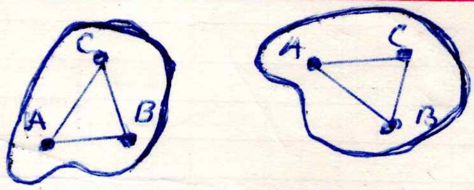
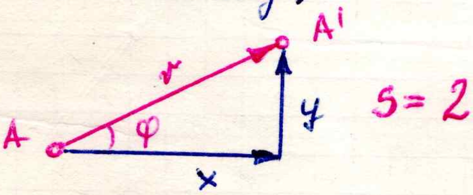
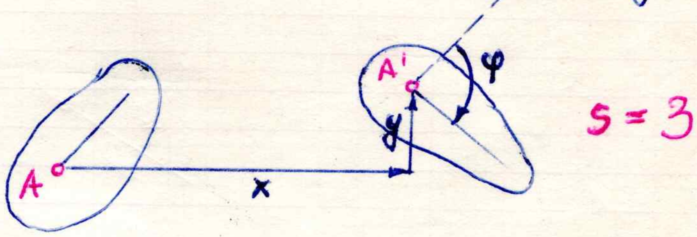
3.2. Kinematyczna analiza konstrukcji płaskich

Jednym z podstawowych pojęć w ideowym modelu konstrukcji płaskich jest pojęcie tarczy. Tarczą SZTYWNĄ! nazywamy zbiór punktów materialnych, których wzajemne odległości są ustalone (niezmienne).



- Punkt swobodny na płaszczyźnie ma dwa stopnie swobody, potrzebne są bowiem dwie informacje geometryczne do określenia zmiany położenia punktu.
- Tarcza swobodna na płaszczyźnie ma trzy stopnie swobody, potrzebne są bowiem trzy informacje geometryczne do określenia zmiany położenia tarczy.





Szczególnym przypadkiem tarczy jest tarcza podstawowa (fundament, ostoja), której uważamy za układ odniesienia dla konstrukcji i przyjmujemy, że jest ona nieruchoma – czyli pozbawiona stopni swobody.

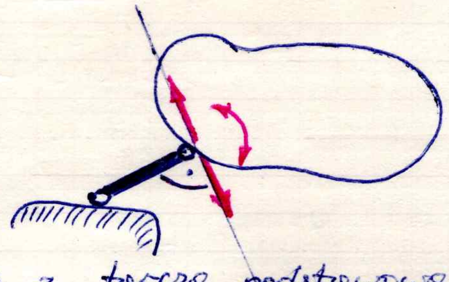
s = 0

Tarcze mogą być między sobą połączone. Najprostszym ideowym modelem łącznika jest więź elementarna, czyli pręt nieodkształcalny prosty zakończony przegubami. Więź elementarna połączona z tarczą ma z nią jeden punkt wspólny.

2 tarcze połączone za pomocą 3 niezbieżnych i nierównoległych więzi elementarnych stanowią jedną tarczę.
Jeżeli jedna z tych tarcz jest tarczą podstawową, to układ jest GN.

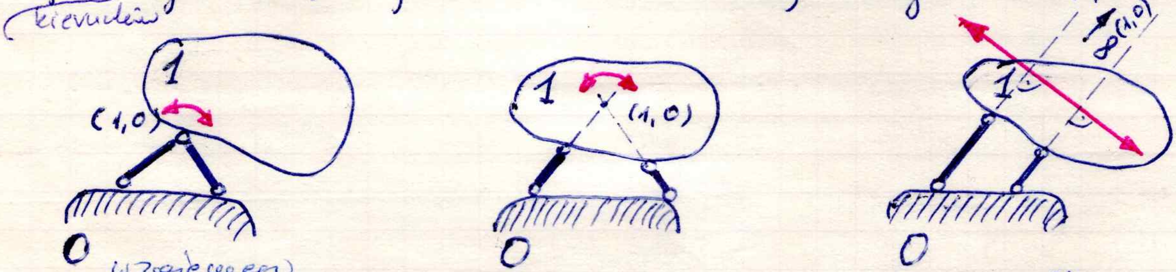
3 tarcze, których środki wzajemnego obrotu nie leżą na jednej prostej, stanowią 1 tarczę.
Jeżeli jedna z tarcz jest tarczą podstawową, to mówimy, że układ jest GEOMETRYCZNIE NIEZMIENNY.

Tarcza swobodna połączona z tarczą podstawową za pomocą jednej więzi elementarnej zostaje pozbawiona jednego stopnia swobody.



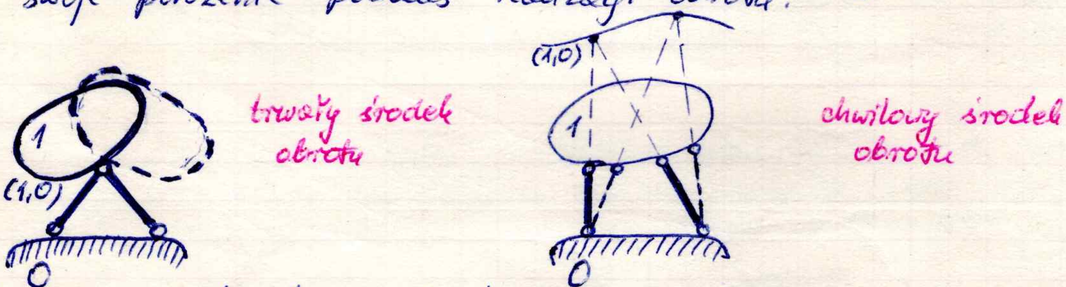
s = 2

Tarcza swobodna połączona z tarczą podstawową za pomocą dwóch więzi elementarnych zostaje pozbawiona dwóch stopni swobody, a punkt przecięcia (kierunków) tych więzi jest środkiem wzajemnego obrotu tarcz.



S = 1

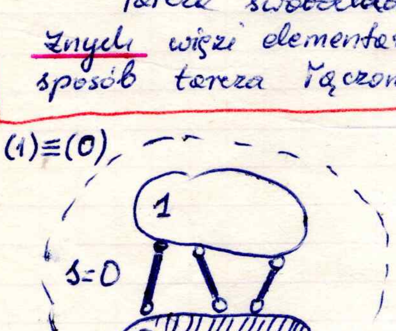
Środek wzajemnego ~~chwilowego~~ obrotu może być trwały lub chwilowy. Chwilowy środek obrotu zmienia swoje położenie podczas realizacji obrotu.



Zakładamy, że ruchy tarcz od położenia początkowego są bardzo małe, a więc środek chwilowego obrotu nie zmienia swego położenia. Przy takim założeniu trwałe i chwilowe środki obrotu mogą być utożsamione.

Tw. o 2 tarczach

Tarcza swobodna połączona z tarczą podstawową za pomocą trzech niezbieżnych więzi elementarnych zostaje pozbawiona wszystkich stopni swobody. W ten sposób tarcza łączona, wraz z tarczą podstawową tworzą jedną wspólną tarczę.

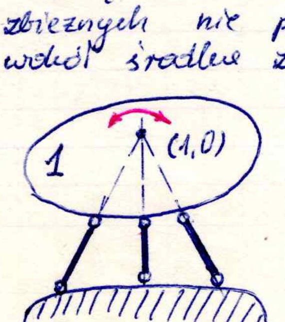


Układ pozbawiony stopni swobody względem tarczy podstawowej, a więc tworzący z tarczą podstawową jedną tarczę, nazywamy układem geometrycznie niezmiennym.

$s = e - 3t = 0 \Rightarrow e = 3t$

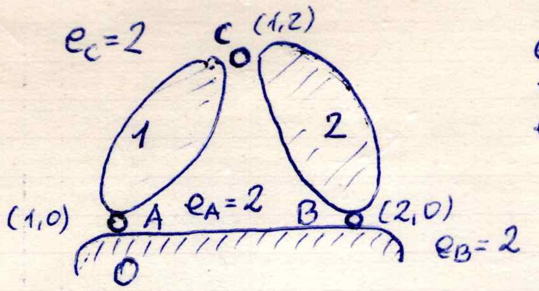
Ustrój budowlany (konstrukcja budowlana, budowla) musi się charakteryzować stabilnością strukturalną (struktury), musi więc być układem geometrycznie niezmiennym.

Połączenie tarczy swobodnej z tarczą podstawową za pomocą trzech więzi zbieżnych nie pozbawia jej trzech stopni swobody, możliwy jest bowiem obrót wokół środka zbieżności więzi – układ taki pozostaje geometrycznie zmienny.



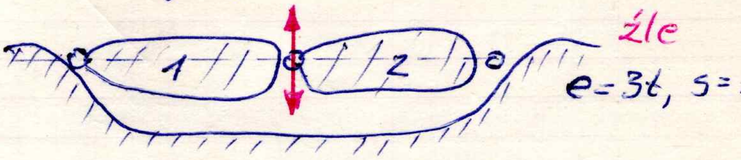
s = 1

Stąd wniosek, że problem geometrycznej niezmienności nie może być rozpatrywany tylko w zakresie ilościowego doboru więzi elementarnych do łączenia tarcz, ale także w aspekcie jakościowym, t.j. właściwego ich wykorzystania.

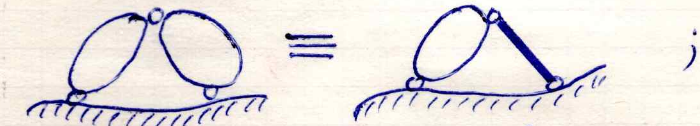


$e=2+2+2=6$
$t=2$
$e=3t$

Układ jest geometrycznie niezmienny jeżeli trzy przeguby rzeczywiście tworzą trójkąt (nie leżą na jednej prostej).



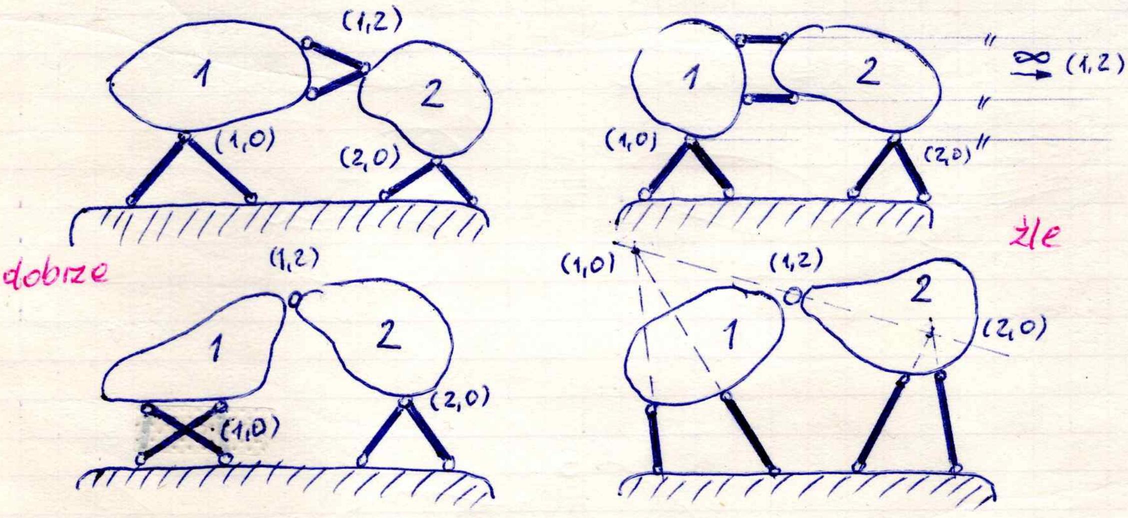
Z definicji więzi elementarnej wynika, że jedna tarcza może być połączona np. z tarczą podstawową przegubem i więzią elementarną tworząc układ geometrycznie niezmienny, pod warunkiem, że kierunek więzi nie przechodzi przez przegub.
Z powyższego wynika, że w analizie kinematycznej, więź elementarna może być zastąpiona przez tarczę; odwrotnie zaś operacja ta nie zawsze jest dopuszczalna.
Dla rachunku więzi np.



$t=2, e=6, e=3t$ $\quad$ $t=1, e=3$ $\quad e=3t$;

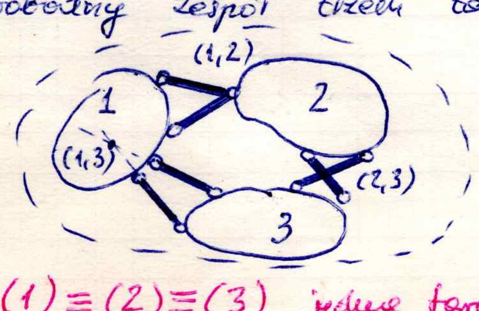
Twierdzenie Aronholdta (o trzech tarczach)

Układ złożony z trzech tarcz (w tym jedna podstawowa), w którym każda para połączona jest za pomocą dwóch więzi elementarnych, jest geometrycznie niezmienny, jeśli środki wzajemnego obrotu tych tarcz nie leżą na jednej prostej. Twierdzenie to pozwala badać jakościowo geometryczną niezmienność niektórych układów, nie podlegających poprzednio omówionym kryteriom.

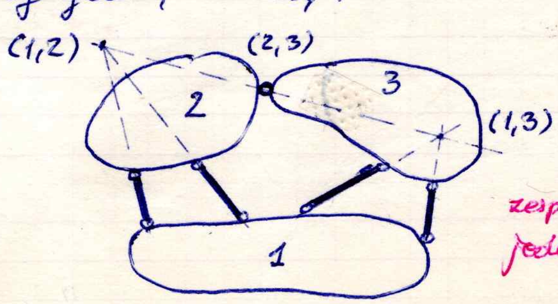


W układach tych spełnione jest
$t=2$, $e=6$
$e=3t$

Na podstawie twierdzenia o trzech tarczach można również zbadać, czy swobodny zespół trzech tarcz tworzy jedną tarczę.

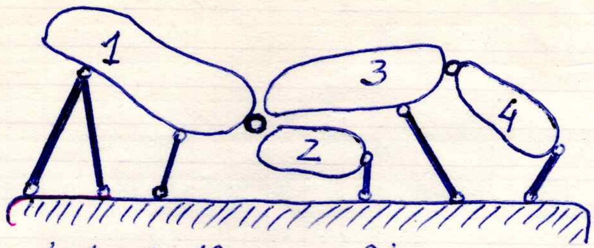


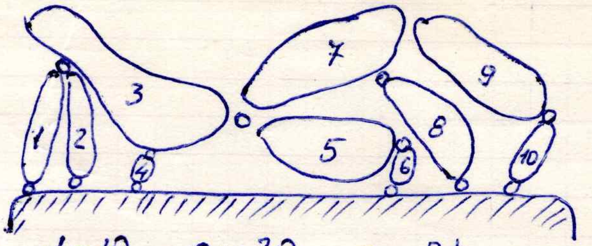
$(1)\equiv(2)\equiv(3)$ jedna tarcza



zespół nie tworzy jednej tarczy

Przykład rachunku więzi:



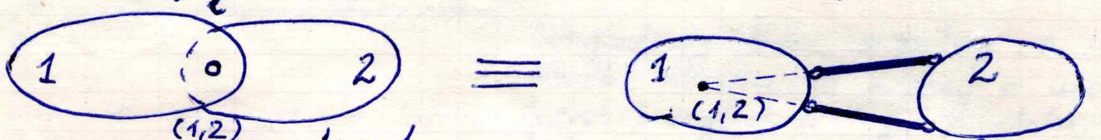


$t=4$, $e=12$, $e=3t$ $t=10$, $e=30$, $e=3t$

W powyższym przykładzie nie wszystkie więzi elementarne można zastąpić tarczami, można rozważać dowolną kombinację pozwalającą w wygodny sposób określić geometryczną niezmienność konstrukcji.

Czasami w praktyce poznane do tej pory twierdzenia wykorzystuje się inaczej. W przypadku spełnienia warunku ilościowego geometrycznej niezmienności, analizowany ustrój może być „dobry" lub „zły". Nieprawidłowe wykorzystanie więzi powoduje geometryczną zmienność i ustrój staje się co najmniej mechanizmem, czyli istnieje jednoznaczne położenie

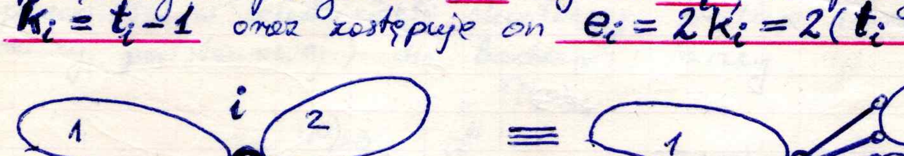
Tarcze można ze sobą łączyć w sposób bezpośredni (bez użycia więzi elementarnych). Jeżeli dwie tarcze są połączone w taki sposób, że mają jeden punkt wspólny, to punkt ten nazywamy przegubem. Jest on równocześnie środkiem wzajemnego obrotu tarcz i zastępuje dwie więzi elementarne, odbierając tym samym dwa stopnie swobody.



$k_i = 1$ $e_i = 2$

Przegub łączący dwie tarcze nazywamy przegubem jednokrotnym.

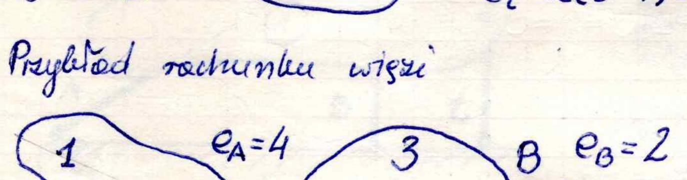
Jednym przegubem można połączyć kilka tarcz. Jeżeli liczba tarcz połączonych przegubem i wynosi t_i, to przegub ma krotność $k_i = t_i - 1$ oraz zastępuje on $e_i = 2k_i = 2(t_i - 1)$ więzi elementarnych.



$k_i = 3-1 = 2$ $e_i = 2(3-1) = 4$

t_i	k_i	e_i
2	1	2
3	2	4
4	3	6
5	4	8

Przykład rachunku więzi

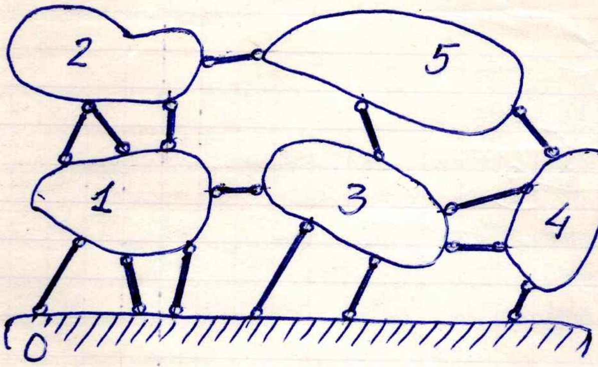


$t=4$, $e=12$, $e=3t$

Układ geometrycznie niezmienny.

Najprostszym przypadkiem bezpośredniego połączenia trzech tarcz w sposób geometrycznie niezmienny jest połączenie w „trójkąt"

Przedstawione zasady łączenia tarcz pozwalają na budowę bardziej złożonych modeli konstrukcji, jak np.

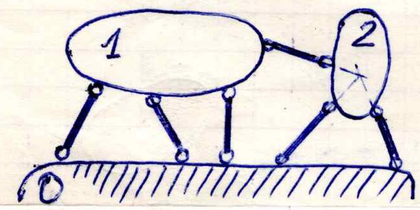


$t = 5$, $e = 15$

$15 = 3 \cdot 5$

Nie jest to jedyna możliwość budowania układów złożonych.

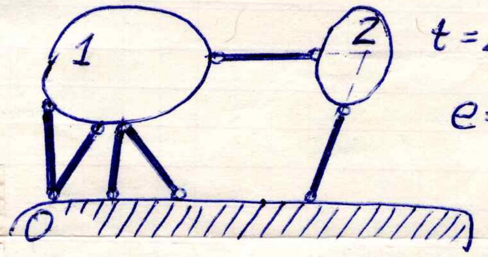
Przyłączenie każdej nowej tarczy wymaga zastosowania nowych trzech więzi elementarnych. Wynika stąd, że jeśli do budowy układu geometrycznie niezmiennego użyliśmy t tarcz (nie licząc tarczy podstawowej), to musieliśmy wykorzystać więzi elementarnych w liczbie $e = 3t$.
Ten warunek ilościowy jest warunkiem koniecznym geometrycznej niezmienności, nie jest jednak warunkiem dostatecznym, można bowiem dysponować prawidłową liczbą elementów i przez wadliwe ich wykorzystanie nie uzyskać geometrycznej niezmienności.



$e = 6$, $t = 2$

$e = 3t$

Źle

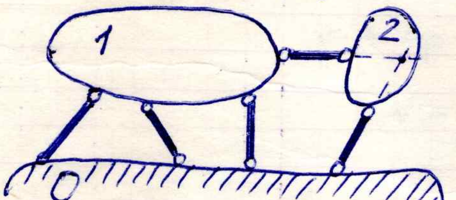


$t = 2$, $e = 6$

$e = 3t$

Źle

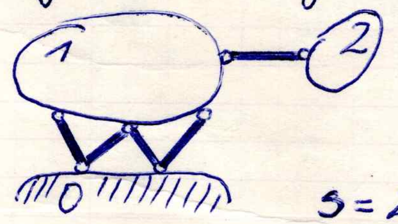
Jeżeli mamy do dyspozycji t tarcz swobodnych oraz e więzi elementarnych, przy czym $e < 3t$, to nie możemy zbudować układu geometrycznie niezmiennego i w najlepszym przypadku otrzymamy układ o liczbie stopni swobody równej $\min s = 3t - e$. Wadliwe użycie więzi może doprowadzić do większej liczby stopni swobody, a więc ogólnie $s \geq 3t - e$.



$e = 5$, $t = 2$

$e < 3t$

$s = 1 = 3 \cdot 2 - 5$



$e = 5$, $t = 2$

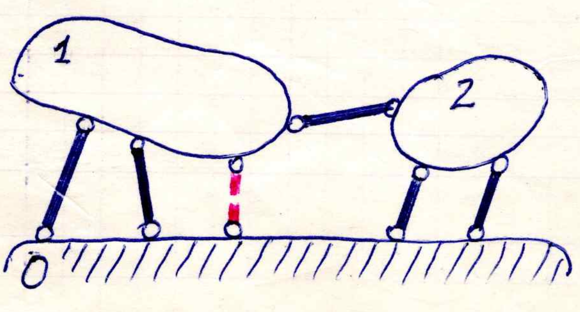
$e < 3t$

$s = 2 > 3 \cdot 2 - 5$

Szczególnym przypadkiem układu geometrycznie zmiennego jest układ o jednym stopniu swobody, zwany mechanizmem, dla którego spełniona jest równość $s = 3t - e = 1$.

Aby uniknąć wadliwego wykorzystania więzi - mechanizm należy budować wychodząc z układu geometrycznie niezmiennego i usuwając z niego jedną więź elementarną.

mechanizm



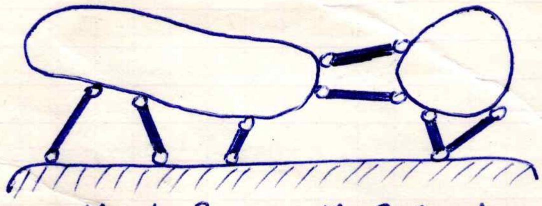
$t = 2$, $e = 5$

$s = 2 \cdot 3 - 5 = 1$

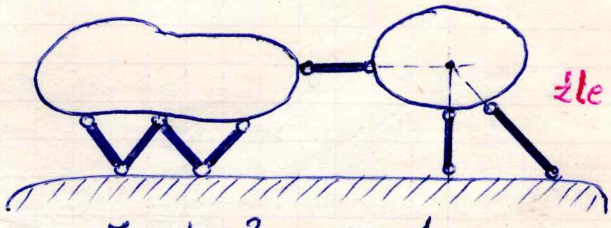
Elementy mechanizmu mogą wykonywać ruchy, przy czym ruchy te nie są niezależne, stosownie bowiem do liczby stopni swobody ($s=1$) jedna informacja geometryczna determinuje jednoznacznie położenie wszystkich tarcz.

Jeżeli mamy do dyspozycji t tarcz swobodnych oraz e więzi elementarnych, przy czym $e > 3t$ i zbudujemy układ geometrycznie niezmienny, to układ ten nazywamy układem przesztywnionym o stopniu przesztywnienia $n = e - 3t > 0$.

Ten warunek ilościowy jest warunkiem koniecznym przesztywnienia nie jest jednak warunkiem dostatecznym, wadliwe bowiem zastosowanie więzi może doprowadzić do geometrycznej zmienności układu.

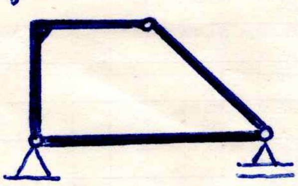


$e=7,\ t=2,\ n=7-3\cdot 2=1$



$e=7,\ t=2,\ s=1$

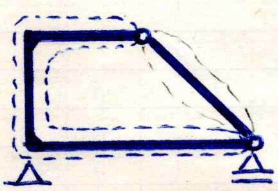
Przykład:



$t=3,\ e_w=6,\ e_z=3$

$n=e-3t=0!$

układ statycznie wyznaczalny

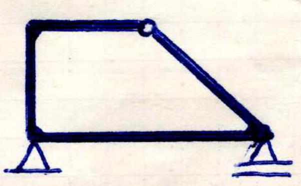


$t=2,\ e_w=4,\ e_z=3$

lub $t=1,\ e_w=1,\ e_z=3$

$n=1$

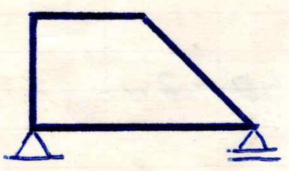
układ przeszt.



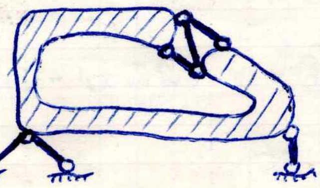
$t=1,\ e_w=2,\ e_z=3$

$n=5-3=2$

układ przesztywniony



≡



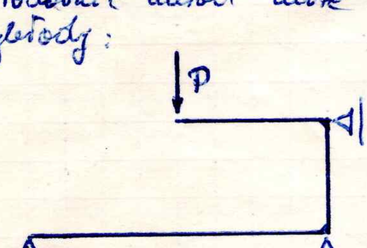
$t=1,\ e_w=3,\ e_z=3$

$n=3!$

Korona zamknięta dostarcza więzi w tym przypadku 3 niewiadomych; tarcza modelująca układ prętowy musi mieć swój początek i koniec.

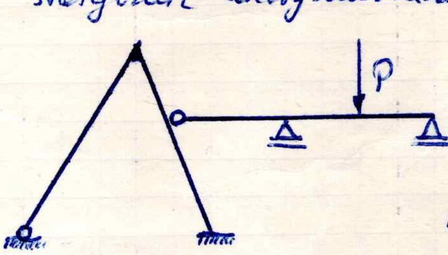
Podobnie układ może być zewnętrznie statycznie niewyznaczalny. ~~wtedy~~

Przykłady:



$t=1,\ e_z=4$

$n=4-3=1$



$t=2,\ e_z=7$

$e_w=2$

$n=2+7-3\cdot 2=3$

Na ogół jednak w statyce nie ma potrzeby wprowadzania pojęcia zewnętrznej statycznej niewyznaczalności. Problem ten ponownie będzie rozważany w analizie konstrukcji statycznie niewyznaczalnych.

W praktyce nie ma konieczności pamiętania wzorów określających stopień przesztywnienia, gdyż w przypadku układu statycznie niewyznaczalnego należy odrzucić tyle więzi wewnętrznych i zewnętrznych by otrzymać układ statycznie wyznaczalny i geometrycznie niezmienny. Ilość odrzucanych więzi jest równa stopniowi przesztywnienia układu.