

## Wykład nr 5

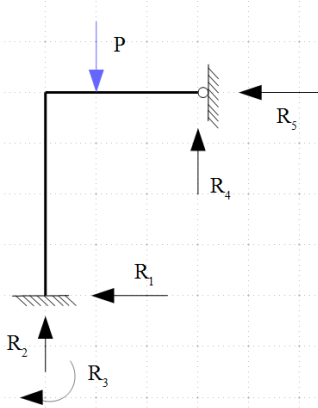
### ROZWIĄZYWANIE PŁASKICH UKŁADÓW PRĘTOWYCH STATYCZNIE NIEWYZNACZALNYCH METODĄ SIŁ

#### Definicje:

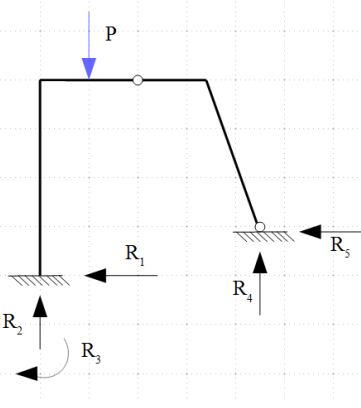
##### 1. Ustroje statycznie niewyznaczalne (hiperstatyczne)

Ustroje statycznie niewyznaczalne to takie ustroje geometrycznie niezmiennie, których nie można rozwiązać (sporządzić wykresy sił przekrojowych) korzystając jedynie z warunków równowagi sił (jak to miało miejsce w układach statycznie wyznaczalnych). Ustroje tego typu mają więcej więzi niż więzi zapewniających ustrojowi geometryczną niezmiennosc.

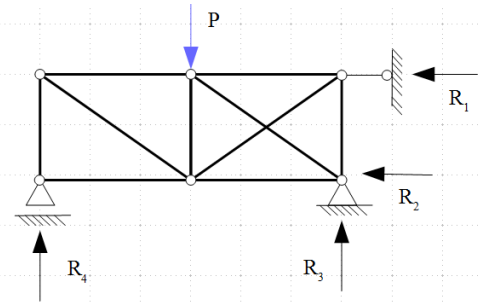
Przykłady układów statycznie niewyznaczalnych SN:



5 niewiadomych  
3 równania równowagi



5 niewiadomych  
4 równania równowagi  
(3 równania równowagi globalnej, 1  
równanie warunku konstrukcyjnego)



$w=6, r=4, p=10$   
 $w$ -węzły,  $r$ -reakcje,  $p$ -pręty  
 $p+r=14$  - niewiadomych  
 $2w=12$  - równań równowagi

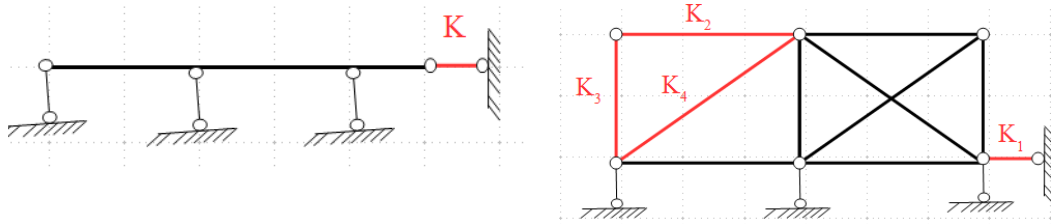
Podstawowe cechy układów statycznie niewyznaczalnych

- Wartości sił przekrojowych w układach statycznie niewyznaczalnych zależą od sztywności elementów (charakterystyk materiałowych i geometrycznych przekrojów) z jakich składa się układ, w przeciwieństwie do układów statycznie wyznaczalnych.
- W ustrojach statycznie niewyznaczalnych mogą powstać siły wewnętrzne (stany samorównoważone) bez udziału obciążeń czynnych. Czynniki wywołujące siły wewnętrzne mogą być tzw. czynniki niemechaniczne: wpływy temperatury, osiadanie podpór, błędy montażu.
- W ustrojach statycznie niewyznaczalnych rozwiązań statycznie dopuszczalnych może być nieskończenie wiele.

##### 2. Więzi konieczne i warunkowe

Więzią konieczną nazywa się więź, której przecięcie powoduje przekształcenie ustroju w mechanizm w ustrój geometrycznie zmienny GZ. Układy statycznie wyznaczalne SW mają jedynie więzi konieczne. Reakcje w więziach koniecznych wyznacza się z warunków równowagi sił.

Więź warunkowa nazywa się więź, której przecięcie nie powoduje utraty geometrycznej niezmienności GN układu. Reakcje w więziach warunkowych wyznacza się z dodatkowych równań (nie z równań równowagi sił), które wynikają z przyjętej metody analizy konstrukcji.



**K** – więź konieczna (bez każdej z zaznaczonych więzi K układ miałby swobodę ruchu, byłby GZ)

### 3. Stopień statycznej niewyznaczalności ( $n_h$ )

- Stopień statycznej niewyznaczalności jest równy liczbie dodatkowych równań, które wraz z liczbą równań równowagi sił umożliwiają wyznaczenie wszystkich niewiadomych wielkości statycznych (reakcji i sił przekrojowych) w układzie statycznie niewyznaczalnym SN i geometrycznie niezmiennym GN.
- Stopień statycznej niewyznaczalności jest równy liczbie więzi warunkowych, które należałoby przeciąć aby ustrój statycznie niewyznaczalny SN przekształcić w ustrój statycznie wyznaczalny SW.

Wzory określające  $n_h$ :

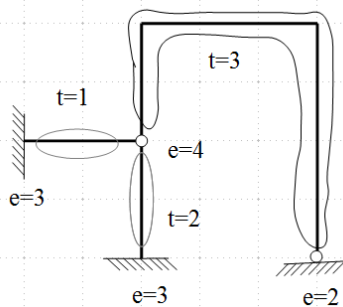
$$n_h = e - 3t$$

$e$ -liczba więzi elementarnych,  
 $t$ -liczba tarcz tworzących kontur otwarty

$$n_h = p + r - 2w$$

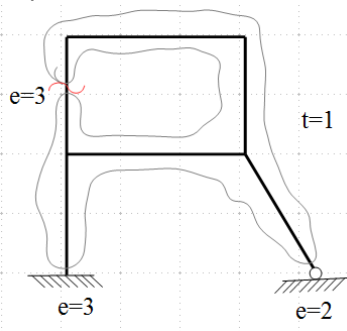
$2w$ -liczba możliwych równań równowagi wynikająca z faktu, że w każdym węźle jest zbieżny układ sił (równanie zerowania momentów jest spełnione tożsamościowo).  
 $p + r$  –liczba niewiadomych wielkości statycznych sił osiowych w prętach ( $p$ ) i reakcji ( $r$ ).

Przykład 1.



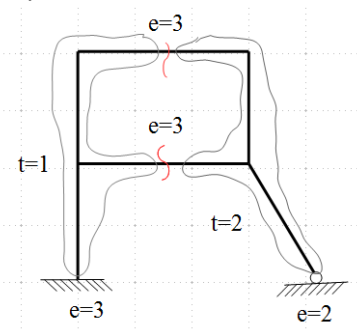
$$n_h = e - 3t = 12 - 3 * 3 = 3$$

Przykład 2.a



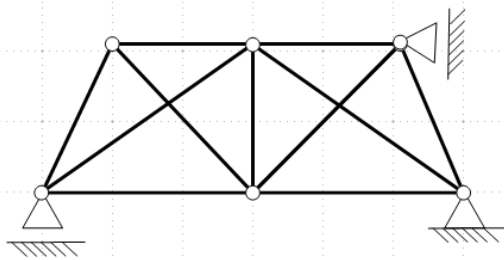
$$n_h = e - 3t = 8 - 3 * 1 = 5$$

Przykład 2.b



$$n_h = e - 3t = 11 - 3 * 2 = 5$$

Przykład 3.



Układ 3 krotnie SN, 2 krotnie wewnętrznie SN i 1 krotnie zewnętrznie SN

$$p=11, w=6, r=4$$

$$n_h = p + r - 2w = 11 + 4 - 2 * 6 = 3$$

lub

$$e_{zewnetrzne} = 4, e_{wewnetrzne} = 2$$

$$e = e_{zewnetrzne} + e_{wewnetrzne} = 6, t = 1$$

$$n_h = e - 3t = 6 - 3 * 1 = 3$$

### UWAGI:

Aby móc rozwiązać w zakresie sił wewnętrznych układ SN i GN należy wyznaczyć dodatkowych  $n_h$  równań, które wraz z równaniami równowagi sił pozwolą wyznaczyć wszystkie niewiadome siły statyczne.

Sposób definiowania tych dodatkowych  $n_h$  równań uzależniony jest od wyboru metody analizy układu statycznie niewyznaczalnego.

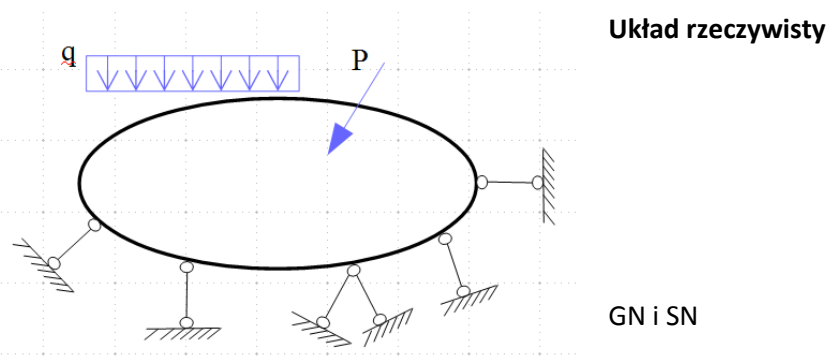
W metodzie sił sposób definiowania dodatkowych  $n_h$  równań będzie miał charakter kinematyczny (geometryczny).

## Metoda sił – idea metody

**Metoda sił** – służy do bezpośredniego wyznaczania sił w nadliczbowych więziach warunkowych konstrukcji.

Umożliwia otrzymanie wykresów sił przekrojowych w układach statycznie niewyznaczalnych.

Chcąc rozwiązać układ statycznie niewyznaczalny (wyznaczyć wykresy M, T, N) dla układu przedstawionego na Rys. 1 należy:



Rys. 1

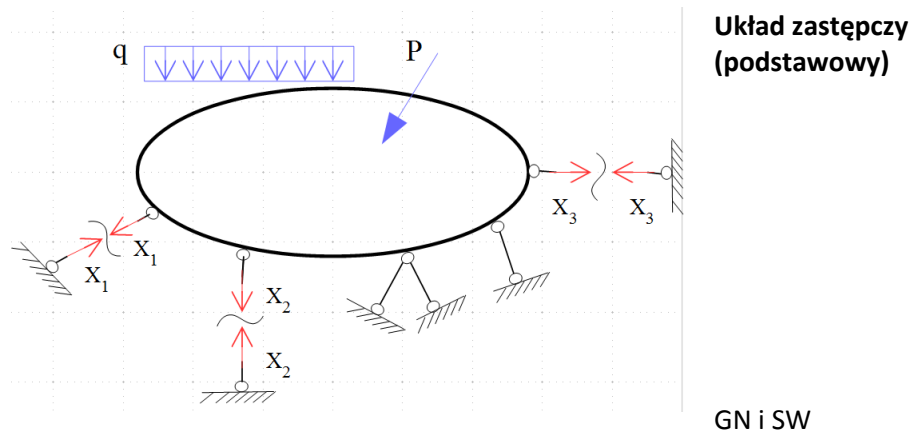
1. Określić stopień statycznej niewyznaczalności  $n_h$  (określić liczbę nadliczbowych więzi warunkowych). Dzięki czemu wiemy ile sił należy wyznaczać korzystając z dodatkowych równań poza równaniami równowagi sił.

$$n_h = e - 3t = 6 - 3 * 1 = 3$$

(\* w tym przypadku dowolne 3 więzi, które są niezbędne są konieczne, a pozostałe są warunkowe)

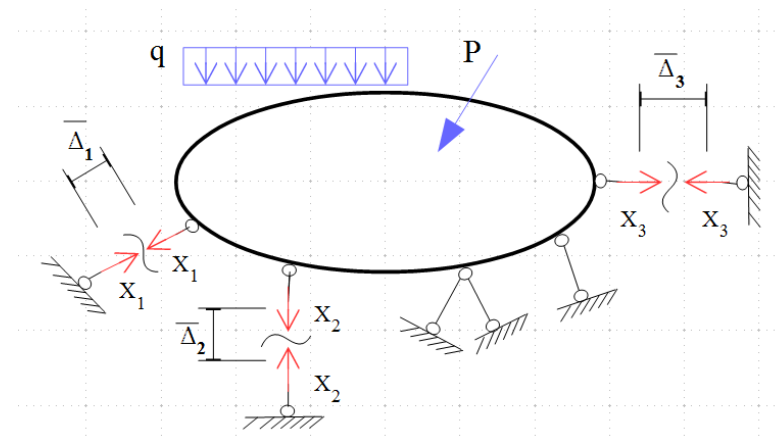
## 2. Utworzyć układ zastępczy (tzw. układ podstawowy metody sił)

- Pozbawia się układ rzeczywisty wszystkich nadliczbowych  $n_h$  więzi, tak by po przecięciu tych więzi układ pozostał geometrycznie niezmienny GN. Jeżeli przetniemy dokładnie  $n_h$  więzi to układ zastępczy będzie także statycznie wyznaczalny SW.  
(\* Nie jest wymogiem, że układ podstawowy metody sił musi być SW, ale innego nie potrafimy rozwiązać stąd tworzy się układ SW.)  
(\* Można przecinać nie tylko więzi zewnętrzne ale również i wewnętrzne.)
- W miejsce przeciętych więzi wprowadza się niewiadome siły uogólnione tzw. siły hiperstatyczne, oznaczone jako  $X_i$ ,  $i = \{1, \dots, n_h\}$ , które zastępują oddziaływanie przeciętej więzi na obydwie części łączonych przez więź elementów konstrukcji. Po dwie równoważące siły w celu zapewnienia stanu równowagi każdego przeciętego elementu.  
(\*W miejsce każdej więzi uniemożliwiającej przesuw wprowadzamy siłę skupioną, a w miejsce każdej więzi uniemożliwiającej obrót wprowadzamy moment.)  
Celem metody sił jest wyznaczenie wartości tych niewiadomych sił hiperstatycznych  $X_i$ .  
Siły hiperstatyczne traktowane są jako dodatkowe obciążenie zewnętrzne.



- W miejscu  $i$  na kierunku przeciętej więzi pojawiają się możliwe przemieszczenia  $\bar{\Delta}_i$ ,  $i = \{1, \dots, n_h\}$ , które wywołane są tymi nadliczbowymi siłami hiperstatycznymi  $X_i$  traktowanymi jako obciążenie oraz wywołane są zadaniem obciążeniem czynnym jakiego występują w układzie rzeczywistym.

$$\bar{\Delta}_i = \sum_{j=1}^{n_h} \bar{\Delta}_{i x_j} + \bar{\Delta}_{i F}$$



$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_1 &= \bar{\Delta}_1 x_1 + \bar{\Delta}_1 x_2 + \bar{\Delta}_1 x_3 + \bar{\Delta}_1 F \\ \bar{\Delta}_2 &= \bar{\Delta}_2 x_1 + \bar{\Delta}_2 x_2 + \bar{\Delta}_2 x_3 + \bar{\Delta}_2 F \\ \bar{\Delta}_3 &= \bar{\Delta}_3 x_1 + \bar{\Delta}_3 x_2 + \bar{\Delta}_3 x_3 + \bar{\Delta}_3 F\end{aligned}$$

gdzie:

$\bar{\Delta}_{i x_j}$  –przemieszczenie w układzie zastępczym w miejscu i na kierunku i-tej siły hiperstatycznej wywołane działaniem j-tej siły hiperstatycznej  $X_j$ .

$\bar{\Delta}_{i F}$  –przemieszczenie w układzie zastępczym w miejscu i na kierunku i-tej siły hiperstatycznej wywołane działaniem obciążenia czynnego F.

- Jeżeli potraktuje się, że wartość siły są jednostkowe  $X_j = 1\text{ kN}$  to przemieszczenie ( $\bar{\Delta}_{i x_j}$ ) w miejscu i na kierunku i-tej siły hiperstatycznej wywołane nieznaną siłą  $X_j$  można zapisać jako

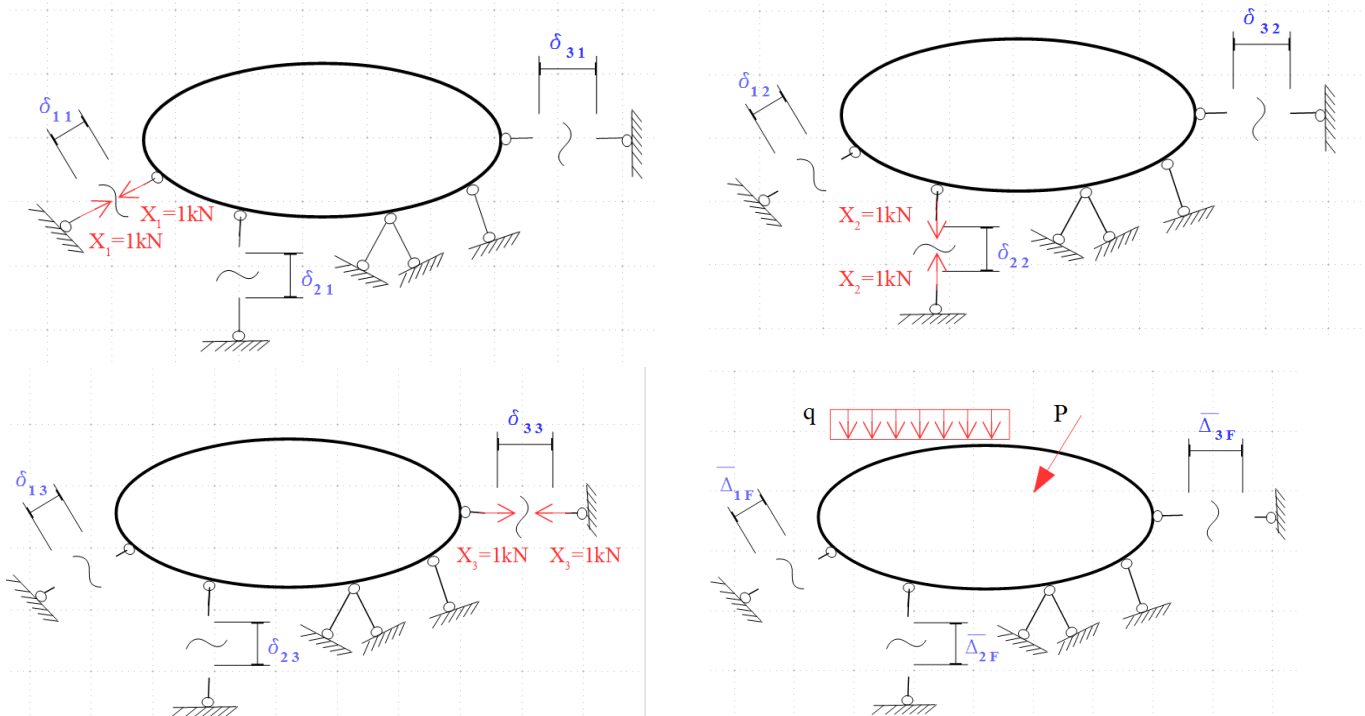
$$\bar{\Delta}_{i x_j} = \delta_{ij} X_j$$

$\delta_{ij}$ -jest to przemieszczenie w układzie zastępczym (podstawowym) w miejscu i na kierunku i-tej siły hiperstatycznej wywołane jednostkową wartością j-tej siły hiperstatycznej.

Stąd przemieszczenia  $\bar{\Delta}_i$  można zapisać :

$$\bar{\Delta}_i = \sum_{j=1}^{n_h} \delta_{ij} X_j + \bar{\Delta}_{i F}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Delta}_1 &= \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \delta_{13} X_3 + \bar{\Delta}_1 F \\ \bar{\Delta}_2 &= \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \delta_{23} X_3 + \bar{\Delta}_2 F \\ \bar{\Delta}_3 &= \delta_{31} X_1 + \delta_{32} X_2 + \delta_{33} X_3 + \bar{\Delta}_3 F\end{aligned}$$



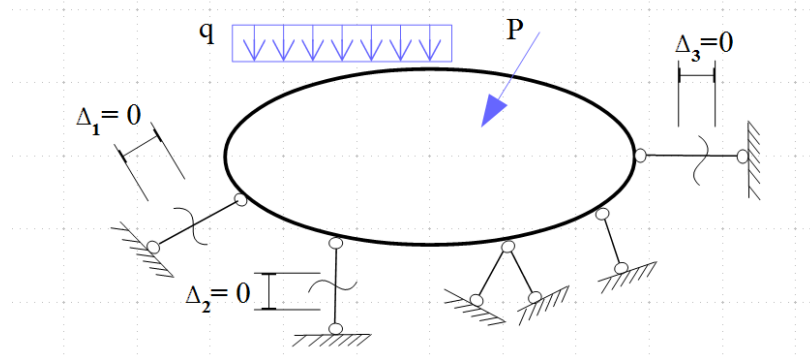
3. Zbudować układ równań metody sił, z którego wylicza się wartości nadliczbowych sił hiperstatycznych  $X_i$ .

- Aby wyznaczyć wartości sił hiperstatycznych  $X_i$  należy zastosować warunek zgodności przemieszczeń i odkształceń między układem rzeczywistym, a układem zastępczym (podstawowym), czyli należy postulować, by przemieszczenia w układzie zastępczym w miejscu  $i$  na kierunku przeciętych więzi  $\bar{\Delta}_i, i = \{1, \dots, n_h\}$ , były takie same jak w układzie rzeczywistym  $\Delta_i, i = \{1, \dots, n_h\}$ .

$$\bar{\Delta}_i = \Delta_i$$

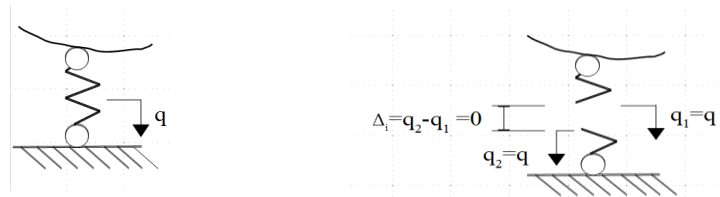
Zapewnia się w ten sposób identyczność przemieszczeń wszystkich punktów między układem podstawowym i rzeczywistym.

- Przemieszczenia w układzie rzeczywistym  $\Delta_i$  są przemieszczeniami w miejscu  $i$  na kierunku istniejących więzi, stąd każde z tych przemieszczeń musi równać się zero  $\Delta_i = 0, i = \{1, \dots, n_h\}$ .



\*uwaga

Więzi sprężyste mają możliwość przemieszczenia, jednak  $\Delta_i$  interpretuje się jako przemieszczenie względne między przemieszczeniem jednego końca przeciętej więzi a przemieszczeniem drugiego końca przeciętej więzi, dlatego też przy podporach sprężystych także te rzeczywiste przemieszczenia są równe zero  $\Delta_i = 0$ .



- Ogólna postać liniowego układu równań metody sił (warunkowy układ równań metody sił, gdyż równania wynikają z warunku ciągłości konstrukcji, czyli ograniczeń jakie nakłada się na przemieszczenia konstrukcji w miejscu  $i$  na kierunku przeciętych więzi warunkowych  $\bar{\Delta}_i = \Delta_i$ ) ma postać:

$$\bar{\Delta}_i = \sum_{j=1}^{n_h} \delta_{ij} X_j + \bar{\Delta}_{iF} = 0$$

Należy wyznaczyć takie wartości sił nadliczbowych  $X_j$  aby odkształcenia i przemieszczenia w układzie podstawowym w miejscu  $i$  na kierunku przeciętych więzi były takie jak w układzie rzeczywistym.

- W ten sposób uzyskuje się  $n_h$  dodatkowych równań o charakterze przemieszczeniowym (kinematycznym), które wraz z równaniami równowagi umożliwią wyznaczenie wszystkich niewiadomych reakcji w układzie statycznie niewyznaczalnym SN.

$$\begin{aligned}\delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{13}X_3 + \bar{\Delta}_{1F} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{23}X_3 + \bar{\Delta}_{2F} &= 0 \\ \delta_{31}X_1 + \delta_{32}X_2 + \delta_{33}X_3 + \bar{\Delta}_{3F} &= 0\end{aligned}$$

(\*Zapis macierzowy

$$\begin{bmatrix} \delta_{11} & \cdots & \delta_{13} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{31} & \cdots & \delta_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{\Delta}_{1F} \\ \bar{\Delta}_{2F} \\ \bar{\Delta}_{3F} \end{bmatrix} = 0$$

Macierze współczynników  $\delta_{ij}$  jest macierzą podatności „D” czyli macierzą, która transformuje zbiór przemieszczeń w zbiór sił. Jest symetryczna względem głównej przekątnej (wynika to z twierdzenie o wzajemności przemieszczeń  $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ )

- Wyliczyć współczynniki układu równań metody sił  $\delta_{ij}$  czyli wyliczyć wartości przemieszczeń w układzie zastępczym (podstawowym) statycznie wyznaczalnym SW w miejscu i na kierunku i-tej siły hiperstatycznej wywołane jednostkową wartością j-tej siły hiperstatycznej oraz wyliczyć wyrazy wolne układu równań metody sił  $\bar{\Delta}_{iF}$  w oby przypadkach korzystając z II sformułowania ZPP:

$$\begin{aligned}\bar{1}_i \delta_{ij} &= \sum_p \int \bar{M}^i \frac{\bar{M}^j}{EI} dx + \sum_p \int \bar{T}^i \frac{\kappa \bar{T}^j}{GA} dx + \sum_p \int \bar{N}^i \frac{\bar{N}^j}{EA} dx + \sum_m \bar{S}_m^i \frac{\bar{S}_m^j}{k_m} \\ \bar{1}_i \bar{\Delta}_{iF} &= \sum_p \int \bar{M}^i \frac{\bar{M}^F}{EI} dx + \sum_p \int \bar{T}^i \frac{\kappa \bar{T}^F}{GA} dx + \sum_p \int \bar{N}^i \frac{\bar{N}^F}{EA} dx + \sum_m \bar{S}_m^i \frac{\bar{S}_m^F}{k_m}\end{aligned}$$

(\* nadkreślenie oznacza, że odpowiednie wartości wyliczane są w układzie podstawowym SW)

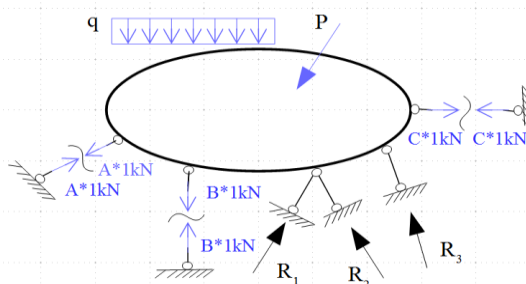
(\*Aby móc wyznaczyć szczegółową postać układu równań metody sił, czyli wyliczyć odpowiednie przemieszczenia należy sporządzić dla układu podstawowego wykresy sił przekrojowych od obciążeń jednostkowych  $X_i = \bar{1}_i$  oraz od obciążenia zadanego.

- Rozwiązać układ równań metody sił, czyli wyliczyć wartości niewiadomych sił hiperstatycznych  $X_i$ .

$$X_1 = A, \quad X_2 = B, \quad X_3 = C$$

- Sporządzić wykresy sił przekrojowych w układzie rzeczywistym SN.

- Po wyznaczeniu niewiadomych wartości  $X_i$  pozostałe reakcje wylicza się jedynie za pomocą równań równowagi sił, czyli rzeczywista konstrukcja na tym etapie jest SW.



Reakcje:

$$\sum M_G = 0, \quad \sum X = 0, \quad \sum Z = 0$$

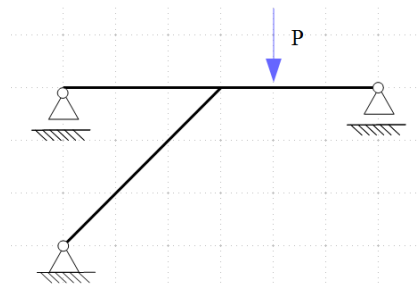
$$\Rightarrow R_1, R_2, R_3$$

Siły przekrojowe

$$\Rightarrow M, \quad T, \quad N$$

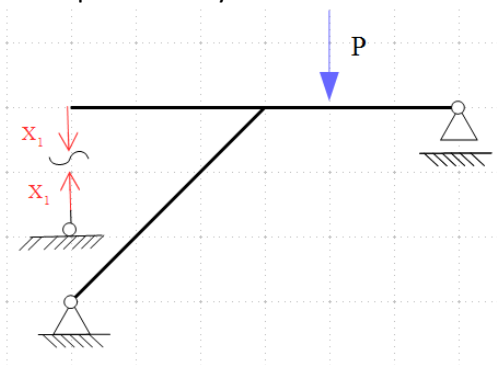
Przykłady dobru układu podstawowego metody sił:

Przykład 1



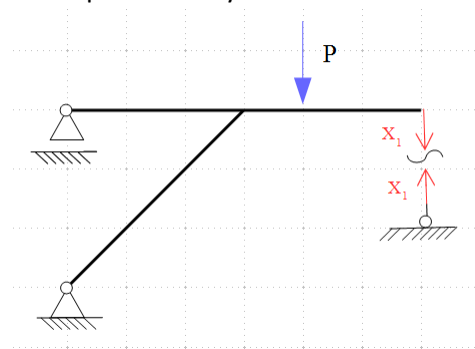
$$n_h = e - 3t = 1$$

Układ podstawowy 1



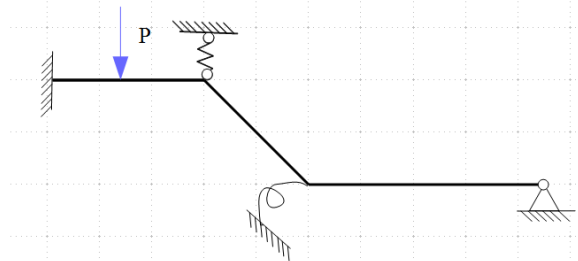
GN i SW

Układ podstawowy 2 **ŹLE !!!**



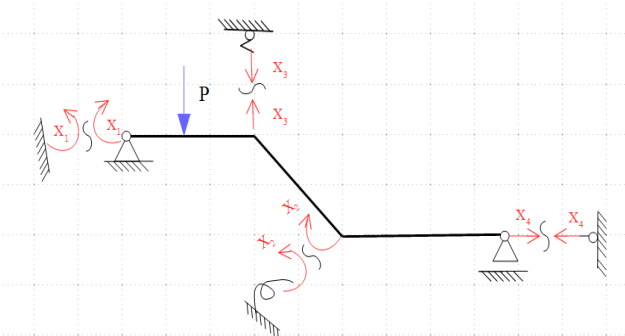
GEOMETRYCZNIE ZMIENN GZ -ŹLE

Przykład 2



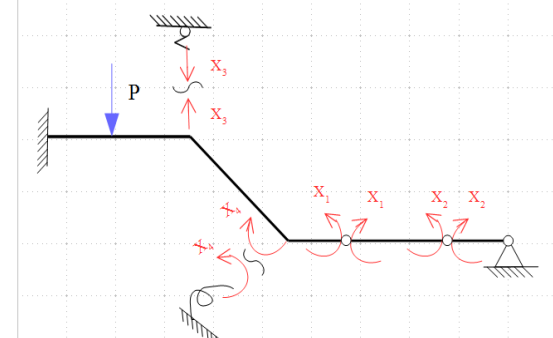
$$n_h = e - 3t = 4$$

Układ podstawowy 1



GN i SW

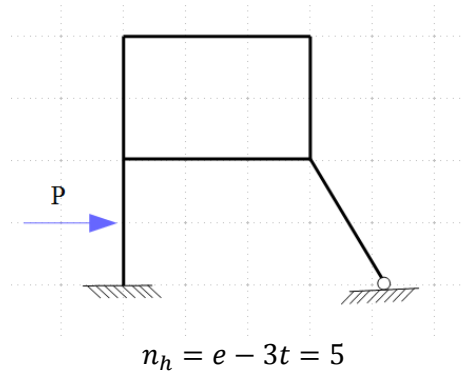
Układ podstawowy 2 **ŹLE !!!**



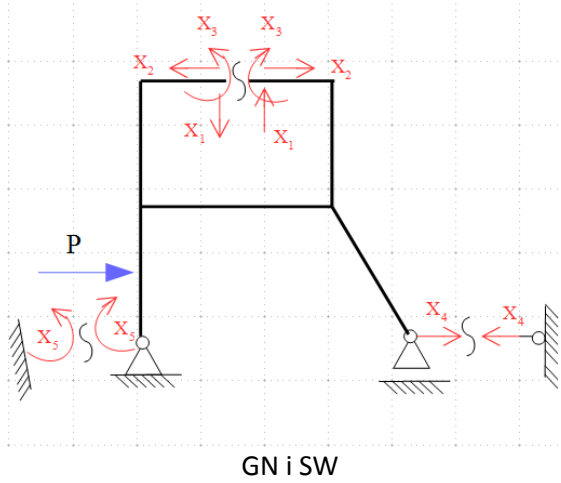
GEOMETRYCZNIE ZMIENN GZ -ŹLE



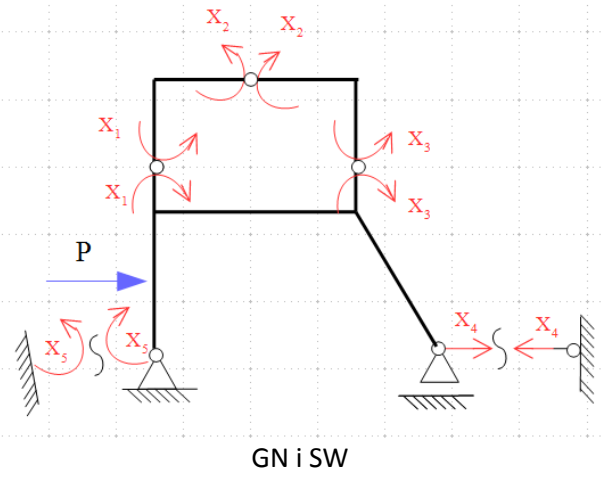
Przykład 3



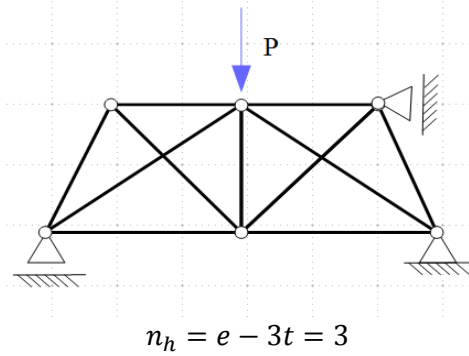
Układ podstawowy 1.



Układ podstawowy 2.



Przykład 4



Układ podstawowy

