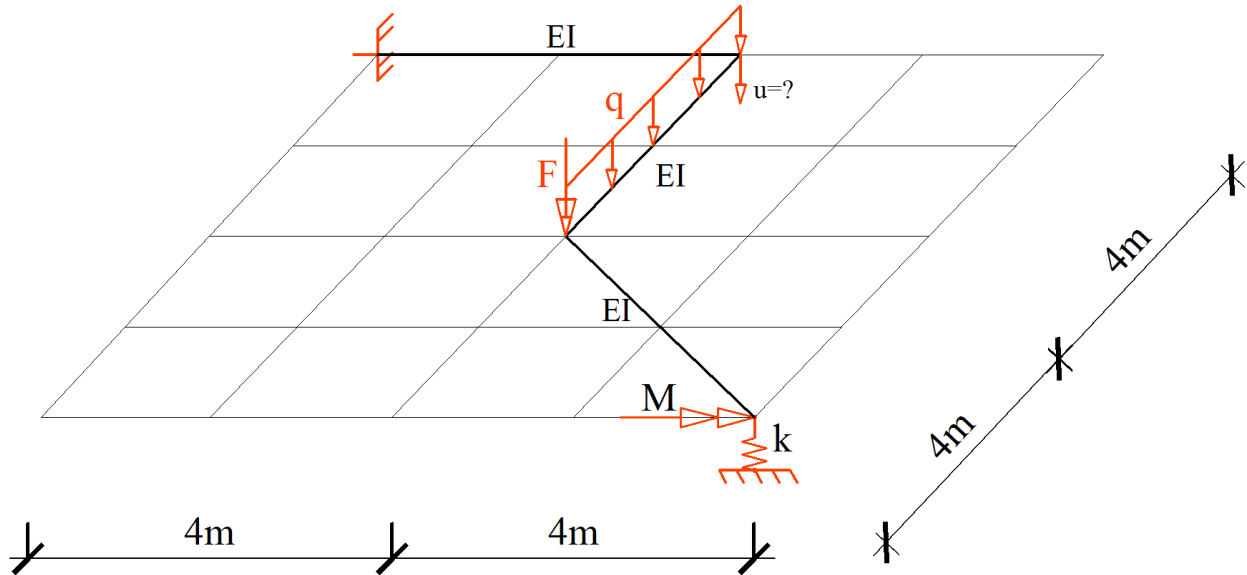


ROZWIĄZANIE DŹWIGARA ZAŁAMANEGO W PLANIE METODĄ SIŁ I OBLICZENIE PRZEMIESZCZENIA

1. DANE I SZUKANE

Układ załamany w planie o schemacie i obciążeniu mechanicznym jak na rysunku rozwiązać metodę sił i obliczyć wartość zaznaczonego przemieszczenia. W obliczeniach przyjmując, że konstrukcja wykonana jest z rur stalowych, tzn. $GI_s = 0.769EI_y$, ze stali o wytrzymałości obliczeniowej równej 235MPa, średni współczynnik obciążenia wynosi $\gamma_f = 1.3$. Przy projektowaniu przekroju zastosować hipotezę wytrzymałościową Hubera-Misesa-Hencky'ego (H-M-H).



$$q = 5 \text{ kN/m}; \quad F = 24 \text{ kN}; \quad M = 42 \text{ kNm}; \quad k = 5 \frac{\text{m}^3}{EI}$$

Szukane: $M_x^F, M_y^F, V_z^F, \Delta_u^F$

2. WYZNACZENIE STOPNIA STATYCZNEJ NIEWYZNACZALNOŚCI

a) Aby skorzystać z wzoru $n_h = e - 3 \cdot t$ przekształcamy układ dany w zbiór tarcz „sztywnych” otwartych przez usunięcie więzi podporowych, dokonanie przecięć wszędzie tam gdzie połączenie nie jest pełne oraz „otwarcie” tarcz zamkniętych.

$$e = 4$$

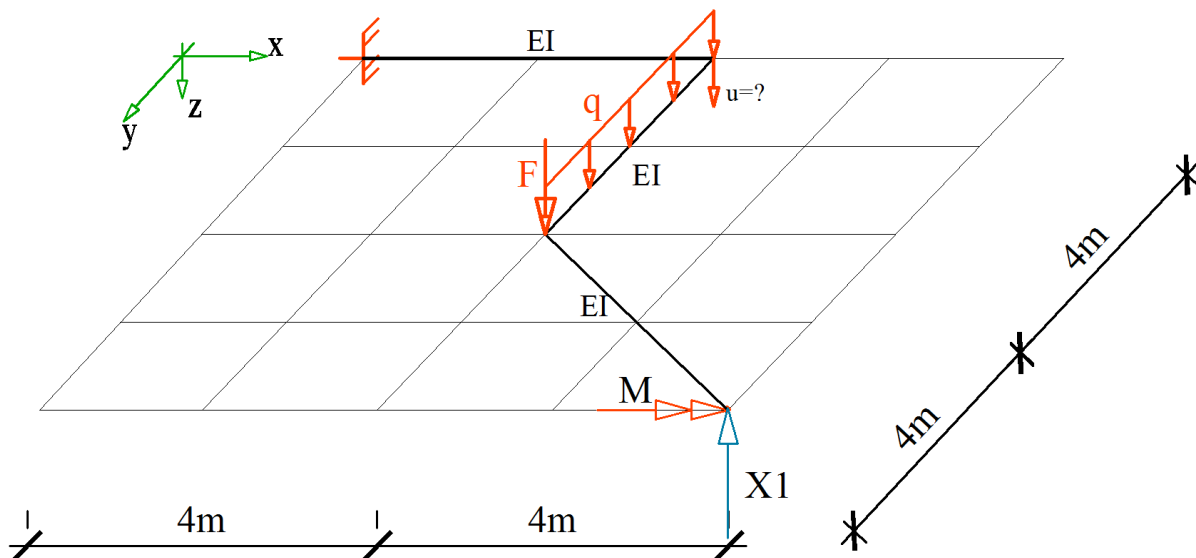
$$t = 1$$

$$n_h = 4 - 3 \cdot 1 = 1 \text{ - układ jest jednokrotnie statycznie niewyznaczalny}$$

b) Warunek jakościowy – Zadany układ ramowy tworzy jedną tarczę, która z ostoją połączona jest czterema niezbieżnymi i nierównoległymi więziami podporowymi. Korzystając więc z twierdzenia o dwóch tarczach udowodnić można, że układ jest geometrycznie niezmienny.

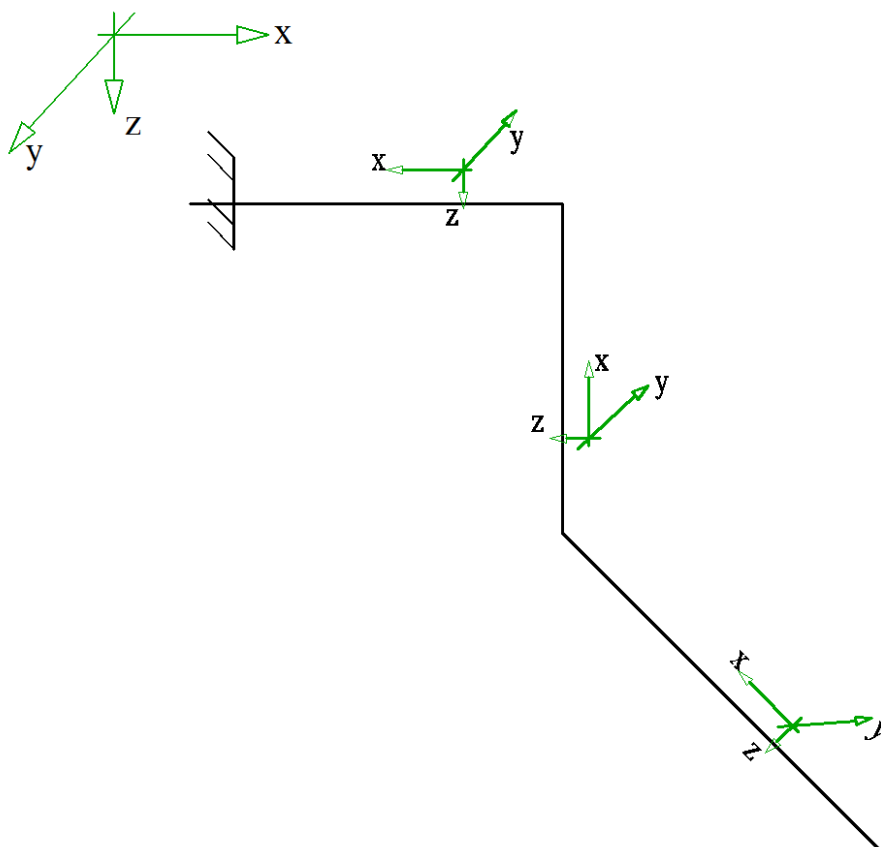
3. UKŁAD PODSTAWOWY ORAZ PRZYJĘCIE UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH

Układ podstawowy – układ zadany, w którym przecięto lub odrzucono n_h więzi i zastąpiono je niewiadomymi siłami hiperstatycznymi. W układzie tym oznaczymy węzły, punkty charakterystyczne i przyjmujemy ogólny i lokalne układy współrzędnych. Układ podstawowy tworzymy z układu danego w taki sposób by powstały układ był geometrycznie niezmienny.



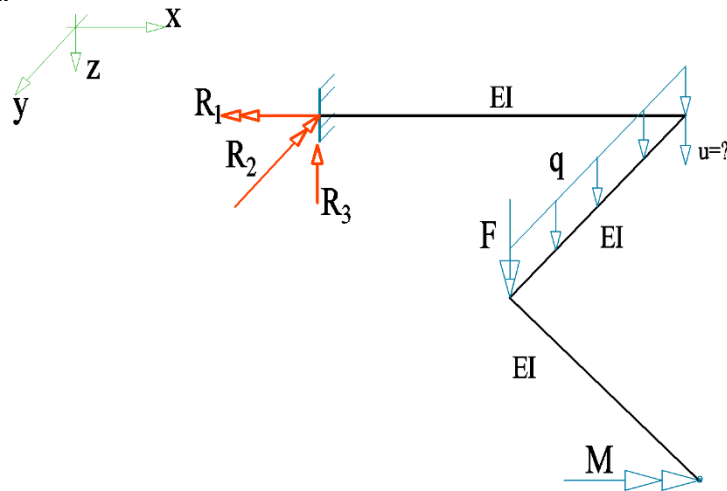
2.1. PRZYJĘCIE UKŁADU WSPÓŁRZĘDNYCH DLA KAŻDEGO PRĘTA

Rzut z góry wraz z przyjętym układem lokalnym dla każdego pręta



3. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD DANEGO OBCIĄŻENIA $F=(M,F,Q)$

Uwaga: Wszystkie wielkości wyznaczane w tym punkcie wyróżniamy nakreśleniem i indeksem górnym F. Dla skrócenia zapisu w obliczeniach pominiemy te wyróżniki stosując pełne symbole tylko w oznaczeniach wielkości, z których korzystać będziemy w dalszych obliczeniach.



Wyznaczenie reakcji podpór (układ globalny)

$$\begin{aligned} \sum M_{xB} &= M - R_1 + q \cdot 4m \cdot 2m + P \cdot 4m = 0 \\ 42kNm - R_1 + 5kN/m \cdot 4m \cdot 2m + 24kN \cdot 4m &= 0 \quad \Rightarrow R_1 = \bar{R}_1 = 178kNm \\ \sum M_{yB} &= -R_2 - q \cdot 4m \cdot 4m - P \cdot 4m = 0 \\ -R_2 - 5kN/m \cdot 4m \cdot 4m - 24kN \cdot 4m &= 0 \quad \Rightarrow R_2 = \bar{R}_2 = -176kNm \\ \sum V_{zB} &= -R_3 + q \cdot 4m + P = 0 \\ -R_3 + 5kN/m \cdot 4m + 24kN &= 0 \quad \Rightarrow R_3 = \bar{R}_3 = 44kN \end{aligned}$$

Obliczenie wartości rzędnych charakterystycznych sił przekrojowych (układy lokalne)

$$\begin{aligned} M_{yA} &= -M \cdot \sin 45^\circ = -42kNm \cdot 0,707 = -29,694kNm \\ M_{y1A} &= -M \cdot \sin 45^\circ = -42kNm \cdot 0,707 = -29,694kNm \\ M_{y12} &= -M = -42kNm \\ M_{y2} &= -M - q \cdot 2m \cdot 1m - P \cdot 2m = -42kNm - 5kN/m \cdot 2m \cdot 1m - 24kN \cdot 2m = -100kNm \\ M_{y32} &= -M - q \cdot 4m \cdot 2m - P \cdot 4m = -42kNm - 5kN/m \cdot 4m \cdot 2m - 24kN \cdot 4m = -178kNm \\ M_{y3B} &= 0kNm \\ M_{yB} &= \bar{R}_2 = -176kNm \\ \\ M_{xA} &= M \cdot \cos 45^\circ = 42kNm \cdot 0,707 = 29,694kNm \\ M_{x1A} &= M \cdot \cos 45^\circ = 42kNm \cdot 0,707 = 29,694kNm \\ M_{x12} &= 0kNm \\ M_{x2} &= 0kNm \\ M_{x32} &= 0kNm \\ M_{x3B} &= M + q \cdot 4m \cdot 2m + P \cdot 4m = 42kNm + 5kN/m \cdot 4m \cdot 2m + 24kN \cdot 4m = 178kNm \\ M_{xB} &= \bar{R}_1 = 178kNm \end{aligned}$$

$$V_{zA} = 0 \text{ kN}$$

$$V_{z1A} = 0 \text{ kN}$$

$$V_{z12} = -P = -24 \text{ kN}$$

$$V_{z2} = -P - q \cdot 2m = -24 \text{ kN} - 5 \text{ kN/m} \cdot 2m = -34 \text{ kN}$$

$$V_{z32} = -P - q \cdot 4m = -24 \text{ kN} - 5 \text{ kN/m} \cdot 4m = -44 \text{ kN}$$

$$V_{z3B} = -P - q \cdot 4m = -24 \text{ kN} - 5 \text{ kN/m} \cdot 4m = -44 \text{ kN}$$

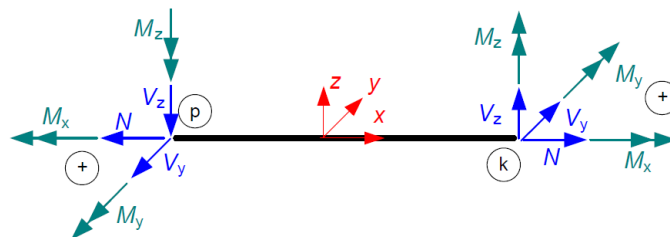
$$V_{zB} = -\overline{R}_3 = -44 \text{ kN}$$

Uwagi:

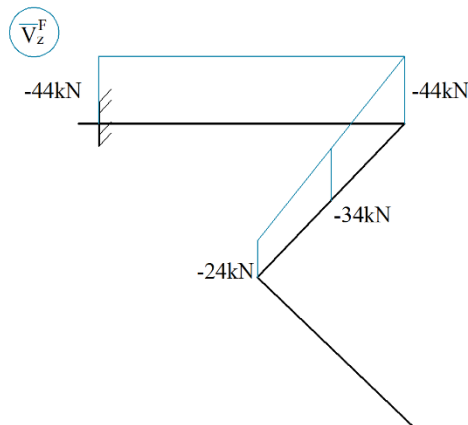
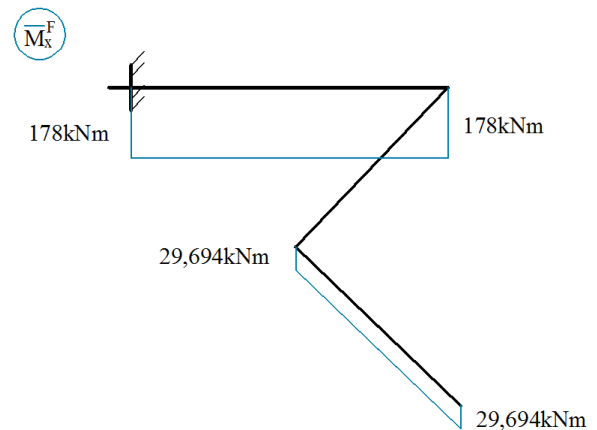
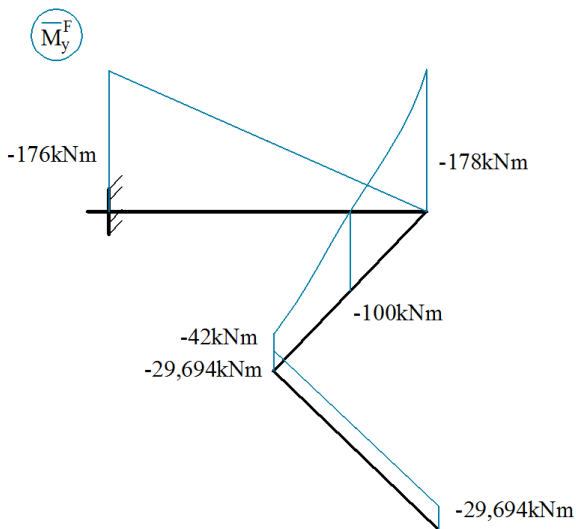
- Momenty zginające M_y odkładamy po stronie włókien rozciąganych w płaszczyźnie xz, kreskujemy pionowo, znak „+” jest po dodatniej stronie osi „z” układu lokalnego;

- Momenty skręcające odkładamy w płaszczyźnie xz lub xy.

W układach przestrzennych, załamanych w planie i rusztach belkowych dodatnie znaki sił przekrojowych przyjmujemy jak na rysunku poniżej:

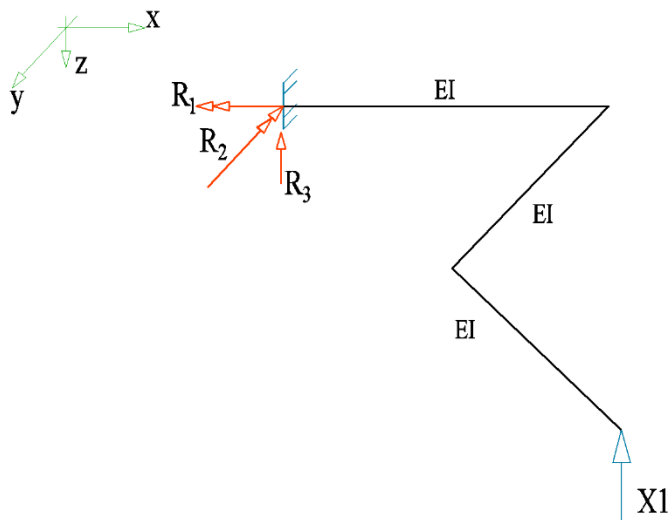


Wykresy sił przekrojowych



4. ROZWIĄZANIE UKŁADU PODSTAWOWEGO OD OBCIĄŻENIA $X_1 = 1$.

Uwaga: Wszystkie wielkości wyznaczone w tym punkcie wyróżniamy nakreśleniem i indeksem górnym 1. Dla skrócenia zapisu w obliczeniach pominiemy te wyróżniki stosując pełne symbole tylko w oznaczeniach wielkości, z których korzystać będziemy w dalszych obliczeniach.



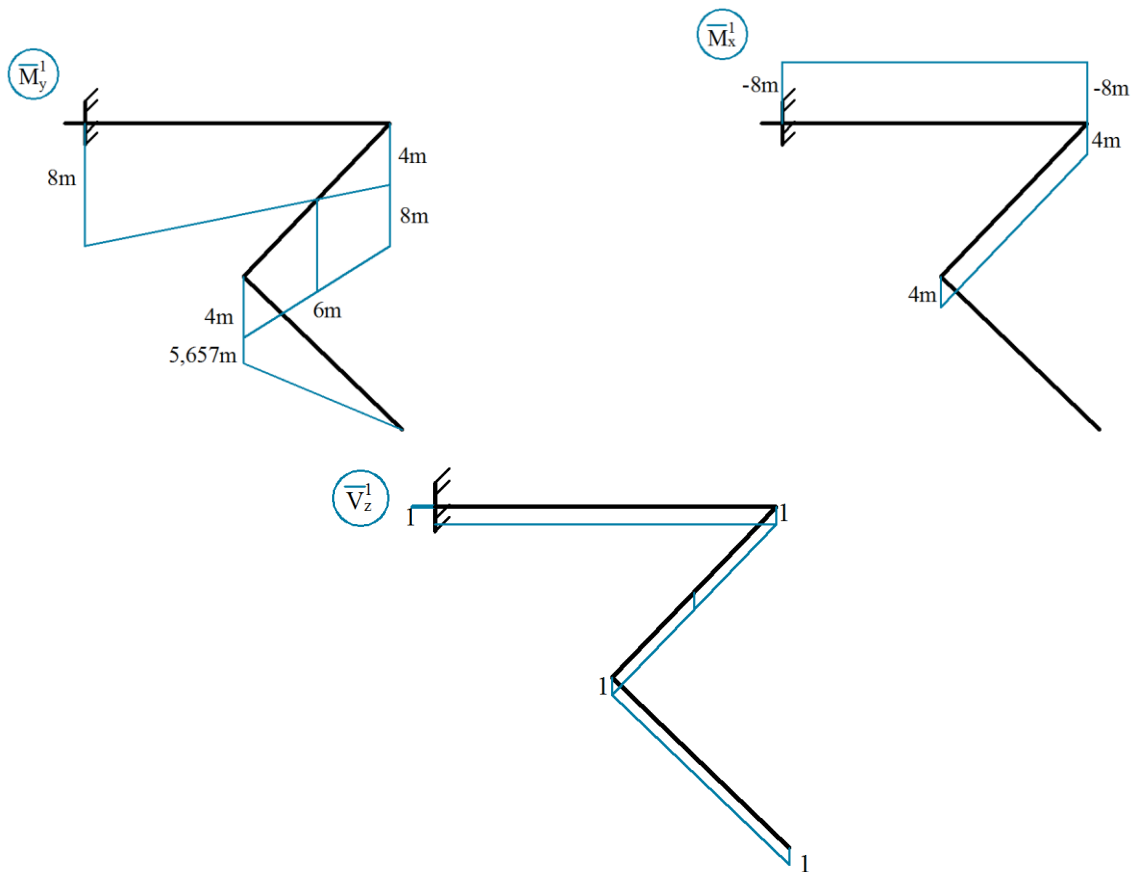
Wyznaczenie reakcji podpór

$$\begin{aligned} \sum M_{xB} &= -1 \cdot 8m - R_1^1 = 0 & \Rightarrow R_1^1 = \overline{R_1^1} = -8m \\ \sum M_{yB} &= -R_2^1 + 1 \cdot 8m = 0 & \Rightarrow R_2^1 = \overline{R_2^1} = 8m \\ \sum V_{zB} &= R_3^1 + 1 = 0 & \Rightarrow R_3^1 = \overline{R_3^1} = -1 \end{aligned}$$

Obliczenie wartości rzędnych charakterystycznych sił przekrojowych.

$M_{yA}^1 = 0m$	$M_{xA}^1 = 0m$	$V_{zA}^1 = 1$
$M_{y1A}^1 = 1 \cdot 4\sqrt{2}m = 5,657m$	$M_{x1A}^1 = 0m$	$V_{z1A}^1 = 1$
$M_{y12}^1 = 1 \cdot 4m = 4m$	$M_{x12}^1 = 1 \cdot 4m = 4m$	$V_{z12}^1 = 1$
$M_{y2}^1 = 1 \cdot 6m = 6m$	$M_{x2}^1 = 1 \cdot 4m = 4m$	$V_{z2}^1 = 1$
$M_{y32}^1 = 1 \cdot 8m = 8m$	$M_{x32}^1 = 1 \cdot 4m = 4m$	$V_{z32}^1 = 1$
$M_{y3B}^1 = 1 \cdot 4m = 4m$	$M_{x3B}^1 = -1 \cdot 8m = -8m$	$V_{z3B}^1 = 1$
$M_{yB}^1 = \overline{R_2^1} = 8m$	$M_{xB}^1 = \overline{R_1^1} = -8m$	$V_{zB}^1 = \overline{R_3^1} = 1$

Wykresy sił przekrojowych



5. UKŁAD RÓWNAŃ I JEGO ROZWIĄZANIE

Postać ogólna układu równań

$$\delta_{11} \cdot X_1 + \delta_{1F} = -\frac{X_1}{k_\delta}$$

Obliczenie współczynników układu równań

Współczynniki układu równań obliczamy wykorzystując wzory:

$$\delta_{ij} = \int \frac{\overline{M}_x^i \cdot \overline{M}_x^j}{GI_s} dx + \int \frac{\overline{M}_y^i \cdot \overline{M}_y^j}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\overline{S}_n^i \overline{S}_n^j}{k_n} \quad \delta_{iF} = \int \frac{\overline{M}_x^i \cdot \overline{M}_x^F}{GI_s} dx + \int \frac{\overline{M}_y^i \cdot \overline{M}_y^F}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\overline{S}_n^i \overline{S}_n^F}{k_n}$$

$$\begin{aligned} \delta_{11} &= \frac{1}{0,769EI} \cdot (-8m) \cdot 4m \cdot (-8m) + \frac{1}{0,796EI} \cdot 4m \cdot 4m \cdot 4m + 0 + \frac{1}{EI} \cdot \frac{4m}{6} \cdot \left[(8m)^2 + 4 \cdot (6m)^2 + (4m)^2 \right] + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{4m}{6} \cdot \left[(8m)^2 + 4 \cdot (6m)^2 + (4m)^2 \right] + \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 5,657m \cdot 5,657m \cdot \frac{2}{3} \cdot 5,657m = 332,9 \frac{m^3}{EI} + 83,225 \frac{m^3}{EI} + \\ &+ 149,333 \frac{m^3}{EI} + 149,333 \frac{m^3}{EI} + 60,344 \frac{m^3}{EI} = 775,135 \frac{m^3}{EI} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_{1F} &= \frac{1}{0,769 \cdot EI} \cdot (-8m) \cdot 4m \cdot (178kNm) + 0 + 0 + \\ &+ \frac{1}{3EI} \cdot \frac{4m}{6} \cdot \left[(8m) \cdot (-176kNm) + 4 \cdot (6m)(-88kNm) + (4m) \cdot 0 \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{EI} \cdot \frac{4m}{6} \cdot [(8m) \cdot (-178kNm) + 4 \cdot (6m) \cdot (-100kNm) + (4m) \cdot (-42kNm)] + \\
& + \frac{1}{2EI} \cdot \frac{5,657m}{6} \cdot [(5,657m) \cdot (-29,694kNm) + 4 \cdot (5,657m/2) \cdot (-29,694kNm) + 0 \cdot (-29,694kNm)] \\
& = \\
& = -7407,022 \frac{kNm^3}{EI} - 2346,667 \frac{kNm^3}{EI} - 2661,333 \frac{kNm^3}{EI} - 475,128 \frac{kNm^3}{EI} = -12890,147 \frac{kNm^3}{EI}
\end{aligned}$$

Postać szczegółowa układu równań

$$775,135 \frac{m^3}{EI} \cdot X_1 - 12890,147 \frac{kNm^3}{EI} = - \frac{X_1}{5 \frac{EI}{m^3}}$$

Rozwiązanie układu równań

$$X_1 = 16,625kN$$

6. OBLICZENIE WARTOŚCI „RZECZYWISTYCH” REAKCJI I SIŁ PRZEKROJOWYCH

Obliczenia wykonano w tabelach wykorzystując wzory

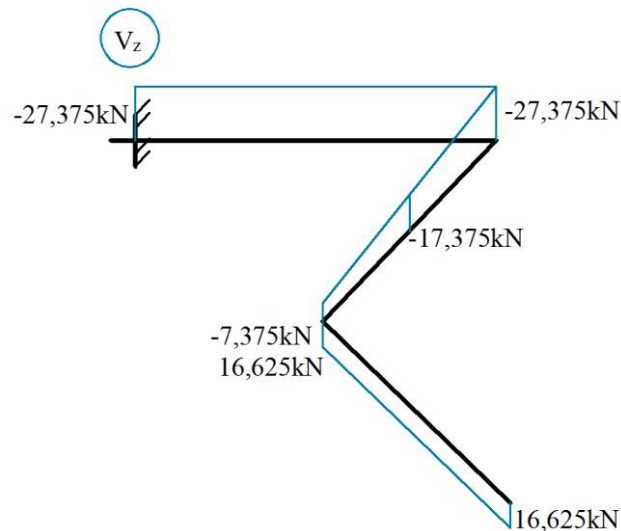
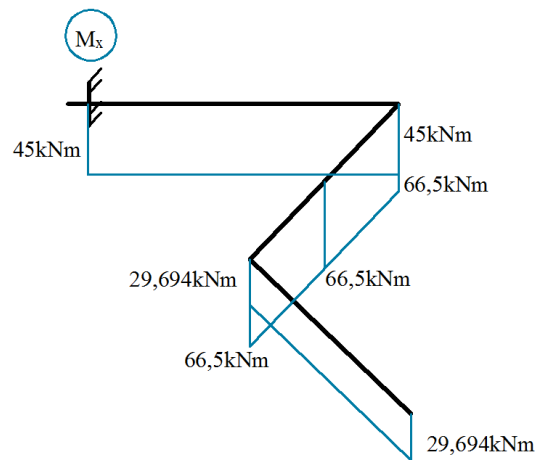
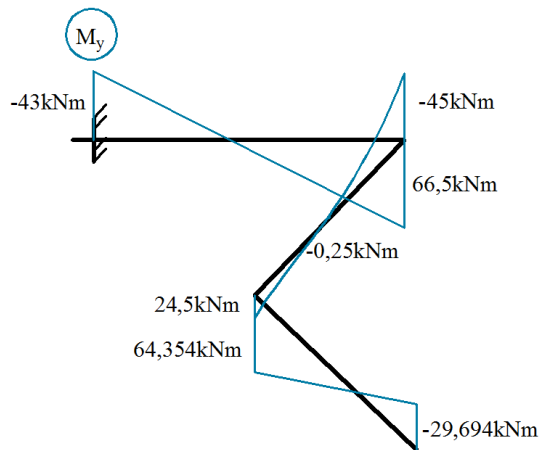
$$\begin{aligned}
M_{x\alpha}^F &= \bar{M}_{x\alpha}^1 \cdot X_1 + \bar{M}_{x\alpha}^F, & M_{y\alpha}^F &= \bar{M}_{y\alpha}^1 \cdot X_1 + \bar{M}_{y\alpha}^F \\
R_r^F &= \bar{R}_r^1 \cdot X_1 + \bar{R}_r^F, & V_\alpha^F &= \bar{V}_\alpha^1 \cdot X_1 + \bar{V}_\alpha^F, & S_n^F &= \bar{S}_n^1 \cdot X_1 + \bar{S}_n^F
\end{aligned}$$

Pręt	Punkt	\bar{M}_y^1	X_1	\bar{M}_y^F	M_y
		[m]	[kN]	[kNm]	[kNm]
A1	A	0	16,625	-29,694	-29,694
	1	5,657		-29,694	64,354
13	1	4		-42	24,5
	2	6		-100	-0,25
	3	8		-178	-45
3B	3	4		0	66,5
	B	8		-176	-43

Pręt	Punkt	\bar{M}_x^1	X_1	\bar{M}_x^F	M_x
		[m]	[kN]	[kNm]	[kNm]
A1	A	0	16,625	29,694	29,694
	1	0		29,694	29,694
13	1	4		0	66,5
	2	4		0	66,5
	3	4		0	66,5
3B	3	-8		178	45
	B	-8		178	45

Pręt	Punkt	\bar{V}_z^I	X_1	\bar{V}_z^F	V_z
		[-]	[kN]	[kN]	[kN]
A1	A	1	16,625	0	16,625
	1	1		0	16,625
13	1	1		-24	-7,375
	2	1		-34	-17,375
	3	1		-44	-27,375
3B	3	1		-44	-27,375
	B	1	-44	-27,375	

7. WYKRESY „RZECZYWISTYCH” SIŁ PRZEKROJOWYCH



8. KONTROLA POPRAWNOŚCI ROZWIĄZANIA

Kontrola rozwiązania polega na sprawdzeniu czy otrzymane rozwiązanie jest statycznie i kinematycznie dopuszczalne, czyli czy siły spełniają równania równowagi a przemieszczenia są kinematycznie zgodne.

8.1. Kontrola równań równowagi.

Zaleca się, aby do sprawdzenia równań równowagi, podzielić układ na pręty i węzły i dla każdego tak wydzielonego elementu sprawdzić 3 równania równowagi.

8.2. Kontrola zgodności przemieszczeń.

Kontrola zgodności przemieszczeń polega na sprawdzeniu zgodności przemieszczeń układu rozwiązanego z przemieszczeniami rzeczywistymi w tyłu miejscach, ile wynosi stopień statycznej niewyznaczalności. Wartości tych przemieszczeń muszą być takie, jakie wynikają ze sposobu podparcia układu i połączenia jego elementów.

$$\delta_{iF} = \int \frac{\overline{M}_x^i \cdot M_x^F}{GI_s} dx + \int \frac{\overline{M}_y^i \cdot M_y^F}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\overline{S}_n^i \overline{S}_n^F}{k_n}$$

$$\begin{aligned} \delta_{iF} &= \frac{1}{0,769EI} 4 \cdot (-8m) \cdot 45kNm + \frac{1}{0,769EI} \cdot 4m \cdot 4m \cdot 66,5kNm + 0 + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{4m}{6} \cdot \left[(8m) \cdot (-43kNm) + 4 \cdot (6m) \left(\frac{-43kNm + 66,5kNm}{2} \right) + (4m) \cdot 66,5kNm \right] + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{4m}{6} \cdot \left[(8m) \cdot (-45kNm) + 4 \cdot (6m) \cdot (-0,25kNm) + (4m) \cdot (24,5kNm) \right] + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{5,657m}{6} \cdot \left[(5,657m) \cdot 64,354kNm + 4 \cdot (5,657m/2) \cdot \left(\frac{64,354kNm - 29,694kNm}{2} \right) \right] + \\ &+ \frac{1}{EI} \cdot \frac{5,657m}{6} \cdot \left[+0 \cdot (-29,694kNm) \right] = \\ &= -1872,56 \frac{kNm^3}{EI} + 1383,615 \frac{kNm^3}{EI} - 136 \frac{kNm^3}{EI} - 178,667 \frac{kNm^3}{EI} + 528,102 = -3,510 \frac{kNm^3}{EI} \cong \\ &\cong -\frac{X_1}{5 \frac{EI}{m^3}} = -\frac{16,625kN}{5 \frac{EI}{m^3}} = -3,325 \frac{kNm^3}{EI} \end{aligned}$$

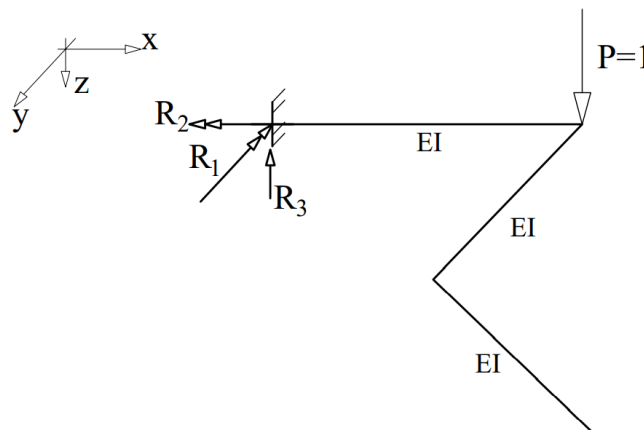
Niewielkie różnice mogą wynikać z przyjętych przybliżeń.

9. WYZNACZENIE SZUKANEGO PRZEMIESZCZENIA.

Szukane przemieszczenie policzymy na podstawie wzoru

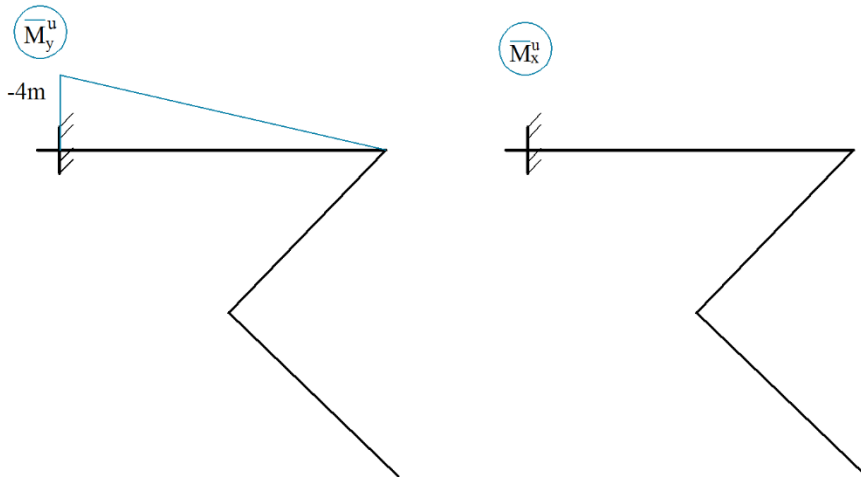
$$\delta_{uF} = \int \frac{\overline{M}_x^u \cdot M_x^F}{GI_s} dx + \int \frac{\overline{M}_y^u \cdot M_y^F}{EI_y} dx + \sum_n \frac{\overline{S}_n^u \overline{S}_n^F}{k_n}$$

Wyznaczyliśmy już momenty rzeczywiste od obciążenia danego w układzie statycznie niewyznaczalnym. Aby skorzystać z przytoczonego wzoru musimy jeszcze rozwiązać dowolny układ podstawowy dźwigara od obciążenia jednostkowego przyłożonego w miejscu i kierunku szukanego przemieszczenia $P_i = 1$.



Może to być taki sam układ, jaki był przyjęty do rozwiązania układu od obciążenia danego. Może też być dowolny inny układ.

Wykresy momentów



Wartość szukanego przemieszczenia wynosi

$$\begin{aligned}\delta_{u^F} &= \frac{1}{EI} \cdot \frac{4m}{6} \cdot [(-4m) \cdot (-43kNm) + 4 \cdot (-2m) \cdot ((-43kNm + 66,5kNm) / 2) + (0m) \cdot 66,5kNm] = \\ &= 52 \frac{kNm^3}{EI}\end{aligned}$$