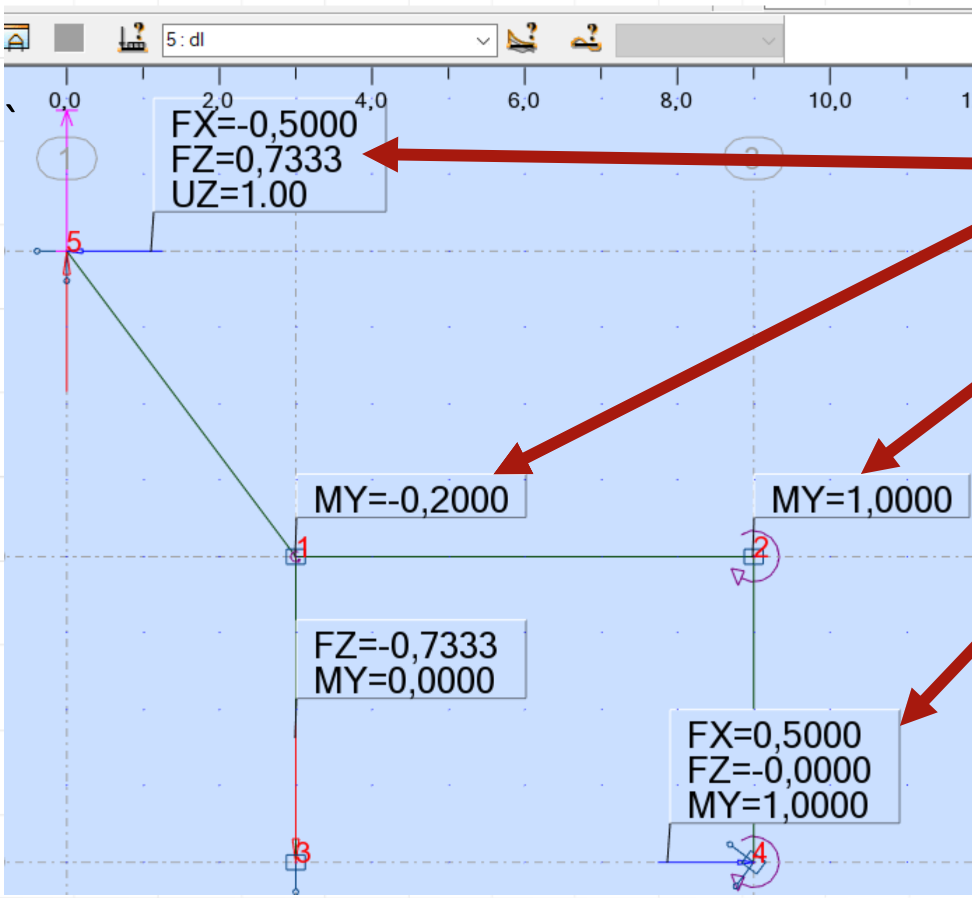
$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

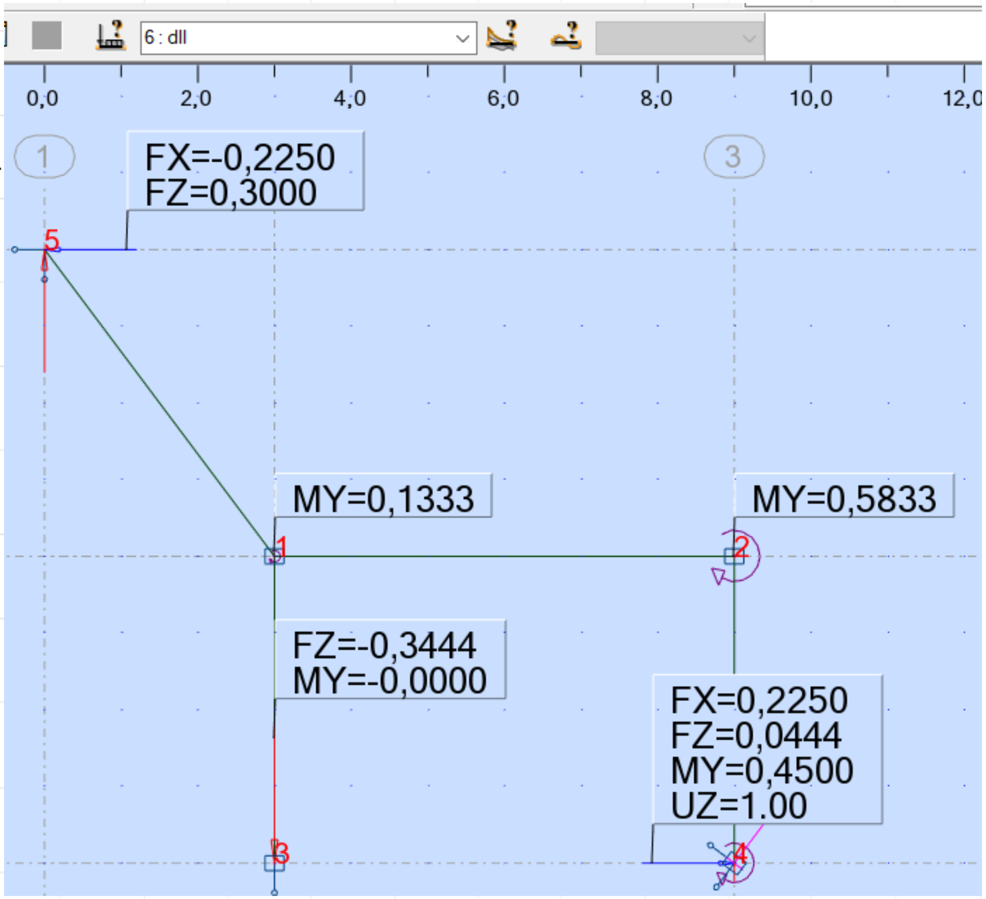
$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\,I} \cdot \delta_I + k_{I\,II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\,I} \cdot \delta_I + k_{II\,II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

$$k_{II\,I} = FX \cdot \sin\alpha + FZ \cdot \cos\alpha =$$

$$0,5m \cdot 0,6 + 0 \cdot 0,8 = 0,3m$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



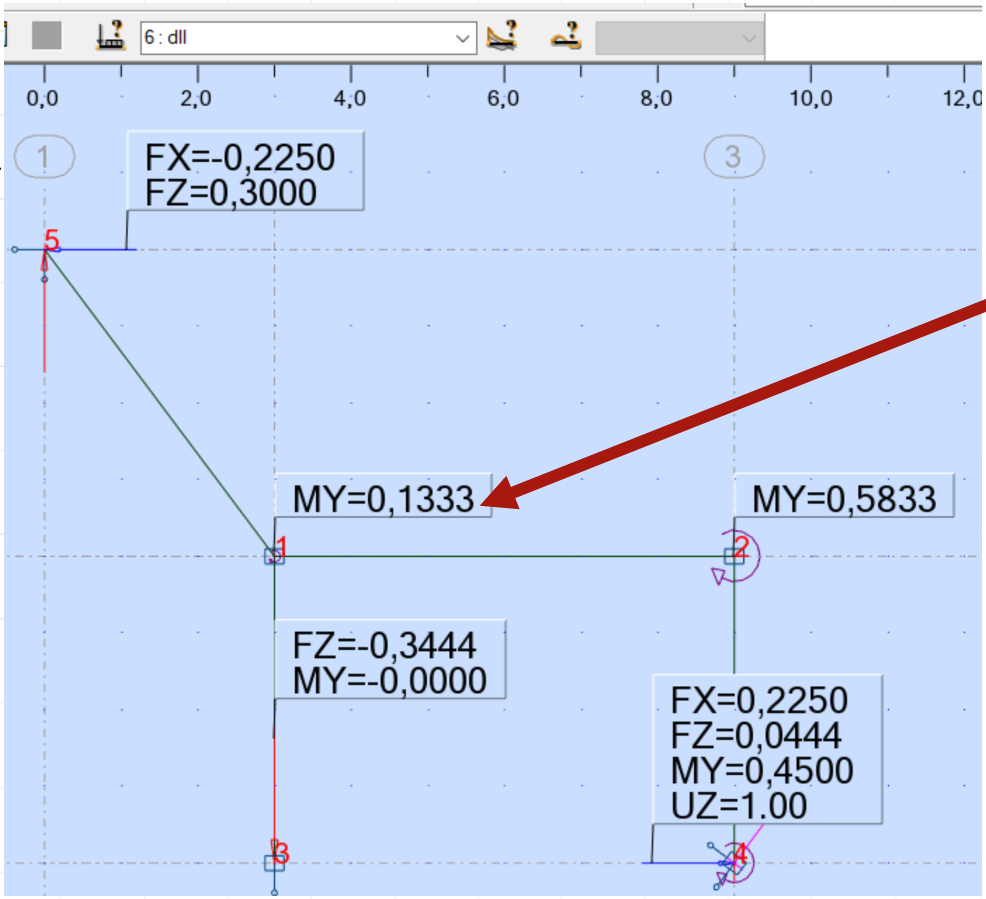
$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

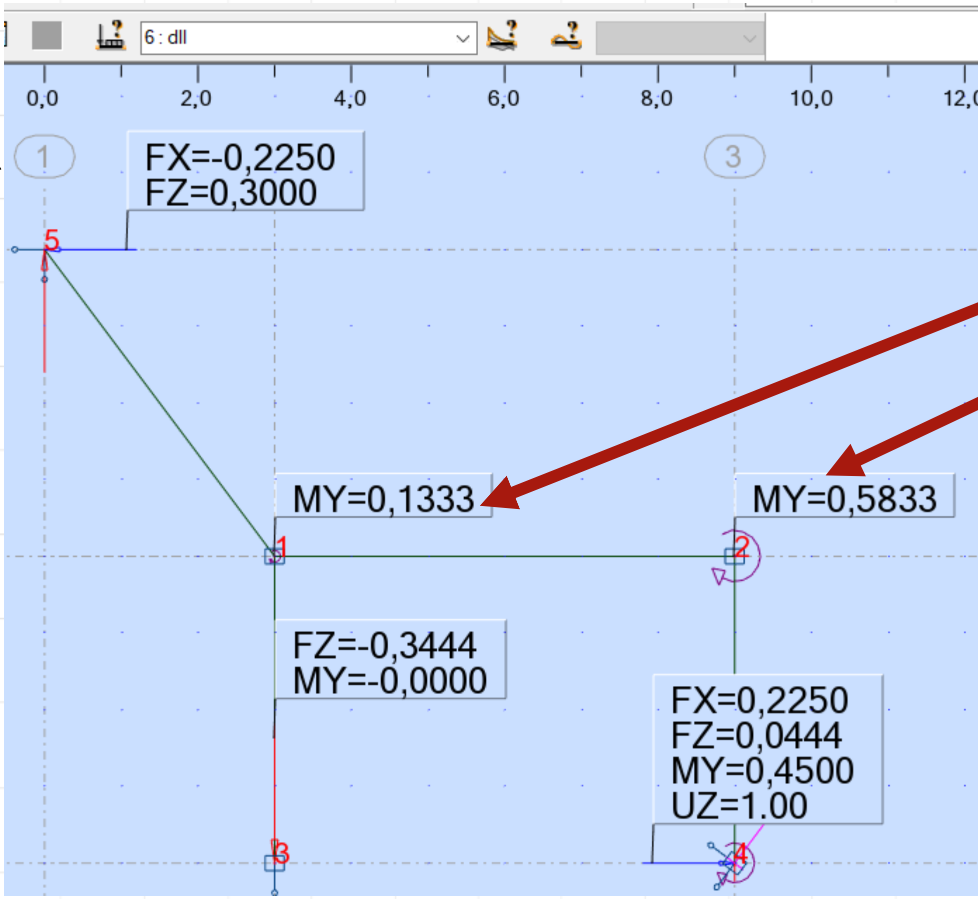
$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + \boxed{k_{1II}\cdot\delta_{II}} + k_{1o} = 0$$
$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + \boxed{k_{2II}\cdot\delta_{II}} + k_{2o} = 0$$
$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + \boxed{k_{I\,II}\cdot\delta_{II}} + k_{Io} = 0$$
$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + \boxed{k_{II\,II}}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



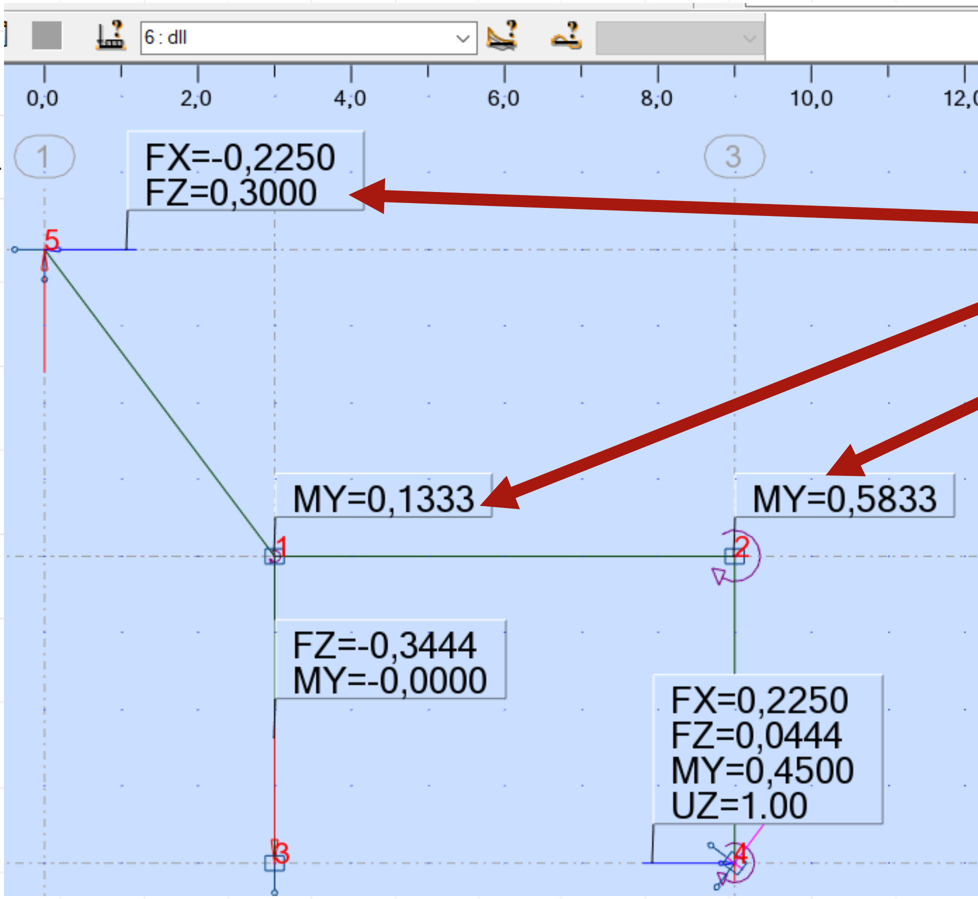
$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\,I} \cdot \delta_I + k_{I\,II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\,I} \cdot \delta_I + k_{II\,II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



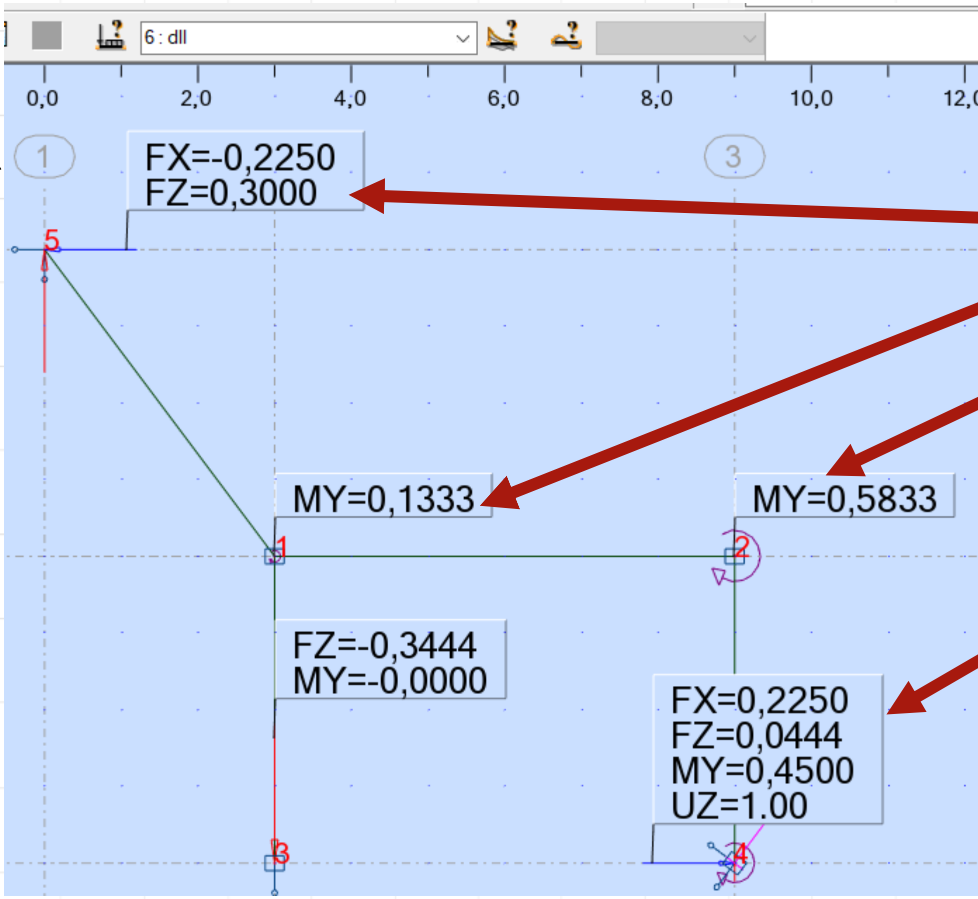
$$k_{11} \cdot \varphi_1 + k_{12} \cdot \varphi_2 + k_{1I} \cdot \delta_I + k_{1II} \cdot \delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21} \cdot \varphi_1 + k_{22} \cdot \varphi_2 + k_{2I} \cdot \delta_I + k_{2II} \cdot \delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1} \cdot \varphi_1 + k_{I2} \cdot \varphi_2 + k_{I\,I} \cdot \delta_I + k_{I\,II} \cdot \delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1} \cdot \varphi_1 + k_{II2} \cdot \varphi_2 + k_{II\,I} \cdot \delta_I + k_{II\,II} \cdot \delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

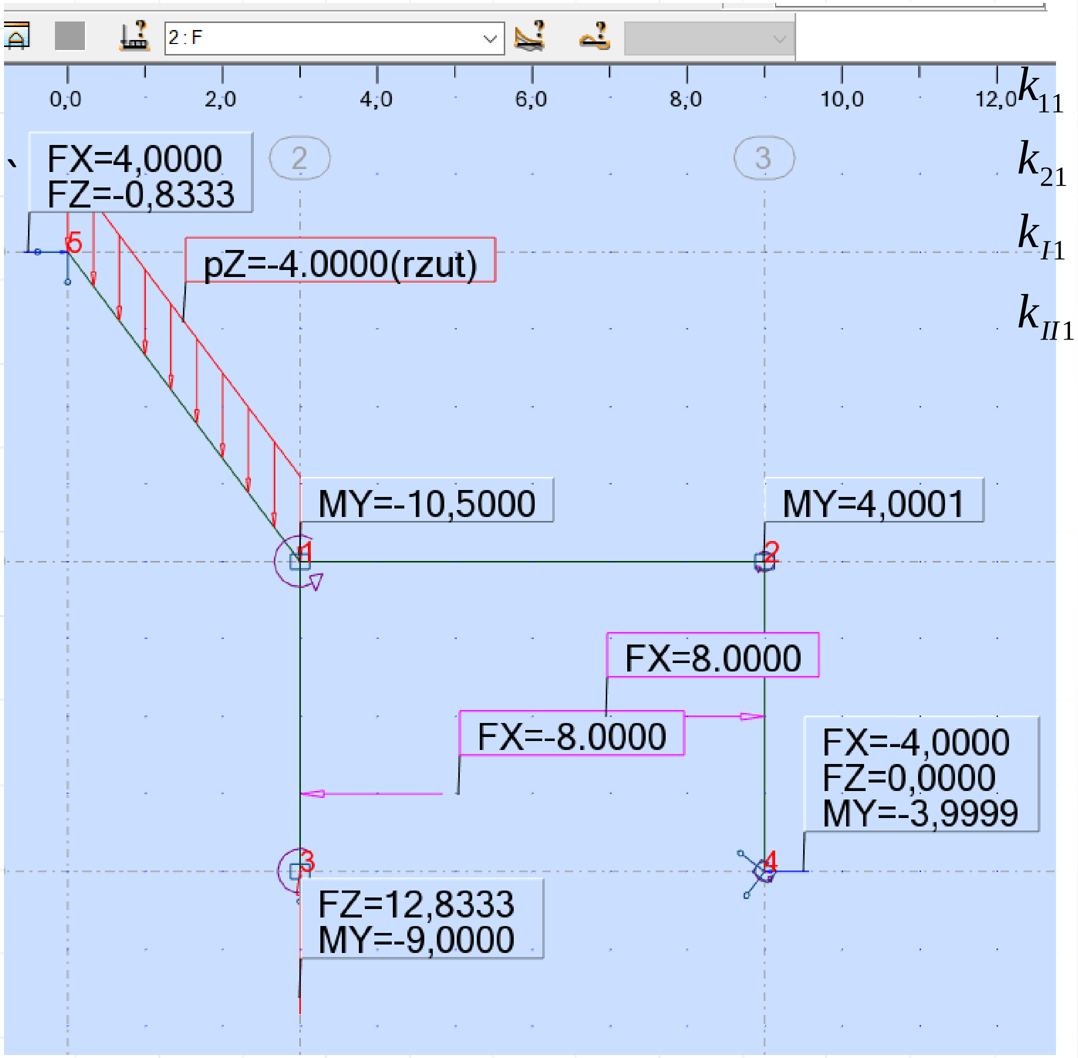
$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

$$k_{II\,II} = FX\cdot\sin\alpha + FZ\cdot\cos\alpha =$$

$$0,225m\cdot 0,6 + 0,0444m\cdot 0,8 = 0,1705m$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



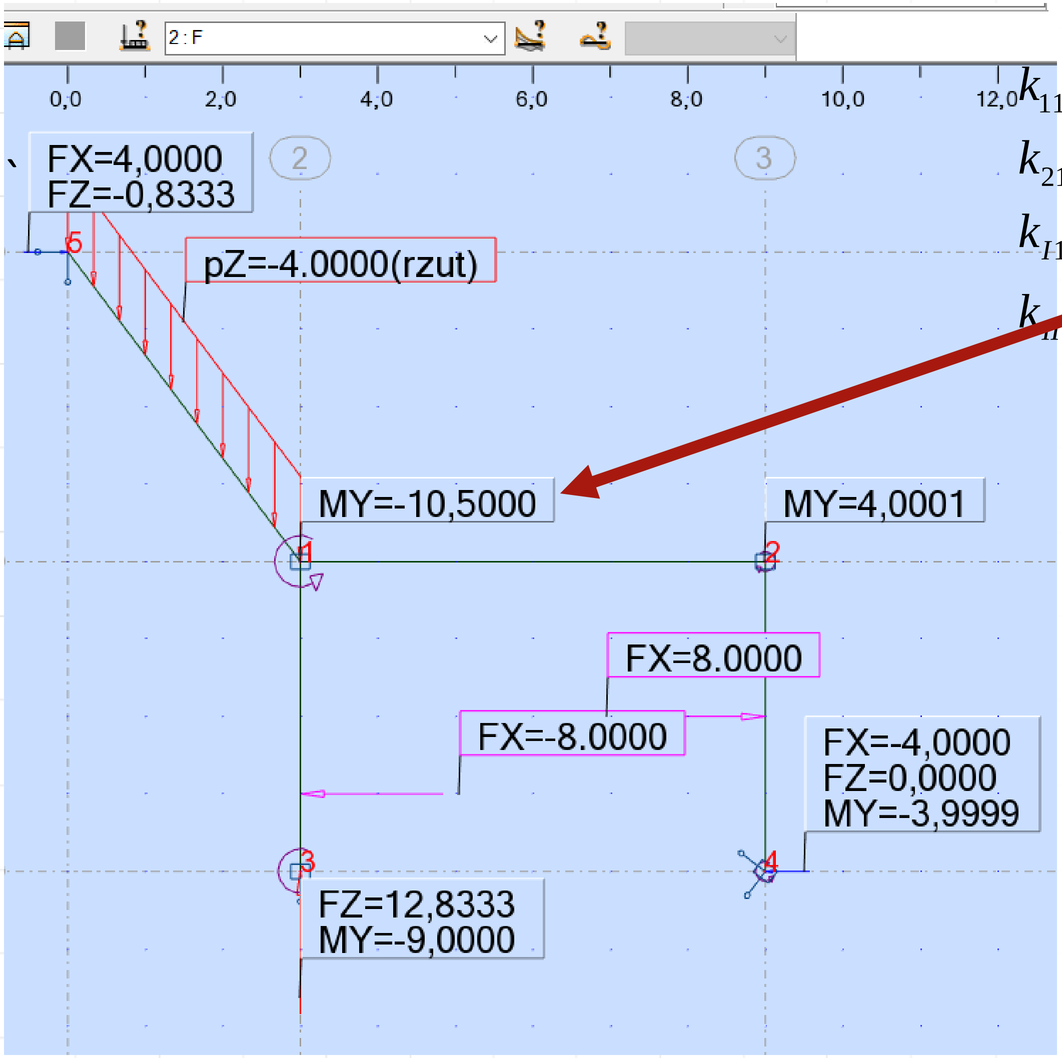
$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



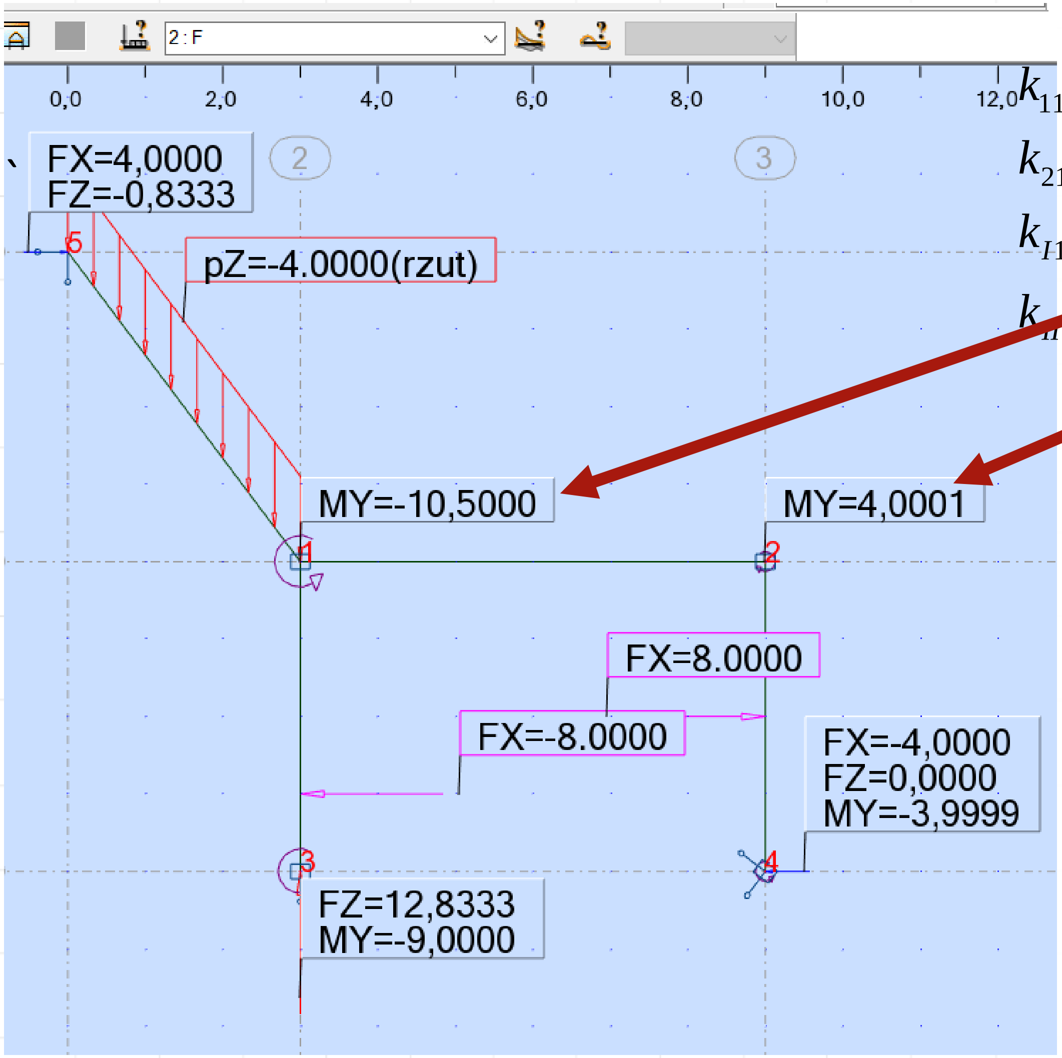
$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



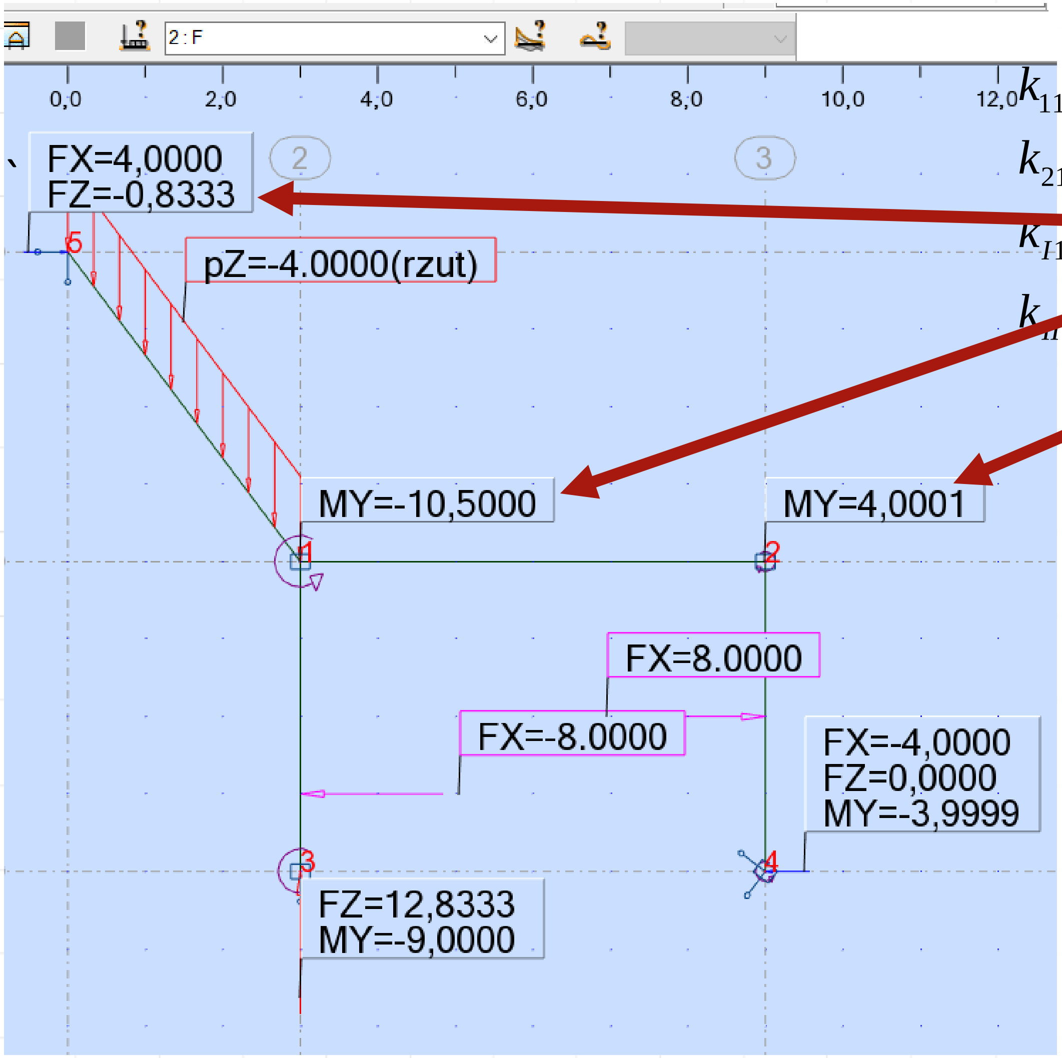
$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



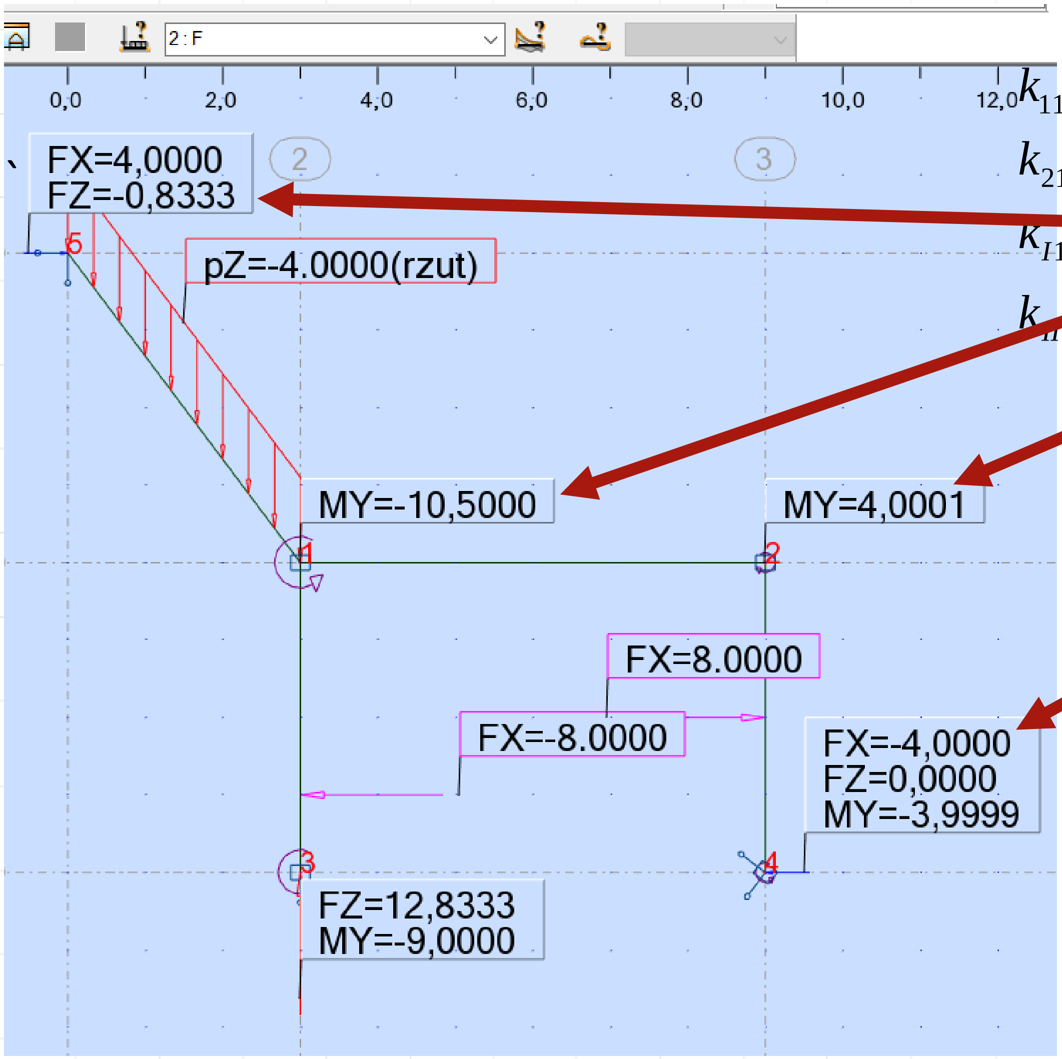
$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

KONTROLA KINEMATYCZNA ROZWIĄZANIA



$$k_{11}\cdot\varphi_1 + k_{12}\cdot\varphi_2 + k_{1I}\cdot\delta_I + k_{1II}\cdot\delta_{II} + k_{1o} = 0$$

$$k_{21}\cdot\varphi_1 + k_{22}\cdot\varphi_2 + k_{2I}\cdot\delta_I + k_{2II}\cdot\delta_{II} + k_{2o} = 0$$

$$k_{I1}\cdot\varphi_1 + k_{I2}\cdot\varphi_2 + k_{I\,I}\cdot\delta_I + k_{I\,II}\cdot\delta_{II} + k_{Io} = 0$$

$$k_{II1}\cdot\varphi_1 + k_{II2}\cdot\varphi_2 + k_{II\,I}\cdot\delta_I + k_{II\,II}\cdot\delta_{II} + k_{IIo} = 0$$

$$k_{II\,II} = FX\cdot\sin\alpha + FZ\cdot\cos\alpha =$$

$$-4m\cdot 0,6 + 0\cdot 0,8 = -2,4m$$